

1. Логика

”Колега, ми то логично...”

Юли 2024

1 Преговор

Дефиниция 1.1. Логически константи - T (true) и F (false)

Дефиниция 1.2. Прости съждения (логически променливи) - твърдения, които са или истина, или лъжа

Забележка. Въпросителни, възклицателни, побудителни изречения, както и такива от вида ”това изречение е лъжа”, неможещи да бъдат нито истина, нито лъжа (защото съдържат противоречие), не са съждения

Дефиниция 1.3. Съставни съждения - такива, образувани от други съждения и логически константи, посредством логически съюзи

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T

Дефиниция 1.4 (Логически операции).

Свойство 1.1 (Приоритет на логическите операции).

1. *негация* \neg
2. *конюнкция* \wedge
3. *изключващо или* \oplus , *дизюнкция* \vee
4. *импликация* \rightarrow
5. *бимпликация* \leftrightarrow

Забележка. Разбира се, при наличие на скоби те са с най-голям приоритет

Малко повече за (би)импликацията. нека p, q са произволни съждения в импликация $p \rightarrow q$

- p се нарича **антецедент**, q - **консеквент**
- на импликацията може да се гледа като обещание: нека съм ви дал дума: ”Ако изкарате 100% на контролното, ще получите оценка 6” - ако антецедентът е истина (изкарали сте 100%), то вие ще очаквате да имате 6 (т.е. и консеквентът да е истина), в противен случай обещанието не е изпълнено; ще кажете, че не съм удържал на думата си (т.е. импликацията е лъжа). Разбира се, ако не сте изкарали 100% (антецедентът е лъжа), няма как да говорим за неспазено обещание, т.е. без значение каква оценка ще получите (независимо консеквента), аз все пак съм казал истината.
- антецедентът (p) е свързан с достатъчното условие, а консеквентът с необходимото (q);
Пр. ”Ако съм човек, дишам” - да си човек е достатъчно, за да твърдим, че дишаш, но не и необходимо (животни и растения също дишат). Обратно, дишането е необходимо условие, за да кажем, че нещо е човек - ако не диша, то не е човек (или в най-добрия случай само е било...), но пък не е достатъчно условие.

- импликацията може да се зададе чрез различни езикови конструкции:
 "ако p , (то) q ", **но** " p , **само** ако q ";
 " q (тогава), когато p ", **но** " p **само** (тогава,) когато q ";
 " p влече q ", " q следва от p ", " p е достатъчно условие за q ", " q е необходимо условие за p "

Забележка. Забележете, че "само" променя смисъла на казаното!

- биимпликацията е нещо като двойна импликация (т.е. тук p е и необходимо, и достатъчно условие за q , както и обратно), неслучайно отговаря на езиковата конструкция "тогава и само тогава, когато", също и на "**точно** тогава, когато"

Забележка. Забележете, че "точно" променя смисъла на казаното, без него щеше да е просто импликация!

Дефиниция 1.5. Всеки ред от таблицата на истинност (отговарящ на точно една възможна комбинация от стойности F/T на променливите) наричаме *валюация*

Дефиниция 1.6.

- *тавтология* - съставно съждение, чиято стойност е T за всяка валюация на просите му съждения
- *противоречие* - съставно съждение, чиято стойност е F за всяка валюация
- *условност* - съждение, което приема, както стойност T, така и F

Дефиниция 1.7. две съждения A и B са еквивалентни ($A \equiv B$, $A \leftrightarrow B$), тстк съждението $A \leftrightarrow B$ е тавтология

Забележка. $A=B$ би означавало друго - че имат еднаква синтактична структура, т.е. и изглеждат еднакво

Забележка. \equiv , \leftrightarrow не са логически съюзи

Теорема 1.1 (еквивалентности). Нека p , q и r са произволни съждения. Следните еквивалентности са в сила:

- **свойство на константите:** $p \vee T \equiv T$, $p \wedge T \equiv p$, $p \vee F \equiv p$, $p \wedge F \equiv F$
- **свойства на отрицанието:** $p \wedge \neg p \equiv F$, $p \vee \neg p \equiv T$
- **идемпотентност:** $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- **закон за двойното отрицание:** $\neg(\neg p) \equiv p$
- **комутативност:** $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \oplus q \equiv q \oplus p$
- **асоциативност:** $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$
- **дистрибутивност:** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **законы на De Morgan:** $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Забележка. Законите на De Morgan лесно могат да се обобщят за много променливи (как?)
- **поглъщане (absorption law):** $p \vee (p \wedge q) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee q)$
- **Други полезни:** $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$, $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$, $p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$,
 $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$,
 $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$, $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \rightarrow q)$,
 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$, $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$,
 $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$, $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Забележка. На контролни (особено семестриално и изпит) не може да ползвате послендите наготово - изключение правят първите три от тях като по-очевидни и често използвани

Полезно. Доказване на (не)еквивалентност

- еквивалентност може да се докаже с:
 - таблица на истинност
 - еквивалентни преобразувания
- нееквивалентност може да се докаже с:
 - таблица на истинност
 - контрапример (подходящ избор на стойности за променливите, за който дадените не са еквивалентни)

Дефиниция 1.8. Казваме, че q следва логически от p , ако $p \rightarrow q$ е тавтология, бележим $p \vdash q$, също и $p \Rightarrow q$

Забележка. \vdash / \Rightarrow не са логически съюзи, така че изводът $p \vdash q$ не е съждение, да не се бърка с импликацията!

Дефиниция 1.9 (извод в съждителната логика). Извод наричаме последователност от съждения p_1, p_2, \dots, p_n, q / $n > 0$ /, където p_1, \dots, p_n са предпоставки (premises), а q е следствие (conclusion). Изводът се счита за валиден, когато, *допускайки, че всички предпоставки са верни (т.е. $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \equiv T$)*, и следствието е вярно ($q \equiv T$).

Горната дефиниция ни казва, че когато p_1, \dots, p_n са едновременно Т, искаме и следствието да е Т. Това може да се гледа като еквивалентно на това да искаме $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q \equiv T$, защото ако някоя от предпоставките е F, то по дефиниция импликацията отново ще е Т. В крайна сметка, за да кажем, че изводът е валиден, ще изискваме просто $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q$ да е тавтология

Дефиниция 1.10. Едноместен предикат е съждение, в което има "празно място", в което се слага обект от предварително зададена област, наречена домейн. За всеки обект от домейна, предикатът е или истина, или лъжа.

Забележка. Самият предикат (без да е свързан с обект) още не е съждение, т.е. не е Т, нито F

Дефиниция 1.11 (квантори). Често ще ползвате следните (особено по дис):

- универсален квантор \forall - за всяко
- екзистенциален квантор \exists - съществува

Забележка. Кванторите имат по-висок приоритет от логическите съюзи

Свойство 1.2. Ако $P(x)$ е предикат над домейн A , състоящ се от обекти a_1, \dots, a_n , то:

- $\exists x \in A : P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$
- $\forall x \in A : P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$

2 Основни задачи

за произволни съждения p, q, r, s :

Задача 1. Съждения ли са изразите: $p \equiv q, p \Leftrightarrow q, p \vdash q, p \Rightarrow q$?

Задача 2. Ако тази задача е под номер 3, вярно ли е, че \oplus е символът за конюнкция?

Задача 3. Докажете чрез еквивалентни преобразувания закона за поглъщане: $p \vee (p \wedge q) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee q)$

Задача 4. Докажете чрез еквивалентни преобразувания следните:

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Дефиниция 2.1. Множество от логически операции наричаме функционално затворено/завършено, ако за всяко съждение съществува еквивалентно съждение, съставено само чрез логическите променливи и константи, и въпросните операции. Т.е. всяко съждение може да се запише, ползвайки само тези операции

Задача 5. Докажете, че множеството от логическите операции \neg, \vee, \wedge е функционално затворено

Задача 6. Докажете, че множеството от логическите операции \neg, \vee е функционално затворено. А какво може да се каже за това от операциите \neg, \wedge ?

Задача 7 (Семестриално КН 21). Използвайки еквивалентни преобразувания, докажете следните еквивалентности:

- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Задача 8. Колко предиката ще ползваме, ако разглеждаме твърдението "Ботев и Вазов са поети" на езика на предикатната логика?

Решение. Един, идеята е да разберем, че тук предикатът е "... е поет", а просто обектите са два. В крайна сметка, ако домейнът са хората и предикатът $P(X)$ е "X е поет", то твърдението ще придобие вида $P(x) \wedge P(y)$, или в конкретния случай $P(\text{Ботев}) \wedge P(\text{Вазов})$

Задача 9. Нека $P(x, y), Q(x)$ са предикати над някакъв домейн. Докажете или опровергайте:

- $\neg \exists x : Q(x) \equiv \forall x : \neg Q(x)$
- $\neg \forall x : Q(x) \equiv \exists x : \neg Q(x)$
- $\forall x \forall y : P(x, y) \equiv \forall x \forall y : P(y, x)$
- $\exists x \exists y : P(x, y) \equiv \exists x \exists y : P(y, x)$
- $\forall x \exists y : P(x, y) \vdash \exists x \forall y : P(x, y)$
- $\exists x \forall y : P(x, y) \vdash \forall x \exists y : P(x, y)$

Задача 10. Ако $P(x), Q(x)$ са предикати над някакъв домейн, да се докаже, че:

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x))$
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x))$

Забележка. Тоест универсалният квантор има дистрибутивно свойство спрямо конюнкцията, а екзистенциалният спрямо дизюнкцията

Решение. Ще разгледаме само първото. Ако a_1, \dots, a_n са обектите от домейна, то от *свойство 1.2* $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (P(a_1) \wedge Q(a_1)) \wedge \dots \wedge (P(a_n) \wedge Q(a_n))$, от асоциативността и комутативността на конюнкцията:

$$\begin{aligned} & (P(a_1) \wedge Q(a_1)) \wedge \dots \wedge (P(a_n) \wedge Q(a_n)) \equiv \\ & (P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \wedge (Q(a_1) \wedge \dots \wedge Q(a_n)) \equiv \\ & \forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x)) \quad \square \end{aligned}$$

Задача 11. Нека $P(x, y), Q(x, y), R(x, y)$ са предикати над някакъв домейн. Напишете отрицанието на следните твърдения така, че знакът за отрицание да не се среща вляво от кванторите

- $\forall x \exists y ((P(x, y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow R(x, y))$
- $\exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow (P(x, y) \vee Q(x, y)))$

3 Задачи за подготовка

Задача 12 (Семестриално И 24). Ако p, q, r, s, t, x, y и z са съждения, докажете, че изразът: $(p \rightarrow q) \vee (((p \wedge t) \vee (q \wedge x) \vee (r \wedge y)) \rightarrow ((t \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow p) \vee (q \rightarrow r)$ е тавтология

Задача 13 (Семестриално КН 22). Докажете или опровергайте (само чрез еквивалентни преобразувания), че изразът $(\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q) \rightarrow r$ е тавтология

Задача 14 (Семестриално И 21). Нека p, q и r са произволни съждения. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че:

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \equiv p \wedge q$
- $(p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv p \vee q$

Задача 15 (Семестриално И 23). Докажете с табличен метод и с еквивалентни преобразувания, че следните са еквивалентни:

$$A = \neg((p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \rightarrow r) \vee (\neg q \wedge \neg r)))$$

$$B = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee r$$

Задача 16 (Семестриално КН 16). Вярно ли е, че:

- от $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$ следва $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
- от $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ следва $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$

Задача 17. Нека $P(x,y)$ е предикатът " $x^2 + y^2 > 2xy$ ". Вярно ли е, че:

- $P(-1,2)$, ако домейнът са всички цели числа
- $\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : P(x, y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : P(x, y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R}^- : P(x, y)$
- $\forall x$ четно $\exists y$ нечетно: $\neg P(x, y)$
- $\exists x$ четно $\forall y$ нечетно: $P(x, y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, y > x : P(x, y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : \neg P(x, y)$
- $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, y \neq x : \neg P(x, y)$
- $\neg \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Q} : P(x, y)$

Решение. Задачата става лесна, след като направим наблюдението, че $x^2 + y^2 > 2xy$ е същото като $(x - y)^2 > 0$, което се случва тогава и само тогава, когато $x \neq y$ (*при реални числа). Ето защо:

- да
- да, достатъчно е $x \neq y$
- да, достатъчно е $x \neq y$
- да, защото тук винаги $x \neq y$
- не; уточнихме, че знакът винаги е $>$ (или $=$), равенство получаваме само при $x=y$, което е невъзможно, когато са с различна четност
- да, всъщност, което и да е четно върши работа
- да, защото тук винаги $x \neq y$
- не, ако x не е естествено, няма как да изберем $y=x$, така че да "счупим" неравенството
- не, в началото уточнихме защо

- не; ако вземем произволно иррационално число x (т.е. $x \notin \mathbb{Q}$), например $x = \pi$, за кое да е y рационално, $x \neq y$, а оттук и $(x - y)^2 > 0$

Задача 18. Обяснете защо е същото дали ще имаме извод с предпоставки p_1, \dots, p_n и следствие q , или извод с единствена предпоставка $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n)$ и следствие q . Тоест $\frac{p_1 \dots p_n}{\therefore q}$ е същото като $\frac{(p_1 \wedge \dots \wedge p_n)}{\therefore q}$

Задача 19 (#бонус). Да се докаже, че изводът с предпоставки p_1, \dots, p_n и следствие $q \rightarrow r$ е валиден, ако изводът с предпоставки p_1, \dots, p_n, q и следствие r е валиден

Решение. Ще покажем два начина (всъщност начинът е един, но формализирането на решението изглежда различно):

1 н.)

Искаме да покажем, че $\frac{p_1 \dots p_n}{\therefore q \rightarrow r}$. По условие имаме, че: $\frac{p_1 \dots p_n q}{\therefore r}$, което според *дефиниция 1.9* е същото като $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q) \rightarrow r \equiv T$ (*) (т.е. е тавтология). От (*):

$T \equiv$

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q) \rightarrow r &\equiv \\ \neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q) \vee r &\equiv \\ (\neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee \neg q) \vee r &\equiv \\ \neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee \neg q \vee r &\equiv \\ \neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee (\neg q \vee r) &\equiv \\ \neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \vee (q \rightarrow r) &\equiv \\ (p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \end{aligned}$$

Сега според *дефиницията за извод (1.9)* $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv T$ ни носи $\frac{p_1 \dots p_n}{\therefore q \rightarrow r}$, което и искаме. \square

2 н.)

Тъй като искаме да покажем, че изводът с предпоставки p_1, \dots, p_n и следствие $q \rightarrow r$ е валиден, то можем да използваме даденото по условие, а именно втория извод (този с предпоставки p_1, \dots, p_n, q и следствие r), за който знаем е валиден, като предпоставка за първия. Тоест искаме:

$$p_1 \wedge \dots \wedge p_n \text{ /} \equiv \text{p/}$$

$$(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q) \rightarrow r \text{ /втория извод ползваме като предпоставка/}$$

$$\frac{}{\therefore q \rightarrow r}$$

Забележка. За олекотавяне на записа можем да считаме, че $p_1 \wedge \dots \wedge p_n$ е една голяма предпоставка $\equiv p$

1. $p \wedge q \rightarrow r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$ /свойство на импликацията/
2. $\neg p \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee \neg(q \vee r)$ /асоциативност на дизюнкцията/
3. p (предпоставка)
4. $\neg(q \vee r)$ /от 2., 3. и дизюнктивен силлогизъм/
5. $\neg(q \vee r) \equiv q \rightarrow r$ /свойство на импликацията/ \square