

מטלה – מיזוג הצעות תקציב

יש לענות על שאלת אחת לבחירתכם. שאלות רגילות מזוכות בנקודה אחת. שאלות או סעיפים עם כוכבית מזוכים בנקודה נוספת.

שאלה 1: אלגוריתם יעיל-פארטו והוגן לקבוצות

א. תארו אלגוריתם פשוט למיזוג הצעות תקציב, שהוא גם יעיל-פארטו וגם הוגן לקבוצות.

* ב. תארו אלגוריתם כנ"ל, שהוא גם רציף (הפלט משתנה באופן רציף כפונקציה של הקלט).

* שאלה 2: אלגוריתם יעיל-פארטו ומגלה-אמת

בهرצתה ראיינו קבוצה אחת של פונקציות הצבעות-קבועות. בשאלת זו נראה קבוצה אחרת. נגדיר $1-n$ פונקציות קבועות באופן הבא:

- פונקציה 1 עולה מ-0 ל- C בין זמן 0 לזמן $1/(1-n)$;
- פונקציה 2 עולה מ-0 ל- C בין זמן $1/(1-n)$ לזמן $2/(1-n)$;
- ...
- פונקציה k עולה מ-0 ל- C בין זמן $(k-1)/(1-n)$ לזמן $(n-1)/n$.
- ...
- פונקציה $1-n$ עולה מ-0 ל- C בין זמן $(2-n)/(1-n)$ לזמן 1.

(במילים אחרות: הפונקציות עלות אחת אחרי השניה: רק כשפונקציה אחת מגיעה ל- C , הפונקציה הבאה מתחילה לעלות מ-0).

נפעיל את אלגוריתם החצינו המוככל עם פונקציות אלו.

א. הדגימו את האלגוריתם על הדוגמה מההרצתה, עם 3 אזרחים ו-9 נושאים והצבעות הבאות:

- אזרח א: 6,6,6,0,0,0,0,0,0.
- אזרח ב: 0,0,6,6,6,0,0,0,0.
- אזרח ג: 6,0,0,6,6,0,0,0,0.

ב. הוכיחו, שהתקציב המוחזר ע"י אלגוריתם זה מקיים בהכרח את אחד מהתנאים הבאים:

- התקציב של כל נושא j הוא בין הצבעה הקטנה ביותר לנושא j , לבין הצבעה השנייה מלמטה לנושא j . או ---
- התקציב של כל נושא j הוא בין הצבעה השנייה מלמטה לנושא j , לבין הצבעה השלישית מלמטה לנושא j . או ---
- התקציב של כל נושא j הוא בין הצבעה השלישית מלמטה לנושא j , לבין הצבעה הרביעית מלמטה לנושא j . או ---
- ... או ---
- התקציב של כל נושא j הוא בין הצבעה ה- $1-n$ מלמטה לנושא j , לבין הצבעה הגדולה ביותר לנושא j .

במילים אחרות: קיימים מספר כלשהו k , כך שהתקציב של כל נושא j הוא בין הצבעה ה- k לבין ה- $k+1$ מלמטה (אותו k לכל הנושאים).

ג. הוכיחו, שככל התקציב המקיים את התנאי של סעיף ב, הוא פתרון אוטיליטרי (כלומר: ממקסם את סכום התוצאות של האזרחים, ככלומר: ממזער את סכום המרחקים להצבעות האזרחים).

שאלה 1: אלגוריתם יUIL-פארטו והוגן לקבוצות

- א. תארו אלגוריתם פשוט למיוג הצעות תקציב, שהוא גם UIL-פארטו וגם הוגן לקבוצות.
- * ב. תארו אלגוריתם כנ"ל, שהוא גם רציף (הפלט משתנה באופן רציף כפונקציה של הקבלת).

כאלגוריתם גנריון גאנל, כזאת הוא מילוי
גיאגר 1-ה גאנלאר גאנלאר - גאנלאן אונן
גאנ לאונלאר וו.ג. אונן.

שאלה 3: אלגוריתם המוצע

א. הוכחו, שהאלגוריתם המחבר את התקציב המוצע הוא יעיל פארטו כשייש רק שני נושאים.

ב. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב המומוצע **אינו** עיל פארטו כשייש שלושה נושאים [נחשון בר-סלע, התשפ"ג].

ג. הוכיחו, שהאלגוריתם המחזיר את התקציב המומוצע הוא הונגן לקבוצות.

* ד. הוכחו, שם השחקן לא יודע את הפעולות של השחקנים האחרים, אז לא קיימת התוכנות בטוחה. אבל אם השחקן יודע את הפעולות של שחקן אחד אחר כלשהו, אז במקרים מסוימים, יש לו התוכנות בטוחה [כלומר, לפעמים מספיק לרוגل אחד שחקן אחד, כדי לגלו התוכנות בטוחה].

שאלה 4: פונקציית תועלת שונה

בהרצתה הגדרנו את פונקציית התועלת השילילית של כל שחקן \neq כסוכם המרחקים בין התקציב*האידיאלי* שלו לבין התקציב**בפועל**:

- $\text{Sum}_j |d_j - p_{i,j}|$ נניח שמנדרים את פונקציית התועלת השילילית של כל שחקן כסכום ריבועי המרחקים:
 - $\text{Sum}_j (d_j - p_{i,j})^2$

א. הוכחנו, שאלגוריתם החציון המוכל עם פונקציות **ליינאריות אינו** מגלה אמת. העזרו בדוגמה הבאה, עם שלושה נושאים ושני אזוריים:

- אזרח א: 20,60,20
 - אזרח ב: 50,50,0

ב. הוכחה, שעם פונקציות התועלת הריבועית, אלגוריתם המוצע הוא עיל פארטו לכל מספר של גושאים.

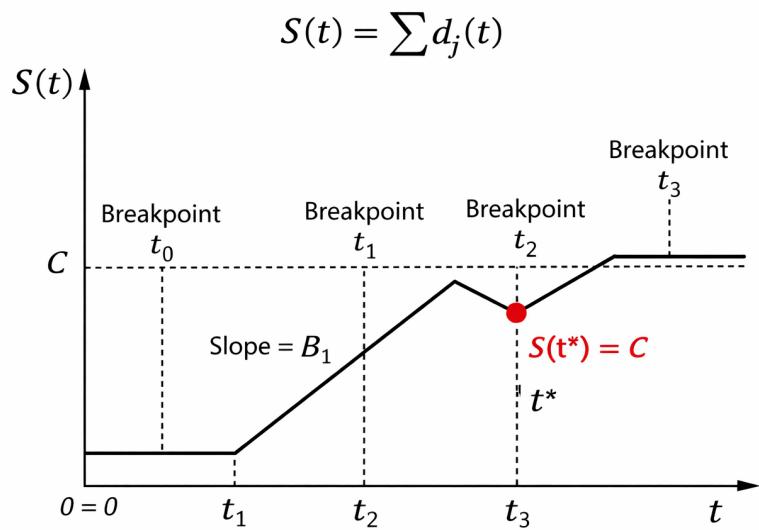
שאלה 5: תיכנות: חישוב תקציב

א. כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כלט את סכום הכספי בקופה והצבעות הארחים, ומחשבת את התקציב בעזרת אלגוריתם החציו המקלל עם פונקציות上游ות ליניאריות, בעזרת חישוב בינהי. כוורת

```
def compute_budget(  
    total_budget:float,  
    citizen_votes:List[List[  
        float]]) -> List[float]
```

הנה דוגמת קרייה לפונקציה עבור תקציב עם שלושה סעיפים, ושני אזרחים:

רוכסן גיבובים (Step 3) סטטוס: 11/11



צרפפו דוגמאות-הרצתה.

ב. כתבו פונקציה כנ"ל, **שאינה** משתמש בחיפוש ביןארי, אלא בשיטה עיליה יותר. הוכיחו שהפתרונות שלכם נכונים.