6. Принцип на Дирихле

"Гълъби в чекмеджета"

Ноември 2025

Забележка. Следните дефиниции на Принципа на Дирихле не са формални, а имат цел да покажат практическата му стойност:

Теорема 1 (Обобщен принцип на Дирихле)**.** *Ако n предмета се разпределят в k кутии, то съществува кутия с поне $\lceil n/k \rceil$ предмета.*

Защо не би било правилно да кажем, че разглеждаме разбиване на n-елементно множество на k части?

Теорема 2 (Принцип на Дирихле за безкрайности)**.** *Ако безброй много предмети се разпределят в k (краен брой) кутии, то съществува кутия с безброй много предмети.*

Теорема 3 (Принцип на Дирихле за неизброими безкрайности)**.** *Ако неизброимо много предмети се разпределят в изброимо много кутии, то съществува кутия с неизброимо много предмети.*

Приложения в аритметиката

Задача 1. Докажете, че измежду $n+1$ числа, съществуват две, чиято разлика се дели на n.

Решение. Да отбележим, че разликата на две числа се дели на n точно когато двете дават един и същи остатък при деление на n/"по модул n". Възможните остатъци при деление на n са: $0, 1, ...n-1$ - n на брой. От принципа на Дирихле измежду дадените числа поне две ще имат еднакъв остатък, откъдето исканото следва. ■

Задача 2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ е редица от n на брой произволни цели числа. Да се докаже, че можем да изберем няколко последователни члена на тази редица, чиято сума се дели на n.

Решение. Да разгледаме частичните суми:
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
...
$S_n = a_1 + ... + a_n$

Ако някоя от сумите дава остатък 0 при деление на n, то задачата е решена. Нека това не е изпълнено, тогава за произволно i : S_i може да дава остатък $1, 2, ..., n-1$ при деление на n. Това са $n-1$ възможности, но имаме n суми. От принципа на Дирихле съществуват суми, даващи равен остатък - нека такива са S_i и $S_j, 1 \le i < j \le n$. Тогава сумата от последователни членове $a_{i+1} + ... + a_j = S_j - S_i$ се дели на n. ■

Полезно. Частични суми се ползват както в доста задачи от този тип, така и в много задачи в програмирането.

Задача 3. Върху всяка от $n-1$ картички е написано по едно цяло число между 1 и n, като е изпълнено, че: колкото и картички да вземем, сумата от числата, написани върху тях, *не се дели* на n. Да се докаже, че върху всички картички е написано едно и също число.

Решение. Нека картичките са подредени произволно и числата върху тях са съответно $a_1, ..., a_{n-1}$. Да разгледаме частичните суми:
$S_1 = a_1$
$...$
$S_{n-1} = a_1 + ... + a_{n-1}$

Ясно е, че нито една от сумите не е кратна на n (по условие), затова възможните им остатъци при деление на n са: $1, 2, ..., n-1$. Подобно на горната задача ако тук две от сумите дават еднакъв остатък, то сумата от членовете, които участват в едната, но не и другата сума, ще е кратна на n, което противоречи на условието.
Ето защо сумите $S_1, ...S_{n-1}$ дават различни ненулеви остатъци при деление на n.
Да разгледаме същите частични суми, но този път първата от тях да е равна на a_2:
$\sigma_1 = a_2$
$\sigma_2 = a_1 + a_2\ (= S_2)$
$...$
$\sigma_{n-1} = a_1 + ... + a_{n-1}\ (= S_{n-1})$

По съвсем аналогичен начин за тях можем да кажем също, че дават различни ненулеви остатъци при деление на n. Да разгледаме всички суми заедно: $S_1,\ \sigma_1,\ S_2(=\sigma_2),\ ...,\ S_{n-1}(=\sigma_{n-1})$
Както отбелязахме, всяка от тях дава остатък от 1 до $n-1$ (включително) при деление на n. Но това са $n-1$ възможности, а общо сумите са n. По Дирихле има такива, даващи равен остатък. Но всички S_i, както и всички σ_j дават различни остатъци $\Rightarrow$ равни остатъци дават S_1 и σ_1, т.е. a_1 и a_2. Но по условие числата върху картичките са от 1 до n, така че равни остатъци имат само равните числа $\Rightarrow\ a_1 = a_2$. Но a_1 и a_2 бяха произволни, откъдето всеки две картички са с еднакви номера. ■

Задача 4. Ако n е нечетно естествено число, да се докаже, че измежду всеки $(n-1)^2+1$ цели числа могат да се изберат n, чиято сума се дели на n.

Решение. Ако $\forall r, 0 \le r < n\ \exists a_r : a_r \equiv r \pmod n$, където a_r е измежду раглежданите числа (казано просто за всеки остатък r при деление на n има число a_r, което го дава), то сумата на n-те числа $a_0 + ... + a_{n-1} \equiv 0 + 1 + ... + (n-1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod n$ е кратна на n *при* n *нечетно*. Тоест намерихме такива числа.
Нека обаче не всеки остатък има число "представител" измежду разглежданите. Тогава дадените $(n-1)^2+1$ числа дават най-много $n-1$ различни остатъка при деление на n. По Дирихле за някой от остатъците r ще има поне n числа измежду дадените, които го реализират. Но тогава е достатъчно да съберем тези n числа, тяхната сума има остатък $n.r \equiv 0 \pmod n$, т.е. се дели на n. ■

Задача 5. В продължение на x дни Иван решава задачи, като всеки ден той решава поне по една задача, но не решава повече от 500 задачи общо за годината. Докажете, че има интервал от дни, през които Иван е решил точно 229 задачи, ако:

- $x = 365$
- $x = 272$

Решение. Ясно е, че ако имаме решение за втората подточка, то автоматично имаме и за първата, но тук ще покажем два различни поучителни метода:

- ако x_i е броят задачи, решени до i-тия ден, то мултимножеството $\{x_1, ..., x_{365}, x_1+229, ..., x_{365}+229\}$ има 730 елемента. Понеже $1 \le x_i \le 500$, то елементите на множеството са цели числа в интервала [1,729]. По Дирихле два елемента имат еднаква стойност. От условието, че всеки ден е решена поне по една задача $x_i \ne x_j\ \forall i \ne j\ \Rightarrow x_i = x_j + 229$ за някои i и j. ■
- Можем обаче да подобрим оценката: От доказаното в *задача 2* до 229-тия ден съществува поредица от дни такава, че броят задачи, решен през нея, е кратен на 229. Този брой потенциално може да 229 или 458(=2.229), понеже за първите 229 дни е решена поне една задача

и не повече от 500.
Иван обаче е решавал задачи още 272-229=43 дни, което са поне още 43 решени задачи (по условие всеки ден решава поне 1 задача). Сега ако допуснем, че през първите 229 дни са решени поне 458 задачи, то общият брой 458+43=501 би надхвърлил допустимите 500. Ето защо през първите 229 дни няма поредица с решени точно 458 задачи, остава да има такава с решени точно 229. ■

Задача 6 (*)**.** Нека $x_1, \cdots, x_{19}$ са положителни естествени числа, не по-големи от 93, а $y_1, \cdots, y_{93}$ са положителни естествени числа, не по-големи от 19. Докажете, че съществува (непразна) сума на някои x_i от дадените, равна сума на някои y_i от дадените.

Решение. Нека означим $X_i := x_1 + \cdots + x_i$ за $1 \leq i \leq 19$ и $Y_j := y_1 + \cdots + y_j$ за $0 \leq j \leq 93$ (като $Y_0 := 0$) частичните (префиксните) суми на двете редици числа. За удобство ще въведем и фиктивната сума $Y_{94} = Y_{93} + 19$.

Да отбележим, че $\forall j, 0 \leq j \leq 93 : Y_{j+1} \leq Y_j + 19$. Причината е, че $y_j \leq 19$.
Можем да ограничим всяка частична X_i сума между две последователни Y_j, Y_{j+1} суми. Тоест $\forall i \leq 19 \ \exists j \leq 93 : Y_j \leq X_i < Y_{j+1} \, (\leq Y_j + 19)$.

При това ограничаване разглеждаме разликите $X_i - Y_j$ (за всяка сума X_i и съответната ѝ Y_j).Понеже $Y_j \leq X_i < Y_j + 19$, то $0 \leq X_i - Y_j < 19$, тоест разликите могат да приемат стойност от 0 до 18 включително. Обаче $1 \leq i \leq 19$, тогава по Дирихле ще има две разлики с еднаква стойност.
Тоест $\exists i_1, i_2, 1 \leq i_1 < i_2 \leq 19 \ \exists j_1, j_2, 0 \leq j_1 \leq j_2 \leq 93 : X_{i_1} - Y_{j_1} = X_{i_2} - Y_{j_2}$.
Значи $Y_{j_2} - Y_{j_1} = X_{i_2} - X_{i_1} = x_{i_2} + x_{i_2-1} + \cdots + x_{i_1+1} > 0$. И понеже частичните суми са строго растящи, трябва и $j_2 > j_1$, за да може $Y_{j_2} - Y_{j_1} > 0$. Така горното равенство може да се запише като $\boxed{y_{j_1+1} + y_{j_1+2} + \cdots + y_{j_2}} = Y_{j_2} - Y_{j_1} = X_{i_2} - X_{i_1} = \boxed{x_{i_2} + x_{i_2-1} + \cdots + x_{i_1+1}}$, което доказва исканото. ■

Задача 7. Нека $S = \{1, 2, ..., 2n\}$ е множество, от което са избрани $n + 1$ елемента. Да се докаже, че измежду тях има две числа такива, че едното дели другото.

Решение. Ще ползваме факта (доказан по-горе с индукция), че всяко *положително* естествено число има (единствено) представяне във вида $2^x y$, където y е нечетно число. Правим разбиване на множеството S на множества A_y, където $a \in A_y$, ако $a = 2^x y$ за някое x:
$A_1 = \{2, 4, 8...\}$
$A_3 = \{3, 6, 12...\}$
...
$A_{2n-1} = \{2n - 1\}$

Хубавото на това разбиване е, че които и две числа да вземем от едно множество, то едното винаги ще дели другото. Индексите на множествата съответстват на нечетните числа до $2n$, т.е. последните са n на брой. По Дирихле от избраните $n+1$ числа ще има две в едно и също множество, исканото следва. ■

Задача 8. Нека $S = \{1, 2, ..., 20\}$ е множество, от което са избрани 11 числа. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика 2.

Решение. Ще предложим две различни решения:
1 н.) Да групираме числата по двойки по следния начин: (1,3), (2,4), ... (17, 19), (18, 20). Двойките са 10 на брой, а избраните числа са 11, по Дирихле някои две числа ще бъдат от една двойка, но тогава разликата им е точно 2. ■

2 н.) Разглеждаме четни и нечетни числа. По Дирихле измежду избраните 11 от единия вид ще има поне 6 (б.о.о. да приемем, че от 11-те поне 6 са четните). Да подредим само тях в нарастващ ред. Разликата между две съседни в направената наредба числа може да е 2, 4, ... (защото е разлика между числа с еднаква четност). Ако допуснем, че между никои две съседни разликата не е 2 (а оттук ще е поне 4). То разликата между първото и шестото число в наредбата ще е поне 5.4=20, което е невъзможно (числата са от 1 до 20), противоречие. ■

Задача 9 (**Erdős–Szekeres theorem*). Ако $\{a_i\}_{i=1}^{r.s+1}$ е редица от различни числа с дължина (поне) $rs+1$, то тя съдържа монотонно нарастваща подредица с дължина $r+1$ *или* монотонно намаляваща подредица с дължина $s+1$.

Забележка 1. Трябва да е ясно, че поради липсата на всякакви допълнителни ограничения горното ще е вярно и наобратно: редицата съдържа монотонно нарастваща подредица с дължина $s+1$ *или* монотонно намаляваща подредица с дължина $r+1$.

Забележка 2. В случая, в който $r = s$, горното придобива следния вид: всяка редица от n^2+1 различни числа съдържа монотонна подредица с дължина (поне) $n+1$

повече информация тук

Решение. Нека на всеки елемент от редицата съпоставим двойката (x_i, y_i), където x_i е дължината на най-дългата монотонно растяща подредица с последен елемент a_i и y_i е дължината на най-дългата монотонно намаляваща подредица с последен елемент a_i.
Наблюдение: измежду всички $rs+1$ такива наредени двойки няма две еднакви. Ето защо:
Да разгледаме произволни две наредени двойки (x_i, y_i) и (x_j, y_j), където $i < j$. Ако $a_i < a_j$, то към растящата редица с последен елемент a_i бихме могли да добавим още един член - $a_j \Rightarrow$ дължината на максималната растяща редица с последен елемент a_j винаги ще е по-голяма от дължината на тази с последен елемент a_i, т.е. $x_i < x_j \Rightarrow (x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$.
Ако пък $a_i > a_j$, то можем да удължим максималната намаляваща редица, свършваща в a_i, с a_j. Значи $y_i < y_j \Rightarrow (x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$. И в двата случая наредените двойки са различни.

Задачата се свежда до това да покажем, че за някое $i : x_i > r \vee y_i > s$. Знаем също, че $\forall j : x_j \geq 1 \wedge y_j \geq 1$, все пак редица дори от един елемент също е растяща/намаляваща. Ако допуснем противното, че такова няма, то $\forall j : x_j \leq r \wedge y_j \leq s$, но тогава възможните наредени двойки ще са rs $(< rs+1)$ и от Дирихле някои ще съвпаднат, което е противоречие. ■

**Въпрос: остава ли вярна теоремата, ако позволим числата в редицата да са равни и не изискваме строга монотонност на редиците?*

Геометрични приложения

Задача 10. Ако 5 точки са разположени върху равностранен триъгълник със страна 1 (включително по контура), докажете, че поне две от тях са на разстояние $\leq \frac{1}{2}$.

Решение. Разделяме триъгълника на 4 еднакви равностранни триъгълника със страна $\frac{1}{2}$(образувани след начертаване на трите средни отсечки). По Дирихле в поне един от четирите има две или повече точки. Но тогава те са на разсотяние $\leq \frac{1}{2}$. ■

Задача 11. Ако 5 точки са разположени върху квадрат със страна 1 (включително по контура), докажете, че поне две от тях:

- са на разстояние ≤ 1;
- са на разстояние $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Макар че втората подточка решава директно първата, ето два ралични начина:

- Разделяме квадрата на четири правоъгълни триъгълника, образувани при начертаването на двата диагонала на квадрата. Във всеки от тях най-голямото разтояние между две точки съответства на най-дългата страна (хипотенузата), която е с дължина 1. По Дирихле в някой от триъгълниците има поне 2 точки $\Rightarrow$ последните са на разстояние не повече от 1. ■

- Можем обаче да подобрим горната оценка. Разделяме квадрата на четири равни по-малки квадрата (образувани при свързване на средите на срещуположните му страни). По Дирихле в един малките квадрати ще има поне 2 точки, но тогава те ще са на разстояние не по-голямо от диагонала на малкия квадрат, който има дължина $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Задача 12 (*)**.** Докажете, всеки многостен има две страни, оградени от равен брой ръбове. *многостен?*

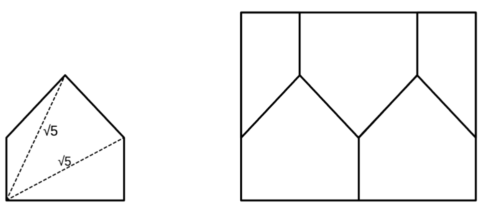
Решение. Нека най-голямата страна на многостена (по брой ограждащи ръбове) има x ръба. Достатъчно е да покажем, че броят страни $> x$. Да разгледаме два произволни ръба на тази най-голяма страна. Единият ръб и вътрешна точка от другия задават еднозначно една равнина (а именно раглежданата най-голяма страна на многостена), откъдето всеки два такива ръба не могат да ограждат едновременно друга страна на многостена.
Понеже всеки ръб участва в две страни, то многостенът трябва да има поне още x стени. С разглежданата стават поне $x + 1$, но от избора няма страна, оградена от повече от x ръба. Тогава по Дирихле ще има две страни, оградени от еднакъв брой ръбове. ■

Задача 13 (*)**.** 6 кръга са подредени в равнината така, че никой от тях не съдържа (било то по контура си) центъра на кой да е от останалите. Докажете, че шестте не могат да имат обща точка.

Решение. Допускаме, че това е възможно, нека такава точка P съществува. Свързваме точката с 6-те центъра и разглеждаме връзките по посока на часовниковата стрелка (или обратно, важна е наредбата). В така разглежданата последователност двойките съседни връзки сключват 6 ъгъла, допълващи се до $360°$. По Дирихле някой от тези ъгли е $\leq 60°$, да кажем $\sphericalangle O_1PO_2$. По допускане точка P принадлежи на кръговете, значи $R_1 \geq PO_1, R_2 \geq PO_2$. В триъгълник PO_1O_2: $\sphericalangle O_1PO_2 \leq 60° \Rightarrow$ ъгълът срещу някоя от останалите две страни (б.о.о. този срещу PO_1) е $\geq 60° \Rightarrow O_1O_2 \leq PO_1 \leq R_1$, но тогава кръг 1 съдържа центъра O_2 на вотрия, противоречие с условието. ■

Задача 14 (*)**.** В правоъгълник (включително по контура) 3×4 са разположени 6 точки. Докажете, че някои от тях са на разстояние $\leq \sqrt{5}$.

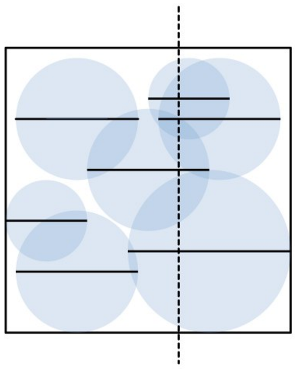
Решение. Бихме могли да опитали да покрием правоъгълника с окръжности с диаметър $\sqrt{5}$, но това усложнява немалко задачата, търсим нещо по-елегантно: Разделяме правоъгълника на 5 области, както е показано по-долу. Във всяка такава област най-отдалечените точки са на разстояние $\sqrt{5}$, по Дирихле съществува област с поне 2 точки, тогава те изпълняват исканото. ■



Задача 15 (*)**.** В квадрат 1×1 са разположени няколко окръжности със сбор от дължините 10. Докажете, че съществува права, която пресича поне 4 окръжности.

Решение. Ще докажем по-силно твърдение, че съществува *вертикална* (т.е. успоредна на височината на квадрата) права с исканото свойство. Вместо самите окръжности да разгледаме техните хоризонтални диаметри, успоредни на основата на квадрата. Тези диаметри представляват отсечки, разположени в квадрата, с обща дължина $\frac{10}{\pi} > 3$ (от формулата за дължина на окръжност).

Те обаче "покриват" интервал с дължина не по-голяма от тази на квадрата, т.е. 1. Тук може да си представяме отсечките като множество от точки. От $\frac{10}{\pi} > 3$ и Дирихле следва, че някоя x-координата е покрита от поне $\lceil \frac{10/\pi}{1} \rceil = 4$ диаметър-отсечки. Тогава и вертикалната отсечка през тази x-координата минава през поне 4 окръжности. ■



Задача 16 (*НОМ3 2021)**.** Съществува ли множество S от 100 точки в равнината със следното свойство: центърът на тежестта на всеки 10 точки от S също е точка от S?

Забележка: центърът на тежестта на точки $A_1, A_2, ..., A_n$ е точка M, за която $\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Решение. Да допуснем, че съществува такова S. За начало ще въведем координатна система в равнината. Искаме тя да е такава, че всеки две точки от S да имат различна x-координата (ще ни е необходимо след малко). За целта достатъчно е ординатата O_y да *не* е успоредна на никоя отсечка с краища дадените точки (съобразете защо). Отсечките с краища точките са краен брой (по-конкретно $\frac{100 \times 99}{2}$). Правите в равнината обаче са безброй много, така че права O_y с исканото свойство винаги съществува, съответно тя задава и координатна система, в която всички точки от S имат различен x.
Вече въвели координати, да припомним, че координатите на центъра на тежестта на множество точки са средно аритметично на координатите на точките.
Нека $A_1, A_2, ..., A_{100}$ са точките от S, сортирани във възходящ ред по x. Разглеждаме следните 101 множества точки: $\{A_1, ..., A_8, A_9, A_{10}\}, \{A_1, ..., A_9, A_{11}\}, \cdots, \{A_1, ..., A_9, A_{100}\}$, $\{A_1, ..., A_8, A_{10}, A_{100}\}$, $\{A_1, ..., A_8, A_{11}, A_{100}\}, \cdots, \{A_1, ..., A_8, A_{19}, A_{100}\}$.
Сумите (а оттам и средните аритметични) на x-координатите на точките от тези множества са две по две различни. С други думи, центровете на тежестта на изброените множества трябва да са 101 различни точки от S, но $|S| = 100$, противоречие. ■