4. Фунцкии

”(Не) функционира”

Юли 2024

1 Общи задачи за функции

Дефиниция 1.1 (композиция на функции)**.** Да напомним, че ако $h : A \mapsto B$ и $t : B \mapsto C$ са произволни фунцкии, вместо $t(h(x))$ можем да пишем $(t \circ h)(x)$.

Задача 1 (Семестриално КН 21)**.** Дадено е множество А и функция $h : A \mapsto A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \mapsto A$ и всяка функция $g : A \mapsto A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$

Решение. От h сюрекция $\forall y \in A \exists x \in A : h(x) = y$. Тогава за произволно $y_0 \in A : f(y_0) = f(h(x_0)) = g(h(x_0)) = g(y_0)$, т.е $f = g$ ■

Задача 2 (Семестриално КН 23)**.** Нека $f, g : S \mapsto S$, като $\forall x \in S : f(x) = g(f(f(x))) \land g(x) = f(g(f(x)))$. Да се докаже, че $f = g$ (т.е. $\forall x \in S : f(x) = g(x)$)

Решение. едно възможно решение е: $f = gff = fgfff = fff = ffgff = fgf = g$

Лирическо отклонение (разяснение):
Оказва се, че до голяма степен объркването в тази задача идваше от сложния запис на вложените функции (многото букви и скоби). Затова първо ще олекотим този запис:

С нотацията от по-горе $g(f(f(x)))$ би изглеждало като $(g \circ f \circ f)(x)$, а $f(g(g(f(g(g(f(x)))))))$ ето така: $(f \circ g \circ g \circ f \circ g \circ g \circ f)(x)$. За целите на задачата можем да опуснем и $\circ$ и просто да представяме вложените функции като низ: $fggfggf$ (*разбира се, последното не е е общо приет запис).

Обратно към задачата. По условие имаме, че $\forall x \in S : f = gff$, както и $g = fgf$. На практика сведохме задачата до следното: имаме позволени две операции върху низ:

1. замени f с gff (или обратно)
2. замени g с fgf (или обратно)

Започваме с низ f, искаме с горните еквивалентни преобразувания да получим g, ето един възможен начин: $f = gff = fgfff = fff = ffgff = fgf = g$ ■

Задача 3 (Семестриално КН 19)**.** Ако $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ изпълнява $f(f(f(n))) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$, следва ли, че f е биекция?

Решение. Да,ще покажем, че функцията е биекция:

- сюрективност: f е сюрекция, ако $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} : f(x) = y$. По условие за прозиволно $y_0 \in \mathbb{N}$: $f(f(f(y_0))) = y_0$, т.е. ако изберем $x_0 = f(f(y_0)), f(x_0) = y_0$, което и ни трябва □
- инективност: допсукаме противното, нека $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2) = y$, ,тогава $x_1 = f(f(f(x_1))) = f(f(y)) = f(f(f(x_2))) = x_2$, противоречие с допускането □

функцията е тотална, като е инекция и сюрекция, а оттук и биекция ■

Задача 4 (ДР И 22)**.** Функцията $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ изпълнява неравнествата: $f(x+19) \leq f(x)+19$ и $f(x+94) \geq f(x)+94$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ Докажете, че $f(x+1) = f(x)+1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$

Решение. Нека x е произволно

- След 94-кратно прилагане на първото неравенство, получаваме: $f(x+19.94) \leq f(x)+19.94$
- След 19-кратно прилагане на първото неравенство, получаваме: $f(x+94.19) \geq f(x)+94.19$

Оттук $f(x+19.94) = f(x)+19.94$, но тогава във веригата от неравенства
$f(x+19.94) \geq f(x+18.94)+94 \geq f(x+17.94)+2.94 \geq ... \geq f(x)+19.94$ навсякъде имаме равенство, т.е. $f(x+19.94) = f(x+18.94)+94 = f(x+17.94)+2.94 = ... = f(x)+19.94$ *(1)*
Съвсем аналогично имаме и равенствата:
$f(x+94.19) = f(x+93.19)+19 = f(x+92.19)+2.19 = ... = f(x)+94.19$ *(2)*
Понеже x беше произволно, получаваме, че:
$\forall x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0+94) = f(x_0)+94$ *(*)* и $f(x_0+19) = f(x_0)+19$ *(**)*
/формално това се получава при заместване на $x = x_0 - 18.94$ в *(1)* и $x = x_0 - 19.93$ в *(2)*, проверете/
Като ползваме (*) и (**): $\forall x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0+95) = f(x_0+5.19) = f(x_0)+5.19 = f(x)+95 = f(x)+94+1 = (f(x)+94)+1 = f(x+94)+1, ..f(x_0+95) = f(x_0+94)+1$ и понеже x_0 е произволно, горното е еквивалento на $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) = f(x)+1$ ■

Задача 5 (*ДР)**.** $f : S \mapsto S$ е биекция, S е крайно. Да се докаже, че $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = f^{-1}(x)$, където $f^n(x) = f(f(...f(x)...))$ /n пъти/, $x \in S$

Решение. Нека за начало $x_0 \in S$ е фиксиран елемент. Ще покажем, че $\exists n_0 \in \mathbb{N} : f^{n_0}(x_0) = f^{-1}(x_0)$
Разглеждаме редицата от елементи $f^{-1}(x_0)$, $x_0 = f^0(x_0)$, $f(x_0)$, $f(f(x_0)), ...$ $f^k(x_0), ...$, т.е. редицата е $\{f^i(x_0)\}_{i=-1}^{\infty}$ Ясно е, че заради крайността на S в някакъв момент елемент от тази редица ще се повтори. Ще докажем, че първото такова повторение е именно на елемента $f^{-1}(x_0)$. Да допуснем противното. Нека първият повтарящ се елемент е y и първите две позиции, на които се среща са $p_1 > -1, p_2 > -1$ (по-точно $y = f^{p_1}(x_0) = f^{p_2}(x_0)$), строгото неравенство дойде от допускането. Тогава $f^{p_1-1}(x_0) = f^{-1}(x_0) = f^{p_2-1}(x_0)$, но така намерихме нов повтарящ се елемент, а именно $f^{-1}(x_0)$, който обаче е по-напред в редицата. Това е противоречие с допускането, че сме взели първия повтарящ се. Ето защо първият повтарящ се елемент е тъкмо $f^{-1}(x_0)$, значи съществува $n_0 > -1 : f^{n_0}(x_0) = f^{-1}(x_0)$.
Тук има още една важна подробност, така конструираната редица е периодична с период n_0+1. Това ще рече, че след всеки n_0+1 прилагания на f от x_0 се връщаме пак там (т.е. $f^{n_0+1}(x_0) = x_0$); тогава след всеки $k.(n_0+1)-1$ ще сме в $f^{-1}(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$.
Но x_0 беше произволно, така че $\forall x_i \exists n_i > -1 : f^{n_i}(x_i) = f^{-1}(x_i)$. Достатъчно е да изберем $n = (n_0+1, ..., n_i+1, ...) - 1$. Така след n+1 прилагания на f от кое да е x, ще сме обратно в него. Значи на n-тата стъпка ще сме в $f^{-1}(x)$ ■

Задача 6 (*Румъния)**.** Ако $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ е биекция, да се докаже, че:

- $\exists a, b, c \in \mathbb{N}, a < b < c : f(a) + f(c) = 2f(b)$
- $\exists a, b, c \in \mathbb{N}, a + c = 2b : f(a) < f(b) < f(c)$

Решение.

- Нека фиксираме a=0 и b е минималното естествено число такова, че $f(a) < f(b)$ (*защо има такова?*), да разгледаме $y = 2f(b) - f(a) > f(b)$; от сюрективността $\exists c \in \mathbb{N} : f(c) = y = 2f(b) - f(a)$. Забележете, че $f(c) = 2f(b) - f(a) > f(b) > f(a)$ *(*)*! Твърдим, че така избраните a, b, c изпълняват исканото: От избора наистина $2f(b) = f(a) + f(c)$, вярно ли е обаче, че $a = 0 < b < c$? Ако допуснем, че c *не* е >b, т.е. $0 = a < c \leq b$ *(! равенство c=b отпада, защото $f(c) > f(b)$)*, то от *(*)*, $f(c) > f(a)$, но това е противоречие с допускането, че b е минималното число с такова свойство. Ето защо и $a < b < c$ ■ *Трябва ли ни тук инективността?*
- Ще сведем до първата подзадача. Разглеждаме обратната биекция f^{-1}. От показаното горе, съществуват $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N} : (a_0 < b_0 < c_0) \wedge (f^{-1}(a_0) + f^{-1}(c_0) = 2f^{-1}(b_0))$, ако положим $a = f^{-1}(a_0), b = f^{-1}(b_0), c = f^{-1}(c_0)$ (а оттук $a_0 = f(a), b_0 = f(b), c_0 = f(c)$), получаваме именно: $\exists a, b, c \in \mathbb{N} : (f(a) < f(b) < f(c)) \wedge (a + c = 2b)$ ■

Забележка. В задачата ползваме идея, наречена "принцип на крайния елемент", която се състои в избор на екстремален елемент (най-малък/най-голям по отношение на някакво свойство), което ни дава повече информация за работа с него и ни улеснява. Това се ползва често при графи

2 Приложение на фунцкиите при броене

******Полезно* (Броене с функции). В дискретната математика може би едно от основните приложения на функциите е свързано с броене на сложни обекти. По-конкрерно това броене може да се изразява в:

- сравняване на мощностите на множества; *(Каква информация за отношението между броя обекти в две множества ни дават инекцията/сюрекцията/биекцията?)*
- покзване на (не)четност на бройка обекти; *(Например можем да докажем, че елементи в множество са четен брой, без да ги броим, като разделим множеството на две подмножества с еднаква мощност, намирайки биекция между тях)*

Дефиниция 2.1. Две множества А и В са равномощни (|A|=|B|), ако съществува биекция между тях

Задача 7 (припомнете си от лекции)**.** Докажете, че множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$ са равномощни (т.е. намерете биекция между тях)

Решение. Ще покажем две възможни решения:

1 н.) Това е подробно показвано на лекции, така че само ще напомним идеята.

0	2	5
1	4	
3		

Ако си представим наредените двойки естествени числа като клетки на таблица, биекцията с естествените числа ще е номерирането им по диагонали, както на картинката.
Коя функция реализира въпросната наредба?

2 н.)
Ще се възползваме от факта, че всяко естествено число (освен 0) може да се представи като произведение на нечетно число и степен на двойката по единствен начин (това задава тотална функция), например $12 = 3.2^2$, в общия случай $a = x.2^y$, където x е нечетно. Можем да означим $x.2^y$ като наредена двойка (x,y).
Обратно, вярно е и че всяка такава наредена двойка съответства на число (имаме сюеркция и инекция). Имаме обаче два малки проблема пред това да кажем че функцията, определена от горните разсъждения, е биекция:

1. Опускаме 0-та; както казахме, тя няма такова представяне. - Това може да се преодолее лесно, ако изместим всеки елемент с едно, т.е. $f(a-1) = (x, y)$, където $a = x.2^y$ □
2. В момента биекцията ни не е между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$, а между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_{odd} \times \mathbb{N}$ (нали х бяха нечетни). Това също можем да преодолеем лесно, като определим за първи елемент от наредената двойка не самото нечетното число х, както беше досега, а кое подред нечетното е то (нулевото нечетно е 1, първото - 3 и т.н)

В крайна сметка биективната ни фунцкия трябва да изглежда горе-долу така: $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^2$, $f(a-1) = (\lfloor \frac{x}{2} \rfloor, y)$, където $a = x.2^y$, а с $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ означаваме цялата част на х при деление на 2 (това всъщност ни дава кое подред е нечетното число) ■

Задача 8. Да се намери биекция:

- $f : [0, 1] \mapsto (0, 1]$
- $f : [0, 1] \mapsto (0, 1)$

- $f : [-\pi, \pi] \mapsto (-\infty, \infty)$

Задача 9 (Диагонален метод на Кантор)**.** Докажете, че множеството $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *не* е изброимо, т.е. не съществува биекция $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbb{N}$

Задача 10 (*Припомнете си от лекции)**.** За кое да е множеството A не съществува сюрекция $g : A \mapsto \mathscr{P}(A)$

Решение. Допускаме противното, нека такава сюрекция g съществува и нека $S := \{a \in A | a \notin g(a)\}$ Тъй като $S \subseteq A$, то $S \in \mathscr{P}(A) \Rightarrow$ от допускането $\exists x \in A : g(x) = S$

- ако предположим, че $x \in S$, получаваме противоречие с дефиницията на S (според нея $x \in S \Rightarrow x \notin g(x) = S$) $\square$
- ако предположим, че $x \notin S$, получаваме противоречие с дефиницията на S (според нея $x \notin S \Rightarrow x \in g(x) = S$) $\square$

И в двата случая получихме противоречие, т.е. такова животно няма $\blacksquare$

Следствие 2.0.1. Горното ни дава, че $|A| < |\mathscr{P}(A)|$

Задача 11. Нека $|A_1| = |A_2|$ и $|B_1| = |B_2|$. Докажете, че $|\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}| = |\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}|$

Решение. Щом $|A_1| = |A_2|$, то съществува биекция $g_1 : A_1 \mapsto A_2$. Аналогично съществува биекция $g_2 : B_1 \mapsto B_2$. Дефинираме функция $h : \{f_1 | f_1 : A_1 \mapsto B_1\} \mapsto \{f_2 | f_2 : A_2 \mapsto B_2\}$, като $h(f_1) = f_2$, където f_2 е дефинирана така: $\forall x \in \ A_1 : f_2(g_1(x)) = g_2(f_1(x))$ Тук трябва да се направят няколко уточнения (повечето ясни):

- така определените функции f_2 са добре дефинирани
- така определените функции f_2 са тотални (заради g_1 биекция)
- така определената h е добре дефинирана
- така определената h е инекция (ако две функции се различават и образите им ще, проверете)

Инективността на h ни дава, че $|\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}| \leq |\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}|$. Абсолютно същият аргумент обаче може да се направи и наобратно, октъдето $|\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}| \geq |\{f | f : A_1 \mapsto B_1\}|$, или в крайна сметка двете са равномощни $\blacksquare$

Коментар. Обикновено когато искаме да покажем, че две множества са равномощни, се опитваме да намерим биекция между тях. Тук бяхме умни и си спестихме малко работа, като намерихме сюрекция, което ни дава, че броят елементи в едното $\geq$ от този в другото. Но понеже в конкретния случай множествата са практирчески неразличими, същото може да се направи и наобратно по аналогичен начин, т.е. броят елементи във второто множество е $\geq$ от този в първото. Е значи са равни.

Задача 12. Докажете, че множеството ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f | f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}\}$ е неизброимо

Решение. Достатъчно е да разгледаме само функциите от вида ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f | f : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}\}$. Ако те са неизброимо много, то и първоначалните са.
1 н.) Ползвайте идеята от диагоналния метод на Кантор, за да докажете, че са неизброимо много.
2 н.) Покажете (например като дефинирате биекция), че всяка такава функция съответства на едно подмножество на ествените числа (f(x)=1 тстк x участва в подмножеството и 0 иначе), но $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ е неизброимо множество. $\square$

Задача 13 (*INMO 2013)**.** Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и T е броят непразни подмножества S на $\ = \{1, 2, ..., n\}$ такива, че средното аритметично на елементите в S е цяло число. Да се докаже, че $T - n$ е четно

Решение. Ще бележим средното аритметично на множество S с $\overline{S}$. Ясно е, че всички едноелементни подмножества на M изпълняват условието $\overline{S}$ да е цяло - те са n на брой.

Наблюдение 1: за което и да е подмножество S: $\overline{S}$ не надвишава n - нормално, все пак елементите в S са $\leq n$ $\square$

Наблюдение 2:
- Ако за някое подмножество S, изпълняващо условието, е вярно, че $\overline{S} \notin S$, то ако $S' = S \cup \{\overline{S}\}$, $\overline{S'}$ също е цяло, т.е. и S' ипзълнява условието. *проверете*
- Обратното също е вярно, ако за някое подмножество S, изпълняващо условието, е вярно, че $\overline{S} \in S$, то ако $S' = S \backslash \{\overline{S}\}$, $\overline{S'}$ също е цяло $\square$

Забележка. Казано по-просто, прибавянето и махането на средното аритметично (стига то да е цяло число) не променя средното аритметично на множеството;

Сега можем да разгледаме два вида множества:

1. тези, които имат $\overline{S}$ цяло число, като то се съдържа в тях,
   $A' = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число и $\overline{S} \in S\}$

2. тези, които имат $\overline{S}$ цяло число, като то не се съдържа в тях,
   $B = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число и $\overline{S} \notin S\}$

Ясно е, че търсената бройка $T = |A'| + |B|$
Понеже вече преброихме едноелементните подмножества отделно (напомняме, че те винаги изпълняват условието), а те се съдържат в A', ще ги пропуснем, така че нека
$A = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число, $\overline{S} \in S$ и $|S| > 1\}$

Тоест $T = |A'| + |B| = n + |A| + |B|$ (n на брой са едноелементните), а оттук $T - n = |A| + |B|$

От *наблюдение 2* забелязваме, че съществува взаимно еднозначно отношение /биекция/ между елементите на A и B, (формално това се получава с дефиниране на функция $h : A \mapsto B$ такава, че $h(S) = S \backslash \{\overline{S}\}$), откъдето $|A| = |B|$ и $T - n = |A| + |B|$ е четно $\blacksquare$

Задача 14 (*Контролно МОМ 2006)**.** Дадено е просто число $p \geq 3$ и множеството $A = \{1, 2, ..., p - 1\}$. Да се намери броят на подмножествата на A със сума от елементите, кратна на p

Решение (Е. Кайряков).

Дефиниция 2.2. Вместо остатък "при деление на p" често за краткост се полза изразът остатък "по модул p";

Тази задача е пример за това как добавянето (или премахването) на елемент от множество ни помага да намерим подходящата биекция. В случая е по-лесно да решим задачата с множеството $B = \{1, 2, ..., p - 1, p\}$ вместо с A и после да видим как следва нашата задача от решената.
Разглеждаме произволно подмножество $X = \{a_1, a_2, ..., a_s\}, X \neq \varnothing, B$ със сбор на елементите си, кратен на p. На всяко такова множество съпоставяме всички множества, получени от него с "транслация" на елементите му последователно с $1, 2, ..., p - 1$ по модул p (т.е. прибавяме i модулно към всеки елемент). Така получаваме групиране на подмножествата в "пакети", всеки съдържащ множествата:
$X = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$
$X_1 = \{a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_s + 1\}$
$\cdots$
$X_{p-1} = \{a_1 + (p - 1), a_2 + (p - 1), ..., a_s + (p - 1)\}$

Забележка. Да напомним, че в горните множества реално прибавянето на 1, ... p-1 е модулно, т.е. ако сумата стане повече от p, прехвърля обратно на 1. Така всички множества от групата остават подмножества на B

Вижда се, че във всяка група/пакет всеки две множества имат суми от елементите, даващи различен остатък по модул p. Иначе казано образуват пълна система остатъци по модул p и от тях *винаги точно едно има сума, кратна на p.*
Ето защо е достатъчно да намерим броя групи, той е равен на броя на търсените множества (тоест

съществува биекция между тях).Множествата $\varnothing, B$ не са в никоя група, но също изпълняват условието, прибавяме още 2:
$\frac{1}{p}[\binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p-1}]=\frac{2^p-2}{p} + 2$
Не забравяме, че в момента решаваме задачата за множество B, а не A. Понеже наличието на p не променя кратността на p, то всяко множество от оригиналната задача реално е броено 2 пъти, разделяме на 2: $\frac{2^{p-1}-1}{p} + 1$ ■

3 Геометрично приложение на биекциите

Коментар. Тук ще илюстрираме малко по-нетривиално приложение на биекциите, ще направим биекция между геометрични обекти

Задача 15. Да се направи биекция между:

- затворен интервал (например [0,1]) и отсечка
- отворен интервал (например (0,1)) и права
- полузатворен интервал (например [0,1)) и лъч

Решение.

Задача 16. Да се направи биекция между две отсечки

Коментар. Забележете, че на практика направихме биекция между затоврени интервали, но геометрично (затвореният интервал си е един вид отсечка, както видяхме и в горната задача)

Задача 17. Да се намери биекция между прозиволни две затворени криви в $\mathbb{R}^2$

Упътване. Изберете произволна точка от кривата и "развийте" кривата, така че да стане отсечка, сега ползваме горната задача

Задача 18 (*)**.** Да се намери биекция между:

- отсечка и лъч
- отсечка и права
- лъч и права

Коментар. Тук пък геометрично правим биекция между отворен/затоврен/полузатоврен интервал, както например беше при [0,1] и (0,1).