7. Комбинаторика

"По колко начина могат да те скъсат?"

Декември 2025

1 Основни задачи

Принципи на събирането и умножението

Задача 1. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, ако всяко меню се състои от супа, основно, десерт?

Решение. Принцип на умножението: 5.2.4=40. ■

Задача 2. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, не е задължително менютата да са тристепенни, но трябва да имат поне по едно ядене?

Решение. Задачата е същата, но можем да си представим "невзимането" на дадено ядене като още един вариант (например така вече имаме 5+1=6 супи, като последната супа е просто празна купа). Принцип на умножението: (5+1).(2+1).(4+1)=90. Изваждаме 1 (защото в бройката сме включили възможността нищо да не е взето). 90-1=89 ■

Задача 3. Колко са трицифрените числа с различни цифри?

Решение. За първа цифра имаме 9 варианта (всичко без 0), за втора отново 9 (една цифра вече е използвана), за трета - 8. Принцип на умножението: 9.9.8=648. ■

Задача 4. Колко са трицифрените числа с три различни или три еднакви цифри?

Решение. Има 9 числа с еднакви цифри, прибавяме, принцип на събирането: 648+9=657 ■

Задача 5. Колко са четните трицифрени числа с различни цифри?

Решение. Разглеждаме два варианта:

- последната цифра е 0, тогава за първа цифра имаме 9 варианта, за втора остават 8. От принципа за умножението: 8.9=72 числа.
- последната цифра не е 0 (значи е 2, 4, 6 или 8). За първа цифра този път има 8 варианта, за втора отново 8. Има 8.8.4=256 такива числа.

Принцип на събирането: 72+256=328. ■

Задача 6. Колко са 10-буквените низове, съставени от различни малки латински букви, в които не се срещат една до друга буквите a и b?

Решение. Низовете с различни букви са $26.25.\cdots.17$. Да преброим в колко от тях се срещат една до друга буквите a, b, можем да си ги представяме в "пакет", като нова буква (съответно ab или ba), който задължително трябва да присъства. Сега обаче няма да строим 10-буквени низове, а 9-буквени, в които една от буквите е въпросният "пакет". 9 възможности за разполагането му, 2 за реда на буквите a и b, $24.23\cdots.17$ варианта за оставащите 10-2=8 букви. Краен отговор: $(26.25.\cdots.17) - 9.2.(24.23\cdots.17)$ ■

Задача 7. Колко са n-буквените низове, съставени от малки латински букви, в които се срещат поне две поредни еднакви букви?

Решение. Да преброим в колко низа няма две поредни еднакви букви: За първата буква имаме 26 варианта, за втората, понеже не можем да повторим предната, имаме 25. Аналогично за третата отново имаме 25 варианта, същото за четвъртата и т.н. В крайна сметка имаме общо $26.25^{(n-1)}$ варианта. Изваждаме това от общата бройка, остават $26^n - 26.25^{(n-1)}$ низа. ■

Пермутации

Задача 8. По колко начина могат да се хванат n души на хоро?

Отговор. $(n-1)!$

Задача 9. Колко различни гривни могат да бъдат направени от n различни мъниста?

Отговор. $\frac{(n-1)!}{2}$

Задача 10. Колко различни думи могат да се построят от буквите на думата "МИШКА"?

Отговор. $5!$

Задача 11. Колко различни думи могат да се построят от буквите на думата "МАТЕМАТИКА"?

Отговор. $\frac{10!}{2!3!2!}$ (заради повтарящите се М-та, А-та, Т-та).

Кп,н

Задача 12. Колко са всички подмножества на n-елементно множество?

Отговор. 2^n

Задача 13. Колко са всички тотални функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. n^m

Задача 14. Колко са всички частични функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. $(n+1)^m$, представяме си в кодомейна има още едно състояние $''undefined''$.

Задача 15. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи могат да бъдат съставени?

Отговор. n^m

К

Задача 16. По колко начина могат да се изберат m човека от група от n?

Отговор. $\binom{n}{m}$

Задача 17. Колко са всички низове с n символа $'*'$ и m символа $'|'$?

Отговор. $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$

Задача 18. По колко начина от 12 топки, половината от които са бели, а другите черни, може да се изберат 3 черни и 2 бели топки?

Отговор. $\binom{6}{3}\binom{6}{2}$

Кн

Задача 19. По колко начина 10 човека могат да седнат на 5-местна пейка (не се позволява да стоят един в друг).

Отговор. $10.9.8.7.6 = \frac{10!}{5!}$

Задача 20. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи с различни букви могат да бъдат съставени от тях?

Отговор. $\frac{n!}{n-m!}$

Кп

Задача 21. По колко начина можем да изберем 6 пасти, ако са налични 3 различни вида пасти?

Решение. Можем да си мислим за пастите като 6 * в редица. За да различаваме по колко пасти са от всеки вид, ще слагаме разделители, например $**\,|\,|\,****$ би означавало 2 пасти от първи вид, 0 от втори, 4 от трети. Използваме вече решената по-горе задача, има $\binom{6+2}{2} = \binom{6+2}{6}$ варианта. ■

Задача 22. По колко начина можем да изберем n пасти, ако са налични k различни вида пасти?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

Задача 23. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, като може да има празни кутии? Какво става, ако кутиите са неразличими?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Задача 24. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, ако няма празни кутии?

Решение. Да сложим във всяка кутия по предмет, остават $n-k$ неразличими предмета, сведохме до горната задача, значи търсеният отговор е: $\binom{(n-k)+(k-1)}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ ■.
Ако кутиите са неразличими, задачата се свежда до намиране на *integer partitions* на n-елементно множество, за което кратка формула няма. (виж *12fold way*)

Задача 25 (*наредени разлагания*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$. Две решения $(x_1, \cdots, x_k), (y_1, \cdots, y_k)$ се считат различни, ако $\exists i : x_i \neq y_i$. Как се променя задачата, ако искаме всичките числа да са положителни?

Решение. Отново прилагаме трика с разделителите, имаме n, трябва да го разбием на k части (редът има значение). Отново слагаме разделители, $k-1$ на брой. Общо вариантите са: $\binom{n+k-1}{n}$. Ако искаме само положителни решения (ненулеви), трябва $\forall i : x_i \geq 1$. Тогава $(x_1-1)+\cdots+(x_n-1) = n-k$ е ново уравнение, в което всеки член $y_i = x_i - 1 \geq 0$, така сведохме задачата до старата, търсеният брой в случая е:$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ ■

Задача 26 (*наредени разлагания при допълнителни ограничения*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, за които $x_1 \leq 30$.

Решение. Да намерим колко са всички решения, в които $x_1 > 30$ и да ги извадим от общия брой. Искаме $x_1 - 31 \geq 0$, тогава $(x_1 - 31) + x_2 + \cdots + x_n = n - 31$, след полагане $y_1 = x_1 - 31$ можем да запишем и като $y_1 + x_2 + \cdots + x_n = n - 31$ $(*)$, но така сведохме до оригиналната задача (понеже в момента за y_1 няма ограничения). Броят решения на (*) е: $\binom{n-31+k-1}{k-1} = \binom{n+k-32}{k-1}$. ■

Задача 27 (*брой растящи функции*)**.** Нека X, Y са множества от естествени числа, $|X| = m, |Y| = n$. Колко са растящите (нестрого) функции $f : X \mapsto Y$. А колко са строго растящите?

Решение. Нека с $a_i, 1 \leq i \leq n$ бележим броя числа от X, за които $f(x) = y_i$. Ясно е, че $a_1+\cdots+a_n = m$. Всяко решение на тази система еднозначно определя някоя растяща функция. Според горните твърдения броят е $\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}$.
Колкото до монотонно растящите, вижда се, че $a_i \leq 1$. Тоест трябва да изберем кои m от n-те a_i да бъдат единици, т.е. отговорът е $\binom{n}{m}$. ■

2 По-трудни задачи

Задача 28. В редица има n стола, а също и k човека, които искат да седнат така, че да няма двама човека на съседни столове. По колко начина може да стане това?

To be continued...