

מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזכים בנקודה נוספת.

שאלה 1: אלגוריתם יעיל-פארטו והוגן לקבוצות

- א. תארו אלגוריתם פשוט למיזוג הצעות תקציב, שהוא גם יעיל-פארטו וגם הוגן לקבוצות.
 * ב. תארו אלגוריתם כנ"ל, שהוא גם רציף (הפלט משתנה באופן רציף כפונקציה של הקלט).

* שאלה 2: אלגוריתם יעיל-פארטו ומגלה-אמת

בהרצאה ראינו קבוצה אחת של פונקציות הצבעות-קבועות. בשאלה זו נראה קבוצה אחרת. נגדיר $n-1$ פונקציות קבועות באופן הבא:

- פונקציה 1 עולה מ-0 ל- C בין זמן 0 לזמן $(n-1)/1$;
 - פונקציה 2 עולה מ-0 ל- C בין זמן $(n-1)/1$ לזמן $(n-1)/2$;
 - ...
 - פונקציה k עולה מ-0 ל- C בין זמן $(n-1)/(k-1)$ לזמן $k/(n-1)$.
 - ...
 - פונקציה $n-1$ עולה מ-0 ל- C בין זמן $(n-1)/(n-2)$ לזמן 1.
- (במילים אחרות: הפונקציות עולות אחת אחרי השנייה: רק כשפונקציה אחת מגיעה ל- C , הפונקציה הבאה מתחילה לעלות מ-0).

נפעיל את אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות אלו.

א. הדגימו את האלגוריתם על הדוגמה מההרצאה, עם 3 אזרחים ו-9 נושאים וההצבעות הבאות:

- אזרח א: 0, 6, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0.
- אזרח ב: 0, 0, 6, 6, 6, 6, 0, 6, 0.
- אזרח ג: 6, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6.

ב. הוכיחו, שהתקציב המוחזר ע"י אלגוריתם זה מקיים בהכרח את אחד מהתנאים הבאים:

- התקציב של כל נושא j הוא בין ההצבעה הקטנה ביותר לנושא j , לבין ההצבעה השניה מלמטה לנושא j . או ---
 - התקציב של כל נושא j הוא בין ההצבעה השניה מלמטה לנושא j , לבין ההצבעה השלישית מלמטה לנושא j . או ---
 - התקציב של כל נושא j הוא בין ההצבעה השלישית מלמטה לנושא j , לבין ההצבעה הרביעית מלמטה לנושא j . או ---
 - ... או ---
 - התקציב של כל נושא j הוא בין ההצבעה ה- $n-1$ מלמטה לנושא j , לבין ההצבעה הגדולה ביותר לנושא j .
- במילים אחרות: קיים מספר כלשהו k , כך שהתקציב של כל נושא j הוא בין ההצבעה ה- k לבין ההצבעה ה- $k+1$ מלמטה (אותו k לכל הנושאים).

ג. הוכיחו, שכל תקציב המקיים את התנאי של סעיף ב, הוא פתרון אוטיליטרי (כלומר: ממקסם את סכום התועלות של האזרחים, כלומר: ממזער את סכום המרחקים להצבעות האזרחים).

שאלה 1: אלגוריתם יעיל-פארטו והוגן לקבוצות

א. תארו אלגוריתם פשוט למיזוג הצעות תקציב, שהוא גם יעיל-פארטו וגם הוגן לקבוצות.

* ב. תארו אלגוריתם כנ"ל, שהוא גם רציף (הפלט משתנה באופן רציף כפונקציה של הקלט).

א. באלגוריתם המצוי, כאשר יש לכל
היותר ו-1 פרטים קבועים - הוכחנו שהם
הוגן לקבוצה ויעיל כנ"ל.

שאלה 3: אלגוריתם הממוצע

א. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא יעיל פארטו כשיש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע **אינו** יעיל פארטו כשיש שלושה נושאים [נחשון בר-סלע, ה'תשפ"ג].

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב הממוצע הוא הוגן לקבוצות.

* ד. הוכיחו, שאם השחקן לא יודע את הפעולות של השחקנים האחרים, אז לא קיימת התחכמות בטוחה. אבל אם השחקן יודע את הפעולות של שחקן אחד אחר כלשהו, אז במקרים מסויימים, יש לו התחכמות בטוחה [כלומר, לפעמים מספיק לרגל אחרי שחקן אחד, כדי לגלות התחכמות בטוחה].

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצאה הגדרנו את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן i כסכום המרחקים בין התקציב האידיאלי שלו לבין התקציב בפועל:

- $\text{Sum}_j |d_j - p_{i,j}|$
נניח שמגדירים את פונקציית התועלת השלילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:
- $\text{Sum}_j (d_j - p_{i,j})^2$

א. הוכיחו, שאלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות לינאריות **אינו** מגלה אמת. העזרו בדוגמה הבאה, עם שלושה נושאים ושני אזרחים:

- אזרח א: 20, 60, 20
- אזרח ב: 0, 50, 50

ב. הוכיחו, שעם פונקציות התועלת הריבועיות, אלגוריתם הממוצע הוא יעיל פארטו לכל מספר של נושאים.

שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

א. כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט את כמות הכסף בקופה והצבעות האזרחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציון המוכלל עם פונקציות עולות לינאריות, בעזרת חיפוש בינארי. כותרת הפונקציה:

def compute_budget(
 total_budget: float,
 citizen_votes: List[List])
) -> List[float]

Handwritten notes:
 - כסף בקופה
 - אזרחים
 - מ - נושאים (מיני, מקסימום)
 - 1 - n - הצבעות קבועות

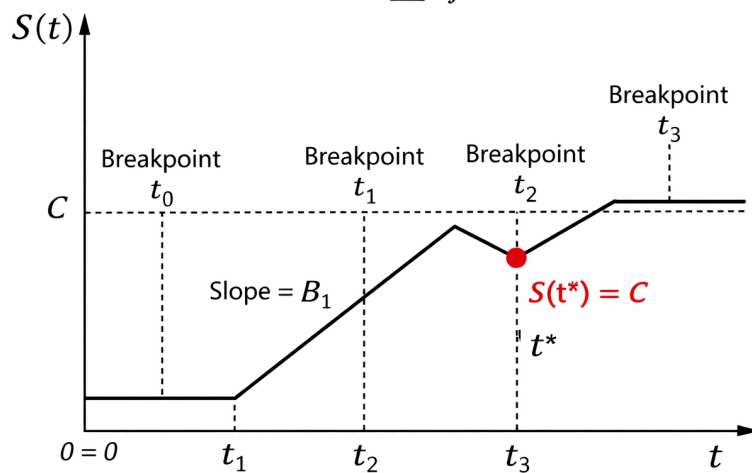
הנה דוגמת קריאה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

```
compute_budget(100, [[100, 0, 0], [0, 0, 100]])
```

הערך המוחזר הוא רשימה עם מספרים כמספר הסעיפים, למשל: [50, 0, 50]

כיוון הנחשבים \checkmark הכולל ציבויים
נסתהן 25-! (Step 3)

$$S(t) = \sum d_j(t)$$



ברוך ה' חונן הדעת

צרפו דוגמאות-הרצה.

ב. כתבו פונקציה כנ"ל, **שאינה** משתמשת בחיפוש בינארי, אלא בשיטה יעילה יותר. הוכיחו שהפתרון שלכם נכון.