7. Комбинаторика

"По колко начина могат да те скъсат?"

Юли 2024

1 Задачи с комбинаторни разсъждения

Идея. В задачите с "комбинаторни съображения/разсъждения" обикновено ползваме принципа на "двукратното броене", т.е. се стремим да представим едно и също нещо по два различни начина.

Свойство 1.1 (Правило на Паскал)**.**

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m-1}$$

Свойство 1.2 (Нютонов бином)**.** /Често се полват частните случаи с $y = 1, x = 1$ и 2/

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Задача 1 (Vandermonde's identity)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Решение. Имаме група от m мъже и n жени.
- Тогава лявата страна $\binom{m+n}{k}$ показва по колко начина можем да изберем k души от тях;
- Ако от избраните k i са мъже, то $k-i$ са жени. От принципа на умножението изборът може да стане по $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина. Понеже i може да приема прозиволни стойности от 0 до k (т.е. от избраните k броят мъже варира от 0 до k включително), то по общо $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина можем да изберем k души от всички $n+m$, което е именно изразът от дясната част на равенството. ■

Задача 2 (Hockey-stick identity)**.** Ако $r \leq n$ и $r, n \in \mathbb{N}$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина $n+1$ и точно $r+1$ единици в записа си. Те са точно $\binom{n+1}{r+1}$ на брой.
Да погледнем от друг ъгъл, последната единица във всеки такъв низ може да стои на всяка позиция i от r до n включително (започваме броенето от 0). Същевременно, щом тя е на позиция i, то преди нея има i на брой цифри, като точно r от тях са единици, а след нея има само нули. При фиксирано i низовете от този вид са точно $\binom{i}{r}$, тогава общата бройка е именно $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}$. ■

Задача 3. Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

Решение. Задачата става сравнително проста, ако я разделим на две части:

- $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$
- $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, откъдето и $\binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2$

Оттук директно следва исканото: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. ■
Но да докажем двете равенства поотделно:

- имаме група от $2n+2$ предмета, като сме си харесали два от тях (да ги наречем "специални"). По колко начина можем да вземем $n+1$ предмета (половината), редът на взимане не е от значение?
  LHS (лявата страна): $n+1$ предмета от общо $2n+2$ можем да изберем по $\binom{2n+2}{n+1}$ начина.
  RHS (дясната страна): спонехаме, че имаме два "специални" предмета, тогава имаме 3 случая за избор на $n+1$ предмета:
  - да вземем и двата, както и още $n-1$ от останалите;
  - да вземем точно 1 от тях (може да стане по два начина) и още n от останалите;
  - да не вземем никой от тях, а $n+1$ от останалите;
  тогава имаме общо $\binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$ начина.

  Както се вижда, двете страни броят едно и също нещо по два различни начина. □

- Равенството $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ би трябвало да е показвано на лекции, но нека го докажем. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Разглеждаме множество от $2n$ предмета, от тях искаме да изберем n. Нека сега разделим по произволен начин предметите на две равни групи (от по n), Ако от n-те избрани k са взети от първата група, то $n-k$ са от втората, двата избора са независими, значи при фиксирано k имаме $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ начина (принцип на умножението). k е произволно, така че сумираме по него $\Rightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. □

Задача 4 (Поправителен 2024)**.** Ако $n, m, k \in \mathbb{N}$ и $k+m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m} = \binom{n}{k+m}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина n и точно $k+m$ единици в записа си. Ясно е, че те са $\binom{n}{k+m}$ на брой.
Да се спрем върху един такъв низ, нека k-тата единица в записа му е на позиция i, започваме броенето от 1. Тогава вляво от тази нея има $i-1$ позиции, като на точно $k-1$ тях има цифра 1, възможните такива префикси са $\binom{i-1}{k-1}$ на брой. Вдясно от позиция i има $n-i$ цифри, като точно m от тях са 1-ци, възможните такива суфикси са $\binom{n-i}{m}$.
Понеже суфиксите и префиксите са независими, а $k \leq i \leq n-m$, то общо има $\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m}$ такива низа. ■

Задача 5 (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

Решение. Разглеждаме $2n$ съпружески двойки (общо $4n$ човека). От тях искаме да изберем $2n$ човека. Ясно е, че това може да се случи по $\binom{4n}{2n}$ начина, да дадем обаче и алтернативното преброяване: От всяка съпружеска двойка в избраните може да не присъства човек, да присъства точно един или да присъстват и двамата. Нека k са двойките, които нямат представител измежду избраните,

l да са тези с двама представители и съответно $2n-k-l$ са двойките с точно един представител в избраните.

Наблюдение: Понеже искаме $0.k+2.l+1.(2n-k-l)=2n \Rightarrow 2n-k+l=2n \Rightarrow k=l$.

Сега да преброим: за фиксирано k по $\binom{2n}{k+l}=\binom{2n}{2k}$ начина можем да изеберем двойките с по 0 или 2 представители (съответно всички останалите ще са с по 1). От тези $2k$ по $\binom{k+l}{k}=\binom{2k}{k}$ начина избираме от кои k двойки няма да има човек. Уточнихме, че от останалите $2n-k-l=2n-2k$ двойки ще има точно по 1 представител, такъв можем да изберем по 2 начина за всяка, или общо 2^{2n-2k} начина.
Понеже трите избора са независими, а k е произволно, имаме общо $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}$ начина за избор на $2n$ души. ■

Задача 6 (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}=2^{m+n+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с $m+n+1$ цифри. Те са 2^{m+n+1} на брой. Ще покажем, че лявата страна брои същото:
Можем да разделим въпросните низове на две групи: такива с $\geq m+1$ единици в записа си и такива с $< m+1$ единици в записа си. Забележете, че последното може да се изкаже и по друг начин - низове с $\geq n+1$ нули в записа си.
За начало да преброим тези от първи вид. Казахме, че те имат $\geq m+1$ единици, нека $(m+1)$-вата единица е на позиция p, започвайки броенето от 0. Ясно е, че $p \geq m$ (все пак преди нея има още m единици), както и $p \leq m+n$. Нека $k := p-m \Rightarrow 0 \leq k \leq n$. Понеже искаме *поне* k 1-ци, то след позиция p цифрите в записа на низа могат да са произволни, все пак вече сме "гарантирали" исканата бройка, т.е. имаме $2^{n+m-p}=2^{n-k}$ варианта за тях. Колкото до цифрите на позиции от 0 до $p-1$ знаем, че измежду тях има точно m 1-ци, имаме $\binom{p}{m}=\binom{m+k}{m}=\binom{m+k}{k}$ варианта. k може да приема различни стойности, в крайна сметка низовете от първи вид са общо: $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k}$.
За тези от втори вид (с $< m$ единици) дадохме алтернативното "с $\geq n+1$ нули", което свежда нещата до вече решената задача. Аналогично на предното, низвоете от втори вид са: $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}$.
Всеки двоичен низ попада в точно една от двете посочени групи, така че общата бройка е именно сумата: $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}$ ■

Задача 7 (Семестриално КН 2024)**.** Ако $k \leq m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n-i}{m}=\binom{n-k}{m-k}$$

Решение. Нека $A=\{1,\ 2,\ \dots\ n\}$ е опорно множество. Интересуваме се колко са m-елементите подмножества $B \subseteq A$, които съдържат числата от 1 до k. От една страна, това може да се сметне така: елементите 1 до k са "фиксирани" (винаги са имежду m-те), така че имаме $\binom{n-k}{m-k}$ такива множества.
Да намерим същата бройка с метода за включване и изключване: Всички m-елементни подмножества са $\binom{n}{m}$. От тях обаче трябва да извадим неотговарящите на условието, а именно тези, от които липсва *поне* 1 от числата в интервала 1 до k. Зебележете обаче, че бройката пак не е точна, така бихме извадили няколко пъти множествата, от които отсъства повече от едно от числата в интервала 1 до k. Става ясно, че трябва да ползваме inclusion-exclusion, точната бройка ще е:
$\sum_{i=0}^{k}$ *(брой на m-елементните подмножества, които НЕ съдържат поне i от числата $1,\ 2,\ \dots\ k$).*

За фиксирано i такива множества има $\binom{k}{i}\binom{n-i}{m}$ (числата, които няма да присъстват, можем да изберем по $\binom{k}{i}$ начина, а самите m-елементни подмножества B, които не ги съдържат, са $\binom{n-i}{m}$).
Заместваме в сумата и получаваме лявата част на даденото по условие. ■

Задача 8 (IMO 1981)**.** Нека $1 \le r \le n$. Разглеждаме всички r-елементни подмножества на множеството $\{1, 2, \cdots, n\}$. Всяко от тези подмножества има най-малък елемент. Нека с $F(n,r)$ означаваме средното аритметично на всички такива най-малки числа. Докажете, че: $F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Търсим средно аритметично, за целта ще ни трябва сумата на всички най-малки елементи и бройката им. Понеже всяко подмножество има най-малък елемент, то бройката е именно $count = \binom{n}{r}$ (толкова са подмножествата).
Търсим и сумата. Вместо да събираме минималните елементи за всяко подмножество, нека с a_i означим бройката подмножества, за които i е минимален елемент. Тогава търсената сума е: $sum = \sum_{i=1}^{n} ia_i$. Лесно се вижда, че r-елементните подмножества с най-малък елемент i са точно $a_i = \binom{n-i}{r-1}$. Заместваме и получаваме $sum = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}$.
Тогава търсеното средно аритметично е $\overline{X} = \frac{sum}{count} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}}{\binom{n}{r}} =?$. Знаем, че трябва да получим $\frac{n+1}{r+1}$, тоест $sum = count.\frac{n+1}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ние обаче получихме друго, това ни подсеща, че трябва да потърсим алтернативен запис на сумата, тук идват комбинаторните разсъждения, искаме да покажем, че $sum = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n-i}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ето защо:
Дясната страна брои всички двоични низове с дължина $n+1$, в чийто запис има точно $r+1$ единици ($r+1 \ge 2$).
Нека втората единица (такава има) е на позиция $i+1, i \ge 1$ (започваме номерацията от 1). Първата единица е някъде вляво, за нея имаме i варианта, оставащите $r+1-2 = r-1$ единици трябва да са вдясно от втората единица, имаме $n+1-(i+1) = n-i$ позиции, от които да избираме, значи имаме $\binom{n-i}{r-1}$ варианта за избор, умножаваме. Така за фиксирано i, получихме $i\binom{n-i}{r-1}$ варианта, i може да приема произволни стойности, правим сумата $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n-i}{r-1}$, откъдето двете страни броят едно и също нещо. ∎

2 Комбинаторни конфигурации

Принципи на събирането и умножението

Задача 9. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, ако всяко меню се състои от супа, основно, десерт?

Решение. Принцип на умножението: 5.2.4=40. ∎

Задача 10. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, не е задължително менютата да са тристепенни, но трябва да имат поне по едно ядене?

Решение. Задачата е същата, но можем да си представим "невзимането" на дадено ядене като още един вариант (например така вече имаме 5+1=6 супи, като последната супа е просто празна купа). Принцип на умножението: (5+1).(2+1).(4+1)=90. Изваждаме 1 (защото в бройката сме включили възможността нищо да не е взето). 90-1=89 ∎

Задача 11. Колко са трицифрените числа с различни цифри?

Решение. За първа цифра имаме 9 варианта (всичко без 0), за втора отново 9 (една цифра вече е използвана), за трета - 8. Принцип на умножението: 9.9.8=648. ∎

Задача 12. Колко са трицифрените числа с три различни или три еднакви цифри?

Решение. Има 9 числа с еднакви цифри, прибавяме, принцип на събирането: 648+9=657 ∎

Задача 13. Колко са четните трицифрени числа с различни цифри?

Решение. Разглеждаме два варианта:

- последната цифра е 0, тогава за първа цифра имаме 9 варианта, за втора остават 8. От принципа за умножението: 8.9=72 числа.
- последната цифра не е 0 (значи е 2, 4, 6 или 8). За първа цифра този път има 8 варианта, за втора отново 8. Има 8.8.4=256 такива числа.

Принцип на събирането: 72+256=328. ■

Задача 14. Колко са 10-буквените низове, съставени от различни малки латински букви, в които не се срещат една до друга буквите a и b?

Решение. Низовете с различни букви са $26.25.\cdots.17$. Да преброим в колко от тях се срещат една до друга буквите a, b, можем да си ги представяме в "пакет", като нова буква (съответно ab или ba), който задължително трябва да присъства. Сега обаче няма да строим 10-буквени низове, а 9-буквени, в които една от буквите е въпросният "пакет". 9 възможности за разполагането му, 2 за реда на буквите a и b, $24.23\cdots.17$ варианта за оставащите 10-2=8 букви. Краен отговор: $(26.25.\cdots.17) - 9.2.(24.23\cdots.17)$ ■

Задача 15. Колко са n-буквените низове, съставени от малки латински букви, в които се срещат поне две поредни еднакви букви?

Решение. Да преброим в колко низа няма две поредни еднакви букви: За първата буква имаме 26 варианта, за втората, понеже не можем да повторим предната, имаме 25. Аналогично за третата отново имаме 25 варианта, същото за четвъртата и т.н. В крайна сметка имаме общо $26.25^{(n-1)}$ варианта. Изваждаме това от общата бройка, остават $26^n - 26.25^{(n-1)}$ низа. ■

Пермутации

Задача 16. По колко начина могат да се хванат n души на хоро?

Отговор. $(n-1)!$

Задача 17. Колко различни гривни могат да бъдат направени от n различни мъниста?

Отговор. $\frac{(n-1)!}{2}$

Задача 18. Колко различни думи могат да се построят от буквите на думата "МИШКА"?

Отговор. 5!

Задача 19. Колко различни думи могат да се построят от буквите на думата "МАТЕМАТИКА"?

Отговор. $\frac{10!}{2!3!2!}$ (заради повтарящите се М-та, А-та, Т-та).

Кп,н

Задача 20. Колко са всички подмножества на n-елементно множество?

Отговор. 2^n

Задача 21. Колко са всички тотални функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. n^m

Задача 22. Колко са всички частични функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. $(n+1)^m$, представяме си в кодомейна има още едно състояние $''undefined''$.

Задача 23. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи могат да бъдат съставени?

Отговор. n^m

K

Задача 24. По колко начина могат да се изберат m човека от група от n?

Отговор. $\binom{n}{m}$

Задача 25. Колко са всички низове с n символа $'*'$ и m символа $'|'$?

Отговор. $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$

Задача 26. По колко начина от 12 топки, половината от които са бели, а другите черни, може да се изберат 3 черни и 2 бели топки?

Отговор. $\binom{6}{3}\binom{6}{2}$

Кн

Задача 27. По колко начина 10 човека могат да седнат на 5-местна пейка (не се позволява да стоят един в друг).

Отговор. $10.9.8.7.6 = \frac{10!}{5!}$

Задача 28. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи с различни букви могат да бъдат съставени от тях?

Отговор. $\frac{n!}{n-m!}$

Кп

Задача 29. По колко начина можем да изберем 6 пасти, ако са налични 3 различни вида пасти?

Решение. Можем да си мислим за пастите като 6 * в редица. За да различаваме по колко пасти са от всеки вид, ще слагаме разделители, например $**||****$ би означавало 2 пасти от първи вид, 0 от втори, 4 от трети. Използваме вече решената по-горе задача, има $\binom{6+2}{2} = \binom{6+2}{6}$ варианта. ■

Задача 30. По колко начина можем да изберем n пасти, ако са налични k различни вида пасти?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

Задача 31. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, като може да има празни кутии? Какво става, ако кутиите са неразличими?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Задача 32. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, ако няма празни кутии?

Решение. Да сложим във всяка кутия по предмет, остават $n-k$ неразличими предмета, сведохме до горната задача, значи търсеният отговор е: $\binom{(n-k)+(k-1)}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ ■.
Ако кутиите са неразличими, задачата се свежда до намиране на *integerpartitions* на n-елементно множество, за което кратка формула няма. (виж *12fold way*)

Задача 33 (*наредени разлагания*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$. Две решения $(x_1, \cdots, x_k), (y_1, \cdots, y_k)$ се считат различни, ако $\exists i : x_i \neq y_i$. Как се променя задачата, ако искаме всичките числа да са положителни?

Решение. Отново прилагаме трика с разделителите, имаме n, трябва да го разбием на k части (редът има значение). Отново слагаме разделители, $k-1$ на брой. Общо вариантите са: $\binom{n+k-1}{n}$. Ако искаме само положителни решения (ненулеви), трябва $\forall i : x_i \geq 1$. Тогава $(x_1-1)+\cdots+(x_n-1) = n-k$ е ново уравнение, в което всеки член $y_i = x_i - 1 \geq 0$, така сведохме задачата до старата, търсеният брой в случая е:$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ ■

Задача 34 (*наредени разлагания при допълнителни ограничения*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, за които $x_1 \leq 30$.

Решение. Да намерим колко са всички решения, в които $x_1 > 30$ и да ги извадим от общия брой. Искаме $x_1 - 31 \geq 0$, тогава $(x_1 - 31) + x_2 + \dots + x_n = n - 31$, след полагане $y_1 = x_1 - 31$ можем да запишем и като $y_1 + x_2 + \dots + x_n = n - 31$ $(*)$, но така сведохме до оригиналната задача (понеже в момента за y_1 няма ограничения). Броят решения на (*) е: $\binom{n-31+k-1}{k-1} = \binom{n+k-32}{k-1}$. ■

Задача 35 (*брой растящи функции*)**.** Нека X, Y са множества от естествени числа, $|X| = m, |Y| = n$. Колко са растящите (нестрого) функции $f : X \mapsto Y$. А колко са строго растящите?

Решение. Нека с $a_i, 1 \leq i \leq n$ бележим броя числа от X, за които $f(x) = y_i$. Ясно е, че $a_1 + \dots + a_n = m$. Всяко решение на тази система еднозначно определя някоя растяща функция. Според горните твърдения броят е $\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}$.
Колкото до монотонно растящите, вижда се, че $a_i \leq 1$. Тоест трябва да изберем кои m от n-те a_i да бъдат единици, т.е. отговорът е $\binom{n}{m}$. ■