Рекурентни уравнения

"Историята са повтаря"

Декември 2025

Алгоритъм

Дефиниция 1. (*рекурентно уравнение*) Виж *дефиниция 1*.

Ще покажем метод за решаване на рекурентни уравнения от вида:

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{P_1(n).b_1^n + ... + P_l(n).b_l^n}_{\text{нехомогенна част}},$$

където: $c_1, ..., c_{n-k}, b_1, ..., b_l$ са константи, $b_1, ..., b_l$ са две по две *различни*, $P_1(n), ..., P_l(n)$ са (крайни) полиноми на n.
За да отговаря едно уравнение на горния вид са особено важни следните:

- уравнението има крайна история (т.е. k, l са константи)
- уравнението има константни коефициенти

Забележка (начални условия). Самото уравнение може да се реши еднозначно (да се намери формула за общия член, в която да няма неизвестни), стига да са дадени стойности за поне k члена (начални условия).

Разглеждаме само хомогенната част, в нея заменяме a_i с x^i, така получаваме равенството:

$$x^n = c_1 x^{n-1} + ... + c_k x^{n-k} \quad \Big| : x^{n-k}$$

$$x^k = c_1 x^{k-1} + ... + c_k x^0 \quad \textit{(1) /характеристично уравнение/}$$

От решенията на характеристичното уравнение образуваме мултимножеството (мулти, защото някои корени могат да са двойни):

$$M_1 = \{x_0 |\ x_0 \text{ е решение на } (1)\}_M$$

От нехомогенната част образуваме и второ мултимножество, чиито елементи са основите на експонените (т.е. b_i-тата), като всяка ще участва в множеството $deg_i + 1$ на брой пъти, където $deg_i + 1$ е степента на полинома $P_i(n)$:

$$M_2 = \{\underbrace{b_1, b_1, ..., b_1}_{deg(P_1(n))+1}, b_2, ..., \underbrace{b_l, b_l, ..., b_l}_{deg(P_l(n))+1}\}_M$$

Взимаме обединението на двете мултимножества: $M = M_1 \cup M_2$ (забележете, че $|M| = |M_1| + |M_2| = k + l$). Тогава общото решение на рекурентното уравнение е:

$$a_n = \underbrace{A_1 n^0 x_1^n + A_2 n^1 x_1^n + ... + A_{r_1} n^{r_1 - 1} x_1^n}_{r_1 \text{ на брой}} + ... + \underbrace{A_{...} n^0 x_t^n + \cdots + A_{|M|} n^{r_t - 1} x_t^n}_{r_t \text{ на брой}},$$

където $x_1, ..., x_t$ са различните стойности в мултимножеството M, r_i е съответно броят срещания на x_i в M, а $A_1, ..., A_{|M|}$ са коефициенти, чиито точни стойности излизат от базовите случаи. ■

**Полезно.* Понякога самата формула за общия член е сравнително очевидна (или вече известна), но минаването през алгоритъма, който ще доведе до нея, е тежко. В такъв случай алтернативен вариант е да докажем валидността на формулата директно по индукция.

1 Задачи по алгоритъма

Задача 1. Кои от следните рекурентни уравнение могат да бъдат решени с горепосочения алгоритъм?

а) $a_n = 2a_{n-1} + (n^2 + 3n - 4)2^n + 3^n$

б) $a_n = 3a_{n-2} + (2n - 3)3^n + 5^n$

в) $a_n = a_{n-1} + (2n - 3)3^n + (n^2 + 3)3^n$

г) $a_n = 3a_{n-1} + (3n^2 + 5n - 4)2^{n+2}$

д) $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1}$

е) $a_n = (n - 1)a_{n-1} + 3n2^{n+1}$

ж) $a_n = a_{n-1} + n^2 + 2n + 5$

з) $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1} + (n - 1)2^{2n-1}$

и) $a_n = a_{n-1} + 4^{n/2}$

к) $a_n = a_{n-1} + ... + a_1$

л) $a_n = 2a_{n-2} + 4^{n/2}$

м) (*) $a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n$

Решение. а) може, б) може, в) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n)3^n$),
г) може (свежда се до $a_n = 3a_{n-1} + (12n^2 + 20n - 16)2^n$),
д) може (свежда се до $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n$),
е) не може (неконстантни коефициенти),
ж) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n + 5)1^n$),
з) може (свежда се до $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n + (\frac{n}{2} - \frac{1}{2})4^n = 4a_{n-1} + (2n^2 + \frac{n}{2} - \frac{17}{2})4^n$),
и) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + 2^n$),
к) *може* (всъщност се свежда до $a_n = 2a_{n-1}$), л) може;
м) трябва да се обърне внимание, че индексът отляво е $n + 1$, а не n, тогава вдясно полиномите трябва да са на $n + 1$, както и степените на експонентите, в случая можем да сведем в такъв вид: $a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n = a_n + ((n + 1)^2 + (n + 1))3^{n+1}$ ■

Задача 2. Да се решат следните рекурентни уравнения:

- $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- (*) $a_{n+1} = 10a_n - 21a_{n-1} + 3^n$, ако $a_0 = 1, a_1 = 4$;
- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3^{n+2}$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- (*) $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$, ако $a_0 = 1, a_1 = 5$;
- (*) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2}$, ако $a_0 = 3, a_1 = 7$;
- $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + (-1)^n$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;

Решение.

- *За упражнение*
- Единствено ще обърнем внимание, че даденото е еквивалентно на $a_n = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + 3^{n-1} = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + \frac{1}{3}3^n$ (разликата е, че приведохме израза във форма, в която индексът отляво си е n, а не $n+1$, което искаме, за да не стават объркывания). Оттук нататък *решението остава на Вас :)*
- *За упражнение*

- Уравнението има само хомогенна част. Характеристичното му уравнение е $x^2 = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$ - Тук обаче има проблем, поне на пръв поглед, дискриминантата е отрицателна, корени няма... по-точно реални корени няма (но пък си има комплексни): $x_1 = 1 - 2i, x_2 = 1 + 2i \Rightarrow M = M_1 = \{1 - 2i, 1 + 2i\}$, откъдето общото решение на уравнението е: $a_n = C_1(1-2i)^n + C_2(1+2i)^n$. Знаем, че $a_0 = 1, a_1 = 5 \Rightarrow$

  $$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = a_0 = 1 \\ C_1(1-2i) + C_2(1+2i) = a_1 = 5 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{1}{2} + i \Rightarrow a_n = (\frac{1}{2} + i)(1-2i)^n + (\frac{1}{2} - i)(1+2i)^n =$$

  $$(\frac{1+2i}{2})(1-2i)^n + (\frac{1-2i}{2})(1+2i)^n = \frac{5}{2}(1-2i)^{n-1} + \frac{5}{2}(1+2i)^{n-1} \quad \blacksquare$$

  Забележка. Макар коефициентите да са комплексни, общият член a_n си остава реално число (даже цяло).

- *За упражнение (не ми се пише повече :/)*

- *За упражнение*

Задача 3. (*двойно рекурентно уравнение*) Нека $a_0 = 0, b_0 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$. Да се намерят формули за a_n и b_n.

Решение. Малко повече за този тип задачи:
**Полезно: обикновено идеята при решаване на рекурентни уравнения, в които участват няколко взаимно свързани рекурентни редици, е чрез елементарни преобразувания да намерим прости рекурентни уравнения (с елементите на една редица, а не на няколко, както по начало).*

Разглеждаме разликите:
- от $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2b_{n-1}$;
- $b_n - b_{n-1} = (-a_{n-1} + 4b_{n-1}) - (-a_{n-2} + 4b_{n-2}) = -(a_{n-1} - a_{n-2}) + 4(b_{n-1} - b_{n-2})$, заместваме от горното $\Rightarrow b_n - b_{n-1} = -2b_{n-2} + 4(b_{n-1} - b_{n-2}) = 4b_{n-1} - 6b_{n-2}$;
$b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$ има само хомогенна част, характеристичното уравнение е $x^2 = 5x - 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3 \Rightarrow M = \{2, 3\} \Rightarrow b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. От $b_0 = 1, b_1 = 4 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2 \Rightarrow b_n = -2^n + 2.3^n$. Сега например можем да заместим $b_{n-1} = -2^{n-1} + 23^{n-1}$ директно в $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n = a_{n-1} - 2^{n-1} + 23^{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{2}2^n + \frac{2}{3}3^n \Rightarrow M_1 = \{1\}_M, M_2 = \{2, 3\}_M \Rightarrow M = \{1, 2, 3\}_M \Rightarrow a_n = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n$. От $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 10 \Rightarrow A_1 = -3, A_2 = 4, A_3 = -1 \Rightarrow a_n = -3 + 4.2^n - 3^n = -3 + 2^{n+2} - 3^n$. $\blacksquare$

Задача 4. Колко n-цифрени цели положителни числа съдържат в записа си четен брой петици (включително нито една)?

Решение. Нека a_n е броят n-цифрени числа, съдържащи *нечетен* брой петици в записа си, а b_n е броят n-цифрени числа, съдържащи *четен* брой петици в записа си. Имаме $a_1 = 1, b_1 = 8, a_2 = 17, b_2 = 73$. Разглеждаме n-цифрено число с четен брой петици, имаме два случая:

- Ако последната цифра е 5, то при премахването ѝ, оставащото число е с $n-1$ цифри и нечетен брой петици в записа си (такива числа има a_{n-1}).

- Ако последната цифра *не* е 5 (тоест за нея има 9 други възможности), то при премахването ѝ, оставащото число е с $n-1$ цифри и отново четен брой петици в записа си (такива числа има b_{n-1}).

От направените съображения $b_n = a_{n-1} + 9b_{n-1}$. За да сведем до решаване на едно уравнение, се сещаме, че $a_n + b_n = 9.10^{n-1} \Rightarrow b_n = (9.10^{n-2} - b_{n-1}) + 9b_{n-1} = 8b_{n-1} + 9.10^{n-2} = 8b_{n-1} + \frac{9}{100}.10^n$.

Конструираме $M_1 = \{8\}_M, M_2 = \{10\}_M \Rightarrow M = \{8, 10\}_M \Rightarrow b_n = C_1 8^n + C_2 10^n$. От базовите случаи следва, че $8C_1 + 10C_2 = 8$ и $64C_2 + 100C_2 = 73 \Rightarrow C_2 = \frac{9}{20}, C_1 = \frac{7}{16} \Rightarrow b_n = \frac{7}{16}8^n + \frac{9}{20}10^n$. $\blacksquare$

Задача 5. Да се намерят формули за сумите:

- $s_n = s_{n-1} + \cdots + s_1, s_1 = 1;$
- $s_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2;$
- $s_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3;$

Решение.

- На пръв поглед това уравнение е с некрайна история и алгоритъмът е неприложим, но пък може да бъде сведено до такова с крайна: $s_n - s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i - \sum_{i=1}^{n-2} s_i = s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2^{n-1}$. ■

- $s_n = s_{n-1} + n^2 = s_{n-1} + n^2.1^n$ Характеристичното уравнение е тривиално: $x^n = x^{n-1} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 = \{1\}_M$.
  От нехомогенната част пък следва, че $M_2 = \{1,1,1\}_M$, значи $M = \{1,1,1,1\}_M \Rightarrow s_n = C_1 1^n n^0 + C_2 1^n n^1 + C_3 1^n n^2 + C_4 1^n n^3$. Имаме базови случаи $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 5, s_3 = 14 \Rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5 \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14 \end{array} \right. \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow s_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 =$$

$$= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ■$$

- *За упражнение*, Отг. $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Задача 6. Дадена е правоъгълна таблица $2 \times n$, по колко начина тя може да бъде покрита с домино плочки 1×2, като последните могат да се завъртат, но не и застъпват.

Решение. Нека с a_n означим броя на покритията за лента с размери $2 \times n$. Ясно е, че $a_0 = 1, a_1 = 1$. За a_n имаме два случая:

- На последната колона стои едно домино (изправено). Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери $2 \times (n-1)$, които са точно a_{n-1}.
- На последната колона стоят две хоризонтални домино плочки. Те покриват и предната колона. Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери $2 \times (n-2)$, които са точно a_{n-2}.

Двата случая се независими и допълващи се, от принципа за събиране: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, Което ни дава формулата за числата на Фибоначи, изместени с едно, т.е. $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. ■

Задача 7. По колко начина човек може да се изкачи по стълба с n стъпала, ако е възможно да се качва и през стъпало (тоест да минава на следващото или по-следващото)?

- Да се реши същата задача, ако се знае, че на стъпало с номер $i, 1 < i < n$ не може да се стъпва (да кажем е счупено).

Решение. Ако a_n е броят начини, по които може да се изкачат n стъпала, то явно $a_0 = 1, a_1 = 1$. Човекът може да се качи на стъпало n от стъпало $n-1$ или от стъпало $n-2$, тоест $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Отново получаваме редицата на Фибоначи, изместена с един член напред, значи $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. ■
Сега за втората част, до стъпало $i-1$ промяна в разсъжденията няма. Понеже i е счупено, $a_i = 0, a_{i+1} = a_{i-1}$. Оттам нататък рекурентната зависимост отново е в сила. Можем да считаме, че това е нова рекурентна редица, $b_0 = a_i = 0, b_1 = a_{i+1} = a_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{i-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{i-1} = F_i$, тогава до стъпало n можем да се изкачим по b_{n-i} начина, където $b_{n-i} = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-i} + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-i}$, като от

$b_0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$ и от $b_1 = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = C_1[(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})] = C_1\sqrt{5} \Rightarrow C_1 = \frac{F_i}{\sqrt{5}}$.
Така крайният отговор е $b_{n-i} = \frac{F_i}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-i} - \frac{F_i}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-i} = F_i F_{n-i}$. ■

Това горе е малко тъп начин да се реши втората час, вместо това можем да мислим за двете изкачвания като независими процеси. Щом трябва да се прескочи стъпало i, трябва да се мине от стъпало $i-1$ направо на $i+1$. Явно търсеният брой е произведението на двете:
$answer =$ (броя начини , по които можем да стигнем до $i-1$) $\times$ (броя начини, по които можем да стигнем, от $i+1$ до n) $= F_i.F_{n-i}$. ■

2 По-трудни задачи

За повечето от задачите по-долу по нищо не личи, че се свеждат именно до решаване на рекурентно уравнение, което и ги прави по-нетривиални.

Задача 8 (*derangements*)**.** Колко са пермутациите на числата от 1 до n такива, че никое число не е на мястото си (т.е. число i не е на позиция i), да се даде рекурентна формула?

Решение. Тази задача вече сме решавали (само че с друг подход - с принципа на включване и изключване). Тук обаче ще търсим рекурентно решение. Нека с D_n бележим броя на тези пермутации. Лесно се вижда, че $D_1 = 0, D_2 = 1$. За $n > 2$ разглеждаме произволна пермутация с исканото свойство. Значи на позиция 1 стои число $x \neq 1$. Да разгледаме два случая:

- На позиция x стои 1 (тоест 1 и x са си разменили местата). Можем да съобразим, че броят на пермутациите решения, за които това е изпълнено е D_{n-2}. Причината е, че застопорявайки 1 и x, сведохме задачата до разпределяне на оставащите числа: $2, 3, \cdots x-1, x+1, \cdots n$ върху собствените им позиции: $2, 3, \cdots x-1, x+1, \cdots n$ така, че никое да не стои на мястото си. Ясно е, че задачата е същата като намирането на деранжименти на числата $1, \cdots n-2$, единствено "имената" на числата не са същите, това са D_{n-2} валидни пермутации.
- На позиция x *не* стои 1, а някое друго число. Вече застопорихме x на първа позиция, тоест търсим броя разпределяния на числата $1, 2, \cdots x-1, x+1, \cdots n$ върху позиции $2, 3, \cdots n$ така, че никое число (това важи за всички числа без 1 и x) *не* е на позицията си и 1 *не* е на позиция x. Тъй като позиция 1 не участва в разглежданите (там вече стои x), можем да си мислим, че позиция x е новата позиция 1, все едно сменяме името ѝ на $\tilde{1}$. Така сведохме до: "по колко начина можем да разпределим числата $1, 2, \cdots x-1, x+1, \cdots n$" на позиции $\tilde{1}, 2, \cdots x-1, x+1, \cdots n$" така, че никое число не е на позицията си, това е същата задача, има D_{n-1} такива пермутации.

Понеже x е произволно, $x \neq -1$, а за избора му има $n-1$ варианта и двата случая са независими и допълващи се $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, което обаче не е в хубавия вид за алгоритъма. ■

derangements

Задача 9 (*)**.** Да се намери броят на всички k-елементни низове, съставени от символите a, b, c, в които няма два съседни букви b и всички букви b са вляво от всички букви c. Изисква се точен отговор (числена формула).

Решение. За краткост ще наричаме низовете, отговарящи на двете условия (да не съдържат последователност "*bb*", както и буква '*c*' вляво от '*b*') и независимо тяхната дължина, *решения*.
Да обърнем внимание, че всеки подниз на решение също е решение. В частност, всеки префикс на решение отново е такова.

Нека с ans_n означим бройката на всички решения с дължина n, а с f_n бройката на тези от тях, в които *не* се среща символ c. Тогава е $ans_1 = 3, f_1 = 2, ans_2 = 7, f_2 = 3, ans_3 = 16, f_3 = 5$ и т.н.

При така направените означения ще докажем следните (за $n \geq 2$):

$$\left|\begin{array}{l} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_n = F_{n+2} \\ ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} \end{array}\right.$$

За начало, разглеждаме решенията в които *не* се среща символът c. Тях можем да разделим на два вида - такива, завършващи на a, и такива, завършващи на b:

- $\boxed{\cdots \mathbf{a}}$: Префиксът, съставен от първите $n-1$ символа на всеки такъв низ, отново съдържа само буквите a, b и отговаря на началните условия. Това означава, че броят низове от вида $\cdots \mathbf{a}$ съответства на броя на решенията с дължина $n-1$, в които няма буква c, тоест е точно $\underline{f_{n-1}}$.

- $\boxed{\cdots \mathbf{b}}$: Разглежданите низове от втория вид завършват на b, следователно предпоследната им буква трябва да е a, тоест имат вида $\boxed{\cdots \mathbf{ab}}$. За буквите преди това ограничения няма, освен да са a,b и да съставят решение. В крайна сметка, бройката низове от текущия вид съответства на бройката решения с дължина $n-2$ и съставени само от буквите a, b, или е точно $\underline{f_{n-2}}$.

Оттук получаваме рекурентната зависимост $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и понеже тя е същата като тази на редицата на Фибоначи, а също $f_1 = 2 = F_3, f_2 = 3 = F_4$, то $f_n = F_{n+2}$ (тоест редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата на Фибоначи, изместена с два члена "наляво").

Решенията с дължина $n > 1$ можем да разбием на такива, завършващи на b и такива, завършващи на a или c.
Понеже преди b може да стои единствено a, първите имат видът $\boxed{\cdots \mathbf{ab}}$, а както показахме по-горе, такива низове с дължина n са $\underline{f_{n-2}}$ на брой.
За завършващите на a или c префиксът, определен от оставащите $n-1$ символа, е произволно решение с дължина $n-1$, така че те са $\underline{2.ans_{n-2}}$ на брой (по 2, защото може да завършват както на a, така и на c).

В крайна сметка, $ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} = 2ans_{n-1} + F_n = 2ans_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Мултимножеството, получено от алгоритъма е $M = \{2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}_M \Rightarrow ans_n = C_1.2^n + C_2.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_3(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. От базовите случаи $ans_0 = 1, ans_1 = 3, ans_2 = 7, ans_3 = 16$ получаваме:
$ans_n = 3.2^n + (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (-1 + \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. ■

Задача 10. (*) Да се докаже, че числото $(4+\sqrt{7})^{2024}+(4-\sqrt{7})^{2024}$ е цяло и да се намери последната му цифра.

Решение. Сещаме се да представим числото като член на рекурентна редица.. Нека $a_n = 1.(4+\sqrt{7})^n + 1.(4-\sqrt{7})^n$ - общо решение/уравнение. Тогава $a_0 = 2, a_1 = 8$. Ако разглеждаме a_n като рекурентно уравнение, то $M = \{4+\sqrt{7}, 4-\sqrt{7}\}$ са решения на характеристичното му уравнение. Навярно последното е от втора степен (с два корена $x_1 = 4+\sqrt{7}$ и $x_2 = 4-\sqrt{7}$), тогава то би имало вида $x^2 = bx + c$, знаем корените му, значи можем да ползваме формулите на Виет (за $a = 1$): $-(-b) = x_1 + x_2 = 8, -c = x_1x_2 = 9$, на което съответства рекурентното $a_n = 8a_{n-1} - 9a_{n-2}$.
Понеже $a_0, a_1, 8, -9 \in \mathbb{Z}$, а целите числа остават цели след събиране и умножение, така че и a_n, в частност $a_{2024} \in \mathbb{Z}$. □
Последната цифра е остатъкът на числото при деление на 10, т.е. търсим a_{2024} $(mod\ 10)$. Понеже остатъците при деление на 10 са краен брой, то в даден момент те ще започнат да се повтарят. Търсим "pattern":

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
a_i $(mod\ 10)$	2	8	6	6	4	8	8	2	4	4	6	2	2	8	$\cdots$

Вижда се, че на всеки 12 члена редицата от остатъците се повтаря, ние се интересуваме от a_{2024}, 2024 $(mod\ 12) = 8 \Rightarrow$ остатъкът ще е същият като на a_8, т.е. 4. ■

Задача 11. (**) Намерете цифрите директно вляво и вдясно от десетичната запетая на числото $(\sqrt{7}+\sqrt{13})^{2024}$.

Решение. За начало да намерим последната цифра. Разглеждаме $a_{2024} = (\sqrt{7}+\sqrt{13})^{2024} + (\sqrt{7}-\sqrt{13})^{2024}$. Всъщност второто събираемо е пренебрежимо малко, така че то не би се отразило на цифрата на единиците на сумата, т.е. $(\sqrt{7}+\sqrt{13})$ и a_{2024} имат еднаква последна цифра на цялата част. Сведохме до намиране на цифрата на единиците на a_{2024}
Аналогично на горната задача, можем да гледаме на $a_n = (\sqrt{7}+\sqrt{13})^n + (\sqrt{7}-\sqrt{13})^n$ като общо решение на рекурентно уравнение. Характеристичното уравнение на последното би било $x^2 = ((\sqrt{7}+\sqrt{13}) + (\sqrt{7}-\sqrt{13}))x - (\sqrt{7}+\sqrt{13}).(\sqrt{7}-\sqrt{13}) = 2\sqrt{7}x + 6 \Rightarrow a_n = 2\sqrt{7}a_{n-1} + 6a_{n-2}$

Задача 12. (*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които $f(f(x)) = 21x - 4f(x)\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Решение. Разглеждаме произволно $a_0 \in \mathbb{N}$, нека означим $a_1 := f(a_0), \cdots, a_n := f^n(a_0), \cdots$, получаваме безкрайна редица. Заместваме x в даденото по условие уравнение с a_n, $f(f(a_n) = 21a_n - 4f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 21a_n - 4a_{n+1}$. Така образуваме характеристичното уравнение $\lambda^2 + 4\lambda - 21$ с корени $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 3$. Значи общото уравнение има вида $a_n = C_1(-7)^n + C_2 3^n, C_1, C_2$ са коефициенти. Имаме също $a_0 = C_1(-7)^0 + C_2 3^0 = C_1 + C_2$ *(1)*, както и $a_1 = -7C_1 + 3C_2$ *(2)*.
Да забележим, че независимо знака на C_1, при $C_1 \neq 0, n$ - нечетно : $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, което би било противоречие с $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$. Заключаваме, че $C_1 = 0$. Оттук, от *(1)* и от *(2)* директно $a_0 = C_2, a_1 = 3C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 3C_2 = 3a_0$, тоест $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 3x$ е единствен кандидат за решение!
Правим проверка в условието: $f(f(x)) = 3(3x) = 9x = 21x - 4(3x) = 21x - 4f(x)$, тоест върши работа. ∎

Задача 13. (*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които $f(f(x)) = 6x - f(x)\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Решение. Решението повтаря това на предната задача. Разглеждаме произволно $a_0 \in \mathbb{N}$, нека означим $a_1 := f(a_0), \cdots, a_n := f^n(a_0), \cdots$, получаваме безкрайна редица. Заместваме x в даденото по условие уравнение с a_n, $f(f(a_n) = 6a_n - f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Така образуваме характеристичното уравнение $\lambda^2 + \lambda - 6$ с корени $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Значи общото уравнение има вида $a_n = C_1(-3)^n + C_2 2^n, C_1, C_2$ са коефициенти. Имаме също $a_0 = C_1(-3)^0 + C_2 2^0 = C_1 + C_2$ *(1)*, както и $a_1 = -3C_1 + 2C_2$ *(2)*.
Да забележим, че независимо знака на C_1, при $C_1 \neq 0, n$ - нечетно : $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, което би било противоречие с $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$. Заключаваме, че $C_1 = 0$. Оттук, от *(1)* и от *(2)* директно $a_0 = C_2, a_1 = 2C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 2C_2 = 2a_0$, тоест $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ е единствен кандидат за решение!
Правим проверка в условието: $f(f(x)) = 2(2x) = 4x = 6x - 2x = 6x - f(x)$, тоест върши работа. ∎

Задача 14. По колко начина числата от 1 до n могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от *някое* от числата вляво от него.

Решение. Ще покажем две възможни решения:
1 н.) /комбинаторни съображения/ Нека първият елемент в редицата е k. Сравнително лесно се вижда, че числата $k+1, k+2, \cdots, n$, които се намират някъде надясно, трябва да са в точно този ред (в противен случай ще се наруши условието за наличие на елемент с разлика 1 вляво от всеки). Аналогично числата $k-1, k-2, \cdots, 1$ също трябва да са в този (от подобни съображения). Сега остава да видим колко са пермутациите на числата $1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$, които имат като подредици $k+1, k+2, \cdots, n$ и $k-1, k-2, \cdots, 1$. Имаме $n-1$ позиции, от тях трябва да изберем например на кои места ще стоят числата по-малки от k (оттам нататък нещата са еднозначно определени) - има $\binom{n-1}{k-1}$. Понеже $k, 1 \leq k \leq n$ е произволно число, то общо редиците/пермутациите са $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^n 1^n = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$. ∎

**2 н.) /рекурентно решение/* Нека T_n е броят такива редици при конкретно n. Първо докажем следното помощно твърдение:
Твърдение: *За всяка редица, отговаряща на условието, последният член е винаги или n, или 1.*
Д-во: Да обърнем внимание на броя възможни различни ненаредени двойки числа с разлика едно - има общо $n-1$ такива двойки $(\{1,2\}, \{2,3\}, \cdots, \{n-1, n\})$. Нещо повече, в исканите пермутации някъде вляво на всяко число x (изключаю първото) трябва да стои друго число y такова, че

$|x-y|=1$, ако има няколко такива y, гледаме само последното. Да наречем такава двойка "връзка" и да я означим с множеството $\{x, y\}$. Тези "връзки" са различни и за всяка валидна редица те трябва да са точно $n-1$ (за всеки елемент освен първия има по една). Също така "връзките" са измежду написаните по-горе двуелементни множества от числа с разлика едно, които обаче също са точно $n-1$ на брой. Значи "връзките" съвпадат с гореописаните двуелементни множества. Да допуснем, че числото $t, 1 < t < n$ стои на последна позиция в редицата, от една страна то ще участва в точно една "връзка" (няма как в повече, щом е последно), но от друга, то участва в две двойки множества ($\{t-1, t\}$ и $\{t, t+1\}$). Това е противоречие с факта, че множествата съвпадат с "връзките". (*навярно има и по-чисто доказателство, приемат се предложения*) $\square$

Лесно се забелязва, че ако последният елемент на редицата е n, то можем да си представим, че той не съществува. За членовете преди това няма допълнителни ограничения и задачата се свежда до намиране на всички валидни редици с елементи $1, 2, \cdots, n-1$, които са T_{n-1}. Аналогично в случая, когато последният елемент е 1. Така общо валидните редици с дължина n са $2T_{n-1}$, $T_1 = 1 \Rightarrow T_n = 2^{n-1}$. $\blacksquare$

Задача 15. (*tridiagonal matrix determinant*) Да се пресметне детерминантата $D_n = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & .... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{vmatrix}$

Решение. Развиваме детерминантата по първи ред, а после по първи стълб: $D_n = 7D_{n-1} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 6 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 7 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & .... \\ 0 & 0 & ... & 7 & 6 \\ 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{vmatrix} =$
$7D_{n-1} - 6.2Dn - 2 = 7D_{n-1} - 12D_{n-2}$.

Ако разглеждаме последното като рекурентно уравнение, неговото характеристично уравнение ще е $\lambda^2 = 7\lambda - 12$ с корени $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$, откъдето общото решение е $D_n = C_1 4^n + C_2 3^n$, където C_1, C_2 са коефициенти. От $D_1 = 1, D_2 = 37, D_3 = 175, ... \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -3 \Rightarrow D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$. $\blacksquare$

Още задачи

Допълнителни задачи с решения за рекурентни уравнения може да откриете на:
https://www.math.bas.bg/smb/izmat/izvanredna/resources/mathadvanced2.pdf

(вижте **стр. 55/3**, **стр. 57/6**, **стр. 58/7,8**, **стр. 62/12**)

Бонус - решаване на рекурентни уравнения с матрици

https://www.youtube.com/watch?v=CXMgvJSwyvo
https://math.stackexchange.com/questions/124178/generating-matrix-for-a-recurrence-relation
https://www.hackerearth.com/practice/notes/solving-linear-recurrence-relation/