Задачи по изчислимост и сложност

Йоан Василев

2 февруари 2026 г.

Задача 1 (*nested recursion*)**.** Казваме, че функцията h се определя с вложена рекурсия (nested recurion) от функциите f, g, π, ако за нея е изпълнено:

$$\left|\begin{array}{l} h(0,y) \simeq f(y) \\ h(x+1,y) \simeq g(x,y,h(x,\pi(x,y))) \end{array}\right.$$

Докажете, че ако f, g, π са примитивно рекурсивни, то h също е.

Решение. Дефинираме функция $H(x,y,z)$ по следния начин:

$$H(x,y,z) \simeq \begin{cases} h(x,y), & \text{ако } z = 0 \\ h(x,\pi(x,\pi(x+1,\cdots\pi(x+z-1,y)\cdots), & \text{иначе} \end{cases}$$

Ще докажем, че H е примитивно рекурсивна.
• При $x = 0$ имаме:

$$H(0,y,0) = \begin{cases} h(0,y) = f(y), & \text{ако } z = 0 \\ h(0,\pi(0,\pi(1,\cdots\pi(z-1,y)\cdots) = f(\pi(0,\pi(1,\cdots\pi(z-1,y)\cdots)), & \text{иначе} \end{cases}$$

Горното ще служи за базов случай на примитивната рекурсия за H, като за целта трябва да докажем, че функцията на два аргумента $\Phi(y,z) := H(0,y,z)$ е примитивно рекурсивна. Това се вижда лесно от $\Phi(y,z) = f(F(z,y,z))$ за F дефинирана по примитивно рекурсивната схема:

$$\left|\begin{array}{l} F(0,y,z) = y \\ F(n+1,y,z) = \pi(z \dot{-} n, F(n,y,z)) \end{array}\right.$$

• Отделно имаме и следната зависимост:

$$H(x+1,y,z) \simeq h(x+1,\underbrace{\pi(x+1,\pi(x+2,\cdots\pi(x+z,y)\cdots)}_{t}) \simeq g(x,y,h(x,\pi(x,t))) =$$

$$g(x,y,\underbrace{h(x,\pi(x,\pi(x+1,\pi(x+2,\cdots\pi(x+z,y)\cdots)))}_{H(z,y,z+1)}) \simeq g(x,y,H(x,y,z+1))$$

От направеното досега получихме:

$$\left|\begin{array}{l} H(0,y,z) = \Phi(y,z) \\ H(x+1,y,z) = g(x,y,H(x,y,z+1)) \end{array}\right.$$

Ще кодираме x, z в един аргумент, за да бъде рекурсията само по него. Нека $\langle \Pi, L, R \rangle$ е кодираща схема ($\Pi(x,z) = 3^x 2^z$ ще ни свърши работа) и $H(x,y,z) = \widetilde{H}(\Pi(x,z),y)$, по-точно $\widetilde{H}(t,y) = H(L(t),y,R(t))$ за $t = 2^k 3^l$ и $H(t,y) = 0$ в противен случай. Тогава горната система, записана за $\widetilde{H}$, придобива вид:

$$\left|\begin{array}{l} \widetilde{H}(\underbrace{\Pi(0,z)}_{2^z},y) = \Phi(y,R(\Pi(0,z))) \\ \widetilde{H}(\Pi(x+1,z),y) = g(L(\Pi(x+1,z)-1,y,\widetilde{H}(\Pi(L(\Pi(x+1,z))-1,R(\Pi(x+1,z))+1)),y) \end{array}\right.$$

Опростено, това изглежда по следния начин:

$$\widetilde{H}(t,y) = \begin{cases} \Phi(y, R(t)), & \text{ако } t = 2^k 3^l \ \& \ l = 0 \\ g(L(t)-1, y, \widetilde{H}(\underbrace{\Pi(L(t)-1, R(t)+1)}_{G(t)}, y), & \text{ако } t = 2^k 3^l \ \& \ l \neq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Участващите функции и предикати са примитивно рекурсивни. Ключовото наблюдение е, че $G(t) < t$ /понеже $\Pi(L(t)-1, R(t)+1) < t = \Pi(L(t), R(t))$/, т.е. $\widetilde{H}(t,y)$ е примитивно рекурсивна по схемата за силна рекурсия (по-точно следствие от нея), откъдето $H(x,y,z) = \widetilde{H}(\Pi(x,z),y)$ също е такава. Вярно е, че $h(x,y) = H(x,y,0)$, следователно и $h(x,y)$ е примитивно рекурсивна. ■

Задача 2 (*Непримитивност на функцията на Акерман*)**.** Докажете, че функцията на Акерман не е примитивно рекурсивна.

$$\left| \begin{array}{l} F(0,y) = y+1 \\ F(x+1,0) = F(x,1) \\ F(x+1,y+1) = F(x, F(x+1,y)) \end{array} \right.$$

Решение. Да започнем с доказване на няколко помощни твърдения за функцията на Акерман.

Лема 1

Функцията на Акерман е монотонно растяща по двата си аргумента.

Доказателство. Може да се докаже едновременно (и за двата аргумента) с индукция по x и вложена в нея по y.
За $x = 0$ нещата са тривиални, $F(0,y) = y+1 < y+2 = F(0,y+1)$.
При $x > 0, y = 0 : F(x,0) = F(x-1,1) \overset{\text{инд. хипотеза}}{>} F(x-1,0)$.
За $x \neq 0, y \neq 0$:
$F(x,y) = F(x-1, F(x,y-1)) \overset{\text{инд. хипотеза}}{\geq} F(0, F(x,y-1)) = F(x,y-1)+1 > F(x,y-1)$.
Също така и $F(x-1, F(x,y-1)) \geq F(x-1, \underbrace{F(1,y-1)}_{>F(0,y-1)=y}) \overset{\text{инд. хипотеза}}{>} F(x-1,y)$. □

Лема 2

За всеки x, y е в сила $F(x+1,y) > y+1$.

Доказателство. Ползвайки монотонността, получаваме $F(x+1,y) > F(x,y) \geq F(0,y) = y+1$. □

Лема 3

За всеки x, y е в сила $F(x,y+1) \leq F(x+1,y)$.

Доказателство. Доказваме с индукция едновременно по x (външно) и y (вътрешно). За $x = 0$ твърдението следва от $F(0,y+1) = y+2 \overset{\text{Лема 2}}{\leq} F(1,y)$, а при $y = 0 : F(x,y+1) = F(x,1) = F(x+1,0)$. В останалите случаи, за $x, y \geq 1$:

$$F(x,y+1) = F(x-1, F(x,y)) \overset{\text{монотонност}}{\leq} F(x, F(x,y)) \overset{\text{ИП, монотон.}}{\leq} F(x, F(x+1,y-1)) = F(x+1,y)$$

□

Лема 4

За всяко x съществува z такова, че за всяко y : $F(x, 2y) \leq F(z, y)$.

Доказателство. Твърдим, че $z = x + 2$ удовлетворява исканото. Доказваме с вложена индукция първо по x, после по y.
За $y = 0$ твърдението следва директно, $F(x, 2.0) = F(x, 0) \leq F(x + 2, 0)$.
В останалите случаи, за $y \geq 1$:

$$F(x+2, y) = F(x+1, F(x+2, y-1)) \overset{\text{инд. хипотеза}}{\geq} F(x+1, \underbrace{F(x, 2y-2)}_{\geq 2y-1}) \geq$$

$$F(x+1, 2y-1) \overset{\textit{Лема 3}}{\geq} F(x, 2y)$$

□

Обратно към същинското доказателство. Ще докажем по индукция, че за всяка примитивно функция g е в сила $P(g) \rightleftharpoons$ съществува естествено k такова, че за всяко $\overline{x} \in \mathbb{N}^n$:

$$g(x_1, \ldots, x_n) < F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n\})$$

.
База:
• $\mathcal{O}(x)$: при $k = 0$ за всяко x имаме $\mathcal{O}(x) = 0 < x + 1 = F(0, x) = F(k, \max\{x\})$; ✓

• $S(x)$: От *Лема 2* имаме, че $S(x) = x + 1 < F(1, x)$ за всяко x; ✓

• $I^n_k(\overline{x})$: $I^n_k(\overline{x}) = x_k \leq \underbrace{\max\{x_1, \ldots, x_n\}}_{m} < m + 1 = F(0, m)$, т.е. при $k = 0$ неравенството е в сила; ✓

ИС:
• **примитивна рекурсия**: Нека $g \in \mathcal{F}_n, f \in \mathcal{F}_{n+2}$ са примитивно рекурсивни, като $P(f)$ и $P(g)$, а $h \in \mathcal{F}_{n+1}$ е получена с примитивна рекурсия от f и g, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} h(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) \\ h(\overline{x}, y+1) = f(\overline{x}, y, h(\overline{x}, y)) \end{array} \right.$$

По предположение са в сила следните:

$$P(g) \rightleftharpoons \exists k_1 \forall \overline{x} : g(\overline{x}) < F(k_1, \max\{x_1, \ldots, x_n\})$$

$$P(f) \rightleftharpoons \exists k_2 \forall \overline{x}, y, z : f(\overline{x}, y, z) < F(k_2, \max\{x_1, \ldots, x_n, y, z\})$$

Тук ще ползваме, че функцията на Акерман е растяща по двата си аргумента, така че горните неравенства остават в сила и за $k := \max\{k_1, k_2\}$. Първо ще покажем, че $h(\overline{x}, y) < F(k + 1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\} + y)$ за всеки $\overline{x}, y$ с индукция по y:
База: При $y = 0$ за всяко $\overline{x}$

$$h(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) < F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n, 0\}) \leq F(k + 1, \max\{x_1, \ldots, x_n, 0\} + 0)$$

ИП: За всяко $z < y$ и всяко $\overline{x}$: $h(\overline{x}, z) < F(k + 1, \max\{x_1, \ldots, x_n, z\} + z)$.
ИС:

$$h(\overline{x}, y + 1) = f(\overline{x}, y, h(\overline{x}, y)) < F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n, y, h(\overline{x}, y)\})$$

По предположение $h(\overline{x}, y) < F(k{+}1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\}{+}y)$, а също и $x_1, \ldots, x_n, y < F(k{+}1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\})$, тогава за горния израз получаваме:

$$F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n, y, h(\overline{x}, y)\}) < F(k, F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\} + y)) =$$

$$F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\} + y + 1) \leq F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y+1\} + (y+1))$$

Така получихме $h(x_1, \ldots, x_n, y) < F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n, (y+1)\} + (y+1))$, с което индукционната стъпка е завършена.
Трябва обаче да докажем $P(h)$. Имаме, че $\max\{x_1, \ldots, x_n, y\} + y \leq 2\max\{x_1, \ldots, x_n, y\}$. Достатъчно е да намерим такова $K \in \mathbb{N}$, че $\forall t : F(k+1, 2t) < F(K, t)$. Ползваме *Лема 4* и получаваме веригата:

$$h(\overline{x}, y) < F(k{+}1, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\}{+}y) \leq F(k{+}1, 2\max\{x_1, \ldots, x_n, y\}) \leq F(K, \max\{x_1, \ldots, x_n, y\}) \checkmark$$

• **суперпозиция**: Нека $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}_n, f \in \mathcal{F}_m$ са примитивно рекурсивни, като $P(g_1), \ldots, P(g_m)$ и $P(f)$, а $h \in \mathcal{F}_n$ е получена чрез суперпозиция от тях. По предположение са в сила следните:

$$P(f) \rightleftharpoons \exists k_0 \forall \overline{y} : f(\overline{y}) < F(k_0, \max\{y_1, \ldots, y_m\})$$

$$P(g_i) \rightleftharpoons \exists k_i \forall \overline{x} : g(\overline{x}) < F(k_i, \max\{x_1, \ldots, x_n\}) \text{ за всяко } i, 1 \leq i \leq m$$

Отново ползваме, че функцията F е растяща по двата си аргумента, така че горните остават в сила и за $k := \max\{k_0, \ldots, k_m\}$. Тогава

$$h(\overline{x}) = f(g_1(\overline{x}), \ldots, g_m(\overline{x})) < F(k, \max\{g_1(\overline{x}), \ldots, g_m(\overline{x})\})$$

Но $\max\{g_i(\overline{x}) |\ 1 \leq i \leq m\} < \max\{F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n\}) \mid 1 \leq i \leq m\} = F(k, \max\{x_1, \ldots, x_n)\} \leq F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n)\}$. Сега ползваме монотонността на F и *Лема 3*:

$$h(\overline{x}) < F(k, \max\{g_1(\overline{x}), \ldots, g_m(\overline{x})\}) \leq F(k, F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n)\}) =$$

$$F(k+1, \max\{x_1, \ldots, x_n\} + 1)\} \leq F(k+2, \max\{x_1, \ldots, x_n\})$$

Горното доказва, че суперпозицията на примитивно рекурсивни функции запазва свойството $P(h)$. ✓

Ако допуснем, че функцията на Акерман е примитивно рекурсивна, то в сила е и $P(F)$, т.е. съществува k, за което $F(x, y) < F(k, max\{x, y\})$ при всеки избор на x, y. При $x = y = k$ обаче имаме $F(k, k) < F(k, max\{k, k\})$, противоречие. ■

Задача 3 (*Канонично кодиране*)**.** Да означим с Fin множеството от всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$. Дефинираме изображение $\kappa : Fin \to \mathbb{N}$ по следния начин: ако $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то $\kappa(A)$ е числото, в чиито двоичен запис единиците са точно на позиции $x_1, \ldots, x_n$ (броим позициите от дясно наляво, започвайки от 0). Да се докаже, че κ е примитивно рекурсивно кодиране.

Решение.
• **κ е биекция:** За начало да дефинираме κ в явен вид: $\kappa(A) = \sum_{x_i \in A} 2^{x_i}$. Ще покажем, че изображението е биективно, тоест $(\forall z \in \mathbb{N})(\exists! A \in Fin)(\kappa(A) = z)$.
Всъщност това следва директно от факта, че всяко число има единствено представяне в двоична бройна система, но можем да докажем и с индукция по z.
База: За $z = 0 : \kappa(A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{x_i \in A} 2^{x_i} \Leftrightarrow A = \varnothing$. ✓
ИП: Нека за всяко $t < z$ съществува единствено крайно множество, чийто код е t.
ИС: Нека k е най-малката позиция, на която има единица в z. Това означава, че ако съществува A, за което $\kappa(A) = z$, то със сигурност $k \in A$. Тогава $t = z - 2^k < z$ има същото двоично представяне като z с разликата, че на k-та позиция вече стои 0. От инд. предположение съществува единствено множество B, за което $\kappa(B) = t$. Тогава $A = B \cup \{k\}$ е единственото, за което е в сила $\kappa(A) = z$.✓

Нека $z = \kappa(A)$. Дефинираме $lh(z) := |A|$ и

$$mem(z, i) = \begin{cases} i\text{-тия по големина елемент на } A, & \text{ако } 1 \leq i \leq lh(z) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ще покажем, че $lh(z), mem(z,i)$ са примитивно рекурсивни.

• $\mathbf{lh(A)}$ **е примитивно рекурсивна:** Имаме, че $lh(z) = |A| =$ *брой единици в двоичното представяне на* z. Можем да ползваме това, че двоичното представяне на $\left[\frac{z}{2}\right]$ има цифрите на $z_{(2)}$, но преместени надясно с 1 позиция. На нулева позиция в $z_{(2)}$ пък стои 1 точно когато числото е нечетно. Това ни дава следната зависимост:

$$lh(z) = \begin{cases} lh(qt(z,2)), & \text{ако } z > 0 \ \& \ rem(z,2) = 0 \\ lh(qt(z,2)) + 1, & \text{ако } z > 0 \ \& \ rem(z,2) = 1 \\ 0, & \text{ако } z = 0 \end{cases}$$

Това можем да запишем и като $lh(z) = G(z, lh(qt(z,2)))$ за $z > 0$. И понеже тогава $qt(z,2) < z$, то примитивната рекурсивност на lh следва от схемата за силна рекурсия. ✓
Впрочем същото може да се види и директно от явния вид на функцията: $lh(z) = \sum_{i<z} rem(qt(z,2^i),2)$.

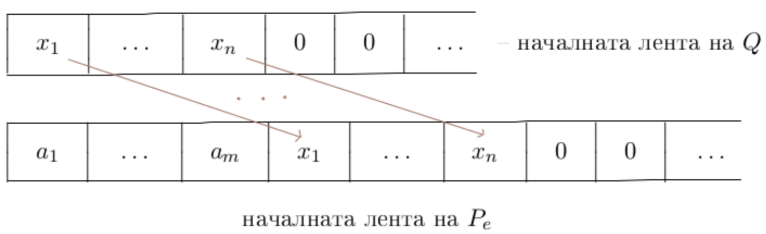
• $\mathbf{mem(z,i)}$ **е примитивно рекурсивна:** Да отбележим, че x_i-тият бит от двоичното представяне на z е 1 точно когато $\left[\frac{z}{2^{x_i}}\right]$ е нечетно число, т.е. е $rem(qt(z,2^{x_i}),2)$. Тогава броят единици в $z_{(2)}$ до позиция j включително е $\sum_{k=0}^{j} rem(qt(z,2^k),2)$, което е примитивно рекурсивна функция (ограничена сума). Също така z има не повече от z на брой единици в двоичния запис. Така $mem(z,i) = \mu j_{j<z}[\underbrace{\sum_{k=0}^{j} rem(qt(z,2^k),2) = i}_{p(z,i,j)}]$ е примитивно рекурсивна, защото предикатът $p(x,y,z)$ също е. Исканото за κ следва. ■

Задача 4. Докажете, че S_n^m функцията в S_n^m-теоремата може да се избере така, че да не зависи от n. Тоест съществува функция S^m такава, че за всяко $n \geq 1$ и всички естествени $e, a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n$:

$$\varphi^{(n)}_{S^m(e,a_1,\ldots,a_m)}(x_1,\ldots,x_n) \simeq \varphi^{(n+m)}_e(a_1,\ldots,a_m,x_1,\ldots,x_n)$$

Решение. За начало е добре да отбележим как нашето доказателство на S_n^m-теоремата се влияе от n. Зависимостта се дължи на прехвърлянето на съдържанието на регистрите, по-конкретно в изместването им с m позиции надясно:

$$X_{m+n} := X_n, \cdots, X_m + 1 := X_1$$



Хубавото е, че преместването винаги е с m позиции надясно. Проблемът обаче е, че ако искаме да обобщим доказателството за произволно n, не знаем колко регистъра да преместим. Всъщност знаем, ключовото наблюдение е, че не ни трябва целият вход $x_1, \ldots, x_n$, ако програмата работи само с първите k регистъра от него. Остава да намерим алгоритмично това k. Да означим с $maxreg$ функцията, която по подаден код на инструкция, връща номера на максималния регистър, който тя достъпва. Можем да изразим функцията:

$$maxreg(z) = \begin{cases} \frac{z}{4} + 1 & \text{ако } z = 4l \\ \left[\frac{z}{4}\right] + 1 & \text{ако } z = 4l+1 \\ max\{L(\left[\frac{z}{4}\right]), R(\left[\frac{z}{4}\right])\} + 1 & \text{ако } z = 4l+2 \\ max\{J_1^3(\left[\frac{z}{4}\right]), J_2^3(\left[\frac{z}{4}\right])\} + 1 & \text{ако } z = 4l+3 \end{cases}$$

Ясно е, че $maxreg$ е примитивно рекурсивна. Нека $P_e : I_0, I_1, \cdots, I_t$. Да дефинираме и функция $Maxreg$, която по код на програма връща максималния достъпен регистър от нея, т.е. искаме $Maxreg(e) = \max\{maxreg(\beta(I_i))| \ 1 \leq i \leq t\}$. Същата можем да запишем и така:

$$Maxreg(e) = \max_{0 \leq i \leq lh(e)} maxreg(mem(e,i))$$

Следователно $Maxreg$ също е примитивно рекурсивна (понеже се получава с ограничена максимизация). Получихме $k := Maxreg(e)$. Промяната в доказателството е, че този път инструкциите на $Q_{e,\overline{a}}$ са:

$$X_{m+k} := X_m, \dots, X_{m+1} := X_1,$$
$$X_1 := 0, \underbrace{S(1), \dots, S(1)}_{a_1 \text{ пъти}}, \dots, X_m := 0, \underbrace{S(m), \dots, S(m)}_{a_m \text{ пъти}}$$
$$\underbrace{I'_0, I'_1, \dots, I'_t}_{\text{преадресираните инструкции на } P_e}$$

Това се отразява на функцията $f(e,a,l)$ по следния начин:

$$f(e,a,l) = \begin{cases} \beta(T(k+l+1, l+1)), & \text{ако } l < k \\ \beta(Z(1)), & \text{ако } l = k \\ \beta(S(1)), & \text{ако } k+1 \leq l < a_1 + k + 1 \\ \dots \\ \mathrm{prim}(\mathrm{mem}(e, l - k - m - \sum_{i \leq m} a_i)), & \text{ако } a_1 + \dots + a_m + m + k \leq l \leq a_1 + \dots + a_m + m + k + \mathrm{lh}(e) \\ 0, & \text{ако } l > a_1 + \dots + a_m + k + \mathrm{lh}(e). \end{cases}$$

Функцията на f продължава да бъде примитивно рекурсивна. Останалата част от доказателството остава същата. ■

Задача 5. Докажете, че при фиксирани $n, m \geq 1$ съществуват безброй много S^m_n функции, които могат да се генерират ефективно, т.е. съществува рекурсивна[†] функция h такава, че $h(k)$ е индекс на някоя S^m_n функция за всяко k.

Решение. Нека функция f се пресмята от програмата $P : I_0, \dots, I_k$. Ясно е, че същата функция би се пресмятала и от програмата $Q : I_0, \dots, I_k, X_1 := X_1$. Това обаче задава друг индекс на същата функция. Можем да се възползваме от факта и да конструираме друга S^m_n функция. Имаме, че

$$\gamma(P) = \tau(\langle \beta(I_0), \dots, \beta(I_k) \rangle)$$

$$\gamma(Q) = \tau(\langle \beta(I_0), \dots, \beta(I_k), \beta(X_1 := X_1) \rangle)$$

Имаме предвид, че $\tau(\langle x_0, \dots, x_n \rangle) = \Pi(n, \Pi_{n+1}(x_0, \dots, x_n))$. Тогава кода на втората програма можем да изразим чрез този на първата по следния начин:

$$\gamma(Q) = \underbrace{\Pi(lh(\gamma(P)) + 1, \Pi(R(\gamma(P)), \beta(X_1 := X_1)))}_{G(\gamma(P))}$$

Функцията $G(x)$ е примитивно рекурсивна. Нейната цел е по подаден индекс на функция да върне друг индекс на същата функция.
S^n_m-теоремата гарантира съществуване на поне една S^n_m функция. Нека въпросната има индекс е s_0. Дефинираме функция $F(n, e, a_1, \dots, a_m)$ по следния начин:

$$\left| \begin{array}{l} F(0, e, \overline{a}) = S^m_n(e, \overline{a}) \\ F(k+1, e, \overline{a}) = G(F(k, e, \overline{a})) \end{array} \right.$$

Функцията F е получена с примитивна рекурсия от примитивно рекурсивни, следователно и тя е такава. Да забележим, че дефиницията ни на G по-горе, гарантира $\varphi^{(n)}_{F(n,e,\overline{a})} = \varphi^{(n)}_{F(n+1,e,\overline{a})}$ (докато

[†] в доказателството показваме нещо по-силно, че има примитивно рекурсивна, което ме навежда на мисълта, че може да има грешка :\

$F(n, e, \overline{a}) \neq F(n+1, e, \overline{a}))$.

Понеже $F(n, e, a)$ е изчислима, за нея можем да ползваме S^m_n-теоремата (в "слабия" вариант), което ни гарантира съществуване на примитивно рекурсивна функция h, за която:

$$\varphi^{(m+1)}_{h(k)}(e, \overline{a}) = F(k, e, \overline{a})$$

Твърдим, че $h(k)$ е индекс на S^n_m функция за всяко k. Достатъчно е да проверим

$$\varphi^{(n)}_{\varphi^{(m+1)}_{h(k)}(e,a)}(\overline{x}) = \varphi^{(n)}_{F(k,e,a)}(\overline{x}) = \varphi^{(n)}_{F(0,e,a)}(\overline{x}) = \varphi^{(n)}_{S^m_n(e,a)}(\overline{x})$$

Това доказва исканото. ■

Задача 6. Докажете, че съществува примитивно рекурсивна функция $c(n, a)$ такава, че за всеки две естествени числа n, a е в сила $\varphi_{c(n,a)} = C^n_a$.

Решение. [†]За фиксирано a разглеждаме програмата: $P_e : Z(1), \underbrace{S(1), \ldots, S(1)}_{\text{а пъти}}$. Ясно е, че за всеки n и $\overline{x} : \varphi^{(n)}_e(\overline{x}) = a$. Дефинираме функцията $c(n, a)$ по следния начин:

$$\left|\begin{array}{l} c(n, 0) = \tau(\langle \beta(Z(0)) \rangle) \\ c(n, a+1) = \Pi(a+2, \Pi(R(c(n, a)), \beta(Z(1)))) \end{array}\right.$$

Въпросната функция е очевидно примитивно рекурсивна, при това за всеки n, a:

$$c(n, a) = \tau(\langle \beta(Z(1), \underbrace{\beta(S(1)) \ldots, \beta(S(1))}_{a \text{ пъти}} \rangle)$$

Тогава автоматично $\varphi^{(n)}_{c(n,a)}(x_1, \ldots, x_n) = a = C^n_a(\overline{x})$. ■

Задача 7. Докажете, че съществува рекурсивна функция g такава, че за всяко n числото $g(n)$ е индекс на функцията g^n.

Решение. Ще ползваме следното помощно твърдение (което впрочем е доказвано):

Лема 5

Съществува двуместна примитивно рекурсивна функция p, такава че за всички естествени n и a.

$$\varphi_{p(a,n)} = \varphi^n_a$$

Доказателство. Нека $F(n, a, x) \simeq \varphi^n_a(x)$. Същата може да се изрази от следната примитивно рекурсивна схема:

$$\left|\begin{array}{l} F(0, a, x) = x \\ F(n+1, a, x) \simeq \Phi(a, F(n, a, x)) \end{array}\right.$$

Следва, че F е изчислима, тогава и $P(a, n, x) = F(n, a, x)$ също е. По S^m_n-теоремата съществува примитивно рекурсивна функция $p(a, n)$, за която:

$$\varphi_{p(a,n)}(x) \simeq G(a, n, x) \simeq \varphi^n_a(x)$$

□

Нека такава функция g съществува и a е неин индекс. Тогава трябва да е в сила следното:

$$\varphi_{\varphi_a(n)}(x) \simeq \underbrace{\varphi^n_a(x)}_{f(a,n,x)}$$

[†]За съжаление това решение излезе доста безидейно :(

Можем да изразим

$$f(a,n,x) \simeq \Phi_1(p(a,n),x)$$

Следователно f е изчислима. Прилагаме S_n^m-теоремата за нея и получаваме, че съществува примитивно рекурсивна функция h, за която при всеки a, n, x:

$$\varphi_{h(a,n)}(x) \simeq f(a,n,x)$$

Тогава е достатъчно е да докажем, че съществува индекс a, за който

$$\varphi_{\varphi_a(n)}(x) \simeq \varphi_{h(a,n)}(x)$$

Можем директно да приравним $\varphi_a(n) = h(a,n)$, *Теоремата за определимост по рекурсия* гарантира съществуването на такова a. В частност, $g = \varphi_a(n)$ е рекурсивна. ■

Задача 8. Докажете, че съществува инективна и рекурсивна функция g такава, че за всяко n числото $g(n)$ е индекс на g.

Решение. По-нагоре показахме, че съществува примитивно рекурсивна функция $nxt(e)$, която по код на програма връща код на еквивалентна програма със стриктно повече инструкции от първата (идеята беше да добавя празна инструкция $T(1,1)$ в края). Това гарантира, че за всеки $a, b \in \mathbb{N}$: $nxt^a(e) = nxt^b(e) \implies a = b$, т.е. при фиксирано e функцията $g(n) := nxt^n(e)$ е *инективна*. Тогава $\forall a, b : \varphi_{g(a)} = \varphi_{g(b)}$. Достатъчно е да докажем, че съществува такова e, за което $g(0) = nxt^0(e) = e$ е индекс на g. Последното можем да изразим и така:

$$\varphi_e(n) = \underbrace{nxt^n(e)}_{f(e,n)}$$

Ясно е, че $f(e,n)$ е изчислима (това по същество е итерацията на функцията nxt). Тогава по *Теоремата за определимост по рекурсия* съществува e, за което $\varphi_e(n) = f(e,n) = nxt^n(e) = g(n)$. Тогава

$$\varphi_{g(n)}(x) = \varphi_{g(0)}(x) = \varphi_e(x) = g(n) \quad ■$$

Задача 9. Измислете някакво автореферентно свойство на програма за МНР и докажете, че има безброй много програми с това свойство. Да се докаже, че съществуват безброй много програми P_e, за които е в сила:

$$P_e \text{ спира върху вход } x \iff P_x \text{ спира върху вход } e$$

.

Решение. Достатъчно е да докажем, че съществуват безброй много e такива, че за всяко x

$$\varphi_e(x) \simeq \varphi_x(e)$$

Дефинираме функция $f(e,x) \simeq \varphi_x(e) \simeq \Phi_1(x,e)$. Следователно f е изчислима. Тогава по *Теоремата за определимост по рекурсия* следва, че съществува e такова, че

$$\varphi_e(x) \simeq f(e,x) \simeq \varphi_x(e)$$

Доказвали сме, че щом съществува едно, то съществуват безброй много e с въпросното свойство (следва от факта, че съществува безброй много псевдонеподвижни точки). ■

Задача 10. Нека $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ е разрешимо. *Конструирайте* чрез χ_A рекурсивна нестрого растяща функция h такава, че $A = \{h(0), h(1), \dots\}$.

Решение. Дефинираме h по следния начин:

$$\begin{array}{|l} h(0) = \mu x[\chi_A(x) = 0] \\ h(x+1) = H(x, h(x)), \end{array}$$

където $H(x, y) = \begin{cases} x+1, & \text{ако } \chi_A(x+1) = 0 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$

• **рекурсивност:** От горните е видно, че така построената h е частично рекурсивна. Функцията H е рекурсивна, защото е построена с разглеждане на случаи от примитивно рекурсивни функции и рекурсивни предикати. При това непразнотата на A и тоталността на χ_A гарантират, че $!\mu x[\chi_A(x) = 0]$, следователно h *е рекурсивна.* ✓

• **монотонност:** Сега да се убедим, че h е нестрого растяща. Нека $m := \min\{x | x \in A\}$. Тогава е ясно, че $h(0) = m$ (понеже $\chi_A(m) = 0$, а $\chi_A(x) = 1$ за $x < m$). Макар че е видно, че докажем по индукция, че за $x \leq m : h(x) = m$. Базовият случай е $x = 0$, вече показахме. За $0 \leq x < m$ по дефиниция имаме

$$h(x+1) = H(x, h(x)) = \begin{cases} x+1, & \text{ако } \chi_A(x+1) = 0 \\ h(x), & \text{иначе} \end{cases}$$

От индуктивната хипотеза знаем, че $h(x) = m$. От избора на m пък следва, че:
▶ За $x + 1 < m : \chi_A(x+1) = 1$, така че попадаме във втория случай от дефиницията на H и така $h(x+1) = H(x, h(x)) = h(x) = m$.
▶ За $x+1 = m$ пък знаем $\chi_A(m) = 0$, така че сме в първия случай и отново $h(x+1) = m$. В крайна сметка получихме $h(0) = h(1) = ... = h(m) = m$.

Сега да покажем монотонността за следващите елементи в редицата. Доказваме по индукция, че за всяко $x \geq m$ е в сила $P(x) \rightleftharpoons h(x) \leq x$. Базовият случай вече бе показан. За $x \geq m$ имаме:

$$h(x+1) = H(x, h(x)) = \begin{cases} x+1 \ (\leq x+1), & \text{ако } \chi_A(x+1) = 0 \\ h(x) \ (\leq x \textit{ по хипотеза}), & \text{иначе} \end{cases}$$

И в двата случая $h(x+1) \leq x+1$. Вече за всяко $x \geq m$ се вижда, че

$$h(x+1) = H(x, h(x)) = \begin{cases} x+1 \ (> x \geq h(x)), & \text{ако } \chi_A(x+1) = 0 \\ h(x), & \text{иначе} \end{cases}$$

И в двата случая $h(x+1) \geq h(x)$, с което *монотонността е доказана.* ✓

• **коректност:**
(Range(h) ⊆ A): Вече споменахме, че $h(0) = \cdots = h(m) = m \in A$. За $x + 1 > m$ доказателството отново протича по индукция. Ако $\chi_A(x+1) = 0$, то $x + 1 \in A$, а тогава влизаме и в първия случай от дефиницията на H, значи $h(x+1) = x + 1 \in A$. ✓

(A ⊆ Range(h)): Ясно е, че $m = h(0) \in A$. Нека сега $a \in A$ е друг елемент от множеството ($a \neq m$). Минималността на m гарантира $a > m \geq 0$, значи $a \geq 1$. Също така $\chi_A(a) = 0 \Rightarrow h(a) = h((a-1)+1) = a$. Следователно $a \in Range(h)$ ✓.

Получихме, че $A = Range(h)$ и h е рекурсивна, нестрого растяща функция. ■

Задача 11. Нека f и g са едноместни рекурсивни функции, като g е биективна. Нека още $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Докажете, че $Range(f)$ е разрешимо множество.

Решение. Ще започнем с доказването на следното помощно твърдение.

Лема 6

Ако $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е рекурсивна (тотална и изчислима) и биективна функция, то обратната ѝ функция $g^{-1}(x)$ също е рекурсивна.

Доказателство. Дефинираме $g^{-1}(y) = \mu x[g(x) = y]$, което можем да запишем и като

$$g^{-1}(y) = \mu x[\underbrace{|g(x) - y|}_{G(x,y)} = 0]$$

Функцията $g^{-1}(x)$ се получава с минимизация от рекурсивната $G(x, y)$, така е частично рекурсивна. Фактът, че g е биекция гарантира съществуването на x с необходимото свойство за всяко y, а оттам и тоталността на g^{-1}. $\square$

Обратно към задачата. За начало можем да използваме, че $f(x) \geq g(x)$, така че, ако $g(x) > y$ е ясно, че $f(x) \neq y$. Хубавото е, че само за краен брой стойности на $x : g(x) \leq y$ (това се гарантира от биективността на g). Всъщност достатъчно е да ограничим "търсенето" до $b_y = max\{x \in A |\ g(x) \leq y\}$. Оттам нататък, т.е. за $x > b_x : f(x) \geq g(x) > y$. Дефинираме функция $b(y)$ по следния начин:

$$\begin{array}{|l} b(0) = g^{-1}(0) \\ b(y+1) = \max(b(y), g^{-1}(y+1)) \end{array}$$

Ясно е, че b е рекурсивна, защото се получава чрез примитивна рекурсия от рекурсивни функции. По индукция можем да докажем, че $b(y) = \max\{x \in \mathbb{N} |\ g(x) \leq y\}$. Базата е $y = 0$, имаме $b(0) = g^{-1}(0)$, което е единственото (в частност максималното) x с $g(x) \leq 0$. Понеже за всяко y имаме единствено x, за което $g(x) = y$, то е в сила $\max\{x \in \mathbb{N} |\ g(x) \leq y + 1\} = \max\{\ \max\{x \in \mathbb{N} |\ g(x) \leq y\},\ g^{-1}(y+1)\}$, което и имаме в дефиницията на b.

Можем да разгледаме два случая:

• **Range(f) е крайно:** Директно следва, че то и разрешимо, характеристичната му функция получаваме с изброяване на случаи:

$$\chi(z) = \begin{cases} 0, & \text{ако } z = y_1 \\ \dots & \\ 0, & \text{ако } z = y_k \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

• **Range(f) е безкрайно:** Тогава то е и неограничено. Използваме, че $Range(f)$ е разрешимо тогава и само тогава, когато съществува строго растяща рекурсивна функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ изброител на множеството, т.е. $Range(f) = Range(h) = \{h(0), h(1), \dots\}$. Ще конструираме такава, която ще изглежда горе-долу така[†]:

$$\begin{array}{|l} h(0) = \mu y[\exists x f(x) = y] \\ \\ h(n+1) = \underbrace{\mu y[\exists x f(x) = y \ \&\ y > h(n)]}_{F(n,h(n))} \end{array}$$

Това е по-скоро отправна точка. Проблемът обаче е в неограничеността на екзистенциалните квантори. Ето защо ще ги ограничим. Ползваме направените по-горе наблюдения за $b(x)$:

$$\begin{array}{|l} h(0) = \mu y[\exists x_{x \leq b(y)} f(x) = y] \\ \\ h(n+1) = \underbrace{\mu y[\exists x_{x \leq b(y)} f(x) = y \ \&\ y > h(n)]}_{F(n,h(n))} \end{array}$$

[†]*Забележка: Впрочем дефинирането на такава функция се оказа излишно. Доста по-лесно е директно да ползваме НДУ за разрешимост на множество, след като вече имаме $b(x)$:*

$$y \in Range(f) \Leftrightarrow \exists x_{x \leq b(y)} f(x) = y \Leftrightarrow \prod_{x \leq b(y)} |f(x) - y| = 0$$

Изчислимостта на h следва от това, че предикатът е рекурсивен. Функцията f е неограничена, което гарантира $!\mu y[\exists x_{x \leq b(y)} f(x) = y \ \& \ y > h(n)]$ тоталността на h. Заключаваме, че *h е рекурсивна.* *Монотонността* на h също се вижда от дефиницията $/h(n+1) = \mu y[...\& \ y > h(n)]/$.

Пак от там следва, че $Range(h) \subseteq Range(f)$. Да допуснем обаче, че $Range(f) \nsubseteq Range(h)$ и съществува число y, за което $y \in Range(f) \ \& \ y \notin Range(h)$. Нека y_0 е най-малкото с това свойство. Нека $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} | \ h(n) < y_0\}$. Тогава $h(n_0 + 1) > y_0$, но същевременно $\exists x f(x) = y_0$ и $y_0 > h(n_0)$, тоест y_0 изпълнява условията на минимизацията и така $h(n+1) = y_0$ което е противоречие. Това доказва и обратното включване. Следва, че $Range(f) = Range(h)$, което пък окончателно доказва разрешимостта на $Range(f)$. ■

Задача 12. Нека f и g са едноместни рекурсивни функции, като g е обратима (инективна) и $Range(g)$ е разрешимо. Нека още $f(x) \geq x$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Докажете, че е разрешимо множеството $S := \{g(x) \mid x \in Range(f)\}$.

Решение. Ще използваме наготово (доказвано на лекции), че при тези условия множеството $Range(f)$ е разрешимо. Нека неговата характеристична функция е χ_f, а тази на $Range(g)$ съответно χ_g. Дефинираме функцията

$$g^{-1}(y) \simeq \begin{cases} \mu x[|g(x) - y| = 0] + 1, & \text{ако } y \in Range(g) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Предикатът $y \in Range(g)$ е рекурсивен (с характеристична функция χ_g), а минимизацията и константата са частични функции, следователно $g^{-1}(y)$ е частично рекурсивна. Тук трябва да направим някои уточнения - ползваме `if then else` конструкцията, която поддържа лениво оценяване (call by name). Това гарантира, че при $y \in Range(g)$ е вярно $!\mu x[|f(x) - y| = 0]$, а оттук и че g^{-1} е тотална. Заключаваме, че *g^{-1} е рекурсивна.*
Можем да запишем условието за принадлежност към S по следния начин:

$$y \in S \Leftrightarrow y \in Range(g) \ \& \ (g^{-1}(y) \dot{-} 1) \in Range(f) \Leftrightarrow \chi_g(y) + \chi_f(g^{-1}(y) \dot{-} 1) = 0$$

Функцията вдясно е рекурсивна, следователно по *НДУ за разрешимост на множество* това множество е разрешимо. ■

Задача 13. Селектор за $A \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ наричаме всяка n-местна функция n, за която е изпълнено:

$$\exists y \ (\overline{x}, y) \in A \rightarrow !f(x) \ \& \ (\overline{x}, f(\overline{x})) \in A$$

Докажете, че всяко полуразрешимо множество $A \subseteq \mathbb{N}^n, n \geq 2$ притежава изчислим селектор.

Решение. Всъщност това, което трябва да докажем, доста напомня едната посока на *Теорема за графиката.* Доказатеслтвото е аналогично.

От НДУ за полуразрешимост следва, че съществува рекурсивна функция ρ:

$$A = \{(\overline{x}, y) | \ \exists t \ \rho(\overline{x}, y, t) = 0\}$$

Дефинираме $f(x) \simeq L(\mu z[\rho(\overline{x}, L(z), R(z)) = 0])$. Изчислимостта на f следва от дефиницията. Твърдим, че така дефинираната е и селектор.

коректност: Нека $(\overline{x}, y) \in A$. Тогава съществува $t : \rho(\overline{x}, y, t) = 0$. Да означим $z := \Pi(y, t)$. Тогава $\rho(\overline{x}, L(z), R(z)) = 0$. Това, комбинирано с факта, че ρ е рекурсивна, гарантира, че
$!\mu z[\rho(\overline{x}, L(z), R(z)) = 0]$, откъдето и $\underline{!f(\overline{x})}$. Тогава

$$(\overline{x}, f(\overline{x})) = (\overline{x}, L(\mu z[\rho(\overline{x}, L(z), R(z)) = 0]),$$

като нека означим $z_0 := \mu z[\rho(\overline{x}, L(z), R(z)) = 0]$. Знаем, че $f(\overline{x}) = L(z_0)$. И понеже $\rho(x, L(z_0), R(z_0)) = 0$, то $\rho(\overline{x}, f(\overline{x}), R(z_0)) = 0$, откъдето $\underline{(\overline{x}, f(\overline{x})) \in A}$. ■

Задача 14. Нека A е разрешимо. Докажете, че следните две условия са еквивалентни:

1) A има рекурсивен селектор;

2) $B = \{\ \overline{x} \mid \exists y\ (\overline{x}, y) \in A\ \}$ е разрешимо.

Решение.
Нека χ_A е характеристичната функция на A (тя е рекурсивна).
1) $\Rightarrow$ **2**): Нека f е рекурсивен селектор за множеството A. Лесно се вижда, че

$$\overline{x} \in B \Leftrightarrow (\overline{x}, f(\overline{x})) \in A$$

Обратната посока следва от дефиницията на B. В правата посока твърдението също е в сила, защото

$$\overline{x} \in B \Leftrightarrow \exists y\ (\overline{x}, y) \in A \Rightarrow (\overline{x}, f(\overline{x})) \in A$$

В крайна сметка

$$\overline{x} \in B \Leftrightarrow (\overline{x}, f(\overline{x})) \in A \Leftrightarrow \chi_A(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0$$

Последната функция е рекурсивна, следователно по *НДУ за разрешимост* на множество B е разрешимо. ✓

2) $\Rightarrow$ **1**): Дефинираме f по следния начин

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \overline{x} \notin B \\ \mu y[\chi_A(\overline{x}, y) = 0], & \text{иначе} \end{cases}$$

Първо да се уверим, че функцията е рекурсивна. Това следва от факта, че χ_A е такава (следователно $!\chi_A(\overline{x}, y)$), и от $\overline{x} \in B \Leftrightarrow \exists y\ (\overline{x}, y) \in A \Leftrightarrow \exists y\ \chi_A(\overline{x}, y) = 0$.

Нека сега $\exists y\ (\overline{x}, y) \in A$, тогава $\overline{x} \in B$ и както стана ясно от горното, $!f(x)$. В такъв случай $f(x) = y_0 = \mu y[\chi_A(\overline{x}, y) = 0]$. Следователно $\chi_A(\overline{x}, y_0) = 0$ и наистина

$$(\overline{x}, f(\overline{x})) = (\overline{x}, y_0) \in A$$

Това доказва, че рекурсивната f е селектор. ■