# Комбинаторни разсъждения

"Двата пътя"

Декември 2025

## 1 Задачи с комбинаторни разсъждения

*Идея.* В задачите с "комбинаторни съображения/разсъждения" обикновено ползваме принципа на "двукратното броене", т.е. се стремим да представим едно и също нещо по два различни начина.

**Дефиниция 1** (*Stirling numbers of the first kind*)**.** С $\left[{n \atop k}\right]$ означаваме броя пермутациите на $n$-елементно множество с точно $k$ цикъла.

**Дефиниция 2** (*Stirling numbers of the second kind*)**.** С $\left\{{n \atop k}\right\}$ означаваме броя на разбиванията на $n$-елементно множество на $k$ части.

**Свойство 1.1** (*Правило на Паскал*)**.**

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

**Свойство 1.2** (*Нютонов бином*)**.** /Често се полват частните случаи с $y = 1, x = 1$ и 2/

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

**Задача 1** (*Vandermonde's identity*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

*Решение.* Имаме група от $m$ мъже и $n$ жени.
- Тогава лявата страна $\binom{m+n}{k}$ показва по колко начина можем да изберем k души от тях;
- Ако от избраните k $i$ са мъже, то $k - i$ са жени. От принципа на умножението изборът може да стане по $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина. Понеже i може да приема прозиволни стойности от 0 до k (т.е. от избраните k броят мъже варира от 0 до k включително), то по общо $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина можем да изберем k души от всички $n + m$, което е именно изразът от дясната част на равенството. ■

**Задача 2** (*Hockey-stick identity*)**.** Ако $r \leq n$ и $r, n \in \mathbb{N}$ , докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

*Решение.* Разглеждаме двоичните низове с дължина $n + 1$ и точно $r + 1$ единици в записа си. Те са точно $\binom{n+1}{r+1}$ на брой.
Да погледнем от друг ъгъл, последната единица във всеки такъв низ може да стои на всяка позиция $i$ от $r$ до $n$ включително (започваме броенето от 0). Същевременно, щом тя е на позиция $i$, то преди нея има $i$ на брой цифри, като точно $r$ от тях са единици, а след нея има само нули. При фиксирано $i$ низовете от този вид са точно $\binom{i}{r}$, тогава общата бройка е именно $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}$. ■

**Задача 3** (Семестриално КН 25)**.** За естествените числа $x, y \in \mathbb{N}, x > y$ докажете с комбинаторни разсъждения:

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

*Решение.* Разглеждаме азбука $\Sigma_1$, съставена от $x = |\Sigma_1|$ различни букви (символа) и нейно подмножество азбуката $\Sigma_2$ с $|\Sigma_2| = y$.

**LHS** (лявата страна): В контекста на горното $x^n$ е бройката на всички думи с дължина $n$, съставени от буквите в $\Sigma_1$, съответно $y^n$ е бройката на всички думи с дължина дължина $n$ и съставени само от буквите в $\Sigma_2$. Тогава лявата част на равенството $x^n - y^n$ отговаря на бройката на всички думи с дължина $n$ над азбука $\Sigma_1$, в които има *поне* една буква, която е част от $\Sigma_1$, но не и от подмножеството $\Sigma_2$ (т.е. буква, принадлежаща на $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2$).

**RHS** (дясната страна): Отново разглеждаме думите с дължина $n$ с букви от $\Sigma_1$, в които поне една буква е от $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2$. Нека най-дясната такава буква (от $\Sigma_1$, но не и от $\Sigma_2$) е на позиция $k, 0 \leq k \leq n-1$, т.е. всички $n-k-1$ букви вдясно от нея са част от $\Sigma_2$. Добре е да уточним, че този критерий задава разбиване на всички думи от търсения вид. За самата буква на позиция $k$ има $x - y$ възможности (защото толкова са буквите в $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2$). Що се отнася до буквите вляво от нея, за тях няма допълнителни ограничения и могат да са произволни. Това показва, че при фиксирано $k$ броят думи от търсения вид е $|\Sigma_1|^k.(x-y).|\Sigma_2|^{n-k-1}$.
Тогава общият брой думи с поне една буква от $\Sigma_1 \backslash \Sigma_2$ е:
$\sum_{k=0}^{n-1} x^k (x-y) y^{n-1-k} = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$. ■

**Задача 4.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

*Решение.* Задачата става сравнително проста, ако я разделим на две части:

- $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$
- $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, откъдето и $\binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2$

Оттук директно следва исканото: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. ■
Но да докажем двете равенства поотделно:

- */предложи К. Прончева/ 1 н.)* $\binom{2n}{n+1}+2\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1} = [\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}]+[\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}] \overset{\text{правило на Паскал}}{=} \binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n} \overset{\text{правило на Паскал}}{=} \binom{2n+2}{n+1}$

  *2 н.)* Имаме група от $2n + 2$ предмета, като сме си харесали два от тях (да ги наречем "специални"). По колко начина можем да вземем $n + 1$ предмета (половината), редът на взимане не е от значение?
  LHS (лявата страна): $n + 1$ предмета от общо $2n + 2$ можем да изберем по $\binom{2n+2}{n+1}$ начина.
  RHS (дясната страна): спонехаме, че имаме два "специални" предмета, тогава имаме 3 случая за избор на $n + 1$ предмета:
  - да вземем и двата, както и още $n - 1$ от останалите;
  - да вземем точно 1 от тях (може да стане по два начина) и още $n$ от останалите;
  - да не вземем никой от тях, а $n + 1$ от останалите;
  тогава имаме общо $\binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$ начина.

  Както се вижда, двете страни броят едно и също нещо по два различни начина. □

- Равенството $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ би трябвало да е показвано на лекции, но нека го докажем. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Разглеждаме множество от $2n$ предмета, от тях искаме да изберем $n$. Нека сега разделим по произволен начин предметите на две равни групи (от по $n$), Ако от $n$-те избрани $k$ са взети от първата група, то $n-k$ са от втората, двата избора са независими, значи при фиксирано $k$ имаме $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ начина (принцип на умножението). $k$ е произволно, така че сумираме по него $\Rightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. $\square$

**Задача 5** (Поправителен 2024)**.** Ако $n, m, k \in \mathbb{N}$ и $k + m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m} = \binom{n}{k+m}$$

*Решение.* Разглеждаме двоичните низове с дължина $n$ и точно $k+m$ единици в записа си. Ясно е, че те са $\binom{n}{k+m}$ на брой.
Да се спрем върху един такъв низ, нека $k$-тата единица в записа му е на позиция $i$, започваме броенето от 1. Тогава вляво от тази нея има $i-1$ позиции, като на точно $k-1$ тях има цифра 1, възможните такива префикси са $\binom{i-1}{k-1}$ на брой. Вдясно от позиция $i$ има $n-i$ цифри, като точно $m$ от тях са 1-ци, възможните такива суфикси са $\binom{n-i}{m}$.
Понеже суфиксите и префиксите са независими, а $k \leq i \leq n-m$, то общо има $\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m}$ такива низа. ■

**Задача 6** (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

*Решение.* Разглеждаме $2n$ съпружески двойки (общо $4n$ човека). От тях искаме да изберем $2n$ човека. Ясно е, че това може да се случи по $\binom{4n}{2n}$ начина, да дадем обаче и алтернативното преброяване: От всяка съпружеска двойка в избраните може да не присъства човек, да присъства точно един от двамата или да присъстват и двамата. Нека $k$ са двойките, които нямат представител измежду избраните, $l$ да са тези с двама представители и съответно $2n-k-l$ са двойките с точно един представител в избраните.

*Наблюдение:* Понеже искаме $0.k + 2.l + 1.(2n-k-l) = 2n \Rightarrow 2n - k + l = 2n \Rightarrow k = l$.

Сега да преброим: за фиксирано $k$ по $\binom{2n}{k+l} = \binom{2n}{2k}$ начина можем да изберем двойките с по 0 или 2 представители (съответно всички останалите ще са с по 1). От тези $2k$ по $\binom{k+l}{k} = \binom{2k}{k}$ начина избираме от кои $k$ двойки няма да има човек. Уточнихме, че от останалите $2n-k-l = 2n-2k$ двойки ще има точно по 1 представител, такъв можем да изберем по 2 начина за всяка, или общо $2^{2n-2k}$ начина.
Понеже трите избора са независими, а $k$ е произволно, имаме общо $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$ начина за избор на $2n$ души. ■

**Задача 7** (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$$

*Решение.* Разглеждаме двоичните низове с $m+n+1$ цифри. Те са $2^{m+n+1}$ на брой. Ще покажем, че лявата страна брои същото:
Можем да разделим въпросните низове на две групи: такива с $\geq m+1$ едници в записа си и такива

с $< m+1$ единици в записа си. Забележете, че последното може да се изкаже и по друг начин - низове с $\geq n+1$ нули в записа си.
За начало да преброим тези от първи вид. Казахме, че те имат $\geq m+1$ единици, нека $(m+1)$-вата единица е на позиция $p$, започвайки броенето от 0. Ясно е, че $p \geq m$ (все пак преди нея има още единици), както и $p \leq m+n$. Нека $k := p - m \Rightarrow 0 \leq k \leq n$. Понеже искаме *поне* $k$ 1-ци, то след позиция $p$ цифрите в записа на низа могат да са произволни, все пак вече сме "гарантирали" исканата бройка, т.е. имаме $2^{n+m-p} = 2^{n-k}$ варианта за тях. Колкото до цифрите на позиции от 0 до $p-1$ знаем, че измежду тях има точно $m$ 1-ци, имаме $\binom{p}{m} = \binom{m+k}{m} = \binom{m+k}{k}$ варианта. $k$ може да приема различни стойности, в крайна сметка низовете от първи вид са общо: $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k}$.
За тези от втори вид (с $< m$ единици) дадохме алтернативното "с $\geq n+1$ нули", което свежда нещата до вече решената задача. Аналогично на предното, низвоете от втори вид са: $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}$.
Всеки двоичен низ попада в точно една от двете посочени групи, така че общата бройка е именно сумата: $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}$ ■

**Задача 8** (Семестриално КН 2024)**.** Ако $k \leq m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n-i}{m} = \binom{n-k}{m-k}$$

*Решение.* Нека $A = \{1,\ 2,\ \dots\ n\}$ е опорно множество. Интересуваме се колко са m-елементите подмножества $B \subseteq A$, които съдържат числата от 1 до $k$. От една страна, това може да се сметне така: елементите 1 до $k$ са "фиксирани" (винаги са имежду $m$-те), така че имаме $\binom{n-k}{m-k}$ такива множества.
Да намерим същата бройка с метода за включване и изключване: Всички $m$-елементни подмножества са $\binom{n}{m}$. От тях обаче трябва да извадим неотговарящите на условието, а именно тези, от които липсва *поне* 1 от числата в интервала 1 до $k$. Зебележете обаче, че бройката пак не е точна, така бихме извадили няколко пъти множествата, от които отсъства повече от едно от числата в интервала 1 до $k$. Става ясно, че трябва да ползваме inclusion-exclusion, точната бройка ще е:
$\sum_{i=0}^{k}$ *(брой на $m$-елементните подмножества, които НЕ съдържат поне $i$ от числата $1,\ 2,\ \dots\ k$).*

За фиксирано $i$ такива множества има $\binom{k}{i}\binom{n-i}{m}$ (числата, които няма да присъстват, можем да изберем по $\binom{k}{i}$ начина, а самите $m$-елементни подмножества $B$, които не ги съдържат, са $\binom{n-i}{m}$).
Заместваме в сумата и получаваме лявата част на даденото по условие. ■

**Задача 9** (IMO 1981)**.** Нека $1 \leq r \leq n$. Разглеждаме всички $r$-елементни подмножества на множеството $\{1, 2, \cdots, n\}$. Всяко от тези подмножества има най-малък елемент. Нека с $F(n,r)$ означаваме средното аритметично на всички такива най-малки числа. Докажете, че: $F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$.

*Решение.* Търсим средно аритметично, за целта ще ни трябва сумата на всички най-малки елементи и бройката им. Понеже всяко подмножество има най-малък елемент, то бройката е именно $count = \binom{n}{r}$ (толкова са подмножествата).
Търсим и сумата. Вместо да събираме минималните елементи за всяко подмножество, нека с $a_i$ означим бройката подмножества, за които $i$ е минимален елемент. Тогава търсената сума е: $sum = \sum_{i=1}^{n} ia_i$. Лесно се вижда, че $r$-елементните подмножества с най-малък елемент $i$ са точно $a_i = \binom{n-i}{r-1}$. Заместваме и получаваме $sum = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}$.
Тогава търсеното средно аритметично е $\overline{X} = \frac{sum}{count} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-i}{r-1}}{\binom{n}{r}} =?$. Знаем, че трябва да получим $\frac{n+1}{r+1}$, тоест $sum = count.\frac{n+1}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ние обаче получихме друго, това ни подсеща, че трябва да потърсим алтернативен запис на сумата, тук идват комбинаторните разсъждения, искаме да покажем, че $sum = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n-i}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ето защо:
Дясната страна брои всички двоични низове с дължина $n+1$, в чийто запис има точно $r+1$ единици ($r+1 \geq 2$).
Нека втората единица (такава има) е на позиция $i+1, i \geq 1$ (започваме номерацията от 1). Първата единица е някъде вляво, за нея имаме $i$ варианта, оставащите $r+1-2 = r-1$ единици трябва да са вдясно от втората единица, имаме $n+1-(i+1) = n-i$ позиции, от които да избираме, значи имаме $\binom{n-i}{r-1}$ варианта за избор, умножаваме. Така за фиксирано $i$, получихме $i\binom{n-i}{r-1}$ варианта, $i$

може да приема произволни стойности, правим сумата $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n-i}{r-1}$, откъдето двете страни броят едно и също нещо. $\blacksquare$

**Задача 10.** Ако $n^{\underline{k}} := n(n-1)\cdots(n-k+1)$, да се докаже с комбинаторни разсъждения:

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} n^{\underline{k}}$$

*Решение.* Разглеждаме числата $1, 2, ..., m$ и $n$ различни цвята (да ги бележим с $c_1, c_2, ..., c_n$). Под *оцветяване* на числата ще разбираме тотална функция от множеството на числата в множеството на цветовете. Всяко число оцветяваме в един от $n$ възможни цвята, така че броят на оцветяванията на числата $1, 2, ..., m$ в $n$ цвята е тъкмо $n^m$ (каквото брои лявата страна).
Оцветяванията могат да бъдат характеризирани спрямо броя на различните използвани цветове в тях. Съответно този критерий задава разбиване на множеството от оцветявания. Нека с $A_k$ да означим множеството от оцветявания на числата, в които са използвани точно $k$ различни цвята. Тогава броят на всички оцветявания е $\sum_{k=1}^{m} |A_k|$.
Остава да преброим $|A_k|$ при фиксирано $k$. Ясно е, че ако в дадено оцветяване с $k$ цвята един от цветовете бъде сменен с друг (неприсъстващ в оцветяването), ще получим ново оцветяване. Структурата на оцветяването обаче остава същата. Под структура разбираме скелета на оцветяването, информацията кои числа ще са в еднакъв цвят и кои в различен. Всъщност структурата на оцветяване съответства на някакво разбиване на множеството $\{1, 2, \cdots, m\}$ на $k$ части (и обратно). Броят такива разбивания е $\left\{ {m \atop k} \right\}$. При фиксирана структура за първия участващ цвят имаме $n$ варианта, за втория $n-1$, ..., а за последния $n-k+1$ варианта, или общо $n^{\underline{k}}$. Така оцветяванията в $k$ различни цвята са точно $|A_k| = \left\{ {m \atop k} \right\} n^{\underline{k}}$, откъдето всички оцветявания са $\sum_{k=1}^{m} |A_k| = \sum_{k=1}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} n^{\underline{k}}$. $\blacksquare$

## Още примери

**Задача 11.** Да се докажат с комбинаторни разсъждения следните:

- $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
- $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$
- $\left\{ {m \atop n} \right\} = \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\} + n\left\{ {m-1 \atop n} \right\}$
- $\left[ {n \atop k} \right] = \left[ {n-1 \atop k-1} \right] + (n-1)\left[ {n-1 \atop k} \right]$
- $K_н(n, k) = K_н(n-1, k) + k.K_н(n-1, k-1)$, където с $K_н(n, k) = V_n^k$ означаваме броя начини да се подредят $k$ от общо $n$ различни обекта в редица
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $\left\{ {m \atop n} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$
- $\prod_{k=1}^{m} \binom{n_1+\cdots+n_i}{n_i} = \frac{(n_1+\cdots+n_m)!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_m!)}$, където $n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbb{N}$
- (*) $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$
- (*) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n+1-k)^m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (n+1-k)^m + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$