# SEMESTRE 2022.2

## Prova – Primeiro Estagio – Sexta-Feira:

1) Para inteiros positivos x e y, prove que $x < y$ se, e somente se $x^2 < y^2$

2) Para uma recorrência definida como:

$T(1) = 2$

$T(n) = 2 * T(n-1)$

i) Encontre a formula fechada dessa recorrência

ii) Prove essa formula fechada.

3) Usando o TCR, determine a solução para:

$x \equiv 5 \mod 7$

$x \equiv 3 \mod 11$

$x \equiv 4 \mod 13$

4) Usando a propriedade reflexiva da congruência, prove por indução que $a^n \equiv a^n \mod m$.

## Prova – Primeiro Estagio – Terça-Feira:

1) Prove ou refute para n, m e p. Se $n \mid m$ e $m \mid p$ então $n \mid p$

2)Para uma recorrência defina como:

$a\{n\} = a\ n - 1 + 2^n$

$a\{0\} = 1$

i) Desenvolva a fórmula fechada

ii) Mostrar por indução se a fórmula fechada é valida

3) Utilizando o TCR, determine a solução para:

$x \equiv 5 \mod 7$

$x \equiv 9 \mod 11$

$x \equiv 5 \mod 13$

# SEMESTRE 2022.1

## Prova – Primeiro Estagio:

1 – Prove ou refute: Para quaisquer dois números x e y, |xy| = |x||y|.

2 – Determine a fórmula fechada para a seguinte relação de recorrência e prove por indução que ela é valida:

$a_0 = 4$

$a_n = a_{n-1} + 4$, para n > 0

3 – Prove que $1 * 2^1 + 2 * 2^2 + 3 * 2^3 + ... + n * 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

4 – Teorema Chines:

x ≡ 2 mod 5

x ≡ 3 mod 7

x ≡ 10 mod 11

5 – Calcule:

23x ≡ 16 (mod 107)

## Reposição – Primeiro Estagio:

Responda as questões abaixo **explicando detalhadamente** os procedimentos executados para obtenção da solução.

a - b

1) Prove ou refute: Para quaisquer dois números x e y, $|x + y| \le |x| + |y|$

2) Determine a fórmula fechada para a seguinte relação de recorrência e prove por indução que ela é válida

$a_1 = 3$

$a_n = 2 \cdot (a_{n-1}) - 1$, para n > 1

3) Prove que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

4) Carlos cria galinhas em seu quintal. Se ele as agrupa em grupos de 5 sobram 4 galinhas sem grupo. Se ele as agrupa em grupos de 8, sobram 6 galinhas sem grupo. Se ele as divide em grupos de 9, sobram 8 galinhas sem grupo. Qual é a menor quantidade possível de galinhas que Carlos pode possuir?

5) **Sem usar o Teorema Chinês do Resto**, usando as propriedades e teoremas de congruência calcule x tal que:

$$2x \equiv 5 \ (mod\ 7)$$
$$3x \equiv 4 \ (mod\ 8)$$

Obs.: o mesmo x deve satisfazer as duas equações. Não são duas soluções diferentes mas uma única solução.

## Prova – Segundo Estagio:

12) Quais dos seguintes conjuntos formam um grupo com relação à operação indicada?

[redacted]

c) $S = \{x \mid x \in Z, x \text{ é ímpar}\}$; multiplicação

[redacted]

11. Para $a, b \in Z$ defina $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$. Mostre que Z é um anel comutativo com respeito a essas duas operações. Qual é o zero do anel? O anel tem elemento unidade?

7. Seja S = {a, b, c} e seja P(S) o conjunto de todos os subconjuntos de S; denote os elementos de P(S) como: S = {a, b, c}; D = {a, b}; E = {a, c}; F = {b, c}; A = {a}, B = {b}; C = {c}; O = ∅. Defina adição e multiplicação em P(S) por estas regras:

   M + N = (M - N) ∪ (N - M)

   e

   MN = $M \cap N$.

   Escreva as tabelas de adição e multiplicação para P(S).

1. A estrutura algébrica formada pelo conjunto dos números racionais e pelas operações de adição ($\oplus$) e multiplicação ($\odot$) definidas abaixo é um anel?
   $a \oplus b = a.b$ e $a \odot b = a + b$ para todo $a, b \in Q$

## Reposição – Segundo Estagio:

7. Seja S = {a, b, c} e seja P(S) o conjunto de todos os subconjuntos de S; denote os elementos de P(S) como: S = {a, b, c}; D = {a, b}; E = {a, c}; F = {b, c}; A = {a}, B = {b}; C = {c}; O = $\emptyset$. Defina adição e multiplicação em P(S) por estas regras:

   M + N = (M - N) ∪ (N - M)

   e

   MN = $M \cap N$.

   Escreva as tabelas de adição e multiplicação para P(S).

12) Quais dos seguintes conjuntos formam um grupo com relação à operação indicada?
   a) $S = \{x \mid x \in Z, x < 0\}$; adição
   b) $S = \{5x \mid x \in Z\}$; adição
   c) $S = \{x \mid x \in Z, x \text{ é } ímpar\}$; multiplicação
   d) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$; multiplicação
   e) $S = \{1, -1, i, -1\}$; multiplicação

1. Para $a, b \in Z$ defina $a \oplus b = a + b + 1$ e $a \odot b = a + b + ab$. Mostre que Z é um anel comutativo com respeito a essas duas operações. Qual é o zero do anel? O anel tem elemento unidade?

9. Defina uma nova adição $\oplus$ e uma nova multiplicação $\odot$ nos inteiros por:

   $a \oplus b = a + b - 1$
   $a \odot b = a + b - ab$
   Em que as operações do lado direito do sinal de igualdade são adição, subtração e multiplicação usuais. Prove que com as novas operações $\oplus$ e $\odot$ Z é um domínio de integridade.

## Final:

7. Seja S = {a, b, c} e seja P(S) o conjunto de todos os subconjuntos de S; denote os elementos de P(S) como: S = {a, b, c}; D = {a, b}; E = {a, c}; F = {b, c}; A = {a}, B = {b}; C = {c}; O = ∅. Defina adição e multiplicação em P(S) por estas regras:

$$M + N = (M - N) \cup (N - M)$$

e

$$MN = M \cap N.$$

Escreva as tabelas de adição e multiplicação para P(S).

12) Quais dos seguintes conjuntos formam um grupo com relação à operação indicada?

a) S [illegible] adição

b) [illegible]

c) $S = \{x$ [illegible], multi[illegible]ão

d) $S =$ [illegible]plicação

e) $S = \{1, -1, i, -1\}$; multiplicação

4 – Teorema Chines:

$x \equiv 2 \mod 5$

$x \equiv 3 \mod 7$

$x \equiv 10 \mod 11$

5 – Calcule:

$23x \equiv 16 \pmod{107}$