

Рекурентни уравнения

”Историята са повтаря”

Декември 2025

Алгоритъм

Дефиниция 1. (рекурентно уравнение) Виж дефиниция 1.

Ще покажем метод за решаване на рекурентни уравнения от вида:

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{P_1(n) \cdot b_1^n + \dots + P_l(n) \cdot b_l^n}_{\text{нехомогенна част}},$$

където: $c_1, \dots, c_{n-k}, b_1, \dots, b_l$ са константи, b_1, \dots, b_l са две по две различни, $P_1(n), \dots, P_l(n)$ са (крайни) полиноми на n .

За да отговаря едно уравнение на горния вид са особено важни следните:

- уравнението има крайна история (т.е. k, l са константи)
- уравнението има константни коефициенти

Забележка (начални условия). Самото уравнение може да се реши еднозначно (да се намери формула за общия член, в която да няма неизвестни), стига да са дадени стойности за поне k члена (начални условия).

Разглеждаме само хомогенната част, в нея заменяме a_i с x^i , така получаваме равенството:

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \dots + c_k x^{n-k} \quad \Bigg| : x^{n-k}$$
$$x^k = c_1 x^{k-1} + \dots + c_k x^0 \quad (1) \text{ /характеристично уравнение/}$$

От решенията на характеристичното уравнение образуваме мултимножеството (мулти, защото някои корени могат да са двойни):

$$M_1 = \{x_0 \mid x_0 \text{ е решение на (1)}\}_M$$

От нехомогенната част образуваме и второ мултимножество, чиито елементи са основите на експонентите (т.е. b_i -тата), като всяка ще участва в множеството $\deg_i + 1$ на брой пъти, където $\deg_i + 1$ е степента на полинома $P_i(n)$:

$$M_2 = \{ \underbrace{b_1, b_1, \dots, b_1}_{\deg(P_1(n)) + 1}, b_2, \dots, \underbrace{b_l, b_l, \dots, b_l}_{\deg(P_l(n)) + 1} \}_M$$

Взимаме обединението на двете мултимножества: $M = M_1 \cup M_2$ (забележете, че $|M| = |M_1| + |M_2| = k + l$). Тогава общото решение на рекурентното уравнение е:

$$a_n = \underbrace{A_1 n^0 x_1^n + A_2 n^1 x_1^n + \dots + A_{r_1} n^{r_1-1} x_1^n}_{r_1 \text{ на брой}} + \dots + \underbrace{A_{r_t} n^0 x_t^n + \dots + A_{|M|} n^{r_t-1} x_t^n}_{r_t \text{ на брой}},$$

където x_1, \dots, x_t са различните стойности в мултимножеството M , r_i е съответно броят срещания на x_i в M , а $A_1, \dots, A_{|M|}$ са коефициенти, чиито точни стойности излизат от базовите случаи. ■

**Полезно.* Понякога самата формула за общия член е сравнително очевидна (или вече известна), но минаването през алгоритъма, който ще доведе до нея, е тежко. В такъв случай алтернативен вариант е да докажем валидността на формулата директно по индукция.

1 Задачи по алгоритъма

Задача 1. Кой от следните рекурентни уравнение могат да бъдат решени с горепосочения алгоритъм?

а) $a_n = 2a_{n-1} + (n^2 + 3n - 4)2^n + 3^n$

б) $a_n = 3a_{n-2} + (2n - 3)3^n + 5^n$

в) $a_n = a_{n-1} + (2n - 3)3^n + (n^2 + 3)3^n$

г) $a_n = 3a_{n-1} + (3n^2 + 5n - 4)2^{n+2}$

д) $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1}$

е) $a_n = (n - 1)a_{n-1} + 3n2^{n+1}$

ж) $a_n = a_{n-1} + n^2 + 2n + 5$

з) $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1} + (n - 1)2^{2n-1}$

и) $a_n = a_{n-1} + 4^{n/2}$

к) $a_n = a_{n-1} + \dots + a_1$

л) $a_n = 2a_{n-2} + 4^{n/2}$

м) (*) $a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n$

Решение. а) може, б) може, в) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n)3^n$),

г) може (свежда се до $a_n = 3a_{n-1} + (12n^2 + 20n - 16)2^n$),

д) може (свежда се до $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n$),

е) не може (неконстантни коефициенти),

ж) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n + 5)1^n$),

з) може (свежда се до $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n + (\frac{n}{2} - \frac{1}{2})4^n = 4a_{n-1} + (2n^2 + \frac{n}{2} - \frac{17}{2})4^n$),

и) може (свежда се до $a_n = a_{n-1} + 2^n$),

к) *може* (всъщност се свежда до $a_n = 2a_{n-1}$), л) може;

м) трябва да се обърне внимание, че индексът отляво е $n + 1$, а не n , тогава влясно полиномите трябва да са на $n + 1$, както и степените на експонентите, в случая можем да сведем в такъв вид: $a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n = a_n + ((n + 1)^2 + (n + 1))3^{n+1}$ ■

Задача 2. Да се решат следните рекурентни уравнения:

- $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- (*) $a_{n+1} = 10a_n - 21a_{n-1} + 3^n$, ако $a_0 = 1, a_1 = 4$;
- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3^{n+2}$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;
- (*) $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$, ако $a_0 = 1, a_1 = 5$;
- (*) $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2}$, ако $a_0 = 3, a_1 = 7$;
- $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + (-1)^n$, ако $a_0 = 0, a_1 = 1$;

Решение.

- *За упражнение*
- Единствено ще обърнем внимание, че даденото е еквивалентно на $a_n = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + 3^{n-1} = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + \frac{1}{3}3^n$ (разликата е, че приведохме израза във форма, в която индексът отляво си е n , а не $n + 1$, което искаме, за да не стават обърквания). Оттук нататък *решението остава на Вас :*)
- *За упражнение*

- Уравнението има само хомогенна част. Характеристичното му уравнение е $x^2 = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$ - Тук обаче има проблем, поне на пръв поглед, дискриминантата е отрицателна, корени няма... по-точно реални корени няма (но пък си има комплексни): $x_1 = 1 - 2i, x_2 = 1 + 2i \Rightarrow M = M_1 = \{1 - 2i, 1 + 2i\}$, откъдето общото решение на уравнението е: $a_n = C_1(1 - 2i)^n + C_2(1 + 2i)^n$. Знаем, че $a_0 = 1, a_1 = 5 \Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a_0 = 1 \\ C_1(1 - 2i) + C_2(1 + 2i) = a_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + i \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} + i\right)(1 - 2i)^n + \left(\frac{1}{2} - i\right)(1 + 2i)^n =$$

$$\left(\frac{1 + 2i}{2}\right)(1 - 2i)^n + \left(\frac{1 - 2i}{2}\right)(1 + 2i)^n = \frac{5}{2}(1 - 2i)^{n-1} + \frac{5}{2}(1 + 2i)^{n-1} \quad \blacksquare$$

Забележка. Макар коефициентите да са комплексни, общият член a_n си остава реално число (даже цяло).

- За упражнение (не ми се пише повече :/)
- За упражнение

Задача 3. (двойно рекурентно уравнение) Нека $a_0 = 0, b_0 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$. Да се намерят формули за a_n и b_n .

Решение. Малко повече за този тип задачи:

**Полезно: обикновено идеята при решаване на рекурентни уравнения, в които участват няколко взаимно свързани рекурентни редици, е чрез елементарни преобразувания да намерим прости рекурентни уравнения (с елементите на една редица, а не на няколко, както по начало).*

Разглеждаме разликите:

- от $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2b_{n-1}$;

- $b_n - b_{n-1} = (-a_{n-1} + 4b_{n-1}) - (-a_{n-2} + 4b_{n-2}) = -(a_{n-1} - a_{n-2}) + 4(b_{n-1} - b_{n-2})$, заместваме от горното $\Rightarrow b_n - b_{n-1} = -2b_{n-2} + 4(b_{n-1} - b_{n-2}) = 4b_{n-1} - 6b_{n-2}$;

$b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$ има само хомогенна част, характеристичното уравнение е $x^2 = 5x - 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3 \Rightarrow M = \{2, 3\} \Rightarrow b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. От $b_0 = 1, b_1 = 4 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2 \Rightarrow b_n = -2^n + 2 \cdot 3^n$. Сега например можем да заместим $b_{n-1} = -2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$ директно в $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n = a_{n-1} - 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{2} 2^n + \frac{2}{3} 3^n \Rightarrow M_1 = \{1\}_M, M_2 = \{2, 3\}_M \Rightarrow M = \{1, 2, 3\}_M \Rightarrow a_n = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n$. От $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 10 \Rightarrow A_1 = -3, A_2 = 4, A_3 = -1 \Rightarrow a_n = -3 + 4 \cdot 2^n - 3^n = -3 + 2^{n+2} - 3^n$. \blacksquare

Задача 4. Колко n -цифрени цели положителни числа съдържат в запис си четен брой петици (включително нито една)?

Решение. Нека a_n е броят n -цифрени числа, съдържащи *нечетен* брой петици в запис си, а b_n е броят n -цифрени числа, съдържащи *четен* брой петици в запис си. Имаме $a_1 = 1, b_1 = 8, a_2 = 17, b_2 = 73$. Разглеждаме n -цифрено число с четен брой петици, имаме два случая:

- Ако последната цифра е 5, то при премахването ѝ, оставащото число е с $n - 1$ цифри и нечетен брой петици в запис си (такива числа има a_{n-1}).
- Ако последната цифра *не* е 5 (тоест за нея има 9 други възможности), то при премахването ѝ, оставащото число е с $n - 1$ цифри и отново четен брой петици в запис си (такива числа има b_{n-1}).

От направените съображения $b_n = a_{n-1} + 9b_{n-1}$. За да сведем до решаване на едно уравнение, се сещаме, че $a_n + b_n = 9 \cdot 10^{n-1} \Rightarrow b_n = (9 \cdot 10^{n-2} - b_{n-1}) + 9b_{n-1} = 8b_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} = 8b_{n-1} + \frac{9}{100} \cdot 10^n$.

Конструираме $M_1 = \{8\}_M, M_2 = \{10\}_M \Rightarrow M = \{8, 10\}_M \Rightarrow b_n = C_1 8^n + C_2 10^n$. От базовите случаи следва, че $8C_1 + 10C_2 = 8$ и $64C_1 + 100C_2 = 73 \Rightarrow C_2 = \frac{9}{20}, C_1 = \frac{7}{16} \Rightarrow b_n = \frac{7}{16} 8^n + \frac{9}{20} 10^n$. \blacksquare

Задача 5. Да се намерят формули за сумите:

- $s_n = s_{n-1} + \dots + s_1, s_1 = 1;$
- $s_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2;$
- $s_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3;$

Решение.

- На пръв поглед това уравнение е с некрайна история и алгоритъмът е неприложим, но пък може да бъде сведено до такова с крайна: $s_n - s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i - \sum_{i=1}^{n-2} s_i = s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2^{n-1}$. ■
- $s_n = s_{n-1} + n^2 = s_{n-1} + n^2 \cdot 1^n$ Характеристичното уравнение е тривиално: $x^n = x^{n-1} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 = \{1\}_M$.
От нехомогенната част пък следва, че $M_2 = \{1, 1, 1\}_M$, значи $M = \{1, 1, 1, 1\}_M \Rightarrow s_n = C_1 1^n n^0 + C_2 1^n n^1 + C_3 1^n n^2 + C_4 1^n n^3$. Имаме базови случаи $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 5, s_3 = 14 \Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5 \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow s_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 =$$

$$= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \blacksquare$$

- За упражнение, Отг. $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Задача 6. Дадена е правоъгълна таблица $2 \times n$, по колко начина тя може да бъде покрита с домино плочки 1×2 , като последните могат да се завъртат, но не и застъпват.

Решение. Нека с a_n означим броя на покритията за лента с размери $2 \times n$. Ясно е, че $a_0 = 1, a_1 = 1$. За a_n имаме два случая:

- На последната колона стои едно домино (изправено). Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери $2 \times (n-1)$, които са точно a_{n-1} .
- На последната колона стоят две хоризонтални домино плочки. Те покриват и предната колона. Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери $2 \times (n-2)$, които са точно a_{n-2} .

Двата случая се независими и допълващи се, от принципа за събиране: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, Коего ни дава формулата за числата на Фибоначи, изместени с едно, т.е. $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. ■

Задача 7. По колко начина човек може да се изкачи по стълба с n стъпала, ако е възможно да се качва и през стъпало (тоест да минава на следващото или по-следващото)?

- Да се реши същата задача, ако се знае, че на стъпало с номер $i, 1 < i < n$ не може да се стъпва (да кажем е счупено).

Решение. Ако a_n е броят начини, по които може да се изкачат n стъпала, то явно $a_0 = 1, a_1 = 1$. Човекът може да се качи на стъпало n от стъпало $n-1$ или от стъпало $n-2$, тоест $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Отново получаваме редицата на Фибоначи, изместена с един член напред, значи $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. ■

Сега за втората част, до стъпало $i-1$ промяна в разсъжденията няма. Понеже i е счупено, $a_i = 0, a_{i+1} = a_{i-1}$. Оттам нататък рекурентната зависимост отново е в сила. Можем да считаме, че това е нова рекурентна редица, $b_0 = a_i = 0, b_1 = a_{i+1} = a_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{i-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{i-1} = F_i$, тогава до стъпало n можем да се изкачим по b_{n-i} начина, където $b_{n-i} = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-i} + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-i}$, като от

$b_0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$ и от $b_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = C_1\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = C_1\sqrt{5} \Rightarrow C_1 = \frac{F_i}{\sqrt{5}}$.
Така крайният отговор е $b_{n-i} = \frac{F_i}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} - \frac{F_i}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} = F_i F_{n-i}$. ■

Това горе е малко тъп начин да се реши втората час, вместо това можем да мислим за двете изкачвания като независими процеси. Щом трябва да се прескочи стъпало i , трябва да се мине от стъпало $i-1$ направо на $i+1$. Явно търсеният брой е произведението на двете:

$answer = (\text{броя начини, по които можем да стигнем до } i-1) \times (\text{броя начини, по които можем да стигнем, от } i+1 \text{ до } n) = F_i \cdot F_{n-i}$. ■

2 По-трудни задачи

За повечето от задачите по-долу по нищо не личи, че се свеждат именно до решаване на рекурентно уравнение, което и ги прави по-нетривиални.

Задача 8 (derangements). Колко са пермутациите на числата от 1 до n такива, че никое число не е на мястото си (т.е. число i не е на позиция i), да се даде рекурентна формула?

Решение. Тази задача вече сме решавали (само че с друг подход - с принципа на включване и изключване). Тук обаче ще търсим рекурентно решение. Нека с D_n бележим броя на тези пермутации. Лесно се вижда, че $D_1 = 0, D_2 = 1$. За $n > 2$ разглеждаме произволна пермутация с исканото свойство. Значи на позиция 1 стои число $x \neq 1$. Да разгледаме два случая:

- На позиция x стои 1 (тоест 1 и x са си разменили местата). Можем да съобразим, че броят на пермутациите решения, за които това е изпълнено е D_{n-2} . Причината е, че застопорявайки 1 и x , сведохме задачата до разпределяне на оставащите числа: $2, 3, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ върху собствените им позиции: $2, 3, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ така, че никое да не стои на мястото си. Ясно е, че задачата е същата като намирането на деранжменти на числата $1, \dots, n-2$, единствено "имената" на числата не са същите, това са D_{n-2} валидни пермутации.
- На позиция x не стои 1, а някое друго число. Вече застопорихме x на първа позиция, тоест търсим броя разпределяния на числата $1, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ върху позиции $2, 3, \dots, n$ така, че никое число (това важи за всички числа без 1 и x) не е на позицията си и 1 не е на позиция x . Тъй като позиция 1 не участва в разглежданите (там вече стои x), можем да си мислим, че позиция x е новата позиция 1, все едно сменяме името ѝ на $\hat{1}$. Така сведохме до: "по колко начина можем да разпределим числата $1, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ " на позиции $\hat{1}, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ така, че никое число не е на позицията си, това е същата задача, има D_{n-1} такива пермутации.

Понеже x е произволно, $x \neq -1$, а за избора му има $n-1$ варианта и двата случая са независими и допълващи се $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, което обаче не е в хубавия вид за алгоритъма. ■

derangements

Задача 9 (*). Да се намери броят на всички k -елементни низове, съставени от символите a, b, c , в които няма два съседни букви b и всички букви b са вляво от всички букви c . Изисква се точен отговор (числена формула).

Решение. За краткост ще наричаме низовете, отговарящи на двете условия (да не съдържат последователност "bb", както и буква 'c' вляво от 'b') и независимо тяхната дължина, *решения*.

Да обърнем внимание, че всеки подниз на решение също е решение. В частност, всеки префикс/суфикс на решение отново е такова.

Нека с ans_n означим бройката на всички решения с дължина n , а с f_n бройката на тези от тях, в които не се среща символ c . Тогава $ans_1 = 3, f_1 = 2, ans_2 = 7, f_2 = 3, ans_3 = 16, f_3 = 5$ и т.н.

Ще покажем два възможни начина за решаване на задачата:

1 н. /предложни Велислав Гърков/

Можем да разгледаме 4 различни случая за решенията спрямо префиксите, с които започват:

- решения от вида $\boxed{a \dots}$: Понеже наличието на буква a не налага други ограничения, броят на низовете от този вид съответства на броя решения с дължина $n - 1$, а именно ans_{n-1} .
- решения от вида $\boxed{c \dots}$: Следващите букви от низа могат да са само a, c (но не и b). Други допълнителни ограничения няма, така че решенията от този вид са 2^{n-1} .
- решения от вида $\boxed{ba \dots}$: Наличието на префикс ba не налага други ограничения за оставащите букви в низа. Единствено те трябва да изпълняват началните условия, тоест да образуват решение с дължина $n - 2$. Следователно низовете от разглеждания вид са колкото решенията с дължина $n - 2$, тоест ans_{n-2} .
- решения от вида $\boxed{bc \dots}$: Понеже вече имаме поставена буква c , на оставащите $n - 2$ позиции в низа може да стоят само буквите a, c , като други ограничения няма. Низовете от този вид са 2^{n-2} .

Получаваме $ans_n = ans_{n-1} + 2^{n-1} + ans_{n-2} + 2^{n-2} = ans_{n-1} + ans_{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} = ans_{n-1} + ans_{n-2} + \frac{3}{4} \cdot 2^n$.

Мултимножеството, получено от алгоритъма е $M = \{2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}_M \Rightarrow$

$$ans_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_3 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

От базовите случаи $ans_0 = 1, ans_1 = 3, ans_2 = 7, ans_3 = 16$ получаваме:

$$ans_n = 3 \cdot 2^n + \left(-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \blacksquare$$

2 н.)

При горе направените означения ще докажем следните (за $n \geq 2$):

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_n = F_{n+2} \\ ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

За начало, разглеждаме решенията в които *не* се среща символът c . Тях можем да разделим на два вида - такива, завършващи на a , и такива, завършващи на b :

- $\boxed{\dots a}$: Префиксът, съставен от първите $n - 1$ символа на всеки такъв низ, отново съдържа само буквите a, b и отговаря на началните условия. Следователно броят низове от вида $\dots a$ съответства на броя на решенията с дължина $n - 1$, в които няма буква c , тоест е точно f_{n-1} .
- $\boxed{\dots b}$: Разглежданите низове от втория вид завършват на b , следователно предпоследната им буква трябва да е a , тоест имат вида $\boxed{\dots ab}$. За буквите преди това ограничения няма, освен да са a, b и да съставят решение. В крайна сметка, бройката низове от текущия вид съответства на бройката решения с дължина $n - 2$ и съставени само от буквите a, b , или е точно f_{n-2} .

Оттук получаваме рекурентната зависимост $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и понеже тя е същата като тази на редицата на Фибоначи, а също $f_1 = 2 = F_3, f_2 = 3 = F_4$, то $f_n = F_{n+2}$ (тоест редицата $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ е редицата на Фибоначи, изместена с два члена "наляво").

Решенията с дължина $n > 1$ можем да разбием на такива, завършващи на b и такива, завършващи на a или c .

Понеже преди b може да стои единствено a , първите имат видът $\boxed{\dots ab}$, а както показахме по-горе, такива низове с дължина n са f_{n-2} на брой.

За завършващите на a или c префиксът, определен от оставащите $n - 1$ символа, е произволно решение с дължина $n - 1$, така че те са $2 \cdot ans_{n-2}$ на брой (по 2, защото може да завършват както на a , така и на c).

В крайна сметка, $ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} = 2ans_{n-1} + F_n = 2ans_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Мултимножеството, получено от алгоритъма е $M = \{2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}_M \Rightarrow ans_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_3 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Отново получаваме:

$$ans_n = 3 \cdot 2^n + (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (-1 + \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n. \quad \blacksquare$$

Поука: Макар въвеждането на още зависими редици (както дефинирането на f_n във второто решение) с цел разбиване на търсените обекти на подвидове понякога да носи по-леки съображения, то обикновено води и до по-тежки системи от зависимости. Ето защо придържането към модел с една рекурентна редица е за предпочитане.

Задача 10. (*) Да се докаже, че числото $(4 + \sqrt{7})^{2024} + (4 - \sqrt{7})^{2024}$ е цяло и да се намери последната му цифра.

Решение. Сещаме се да представим числото като член на рекурентна редица.. Нека $a_n = 1 \cdot (4 + \sqrt{7})^n + 1 \cdot (4 - \sqrt{7})^n$ - общо решение/уравнение. Тогава $a_0 = 2, a_1 = 8$. Ако разглеждаме a_n като рекурентно уравнение, то $M = \{4 + \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}\}$ са решения на характеристичното му уравнение. Навярно последното е от втора степен (с два корена $x_1 = 4 + \sqrt{7}$ и $x_2 = 4 - \sqrt{7}$), тогава то би имало вида $x^2 = bx + c$, знаем корените му, значи можем да ползваме формулите на Виет (за $a = 1$): $-(-b) = x_1 + x_2 = 8, -c = x_1 x_2 = 9$, на което съответства рекурентното $a_n = 8a_{n-1} - 9a_{n-2}$.

Понеже $a_0, a_1, 8, -9 \in \mathbb{Z}$, а целите числа остават цели след събиране и умножение, така че и a_n , в частност $a_{2024} \in \mathbb{Z}$. \square

Последната цифра е остатъкът на числото при деление на 10, т.е. търсим $a_{2024} \pmod{10}$. Понеже остатъците при деление на 10 са краен брой, то в даден момент те ще започнат да се повтарят. Търсим "pattern":

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$a_i \pmod{10}$	2	8	6	6	4	8	8	2	4	4	6	2	2	8	...

Вижда се, че на всеки 12 члена редицата от остатъците се повтаря, ние се интересуваме от a_{2024} , $2024 \pmod{12} = 8 \Rightarrow$ остатъкът ще е същият като на a_8 , т.е. 4. \blacksquare

Задача 11. (**) Намерете цифрите директно вляво и вдясно от десетичната запетая на числото $(\sqrt{7} + \sqrt{13})^{2024}$.

Решение. За начало да намерим последната цифра. Разглеждаме $a_{2024} = (\sqrt{7} + \sqrt{13})^{2024} + (\sqrt{7} - \sqrt{13})^{2024}$. Всъщност второто събираемо е пренебрежимо малко, така че то не би се отразило на цифрата на единиците на сумата, т.е. $(\sqrt{7} + \sqrt{13})$ и a_{2024} имат еднаква последна цифра на цялата част. Сведохме до намиране на цифрата на единиците на a_{2024} .

Аналогично на горната задача, можем да гледаме на $a_n = (\sqrt{7} + \sqrt{13})^n + (\sqrt{7} - \sqrt{13})^n$ като общо решение на рекурентно уравнение. Характеристичното уравнение на последното би било $x^2 = ((\sqrt{7} + \sqrt{13}) + (\sqrt{7} - \sqrt{13}))x - (\sqrt{7} + \sqrt{13})(\sqrt{7} - \sqrt{13}) = 2\sqrt{7}x + 6 \Rightarrow a_n = 2\sqrt{7}a_{n-1} + 6a_{n-2}$

Задача 12. (*) Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които $f(f(x)) = 21x - 4f(x) \forall x \in \mathbb{N}$.

Решение. Разглеждаме произволно $a_0 \in \mathbb{N}$, нека означим $a_1 := f(a_0), \dots, a_n := f^n(a_0), \dots$, получаваме безкрайна редица. Заместваме x в даденото по условие уравнение с a_n , $f(f(a_n)) = 21a_n - 4f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 21a_n - 4a_{n+1}$. Така образуваме характеристичното уравнение $\lambda^2 + 4\lambda - 21$ с корени $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 3$. Значи общото уравнение има вида $a_n = C_1(-7)^n + C_23^n, C_1, C_2$ са коефициенти. Имаме също $a_0 = C_1(-7)^0 + C_23^0 = C_1 + C_2$ (1), както и $a_1 = -7C_1 + 3C_2$ (2).

Да забележим, че независимо знака на C_1 , при $C_1 \neq 0, n$ - нечетно : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, което би било противоречие с $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$. Заклучаваме, че $C_1 = 0$. Оттук, от (1) и от (2) директно $a_0 = C_2, a_1 = 3C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 3C_2 = 3a_0$, тоест $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 3x$ е единствен кандидат за решение!

Правим проверка в условието: $f(f(x)) = 3(3x) = 9x = 21x - 4(3x) = 21x - 4f(x)$, тоест върши работа. \blacksquare

Задача 13. (*) Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които $f(f(x)) = 6x - f(x) \forall x \in \mathbb{N}$.

Решение. Решението повтаря това на предната задача. Разглеждаме произволно $a_0 \in \mathbb{N}$, нека означим $a_1 := f(a_0), \dots, a_n := f^n(a_0), \dots$, получаваме безкрайна редица. Заместваме x в даденото по

условие уравнение с a_n , $f(f(a_n)) = 6a_n - f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$. Така образуваме характеристичното уравнение $\lambda^2 + \lambda - 6$ с корени $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Значи общото уравнение има вида $a_n = C_1(-3)^n + C_2 2^n$, C_1, C_2 са коефициенти. Имаме също $a_0 = C_1(-3)^0 + C_2 2^0 = C_1 + C_2$ (1), както и $a_1 = -3C_1 + 2C_2$ (2).

Да забележим, че независимо знака на C_1 , при $C_1 \neq 0, n$ - нечетно : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, което би било противоречие с $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$. Заклучаваме, че $C_1 = 0$. Оттук, от (1) и от (2) директно $a_0 = C_2, a_1 = 2C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 2C_2 = 2a_0$, тоест $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$ е единствен кандидат за решение!

Правим проверка в условието: $f(f(x)) = 2(2x) = 4x = 6x - 2x = 6x - f(x)$, тоест върши работа. ■

Задача 14. По колко начина числата от 1 до n могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от *някое* от числата вляво от него.

Решение. Ще покажем две възможни решения:

1 н.) /комбинаторни съображения/ Нека първият елемент в редицата е k . Сравнително лесно се вижда, че числата $k+1, k+2, \dots, n$, които се намират някъде надясно, трябва да са в точно този ред (в противен случай ще се наруши условието за наличие на елемент с разлика 1 вляво от всеки). Аналогично числата $k-1, k-2, \dots, 1$ също трябва да са в този (от подобни съображения). Сега остава да видим колко са пермутациите на числата $1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, които имат като подредици $k+1, k+2, \dots, n$ и $k-1, k-2, \dots, 1$. Имаме $n-1$ позиции, от тях трябва да изберем например на кои места ще стоят числата по-малки от k (оттам нататък нещата са еднозначно определени) - има $\binom{n-1}{k-1}$. Понеже $k, 1 \leq k \leq n$ е произволно число, то общо редиците/пермутациите са $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^n 1^n = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$. ■

*2 н.) /рекурентно решение/ Нека T_n е броят такива редици при конкретно n . Първо докажем следното помощно твърдение:

Твърдение: За всяка редица, отговаряща на условието, последният член е винаги или n , или 1. Д-во: Да обърнем внимание на броя възможни различни ненаредени двойки числа с разлика едно - има общо $n-1$ такива двойки ($\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}$). Нещо повече, в исканите пермутации някъде вляво на всяко число x (изключая първото) трябва да стои друго число y такова, че $|x-y|=1$, ако има няколко такива y , гледаме само последното. Да наречем такава двойка "връзка" и да я означим с множеството $\{x, y\}$. Тези "връзки" са различни и за всяка валидна редица те трябва да са точно $n-1$ (за всеки елемент освен първия има по една). Също така "връзките" са измежду написаните по-горе двueleментни множества от числа с разлика едно, които обаче също са точно $n-1$ на брой. Значи "връзките" съвпадат с гореописаните двueleментни множества. Да допуснем, че числото $t, 1 < t < n$ стои на последна позиция в редицата, от една страна то ще участва в точно една "връзка" (няма как в повече, щом е последно), но от друга, то участва в две двойки множества ($\{t-1, t\}$ и $\{t, t+1\}$). Това е противоречие с факта, че множествата съвпадат с "връзките". (навярно има и по-чисто доказателство, приемат се предложения) □

Лесно се забелязва, че ако последният елемент на редицата е n , то можем да си представим, че той не съществува. За членовете преди това няма допълнителни ограничения и задачата се свежда до намиране на всички валидни редици с елементи $1, 2, \dots, n-1$, които са T_{n-1} . Аналогично в случая, когато последният елемент е 1. Така общо валидните редици с дължина n са $2T_{n-1}$, $T_1 = 1 \Rightarrow T_n = 2^{n-1}$. ■

Задача 15. (*tridiagonal matrix determinant*) Да се пресметне детерминантата $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Решение. Развиваме детерминантата по първи ред, а после по първи стълб: $D_n = 7D_{n-1} - 6$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$7D_{n-1} - 6.2D_n - 2 = 7D_{n-1} - 12D_{n-2}$.

Ако разглеждаме последното като рекурентно уравнение, неговото характеристично уравнение ще е $\lambda^2 = 7\lambda - 12$ с корени $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$, откъдето общото решение е $D_n = C_1 4^n + C_2 3^n$, където C_1, C_2 са коефициенти. От $D_1 = 1, D_2 = 37, D_3 = 175, \dots \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -3 \Rightarrow D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$. ■

Още задачи

Допълнителни задачи с решения за рекурентни уравнения може да откриете на:

<https://www.math.bas.bg/smb/izmat/izvanredna/resources/mathadvanced2.pdf>

(вижте стр. 55/3, стр. 57/6, стр. 58/7,8, стр. 62/12)

Бонус - решаване на рекурентни уравнения с матрици

<https://www.youtube.com/watch?v=CXMgvJSwyvo>

<https://math.stackexchange.com/questions/124178/generating-matrix-for-a-recurrence-relation>

<https://www.hackerearth.com/practice/notes/solving-linear-recurrence-relation/>