Графи

3 част

"Нови ремонти по Графа..."

Май 2025

1 Планарни графи

Теорема 1 (*Теорема на Куратовски*)**.** *Граф е планарен тстк не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.*

Лема 1. *За планарен (мулти)граф G граф с m ребра и произволно негово планарно вписване с f лица $(s_1, ..., s_f)$ е в сила: $\sum_{i=1}^{f} d(s_i) = 2m$.*

Лема 2 (*Характеристика на Ойлер*)**.** *За всеки свързан планарен (мулти)граф G с n върха и m ребра е вярно, че всяко негово планарно вписване има точно f лица, където: $n - m + f = 2$.*

Лема 3. *В планарен (прост) граф с $n \geq 3$ върха има не повече от $3n - 6$ ребра.*

Теорема 2 (Теорема за 4-те цвята)**.** *Всеки планарен граф е 4-оцветим.*

Доказателство. Proof is left as an exercise to the reader. □

Задача 1. Всеки планарен граф е 5-оцветим.

Задача 2. Във всеки планарен граф има връх от степен не по-голяма от 5.

Задача 3. Да се докаже, че ако G е планарен граф с $n \geq 11$ върха, то графът допълнение $\overline{G}$ *не* е планарен.

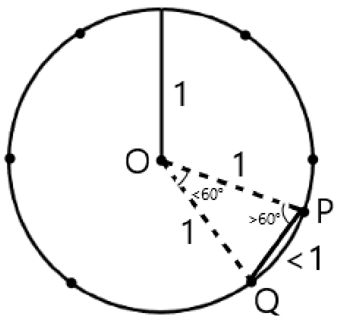
Решение. Нека в G има m_1 върха, а в $\overline{G}$ има m_2 върха. Тогава $m_1 + m_2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Да допуснем, че $\overline{G}$ е планарен. От *лема 3* следва, че $m_1 \leq 3n - 6$ и $m_2 \leq 3n - 6$, т.е $\frac{n(n-1)}{2} = m_1 + m_2 \leq 6n - 12 \Leftrightarrow n^2 - n \leq 12n - 24 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 24 \leq 0$, но пък последното е квадратно уравнение с отрицателна дискриминанта и положителен коефициент пред втората степен, тоест винаги приема положителни стойности, противоречие. ■

Задача 4 (*)**.** Дадени са n точки в равнината (координатна система), като разстоянието между всеки две е поне k (можем да приемем, че $k = 1$). Да се докаже, че броят дойки точки на разстояние точно k (в частност 1) е най-много:

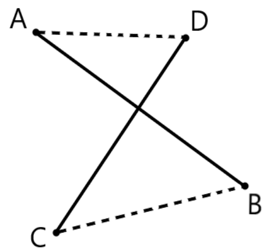
- $3n$ за $n \geq 1$;
- $3n - 6$ за $n \geq 3$;

Решение. Да уточним, че може да се приеме, че $k = 1$, защото разстоянията между точките винаги могат да умножат с подходящ коефициент, по-конкретно с $\frac{1}{k}$ (т.е. мащабираме/минимизираме, scaling), без това да променя задачата.
Макар че втората подточка директно решава първата, за всяка ще покажем различно решение:

- Разглеждаме конкретна точка O от дадените и окръжност с радиус 1 (k в общия случай) с център нея. По условие търсим други точки, на разстояние точно 1 от т. O - ясно, че те трябва да лежат върху окръжността.
  Наблюдение: Върху окръжността има не повече от 6 точки. Ако допуснем, противното, че има поне 7, то централният ъгъл между поне две от тях (на *фиг. 1а* това са P и Q) ще е $\leq \frac{360°}{7} < 60°$, а оттам $|PQ| < 1$, като страна срещу на-малкия ъгъл в триъгълник POQ, което е противоречие с условието, че всеки две точки са на разсточние поне 1.
  Построяваме граф, с върхове дадените точки, като между две точки има ребро тстк са на разстояние точно 1. Ясно, че търсеният отговор съответства на броя ребра в така получения граф. Както се вижда от по-горе, всеки връх u в него е от степен $d(u) \leq 6 \Rightarrow 2m = \sum_{i=1}^{n} d(u_i) \leq 6n \Rightarrow m \leq 3n$. ■



(а) при 7 точки по окръжността



(б) ако има пресичане

Лявата фигура е за първата подточка, дясната - за втората

- Отново ползваме графа (или по-точно неговото планарно вписване върху равнината) с върхове точките и ребра, получени при свързването на два върха на разстояние 1.
  Наблюдение: Графът е планарен, като точното местоположението на точките е негово планарно вписване: Да допуснем, противното, че има пресичащи се ребра (както са AB и CD на *фиг. 1б*), тогава $|AB| = |CD| = 1$. Б.о.о. $|AD| \leq |BC| \Rightarrow 2|AD| \leq |AD| + |BC| < |AB| + |CD| = 2$, като последното следва от неравенство на триъгълника. Но така получаваме $|AD| < 1$, което е противоречие с факта, че всички точки са на разстояние поне 1.
  Последното може да се покаже и по друг начин (*предложи Венцислав Пейчев*): В четириъгълника $ACBD$ поне един от ъглите е $\geq 90°$, б.о.о нека това е $\angle A$, тогава в триъгълник $CAD : CD > AC$ $(\wedge\ CD > AD)$, което е противоречие с факта, че $CD = 1$ е минимално разстояние.
  Знаем обаче, че в планарен граф с n върха и *поне 2 ребра* има не повече от $3n - 6$ ребра. Ако реброто е единствено, т.е. има единствена двойка върхове на разстояние 1, то неравенството очевидно отново е ипълнено. ■

2 Хамилтонови и Ойлерови графи

Лема 4 (*НДУ за ойлеров цикъл и ойлеров път*)**.** *Свързан граф има ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато всеки връх е от четна степен. Граф има Ойлеров път точно когато най-много два върха са от нечетна степен.*

Задача 5. Нека G е граф с нечетен брой върхове такъв, че G и $\overline{G}$ са свързани. Докажете, че G има Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато $\overline{G}$ има такъв.

Решение. Нека броят върхове в графа е $n = 2k+1$. Ясно е, че $\forall v \in V : d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1 = 2k$, което е четно. От условието, че G е Ойлеров граф (има Ойлеров цикъл), следва, че всички върхове са от четна степен, $\forall v \in V : d_G(v)$ *е четно.* Тогава $d_{\overline{G}}(v) = 2k - d_G(v)$ също е четно. Получихме, че всеки връх в $\overline{G}$ е от четна степен, значи графът е Ойлеров. Обратната посока е напълно аналогична, достатъчно е да се направим същото за $\overline{G}$ и допълнението му $\overline{\overline{G}} = G$. ■

Задача 6. Докажете, че ако граф е G регулярен с четен брой върхове и нечетен брой ребра, то той не е Ойлеров. При тези условия кога е възможно в графа да има Ойлеров път?

Решение. Броят върхове е четен, така че можем да означим $n = 2k$. Граф е регулярен, когато всичките му върхове са от една и съща степен, т.е. $\forall v \in V : d(v) = r = const$. Знаем, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2m \Rightarrow n.r = 2m \Rightarrow 2kr = 2m \Rightarrow kr = m$. По условие m е нечетно число, така че във всяко негово представяне като произведение множителите също ще са нечетни числа, в частност k, r са нечетни числа $\Rightarrow$ всеки връх в графа е от нечетна степен r, значи G не е Ойлеров (ако беше, би трябвало всички върхове да са от четна степен). За да има Ойлеров път в графа, той трябва да е свързан и най-много два върха да са от нечетна степен. Горното показа, че всички върхове са от нечетна степен, така че единственият вариант е графът да има точно два върха, свързани с ребро. ■

Лема 5 (*Необходимо условие граф да бъде Хамилтонов*)**.** *Ако G е (неориентиран) Хамилтонов граф и $S \subseteq V(G)$, то $G - S$ има не повече от $|S|$ компоненти на свързаност.*

Доказателство. Щом графът е Хамилтонов, то съществува цикъл H, съдържащ всички върхове. Можем да считаме, че върховете от цикъла са $v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1$. Нека $k := |S|$ и $v_{i_1}, \cdots v_{i_k}$, където $i_j < i_{j+1}$, са върховете от S. Тогава подпътищата $v_{i_1+1} - v_{i_2-1}, v_{i_2+1} - v_{i_3-1}, \cdots, v_{i_{k-1}+1} - v_{i_k-1}, v_{i_k+1} - v_{i_1-1}$, индуцирани от пътя H, част от които потенциално празни, са пътища и в графа $G - E(H)$. При това те съдържат всички върхове на графа $G - S$, тоест те са негови подграфи. Това означава, че $G - S$ може да се разбие на $\leq |S|$ независими пътя, откъдето броят компоненти на $G - S \geq |S|$. □

Задача 7. Докажете, че за никоя шахматна таблица $4 \times n$ не съществува *разходка на коня* (поредица от ходове с кон, така че фигурата да обиколи по веднъж всички клетки от дъската и да се върне в първоначалната си позиция).

Решение. Ще покажем, че не е възможно. Разглеждаме неориентиран граф $G = (V, E)$ с върхове клетките на таблицата и ребра с краища двойки клетки, между които конят може да преминава за един ход, т.е. $V := \{\text{клетки в таблицата}\}, E := \{(v_1, v_2)|\ v_1, v_2 \in V$ *са различни клетки и кон може да се придвижи от едната в другата клетка за един ход*$\}$. Тогава условието за наличие на *разходка на коня* е еквивалентно на това да има Хамилтонов цикъл в графа. Ще докажем, че такъв няма, защото така построеният G не изпълнява необходимото условие по-горе за наличие на Хамилтонов цикъл.
Разглеждаме множеството от клетки/върхове $S := \{cell_{i,j} \in V|\ (i = 2 \wedge j$ *е нечетно*$) \vee (i = 3 \wedge j$ *е четно*$)\}$ (отбелязани на таблицата по-долу в по-тъмнен цвят). Ясно е, че $|S| = n$. При това в графа $G - S$ има $n + 1$ компоненти на свързаност (съответстващи на различните номера на фигурата долу). Компонентите са повече от броя премахнати върхове, което директно противоречи на необходимото условие. ■

1	0	3	0	$\cdots$
	0		0	$\cdots$
0		0		$\cdots$
0	2	0	4	$\cdots$

Задача 8. Нека G е граф с $n \geq 3$ върха и u, v са два негови несъседни върха такива, че $deg(u) + deg(v) \geq n$. В такъв случай G е Хамилтонов тогава и само тогава, когато $G + (u, v)$ е Хамилтонов.

Решение. ($\Rightarrow$) Ако G е Хамилтонов, то и $G + (u, v)$ също е, защото съдържа G като подграф. ✓
($\Leftarrow$) Обратно, нека $G + (u, v)$ е Хамилтонов и да допуснем, че G не е такъв. Тогава Хамилтоновият

цикъл H в $G+(u,v)$ със сигурност съдържа реброто (u,v). Тогава $H-(u,v)$ е път в G, съдържащ всички върхове на графа. Можем да приемем, че върховете в пътя $H-(u,v)$ са $u=w_1, w_1, \cdots, w_n = v$ в този ред. Разглеждаме множествата $\mathscr{U} := \{i \mid (u,w_i) \in E(G), 1 < i < n\}$ и $\mathscr{V} := \{i+1 \mid (v,w_i) \in E(G), 1 < i < n\}$. Тогава $\forall i \in \mathscr{U} \cup \mathscr{V} : 2 \leq i \leq n$, което са $n-1$ различни стойности, но $|\mathscr{U}| + |\mathscr{V}| = d(u) + d(v) \geq n \Rightarrow \mathscr{U} \cap \mathscr{V} \neq \varnothing \Rightarrow \exists i : (u,w_i) \in E(G) \wedge (w_{i-1},v) \in E(G)$. Но тогава $H + (u,w_i) + (w_{i-1},v) - (w_{i-1},w_i)$ е цикъл, минаващ през всички върхове на графа, т.е. Хамилтонов, противоречие. ∎

Задача 9 (*Ore' theorem*)**.** Ако в прост граф G с $n \geq 3$ върха $\forall v, u \in V, u \neq v, (u,v) \notin E : d(v)+d(u) \geq n$ (сборът от степените на всяка двойка несъседни върхове е поне n), то графът е Хамилтонов.

Решение. Ако граф G' не е пълен, то можем да добавим ребро между произволни два върха, които не са били свързани с такова, като така ще получим граф $m'+1$ ребра. Тази операция може да се повтаря до получаване на пълния граф. Така построяваме редица $G = G_0, G_1, \cdots G_{\binom{n}{2}-m} = K_n$, като $\forall i \geq 1$ граф G_{i+1} е получен от G_i след добавяне на липсващо ребро. Понеже $d(u)+d(v) \geq$ за произволни два върха в G, то това свойство остава в сила и за останалите графи от редицата. Тогава можем да ползваме горната задача. Знаем, че G_i е Хамилтонов точно когато G_{i+1} е Хамилтонов. Тогава $G = G_0$ е Хамилтонов $\Leftrightarrow G_1$ е Хамилтонов $\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow G_{\binom{n}{2}-m} = K_n$ е Хамилтонов, но последното е тривиално изпълнено, така че остава и G да е Хамилтонов. ∎

Задача 10 (*Dirac's theorem*)**.** Ако в прост граф G с $n \geq 3$ върха $\delta(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, то графът е Хамилтонов.

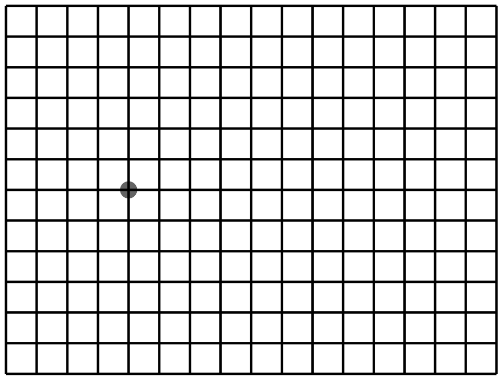
Решение. Ще покажем две възможни решения.
1 н.) Следва директно от горната теорема.
2 н.) Доказвали сме, че граф с $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ е свързан. Разглеждаме един най-дълъг π, нека той е с върхове $u_1, \cdots, u_k$ в този ред. Доказвали сме също, че съседите на крайните върхове u_1, u_k са част от пътя (заради екстремалността). Както в по-предната задача, разглеждаме множествата $\mathscr{U}_1 := \{i \mid (u_1,w_i) \in E(G), 1 < i \leq n\}$ и $\mathscr{U}_2 := \{i+1 \mid (u_k,u_i) \in E(G), 1 \leq i < n\}$. Тогава $\forall i \in \mathscr{U}_1 \cup \mathscr{U}_2 : 2 \leq i \leq n$, което са $n-1$ различни стойности, но $|\mathscr{U}_1| + |\mathscr{U}_2| = d(u_1) + d(u_k) \geq n \Rightarrow \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2 \neq \varnothing \Rightarrow \exists i : (u_1,u_i) \in E(G) \wedge (u_{i-1},u_k) \in E(G)$. Но тогава $C := \pi + (u_1,u_i) + (u_{i-1},u_k) - (u_{i-1},u_i)$ е цикъл с k върха. Да допуснем, че $k \neq n$, тогава от свързаността съществува връх w, който не е част от пътя π, но има съсед от пътя (вижте защо), нека u_j. Тогава $C + (u_j,w) - (u_j,u_i)$, където u_i е някой от съседите на u_j в цикъла C, е път с по-голяма дължина $(k+1)$ от първоначално избрания, противоречие. Остава $k=n$, следва, че C е Хамилтонов. ∎

Задача 11. Докажете, че граф G с n върха винаги има Хамилтонов път, ако за всяка двойка върхове u,v е изпълнено, че $deg(u) + deg(v) \geq n-1$.

Задача 12. Нека G е прост граф с n върха и сумата от степените на всеки два *несъседни* върха в G е поне $n+1$. Докажете, че за всяка двойка различни върхове $u,v \in E(G)$ съществува Хамилтонов път, за който u,v са краища.

Задача 13. Нека G е Хамилтонов граф и всеки връх е от степен точно 3. Да се докаже, че в графа има поне два различни Хамилтонови цикъла.

Задача 14 (Поправителен 2017)**.** Следната схема илюстрира уличната мрежа със 17 вертикални булеварда и 13 хоризонтални. Всеки хоризонтален булевард пресича всеки вертикален в кръстовище. Възможно ли е, тръгвайки от отбелязаното кръстовище, да се придвижим по мрежата така, че да минем през всяко кръстовище точно веднъж и да се върнем обратно в маркираното начално кръстовище?

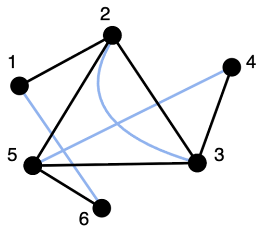


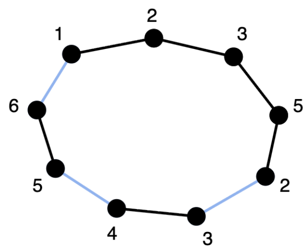
Решение. Моделираме мрежата с граф, върховете V са кръстовищата, а ребрата E улиците, свързващи две съседни кръстовища. Тогава търсената обиколка на мрежата е еквивалентна на наличие на Хамилтонов цикъл в графа, т.е. интересуваме се дали $G(V, E)$ е Хамилтонов. Ще предложим два начина за решение:
1 н.) Да забележим, че G е двуделен. Това се вижда доста ясно при шахматно оцветяване на върховете (кръстовищата). Ако допуснем, че в в графа има Хамилтонов цикъл, то той трябва да е с нечетна дължина *17.13=221*, което е невъзможно в двуделен граф. ■

2 н.) Ще използваме *необходимото условие* (НУ) за Хамилтонов цикъл, което показахме по-горе. Нека S е множеството от кръстовища на четен ред и нечетен стълб или на нечетен ред и четен стълб (номерацията започва от 1). В това множество попадат $\left\lfloor \frac{17\times 13}{2} \right\rfloor = 110$ върха. Също така е видно, че в графа $G - S$ има 111 върха и също толкова компоненти на свързаност, но $111 > 110 \Rightarrow$ НУ за Хамилтонов цикъл е нарушено, тоест G не е Хамилтонов. ■

Задача 15. Даден е граф G с $2n$ върха, като всеки връх е от нечетна степен. Да се докаже, че графът може да се разпадне на n непресичащи се пътя.

Решение. Групираме върховете по двойки по произволен начин. Добавяме фиктивни ребра между всеки два върха от една двойка. В новополучения граф всеки връх е от четна степен, така че той има Ойлеров цикъл. Премахваме фиктивните ребра от цикъла и разглеждаме останалите "парчета" (пътища).
Понеже всеки връх е край на точно едно фиктивно ребро, никои две фиктивни ребра не са инцидентни. Следователно, след премахването им (те са n на брой), цикълът остава разделен също на n части (пътища). Тези n пътя са разпадане на целия граф, както и искахме. ■





3 Ориентирани графи

Дефиниция 1 (*Ориентиран граф*)**.** Граф $G = (V, E)$, чиито ребра имат зададена посока, наричаме *ориентиран*, т.е. ребрата тук са нареден двойки от върхове: $E \subseteq (V \times V)_{\setminus\{(u,u)\ \mid\ u \in V\}}$, като последната част от условието зависи от това дали допускаме наличие на примки.

Дефиниция 2 (*DAG*)**.** *DAG* е съкращение за *ориентиран ацикличен граф (directed acyclic graph).*

Дефиниция 3 (*степен на връх в ориентиран граф*)**.** С $d(u), u \in V$ бележехме броя ребра, с които връх u е инцидентен. Тук е удобно да разширим тази дефиниция с брой "излизащи" ребра (изходна степен) $d(u)^+$ и брой "влизащи" ребра (входна степен) $d(u)^-$.

Лема 6. $\sum_{v \in V} d(u)^+ = |E| = \sum_{v \in V} d(u)^-$

Доказателство. Всяко ребро е броено точно веднъж като "влизащо" и точно веднъж като "излизащо". □

Лема 7. *Във всеки dag съществува връх* $v : d(v)^- = 0$ *(наричаме source, източник) и съществува връх* $u : d(u)^+ = 0$ *(наричаме sink, "сифон").*
(Намирате ли аналогията на тази лема на езика на релациите?)

Задача 16. Докажете, че ориентиран граф G е силно свързан тогава и само тогава, когато за всяко разбиване на множеството на върховете на два дяла V_1, V_2 съществува ребро от връх от V_1 към връх от V_2.

Решение. ($\Rightarrow$) Ще докажем контрапозитивното, нека съществува разбиване на множеството на върховете на два дяла V_1, V_2 такова, че не съществува ребро от връх от V_1 към връх от V_2. Очевидно тогава до никой връх на V_2 няма насочен път от връх от V_1, така че върховете на V_2 са недостижими за тези от V_1, графът не е силно свързан. ✓
($\Leftarrow$) Нека за всяко разбиване на множеството на върховете на два дяла V_1, V_2 съществува ребро от връх от V_1 към връх от V_2. Да допуснем, че G не е силно свързан, тогава съществува връх v, от който *не* всички останали върхове на графа са достижими (чрез насочен път до тях). Нека V_0 е множеството от върхове, достижими от v, по допускане $V \backslash V_0$ е непразно. Тогава за разбиването на множеството от върховете на $V_0, V \backslash V_0$ съществува ребро $(u_1, u_2), u_1 \in V_0, u_2 \in V \backslash V_0$. Но тогава u_2 също е достижим от v, така че би трябвало да е в множеството V_0, но той явно не е, противоречие. ■

Дефиниция 4 (*граф-турнир*)**.** *Граф-турнир* ще наричаме всеки ориентиран граф без примки, в който всяка двойка върхове е свързана с единствено ребро ($\forall v, u \in V : (v, u) \in E \oplus (u, v) \in E$).
Съвсем естествено *граф-турнир* (дори неназован експлицитно) може да срещнете в задачи, в които се говори за... турнири, мачове и прочее (макар контекстът да не се ограничава само до това).

Задача 17. Даден е граф G, като част от ребрата му са ориентирани, останалите не са. Известно е, че в графа няма ориентиран цикъл. Да се докаже, че неориентираните ребра на графа могат да се насочат така, че в получения ориентиран граф също да няма (ориентиран) цикъл.

Решение. За момент се фокусираме само върху ориентираните ребра на графа (заедно с върховете те образуват *dag*). В графа няма ориентиран цикъл, така че съществува топологично сортиране на върховете (тоест линейна наредба, в която никой връх не стои вляво от свой предшественик). За краткост да наричаме позицията на всеки връх в топологичната сортировка "приоритет" (колкото по-напред/наляво в нея е връх, с толкова по-малък приоритет е той). Всяко неориентирано ребро $\{u, v\}$ от дадените насочваме в посока от върха с по-малък приорите към върха с по-голям приоритет. Да допуснем, че в новополучения ориентиран граф има цикъл. Тогава в цикъла има ориентирано ребро от връх с по-голям към връх с по-малък приоритет. В противен случай - ако всяко ребро е от връх с по-малък към такъв с по-голям приоритет, след едно "завъртане" в цикъла, бихме получили, че кой да е връх има строго по-малък приоритет от себе си, което е видимо противоречие. Наличието на такова ребро обаче пък противоречи на нашата конструкция и на началните условия, значи цикъл по начало няма. ■

Задача 18. В турнир участват шестима тенисисти, всеки играе срещу всеки точно веднъж. Да се докаже, че могат да се изберат двама така, че всеки от останалите е загубил от поне един от двамата. Докажете или опровергайте, че твърдението остава в сила за произволен брой хора n.

Лема 8 (*King Chicken theorem*)**.** *В турнир участват n човека, като всеки е играл срещу всеки точно веднъж. Казваме, че играч A е "пред" B, ако A е победил B или съществува трети играч C такъв, че A е победил C и C е победил B (забележете, че е възможно едновременно A да е "пред" B, но и обратно). Да се докаже, че съществува играч, който е "пред" всички останали.*

Забележка. В сила е и обратното, че има играч, който е "след" всички (загубил е пряко или косвено от тях).

Решение. Задачата може да се реши поне по два начина - по индукция с рaглеждане на различни случаи (една идея по-тромаво решение) или с избор на екстремален елемент.
Моделираме турнира с ориентиран граф с върхове хората и ребра двойки от вида (v, u) (v е победил u). Разглеждаме връх, който е "пред" възможно най-много други (тоест максимизиращ броя на победените пряко или косвено). Нека такъв връх е v, като в турнира той е победил (има ребро с) върхове $u_1, u_2, ..., u_k$, а също така е победил (само) непряко върхове $w_1, w_2, ..., w_m$ (това ще рече $\forall j \leq m\ \exists i \leq k : (v, u_i) \in E \wedge (u_i, w_j) \in E$ *(*)*), изобщо v е "пред" върхове $u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m$.
Да допуснем обаче противното, че в тези върхове не участват всички останали $n - 1$ върха на графа. Тоест има връх $v_0 : (v, v_0) \notin E \wedge \neg\exists i : (u_i, v_0) \in E$. Тук е моментът да ползваме, че за всеки два върха a, b в граф-турнир $(a, b) \in E \vee (b, a) \in E$, тоест горното условие е еквивалентно на: $(v_0, v) \in E \wedge \forall i \leq k : (v_0, u_i) \in E$. Но от това и от *(*)*: $\forall j \leq m\ \exists i \leq k : (v_0, u_i) \in E \wedge (u_i, w_j) \in E$, което означава, че връх v_0 е "пред" върхове $v, u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m$, но това означава, че v_0 е "пред" повече върхове, отколкото v, което е противоречие с допускането. Значи множеството $\{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m\}$ съвпада с $V \setminus \{v\}$, тоест v е решение. ■

Теорема 3 (*Weak Redei's theorem*)**.** *Даден е "граф-турнир", да се докаже, че съществува Хамилтонов път.*

Теорема 4 (**Strong Redei's theorem*)**.** *Броят на хамилтоновите пътища в граф-турнир е нечетен.*

Задача 19. (*) Ако G е свързан ненасочен граф с четен брой ребра, докажете, че ребрата му могат да бъдат насочени така, че от всеки връх да има четен брой "излизащи" ребра.

Решение. Да припомним следното помощно твърдение, което вече сме доказвали: *Ако G е свързан граф с четен брой ребра, то той (по-точно ребрата му) може да се разпадне на отделни пътища с дължина 2.*
Достатъчно е ребрата от всеки такъв двуребрен път u–v–w да бъдат насочени "навън", т.е. $u \leftarrow v \rightarrow w$. При всяко такова насочване степента на изход на върховете остава четно число, както и искаме. ■

Задача 20. (*) Докажете, че ребрата на всеки прост граф могат да бъдат ориентирани така, че $\forall v \in V : |d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$.

Ето и едно красиво приложение на тази задача в програмирането:
https://codeforces.com/contest/2113/problem/F

Решение. Ще покажем две възможни решения на задачата:
1 н.) /по идея на Ясен Пенчев/ Б.о.о. можем да считаме, че графът е свързан (причината е, че задачата е независима за отделните компоненти на свързаност на графа). Броят върхове от нечетна степен във всеки граф (съответно и свързана компонента) е четно число. Можем да групираме въпросните върхове по двойки на произволен принцип и да добавим *фиктивни ребра* с краища двата върха от всяка двойка. Така получаваме граф разширение G' на началния G, като всеки връх в G' е от четна степен, което пък гарантира наличие на Ойлеров цикъл. Избираме произволна посока и насочваме всички ребра на цикъла (а тоест всички ребра на G') в нея. Ясно е, че в получения ориентиран граф $H' : |d^+(v) - d^-(v)| = 0\ \forall v \in V$ (заради цикъла). Разглеждаме ориентацията, която H' индуцира в G (или по-просто казано, разглеждаме ориентирания H' и

премахваме от него добавените *фиктивни ребра*). Така в получения нов ориентиран граф H стойността на $d^+(v) - d^-(v)$, $\forall v \in V$ се променя най-много с единица (защото всеки връх е инцидентен с най-много едно *фиктивно ребро*). Откъдето $\forall v \in V : |d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$. $\blacksquare$

2 н.) За начало можем да направим наблюдението, че ако дадена ориентация отговаря на условието, то обратната ориентация, получена при обръщане на посоките на всяко от ребрата, също върши работа, на практика това разменя единствено стойностите $d(u)^+$ и $d(u)^-$, съответно разликата $d^+(v) - d^-(v)$ само променя знака си.
Ще докажем твърдението първо за дървета с индукция по броя върхове.
База: Твърдението очевидно е изпълнено за тривиалния граф (с единствен връх).
ИП: Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е в сила, че ребрата на всяко дърво с по-малко от n върха могат да бъдат ориентирани по искания начин.
ИС: Нека $T = (V, E)$ има точно n върха и $v \in V$ е произволен такъв. Нека $u_1, \cdots, u_k$ са съседите на v в дървото, ясно е, че по отношение на $T - v$ те са в отделни компоненти на свързаност (иначе би имало цикъл в T). Нека дадем ориентация на половината инцидентни ребра на v (да кажем първите $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$) в посока от v към u_i $(1 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$, а останалите да насочим по посока към v. Ясно е, че така $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$. Разглеждаме съсед $u_i \in N(v)$ на връх v. В графа $T - v$ компонентата, в която u_i се намира, е дърво, тогава за нея можем да ползваме ИП. Значи съществува ориентация на върховете в компонентата такава, че исканото свойство е в сила. При същата ориентация в самото T всеки връх от тази компонента, с изключение на u_i, не променя степента си (нито тази на вход, нито тази на изход). Възможно е обаче е насочването на реброто $\{v, u\}$ да "счупи" свойството, т.е. да получим $|d^+(u_i) - d^-(u_i)| = 2$. Достатъчно е да използваме наблюдението от началото на задачата и да обърнем посоката на ребрата в компонентата на u_i. Както казахме, това би сменило знака на $d^+_{T-v}(u_i) - d^-_{T-v}(u_i)$ (по отношение на графа $T - v$). Лесно се вижда, че това вече ще даде търсеното $|d^+(u_i) - d^-(u_i)| \leq 1$ по отношение на T. ✓
Сега обаче да покажем задачата и в общия вид, нека G е произволен граф. Ако в G има цикъл, то можем да насочим ребрата в цикъла в една и съща посока, което просто би повлияло на степените на вход и изход за всеки връх от цикъла с единица. Понеже двете се "неутрализират", можем да се абстрахираме изцяло от този цикъл и да решаваме задачата в録 останалия граф. Ако в графа все още има цикъл , повтаряме разсъждението. Този процес по премахване на цикли (формално индукция по брой цикли в графа) може да се продължи до получаване на гора (което би било база на тази индукция). По-горе показахме, че ребрата на дърветата могат да се насочат по искания начин, оттук следва, че и ребрата на G също могат да бъдат насочени така. $\blacksquare$

Задача 21 (*Camion's theorem*)**.** Докажете, че граф-турнир G има Хамилтонов цикъл тогава и само тогава, когато графът е силно свързан.

Решение. $(\Rightarrow)$: Нека графът има Хамилтонов цикъл. В него участват всички върхове на графа, което директно ни дава, че има насочен път между всеки два върха, така че G е силно свързан. ✓
$(\Leftarrow)$: Ще покажем два възможни подхода за решение:

1 н.) //TO DO

2н.) Със силна индукция по броя върхове.
База: Тривиалният граф (с единствен връх) има Хамилтонов цикъл. ✓
ИП: Допускаме, че за някое $n \in \mathbb{N}^+$ и всеки силно свързан граф H с по-малко от n върха е вярно, че H е хамилтонов (има Хамилтонов цикъл).
ИС: Нека G е силно свързан граф-турнир с n върха и v е произволен негов връх, разглеждаме графа $G - v$ (той ще е граф-турнир) и по-точно неговия фактор-граф $H := (G - v)/_\sim$, който също е граф-турнир, при това е dag. Да приемем, че H има k върха - $w_0, \cdots, w_k$. Не е трудно да се види, че H има точно един източник (да означим с w_0) и един сифон (да означим с w_k), защото е граф-турнир. По допускане G е силно свързан, това означава, че от v им насочен път до всички останали върхове, в частност до тези от източника на фактор-графа, но тогава съществува ребро от v към някой връх от източника (нека да е u_0). Причината е, че от останалите върхове (тези, които не са в източника) няма ребра към тези от източника, така че никой насочен път не може да минава през тях. Аналогично има ребро от някой връх u_k в сифона на фактор-графа към v.
Да отбележим, че фактор-графът H като граф-турнир, който е и dag, има "линейна наредба" на върховете, б.о.о. $\forall i, j \in V(H), 1 \leq i < j \leq k : (w_i, w_j) \in E(H)$. При това всеки връх на H отговаря

на някоя силно свързана компонента на $G - v$, така че по ИП съществува цикъл, който минава през всички върхове в нея, в частност има път, съдържащ всички върхове от компонентата w_j с начало кой да е връх от нея. Казано просто, когато влезем в една компонента w_j, винаги можем да се завъртим през всички нейни върхове и да излезем. Така $v - w_1 - w_2 - \cdots - w_k - v$ индуцира Хамилтонов цикъл за G, като преминаването през компонента w_j на практика означава обиколка през върховете ѝ. ■

Задача 22 (*Иран 2005)**.** Даден е граф-турнир G, чиито ребра са оцветени в два цвята - зелен и червен. Да се докаже, че съществува връх v такъв, че за всеки друг връх w съществува насочен път от v до w, който е едноцветен.

Благодарности

Благодаря на Димитър Стоилов за откритата грешка в решението на *задача 3* и на Ясен Пенчев за посоченото елегантно алтернативно решение на *задача 20*.