Контролно 1 на група 6

8 декември 2025 г.

Задача 1. За $n \in \mathbb{N}$ дефинираме

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$$

а) докажете, че $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$;

бонус: докажете с комбинаторни съображения;

б) по индукция докажете, че $A_n = F_n$, където $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ е n-тият член от редицата на Фибоначи;

Решение.

а) *Преди да представим решението, е добре да обърнем внимание на това, че тук директно е дадена стойността на* $A_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$ *(1), а се иска да бъде доказана рекурентната връзка* $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ *(2). Ето защо няма причина да ползваме индукция, можем директно да заместим (1) в (2) и да проверим, че тъждеството е изпълнено. Индукция щеше да е необходима, ако беше дадено (2) (+някаква база) и искахме да докажем (1).*

Равенството *(2)* е еквивалентно на $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{(n-1)-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{(n-2)-k}{k-1}$. Сега да проверим:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{(n-1)-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{(n-2)-k}{k-1} \overset{\text{разбиваме първата сума, полагаме } t=k+1}{=}$$

$$= \left[\binom{n-2}{0} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{(n-1)-k}{k-1} \right] + \sum_{t=2}^{n-1} \binom{(n-2)-(t-1)}{t-2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1-k}{k-1} + \sum_{t=2}^{n-1} \binom{n-1-t}{t-2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1-k}{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1-k}{k-2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\binom{n-1-k}{k-1} + \binom{n-1-k}{k-2} \right] \overset{\textit{Pascal's rule}}{=}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-k}{k-1} + 0 = \binom{n}{1-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-k}{k-1} + \binom{n-n}{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} \checkmark$$

бонус:
1 н.) можем да използваме директно задача *3 б)* като контекст за броене;

2 н.) Разглеждаме n-символните двоични низове с нечетен брой единици, в които поне половината единици са в началото. Ще покажем, че двете страни изразяват техния брой по различен начин.

LHS: Нека в низа има $2k+1$ единици, като поне $k+1$ са в началото, т.е. низът изглежда горе-долу така $\underbrace{11\cdots 1}_{k+1}??\cdots?$. Броят двоични низове от този вид съответства на броя варианти, по които можем да разпределим останалите k единици на оставащите $n-k-1$ позиции, т.е. $\binom{n-k-1}{k}$. Понеже $0 \le k < n$, то общият брой на въпросните низове ще е именно $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k} \overset{\text{полагаме } t=k+1}{=} \sum_{t=1}^{n}\binom{n-t}{t-1} = A_n$. ✓

RHS: Да разделим низовете на два подвида - такива завършващи на 0 и такива, завършващи на 1:

- **завършващи на 0** (от вида $1?\cdots?0$): Понеже се интересуваме единствено от броя единици, а последната цифра е 0, то можем да се абстрахираме напълно от нея и да разглеждаме всеки низ от този вид като низ с $n-1$ цифри - без последната (отново остава изискването за нечетен брой единици, поне половината от които стоят в началото). За последните обаче знаем (от доказаното за LHS), че са A_{n-1} на брой.
- **завършващи на 1** (от вида $1?\cdots?1$): Този път можем да се абстрахираме едновременно от първата и последната цифра на всеки такъв низ (които са все 1). Оставащата част е низ с $n-2$ единици, при това с нечетен брой единици (само че 2 по-малко), като отново повече от половината му единици са в началото му (съобразете). Така сведохме (поне точно намерихме взаимно еднозначно съответствие/биекция между) низовете от разглеждания вид до низове с дължина $n-2$ и същите свойства, за които вече знаем, че са A_{n-2} на брой.

Понеже всеки двоичен низ завършва или на 0, или на 1, то общият брой низове с исканите свойства е сумата на бройките на двата вида, т.е. $A_{n-1}+A_{n-2}$.

Това показва, че лявата и дясната част на броят еднакви обекти, тоест наистина има равенство, $\boxed{A_n = A_{n-1}+A_{n-2}}$. ■

б) със силна индукция:
База (трябва да е двойна!):
$A_0 = \sum_{k=1}^{0}\binom{0-k}{k-1} = 0 = F_0$ ✓
$A_1 = \sum_{k=1}^{1}\binom{1-k}{k-1} = \binom{0}{0} = 1 = F_1$ ✓
ИП: Нека за някое $n \in \mathbb{N}$ е в сила $\forall m < n : A_m = F_m$.
ИС: От доказаното в предната подточка $A_n = A_{n-1}+A_{n-2} \overset{\text{ИП}}{=} F_{n-1}+F_{n-2} = F_n$; ■

Задача 2 (40 т.). Нека $h : A \to A$ е функция. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- $(\forall f,g : A \to A)(f \circ h = g \circ h \to f = g)$;
- h е сюрективна;

Решение. Да изясним, че първото условие реално ни казва, че за всеки (произволни) две функции $f,g : A \to A$, ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$.
Еквивалентността ще докажем в двете посоки поотделно.

($\Leftarrow$) Нека е в сила, че h е сюрекция (т.е. $\forall a \in A\ \exists x \in A : h(x) = a$) и $f \circ h = g \circ h$. Ще докажем, че $f = g$ (т.е. $\forall a \in A : f(a) = g(a)$). От сюрективността за кое да е $a_0 \in A$ съществува $x_0 \in A : h(x_0) = a_0$. Тогава имаме $f(a_0) = f(h(x_0)) = g(h(x_0)) = g(a_0)$. ✓

($\Rightarrow$) Нека сега е в сила $(\forall f,g : A \to A)(f \circ h = g \circ h \to f = g)$ и да допуснем, че h не е сюрекция, т.е. $\exists a \in A\ \forall x \in A : h(x) \neq a$. Ще конструираме функции f,g за които първото условие се чупи (което ще е противоречие).
Достатъчно е да изберем f,g да са функции, които съвпадат във всички точки освен a. Понеже за $\forall x \in A : h(x) \neq a$, то ще е изпълнено и $\forall x \in A : f(h(x)) = g(h(a))$. И така, намерихме функции $f,g, f \neq g$ с $f \circ h = g \circ h$ противоречие с първото условие. ■

Задача 3. Едно множество ще наричаме "лакомо", ако съдържа като елемент мощността си (например $\{7, 3, 9\}$ е такова).

а) Да се намери (изразено чрез n) броят на всички лакоми подмножества на $\{1, 2, \cdots, n\}$.

б) Да се намери (изразено чрез n) броят на всички *минимални по включване* "лакоми" подмножества на $\{1, 2, \cdots, n\}$, тоест "лакоми" множества, които нямат "лакоми" строги подмножества.

Решение.

а) Ще покажем два възможни подхода за решаване:
1 н.) Да разгледаме само лакомите подмножества с мощност k, където k е произволно число, $1 \leq k \leq n$. По дефиниция, за да бъдат те лакоми, числото k е елемент на всяко от тях. За оставащите $k-1$ елемента от множеството няма ограничения, т.е. може да са кои да е от оставащите $n-1$ числа. Така заключаваме, че броят лакоми подмножества с мощност k е точно $\binom{n-1}{k-1}$. Понеже $1 \leq k \leq n$, общият брой лакоми подмножества е:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \overset{\text{полагаме } t=k-1}{=} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} \overset{\text{Нютонов бином}}{=} (1+1)^{n-1} = \boxed{2^{n-1}}$$

2 н.) Нека означим с L множеството от всичко лакоми подмножества на $U := \{1, 2, \cdots, n\}$. Тогава множеството е нелакомите подмножества е $\mathscr{P}(U) \backslash L$. Ще направим биекция между двете. Това би означавало, че броят на лакомите е колкото на нелакомите, или общо $\frac{2^n}{2} = \boxed{2^{n-1}}$.

Дефинираме $f : L \to \mathscr{P}(U) \backslash L$, като за лакомо подмножество $A \subseteq U$ определяме:
$$f(A) = \begin{cases} A \backslash \{|A|\}, \text{ ако } (|A|-1) \notin A \\ A \backslash \{|A|-1\}, \text{ ако } (|A|-1) \in A \end{cases}$$

коректност на дефиницията: Нека $A \in L$ и

- $|A| - 1 \notin A$: тогава $f(A) = A \backslash \{|A|\} \Rightarrow |f(A)| = |A| - 1 \notin A \supset f(A)$, в частност $|f(A)| \notin f(A) \Rightarrow f(A) \in \overline{L}$ е нелакомо, както и искаме; ✓
- $|A| - 1 \in A$: тогава $f(A) = A \backslash \{|A| - 1\} \Rightarrow |f(A)| = |A| - 1 \notin f(A) \Rightarrow f(A) \in \overline{L}$; ✓

биекция:
Тук ще докажем, че f е биекция, като покажем, че тя има обратна функция g, т.е $g : \overline{L} \to L$, изпълняваща $f(g(S)) = S$ и $g(f(S)) = S$ $(\forall S \subseteq U)$.
Дефинираме
$$g(B) = \begin{cases} B \cup \{|B|+1\}, \text{ ако } (|B|+1) \notin B \\ B \cup \{|B|\} \text{ иначе} \end{cases}$$
Би трябвало първо да докажем коректност на дефиницията на g, по-точно, че за $S \in \overline{L}$ $g(S) \in L$, но това е аналогично на горното, така че ще пропуснем.
Доказателството нататък също е рутинно (по-точно се изчерпва в разглеждане на случаи), така ще го спестим, по-важното в случая бе да илюстрираме идеята за решение с биекция.

б) Започваме с едно несложно наблюдение, което решава задачата, а именно:

Наблюдение: *Едно подмножество $S \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ е минимално лакомо тогава и само тогава, когато неговият най-малък елемент е именно мощността му $|S|$.*

д-во: $(\Rightarrow)$ Нека S е лакомо и няма лакоми строги подмножества. По дефиниция $|S| \in S$. Да допуснем, че в S има елемент m $(m \in S)$ такъв, че $m < |S|$. Тогава можем да вземем подмножество на S с точно m елемента, един от които е точно m. Това множество ще е лакомо (защото съдържа мощността си) и е по-малко от S, което е противоречие с минималността на S. Значи остава най-малкият елемент на S да е тъкмо $|S|$.
$(\Leftarrow)$ Обратно, нека $|S| \in S$ е най-малкият елемент на S. Директно от дефиницията S е

лакомо. Да допуснем, че S има лакомо строго подмножество $A \subset S$, тогава $|A| < |S|$ и $|A| \in A \subset S \Rightarrow |A| \in S$, което е противоречие, защото $|S|$ беше най-малкият елемент на S. $\square$

Според горното наблюдение, за да намерим отговора на задачата, достатъчно е да преброим подмножествата на $\{1, 2, ..., n\}$, чийто най-малък елемент е мощността им.
Да намерим броят такива множества при фиксиран най-малък елемент $k, 1 \leq k \leq n$. Лакомите множества с исканото свойство имат общо k елемента, като оставащите $k-1$ са строго по-големи от k (тоест са между $k+1$ и n) и може да са кои да е. Вариантите са $\binom{n-k}{k-1}$. И понеже k може да е всяко, то окончателният отговор е $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}}$. Съвсем случайно от първа задача имаме, че това е всъщност $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} = A_n = \boxed{F_n}$. $\blacksquare$

Задача 4. Нека $x_1, \cdots, x_{19}$ са положителни естествени числа, не по-големи от 93, а $y_1, \cdots, y_{93}$ са положителни естествени числа, не по-големи от 19. Докажете, че съществува (непразна) сума на някои x_i от дадените, равна сума на някои y_i от дадените.

Решение. Нека означим $X_i := x_1 + \cdots + x_i$ за $1 \leq i \leq 19$ и $Y_j := y_1 + \cdots + y_j$ за $0 \leq j \leq 93$ (като $Y_0 := 0$) частичните (префиксните) суми на двете редици числа. За удобство ще въведем и фиктивната сума $Y_{94} = Y_{93} + 19$.

Да отбележим, че $\forall j, 0 \leq j \leq 93 : Y_{j+1} \leq Y_j + 19$. Причината е, че $y_j \leq 19$.
Можем да ограничим всяка частична X_i сума между две последователни Y_j, Y_{j+1} суми. Тоест $\forall i \leq 19\ \exists j \leq 93 : Y_j \leq X_i < Y_{j+1}\,(\leq Y_j + 19)$.

При това ограничаване разглеждаме разликите $X_i - Y_j$ (за всяка сума X_i и съответната ѝ Y_j).Понеже $Y_j \leq X_i < Y_j + 19$, то $0 \leq X_i - Y_j < 19$, тоест разликите могат да приемат стойност от 0 до 18 включително. Обаче $1 \leq i \leq 19$, тогава по Дирихле ще има две разлики с еднаква стойност.
Тоест $\exists i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq 19\ \exists j_1, j_2, 0 \leq j_1 \leq j_2 \leq 93 : X_{i_1} - Y_{j_1} = X_{i_2} - Y_{j_2}$.
Значи $Y_{j_2} - Y_{j_1} = X_{i_2} - X_{i_1} = x_{i_2} + x_{i_2-1} + \cdots + x_{i_1+1} > 0$. И понеже частичните суми са строго растящи, трябва и $j_2 > j_1$, за да може $Y_{j_2} - Y_{j_1} > 0$. Така горното равенство може да се запише като $\boxed{y_{j_1+1} + y_{j_1+2} + \cdots + y_{j_2}} = Y_{j_2} - Y_{j_1} = X_{i_2} - X_{i_1} = \boxed{x_{i_2} + x_{i_2-1} + \cdots + x_{i_1+1}}$, което доказва исканото. $\blacksquare$