# 5. Индукция

"The domino effect"

Ноември 2025

## 1 Индукция

**Задача 1** (**Задачата е по въпрос, който възникна на упражнение*)**.** Докажете, че само с логическите съюзи $\vee, \wedge$ и логическите константи $T, F$ (ако се наложи и скоби) *не* можем да представим негацията (тоест от тях и дадено просто съждение $p$ да направим съждение, еквивалентно на $\neg p$). (Например защо да не съществува нещо такова: $p \vee (T \wedge p) \vee p \wedge (p \vee F) ... \equiv \neg p$)

*Решение.* Ще ползваме *структурна индукция* по построение на логическите съждения.
Малко уточнение около последното (подобни неща ще видите 2 семестър по ЕАИ) - всяко съждение (както и всеки израз с аритметични/булеви/логически операции, числа/литерали, скоби) си има приоритет на операциите (който всъщност отговаря на дърво), по този начин виждаме съставните части на едно съждение (*дърво на израз?*).
**База:** разполагаме с логическите константи $T, F$ и простото съждение $p$, засега можем да получим само тях.
**ИП:** Нека $q$ и $r$ са сложни съждения, изградени само от константите, двете логически операции (конюнкция, дизюнкция) и простото съждение $p$, и са еквивалентни на някои от следните: $p, T$ или $F$.
**ИС:** Сега ще докажем, че всяко съждение, което може да се конструира от $q, r$ чрез двата логически съюза, също ще е еквивалентно на някое от трите: $T, F, p$. Понеже по предположение $q, r$ могат да приемат само три стойности и ползваме само два съюза, то вариантите за ново съставно съждение са:

| | | |
|---|---|---|
| $t \equiv F \wedge F \equiv F$ | $t \equiv F \wedge T \equiv F$ | $t \equiv F \wedge p \equiv F$ |
| $t \equiv T \wedge F \equiv F$ | $t \equiv T \wedge T \equiv T$ | $t \equiv T \wedge p \equiv p$ |
| $t \equiv p \wedge F \equiv F$ | $t \equiv p \wedge T \equiv p$ | $t \equiv p \wedge p \equiv p$ |
| $t \equiv F \vee F \equiv F$ | $t \equiv F \vee T \equiv T$ | $t \equiv F \vee p \equiv p$ |
| $t \equiv T \vee F \equiv T$ | $t \equiv T \vee T \equiv T$ | $t \equiv T \vee p \equiv T$ |
| $t \equiv p \vee F \equiv p$ | $t \equiv p \vee T \equiv T$ | $t \equiv p \vee p \equiv p$ |

С това показваме, че всеки съставен израз, получен от по-прости два, е еквивалентен на $p, T$ или $F$. $\square$
Понеже всяко съставно съждение може да се разбие на (до) две по-прости и операция върху тях, то от индукцията следва, че всеки израз, получен само помощта на $p, T, F$ и съюзите $\vee, \wedge$, е еквивалентен отново на някое от трите: $p, T, F$. Това пък значи, че при произволно $p$ само от тези операции не може да се достигне до израз, еквивалентен на $\neg p$. $\blacksquare$

*Забележка.* Обърнете внимание, че в ИС не е необходимо изрично да показваме, че съставни съждения с повече от един логически съюз и двата му операнда, отново се свеждат до $T, F, p$ за това се грижи индукцията.

**Задача 2.** Докажете, че $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, където $n \in \mathbb{N}^+$ и $F_i$ е $i$-тото число от редицата на Фибоначи (0, 1, 1, 2, ...), като приемаме, че номерацията започва от 0.

*Полезно.* Горното има важно практическо значение, защото ни дава директна формула за $F_n$, при това вдигането на степен е бърза операция.

*Решение.* Доказваме с индукция по $n$:
**База:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$ ✓

**ИП:** Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

**ИС:** Тогава $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$, каквото и трябва да получим. ■

**Задача 3.** Следното е по-скоро игра, отколкото задача: Намирате се в стая с други колеги, всеки от Вас трябва да каже по едно число в интервала [0,100] (не задължително цяло). Ако $x_1, ..., x_n$ са казаните числа, накрая пресмятаме $t = \frac{2}{3} avg\{x_1, ...x_n\} = \frac{2}{3} \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$. Този, чието число е най-близо до $t$, печели. Какво число ще кажете?

*Решение.* Ако разглеждаме идеалния случай, в който всеки играе умно (стаята е пълна с добри математици), правилният отговор е 0. Правим индукция по горната граница на интервала, в който е разумно да ограничим казаното число:
**База:** Имаме, че $\forall i : x_i \in [0, 100] \Rightarrow x_{avg} \in [0, 100] \Rightarrow t \in [0, \frac{2}{3} 100]$. Тоест няма полза да казваме число $x$ извън този интервал.
**ИП:** Нека за някое $i \in \mathbb{N}^+$ всички в стаята са казали число в интервала $[0, (\frac{2}{3})^i 100]$ (забележете, че предположението се основава на допускането, че мнозинството от останалите играчи също са играли умно, съобразазайвайки неещата, които и ние ще съобразим).
**ИС:** Щом $\forall i : x_i \in [0, (\frac{2}{3})^i 100] \Rightarrow x_{avg} \in [0, (\frac{2}{3})^i 100] \Rightarrow t \in [0, (\frac{2}{3})^{i+1} 100]$, т.е. няма полза да казваме число извън този интервал.
От индукцията следва, че е $t \in [0, (\frac{2}{3})^i 100] \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in [0, \lim_{i \to \infty} (\frac{2}{3})^i 100] = [0, 0] \Rightarrow t = 0$. Правилният избор би бил 0. ■

**Задача 4 (*).** Дадени са $2n+1$ положителни естествени числа. $a_1, ..., a_{2n+1}$. Известно е, че което и число да бъде премахнато, останалите могат да бъдат разделени в две равни (от по $n$ числа) групи с равни суми. Да се докаже, че всички числа са равни.

*Решение.* Полагаме $S = a_1 + ... + a_{2n+1}$. Нека за начало направим две наблюдения:
- Всички $2n + 1$ числа са с еднаква четност. Това е така, защото $\forall i : S - a_i$ се дели на 2 (четно), а оттук $S$ и всички $a_i$ са с еднаква четност. *(1)*
- Умножаването (респективно разделянето) на всички числа с константа, както и прибавянето (респективно изваждането) на такава от всички не влияят на свойството на числата след премахване на кое да е останалите да могат да бъдат разделяни в две групи с равни суми. *(2)*

Ще направим силна индукция по стойността на максималното от числата $a_{max} = max\{a_1, ...a_{2n+1}\}$.
**База:** При $a_{max} = 1$ всички числа са равни на 1, исканото е изпълнено. ✓
**ИП:** За някое $m \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено, че: ако $a_{max} \leq m$, то $a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1}$, т.е. $(a_{max} \leq m) \to (a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1})$.
**ИС:** Ще докажем, че ако $a_{max} \leq m + 1$, то отново $a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1}$:
На практика трябва само да видим какво става при равенство $a_{max} = m + 1$. Имаме 2 случая:

- ако $m+1 = a_{max}$ е четно, то всички числа са четни (според *(1)*). Тогава разглеждаме числата $b_1, ..., b_{2n+1}$, където $b_i = \frac{a_i}{2}$. Според *(2)* операцията запазва свойството, при това $\forall i : b_i \in \mathbb{N}^+$ и $b_{max} = a_{max}/2 < a_{max} = m + 1$. Значи можем да използваме ИП $\Rightarrow b_1 = b_2 = ... = b_{2n+1} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1}$; □

- ако $m+1 = a_{max}$ е нечетно, то и всички числа са нечетни. Тук отново дефинираме $b_1, ..., b_{2n+1}$, където обаче $b_i = \frac{a_i+1}{2}$. По-нататък разсъждението повтаря това на горния случай. □

И в двата случая получаваме $a_1 = a_2 = ... = a_{2n+1}$. ■

**Въпрос: Не можехме ли и за двата случая просто да дефинираме $b_i = a_i - 1$?*

**Задача 5.** Да се докажат по индукция следните:

- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$

- $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$
- $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln n$

To be continued ...