2. Множества

”Множество множества”

Март 2025

1 Основни задачи

Дефиниция 1.1 (операции върху множества)**.**

- $A \cup B \coloneqq \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$ /обединение/,
- $A \cap B \coloneqq \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$ /сечение/,
- $A \backslash B \coloneqq \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$ /разлика/,
- $A \triangle B \coloneqq \{a \mid a \in A \oplus\ a \in B\}$ /симетрична разлика/,
- $A \times B \coloneqq \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ /декартово произведение/,
- $\overline{A^U} = A^\complement \coloneqq \{a \mid a \notin A \wedge a \in U\}$ /допълнение/, където U ($A \subseteq U$) е някакъв универсум.

Забележка. Най-голям универсум няма! (помислете защо)

Свойство 1.1 (Свойства на операциите върху множества)**.**

- асоциативност на обединението, сечението, сим. разлика: $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \triangle B \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- комутативност на обединението, сечението, сим. разлика:$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \triangle B = B \triangle A$
- *De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- дистрибутивен закон: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- свойства на празното множество и универсума: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
- двойно допълнение: $\overline{\overline{A}} = A$
- поглъщане (absorption): $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
- *други полезни: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Полезно. Забележете, че операциите върху множества (без декартовото) доста напомнят логическите (което не е изненадващо, ако се загледаме в дефинициите им по-горе). Обединението е аналог на дизюнкцията, сечението на конюнкцията, допълнението на негацията, симетричната разлика на изключващото или.
Въпрос: Кое тогава ”отговаря” на импликацията?
Всъщност релацията ”подмножество” носи подбна информация. По-ясно това става от връзката: $B \subseteq A$ тстк $\forall a[(a \in B) \rightarrow (a \in A)]$.

Свойство 1.2. Подобно на таблиците на истинност при логиката, тук отново можем да правим таблици на включване, вместо T и F обаче стойностите са 1 (елементът е част от множеството) и 0 (не е част от него).

Малко за парадокса на Ръсел: Използваме "множество" като базово понятие, което не дефинираме. Идва обаче въпросът всичко ли може да бъде множество (или по-конкретно всяко нещо, което може да се дефинира като колекция, ли е множество). Известно време се е считало, че може. Оказва се обаче, че такова безразборно ползване на понятието довежда до неконситентност, парадокси. Ето пример с такъв:
Парадокс на Ръсел: Нека $R = \{x \mid x \notin x\}$, тогава за произволно множество y: $y \in R$ тстк $y \notin y$, замествайки $y = R$: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, което е виден парадокс. Проблемът тук не е във възможността множество да бъде елемент на себе си, а конкретно в считането на R за множество. За да се избегнат такива противоречия, са установени различни аксиоматични системи, които регулират кое е валидно множество (съответно в тях R не е такова).

Задача 1. Кои от следните са верни?

а) $a \in \{\{a\}, b\}$	б) $a \subseteq \{a, b\}$	в) $a \subseteq \{a, \{a\}\}$	г) $\{a\} \in \{b, c, a\}$
д) $\{a\} \in \{b, \{a, b\}, a\}$	е) $\{a, b\} \subseteq \{a, c, \{a, b\}\}$	ж) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, b\}$	з) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}, b\}$
и) $\{\{a, b\}\} \in \{a, \{a, b\}, b\}$	й) $\{\{a, b\}\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$	к) $\{a, b\} \in \{a, b\}$	л) $\varnothing \in \{a, b\}$
м) $\varnothing \in \{a, \varnothing\}$	н) $\varnothing \in \varnothing$	о) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$	п) $\{\varnothing\} \subseteq \{a, \varnothing\}$
р) $\{\varnothing\} \subseteq \{a\}$	с) $\varnothing \in \{a, b\}$	т) $\{\varnothing\} \in \{a, \varnothing\}$	у) $a \in \mathscr{P}(\{a, b\})$

Решение. Не, не, не, не, не, не, да, да, не, да, не, не, да, не, да, да, не, не, не, не; ■

Задача 2. Нека A е множество. Вярно ли е, че ако $|\mathscr{P}(A)| = 0$, то $A = \varnothing$

Решение. Ако сте се сетили, поздравления, Вие сте *майстор на математическата логика*. Отговорът е ДА; всъщност степенното множество никога не е празно (все пак $\varnothing$ е подмножество на всяко друго), но цялото твърдение е вярно, защото това е (леко скрита) импликация с антецедент F : \ ■

Задача 3. Съществува ли множество A, за което $A \cap \mathscr{P}(A^2) \neq \varnothing$? Ако не, обосновете защо, ако да, дайте поне два примера.

Решение. Съществува, ето две възможни:

- $A = \{\varnothing, ...\}$, понеже $\varnothing$ е подмножество на всяко друго, то $\varnothing \in A \cap \mathscr{P}(A^2)$
- $A = \{a, b, \{(a, b)\}\} = \{a, b, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}\}$, тогава $(a, b) \in A^2$, откъдето $\{(a, b)\} \in \mathscr{P}(A)$ ■

Задача 4. За множества A, B да се докаже, че $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Решение. $x \in A \backslash B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \equiv x \in (A \cap \overline{B})$ ■

Задача 5. Ако A, B, C са множества, да се докаже, че $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$

Решение. $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cup B) \backslash C$ ■

Задача 6. Да се докаже, че $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Решение. Ето 3 възможни решения:

1 н.) С таблица:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

От нея се вижда, че винаги когато елемент принадлежи на $A \cap B$, то той принадлежи и на $A \cup B$, т.е. $\forall x : (x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$, откъдето $A \cap B \in A \cup B$. ■

2 н.) Достатъчно е да докажем, че $\forall x : (x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$, т.е. $(x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$ е тавтология. За начало нека за конкретен x, p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$:
$(x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B) \equiv$
$(x \in A \wedge x \in B) \to (x \in A \vee x \in B) \equiv$
$(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv$
$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv$
$\neg p \vee \neg q \vee p \vee q \equiv T$ ■

3 н.) Може да докажем и че е валиден изводът: $\frac{x \in A \cap B}{\therefore\, x \in A \cup B}$, или $\frac{p \wedge q}{\therefore\, p \vee q}$:

$$p \wedge q \overset{\text{правило за опростяване}}{\vdash} p \overset{\text{правило за добавяне}}{\vdash} p \vee q \quad ■$$

Задача 7. Да се докаже, че $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Решение. Ако пробваме да решим с таблица, възниква проблем с декартовото произведение - то борави с наредени двойки, което не се вписва в таблицата.
Решаваме с еквивалентни преобразувания: За произволна наредена двойка z:
$z = (z_1, z_2) \in A \times (B \cup C) \equiv (z_1 \in A) \wedge (z_2 \in B \cup C) \equiv (z_1 \in A) \wedge ((z_2 \in B) \vee (z_2 \in C)) \overset{\text{дистрибутивност}}{\equiv}$
$[(z_1 \in A) \wedge (z_2 \in B)] \vee [(z_1 \in A) \wedge (z_2 \in C)] \equiv [z \in A \times B] \vee [z \in A \times C] \equiv z \in (A \times B) \cup (A \times C)$
Тоест произволен елемент приндлежи на лявата страна от условието точно когато приндлежи и на дясната, т.е. двете съвпадат. ■

Задача 8. Да се докаже, че $B \subseteq C$, то $B \backslash C = \varnothing$.

Решение. Ще демонстрираме 3 възможни решения:

1 н.) С таблица:

B	C	$B \backslash C$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Полезно. Когато имаме допълнителни условия (например от вида $B \subseteq C$), задраскваме редове, неотговарящи на условието.

Ето защо в случая се абстрахираме от третия ред на таблицата, който не отговаря на условието (понеже в B има елемент, който не е в C), и разглеждаме само останалите.
В оставащите редове се вижда, че за всеки елемент x, $x \notin B \backslash C$ (навсякъде в последната колона има 0), тоест $B \backslash C = \varnothing$. ■

2 н.) Допсукаме противното - нека $B \backslash C \neq \varnothing$, т.е. $\exists x \in B : x \notin C$. Тогава обаче $B \nsubseteq C \Rightarrow$ противоречие с условието. ■

3 н.) Спокойно може да се гледа на условието като на импликация, за която трябва да се докаже, че винаги е вярна (т.е. тавтология).
$(B \subseteq C) \to (B \backslash C = \varnothing) \equiv$
$\forall x (x \in B \to x \in C) \to \neg \exists y (y \in B \wedge y \notin C) \equiv$

$\neg\forall x(x \notin B \vee x \in C) \vee \neg\exists y(y \in B \wedge y \notin C) \equiv$
$\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \vee \neg\exists y(y \in B \wedge y \notin C) \equiv$
$\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \vee \neg\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \equiv T$ ■

Задача 9. Намерете редица от множества $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такава, че $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \subseteq A_{i+1}$, но $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \varnothing$

Решение. това е сравнително тривиален пример от гледна точка на анализа: сечението на отворените интервали $(0,1),(0,\frac{1}{2}),...(0,\frac{1}{n}),...$ е именно празното множество (защо интервалите са множества?) ■

Задача 10. Вярно ли е, че:

- ако $C \subseteq A \cup B$, то $C \subseteq A \vee C \subseteq B$
- ако $C \subseteq A \cap B$, то $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$
- ако $A \subseteq B$, то $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$
- $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
- $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

Решение.

- Невинаги е вярно, ето контрапример: $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}, C = \{1,3\}$ (обратната посока обаче винаги е вярна). ■
- За разлика от предното, това е винаги вярно. За прозиволен елемент $x \in C :\ x \in C \subseteq (A \cap B) \subseteq A \Rightarrow x \in A$, значи $\forall x \in C : x \in A \Rightarrow C \subseteq A$ аналогично и $x \in C \subseteq (A \cap B) \subseteq B \Rightarrow x \in B \Rightarrow \forall x \in C : x \in B \Rightarrow C \subseteq B$. Получихме $(C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B)$. ■
- Да. Нека $S \in \mathscr{P}(A)$ е произволно подмножество на A, тогава $S \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S \in \mathscr{P}(B)$. Понеже S е произволно, то $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$. ■
- Ще докажем исканото на две части (като покажем, че ляата част се съдържа в дясната и обратно). Нека $S \in \mathscr{P}(A \cap B) \Rightarrow S \subseteq A \cap B \Rightarrow (S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B) \Rightarrow (S \in \mathscr{P}(A)) \wedge (S \in \mathscr{P}(B)) \Rightarrow S \in (\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B))$. Това показва, че всеки елемент от лявото множество е и в дясното, откъдето $\mathscr{P}(A \cap B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. □
  Сега наобратно: нека $S \in (\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)) \Rightarrow (S \in \mathscr{P}(A)) \wedge (S \in \mathscr{P}(B)) \Rightarrow (S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B) \Rightarrow S \subseteq A \cap B \Rightarrow S \in \mathscr{P}(A \cap B)$. ■
- Не е винаги вярно, ето контрапример: $A = \{1\}, B = \{2\}$, тогава $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, докато $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$. ■

Задача 11. Ако A е множество от множества, докажете, че $A \subseteq \mathscr{P}(\bigcup A)$ (с $\bigcup A$ онзначаваме $\bigcup_{a\in A} a$).

Решение. Трябва да покажем, че ако $x \in LHS$, то $x \in RHS$. Нека $x \in A$, значи $\bigcup_{a\in A} a = a_1 ... \cup x \cup ... \cup a_n$, откъдето $x \subseteq \bigcup A$ (понеже за произволни множества $V \subseteq V \cup W$). От $x \subseteq \bigcup A$ директно следва, че $x \in \mathscr{P}(\bigcup A)$. ■
По-формално това може да се изкаже и така: нека $a \in A$, значи $\forall x \in a : x \in \bigcup A \Rightarrow x \subseteq \bigcup A \Rightarrow x \in \mathscr{P}(\bigcup A)$, т.е. всеки елемент на A е и елемент на $\mathscr{P}(\bigcup A) \Rightarrow A \subseteq \mathscr{P}(\bigcup A)$. ■

Задача 12. Ако A, B, C, X са множества и $B \subseteq A$, и $A \cap C = \varnothing$, да се намери X (изразено чрез A, B, C), което е решение на системата: $\left|\begin{array}{l} A\backslash X = B \\ X\backslash A = C \end{array}\right.$

Решение. С диаграми на Вен лесно можем да се ориентираме, че търсеното решение е единствено и е именно $(A \cup C)\backslash B = (A\backslash B) \cup C$. Сега да докажем:

1 н.) От $A\backslash X = B$ можем да извлечем следната информация:

- $A \backslash X = B \Rightarrow A \backslash (A \backslash X) = A \backslash B$, т.е. $A \cap X = A \backslash B$, откъдето $A \backslash B \subseteq X$ *(1.1)*
- От дефиницията на разлика на множества следва и, че $X \cap B = \varnothing$ *(1.2)*

От $X \backslash A = C$ пък можем да извлечем следната информация:

- Отново директно от дефиницията на разлика $C \subseteq X$ *(2.1)* (казано по-просто, щом след премахване на нещо от X е останало C, то C е част от X)
- Понеже $X \cup A = (X \backslash A) \cup A = C \cup A$, то $X \subseteq A \cup C$ *(2.2)* (понеже ако $V \cup W = Q$, то $V \subseteq Q$)

От *(1.1), (2.1)* следва, че $A \backslash B \subseteq X$ и $C \subseteq X$, откъдето $(A \backslash B) \cup C \subseteq X$.
От *(1.2), (2.2)* следва, че $X \cap B = \varnothing$ и $X \subseteq A \cup C$, откъдето $X \subseteq (A \cup C) \backslash B = (A \backslash B) \cup C$.
От горните две получаваме и двете посоки на включването, т.е. $(A \backslash B) \cup C \subseteq X \subseteq (A \backslash B) \cup C$, значи $X = (A \backslash B) \cup C$. ■

2 н.) С цел улеснение, ще искаме да ползваме операцията допълнение на множество, но за целта ни трябва подходящ универсум, дефинираме $U = A \cup B \cup C \cup X$. Макар още да не знаем X, от втория ред в системата се вижда, че $X \subseteq A \cup C$, значи $U = A \cup B \cup C \cup X = A \cup B \cup C$. Ползвайки $V \backslash W = V \cap \overline{W}$, системата можем да запишем и в следния вид:

$$\left| \begin{array}{l} A \cap \overline{X} = B \Rightarrow \overline{A} \cup X = \overline{B} \\ X \cap \overline{A} = C \end{array} \right.$$

Искаме да изразим X само с неща, които знаем. Ще ползваме, че за произволни множества V, W е вярно, че: $V = (V \cup W) \backslash (W \backslash (V \cap W))$ (вижте на диаграма). След заместване $V = X, W = \overline{A}$ се получава: $X = (X \cup \overline{A}) \backslash (\overline{A} \backslash (X \cap \overline{A})) = \overline{B} \backslash (\overline{A} \backslash C) = \overline{B} \cap (\overline{\overline{A} \cap \overline{C}}) = \overline{B} \cap (A \cup C) = (A \cup C) \backslash B$. ■

Забележка. Всъщност никъде не използвахме експлицитно условията $B \subseteq A$ и $A \cap C = \varnothing$. Те са дадени само за да гарантират непротиворечивост на условието (може да лесно да видите, че ако бъдат нарушени, системата няма как да бъде в сила).

Задача 13. Нека F е фамилия от n различни подмножества на множество A, $n \geq 2$. Докажете, че съществуват поне n различни множества от вида $A \triangle B,\ A, B \in F$ ($A \triangle B$ е симетричната разлика на множествата).

Решение. Достатъчно е да направим наблюдението, че $A \triangle B \neq A \triangle C$ тстк $B \neq C$ (достатъчна ни е само обратната посока).
Лема: Ако $B \neq C$, то $A \triangle B \neq A \triangle C$
Д-во на лемата: допускаме противното, че $B \neq C$, но $A \triangle B = A \triangle C = S$. От $B \neq C$, б.о.о $\exists x_0 : x_0 \in B \wedge x_0 \notin C$ (съответно може и наобратно). Сега имаме:

- От една страна $x_0 \in S = A \triangle B$ тстк $x_0 \notin A$ (защото вече занем, че $x_0 \in B$)
- От друга страна $x_0 \in S = A \triangle C$ тстк $x_0 \in A$ (защото вече занем, че $x_0 \notin C$)

Но тогава $x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \in A$, абсурдно, противоречие с допускането. □

Ако $A_1, ..., A_n$ са множествата от фамилията, то $A_1 \triangle A_1, A_1 \triangle A_2, ..., A_1 \triangle A_n$ според лемата са именно n различни множества от искания вид. ■

Задача 14 (*). Нека $F = \{A_1,\ A_2\ ...\ A_k\}$ е фамилия от различни подмножества на А, като $|A| = n$. Ако всеки две множества от F се пресичат, докажете, че $k \leq 2^{n-1}$.

Решение. Да групираме всички възможни подмножества на A (общо 2^{n-1}) по двойки, като всяко да бъде в двойка с допълнението си до A, т.е. произволно подмножество S е в двойка с $A \backslash S$. Това са 2^{n-1} двойки.
Ако $k > 2^{n-1}$, то от принципа на Дирихле (който официално ще вземем след 3 занятия) измежду множествата от фамилията ще има поне две, които са част от една двойка (напр. A_i и $A_j, i \neq j$). Но тогава те не се пресичат, противоречие с допускането, значи $k \leq 2^{n-1}$. ■

Дефиниция 1.2 (фамилия)**.** Множество от множества наричаме фамилия.

Забележка. Формално в аксиоматичната система ZF протоелементи (прости единици, които изграждат множества) няма, там всички обекти са множества, така че случай, различен от горния, там е невъзможен. Ние обаче считаме, че такива най-прости съставни елементи съществуват.

Дефиниция 1.3 (покритие, разбиване)**.** Фамилия от множества $F = X_1, ..., X_k$ наричаме *покриване* на непразното множество A, ако са изпълнени:

1. $\forall i : X_i \subseteq A$ /опционално, следва от 3/,
2. $\forall i : X_i \neq \varnothing$,
3. $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = A$;

Ако освен това е изпълнено: $\forall i \forall j, i \neq j : X_i \cap X_j = \varnothing$, то порkиването се нарича *разбиване*.

Задача 15 (ДР1 И 23)**.** Нека A е множество, а P, R са произволни негови разбивания. Да се докаже, че множеството $F = \{X \cap Y | X \in P \wedge Y \in R\} \backslash \{\varnothing\}$ също е разбиване на A.

**Въпрос: защо "$\varnothing$" е във фигурни скоби?*

Решение. Последователно проверяваме по дефиницията. Понеже X, Y са множества, то сечението им е множество, така че F наистина е фамилия от множества (за определеност нека $F = \{F_1, ..., F_k\}$). При това:
- X, Y са елементи от разбиванията P, R на A, така че сеченията им F_i са подмножества на A. ✓

- Понеже *елементът* празно множество е премахнат от фамилията ("$\backslash\{\varnothing\}$"), то всеки елемент $F_i \neq \varnothing$. ✓

- Сега да покажем, че $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = A$. Разглеждаме конкретен елемент $a \in A$. Понеже P, R са разбивания на A, то съществуват множества $X_0 \in P$ и $Y_0 \in R : a \in X_0 \wedge a \in Y_0 \Rightarrow a \in X_0 \cap Y_0 = F_0 \Rightarrow a \in \bigcup_{i=1}^{k} F_i$. С това заключаваме, че всеки елемент от A е "покрит". ✓

- Остава да проверим дали $\forall i \forall j, i \neq j : F_i \cap F_j = \varnothing$. По дефиниция $F_t = X \cap Y, (X \in P) \wedge (Y \in R)$, съответно нека $F_i = X_1 \cap Y_1,\ F_j = X_2 \cap Y_2$, където $(X_1, X_2 \in P) \wedge (Y_1, Y_2 \in R)$. Понеже $F_i \neq F_j$, то $(X_1 \neq X_2) \vee (Y_1 \neq Y_2)$. Б.о.о. е изпълнено първото, $X_1 \neq X_2$, нещо повече, тъй като те са част от разбиване, то те не се пресичат, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, но тогава и сечението $F_i \cap F_j = (X_1 \cap Y_1) \cap (X_2 \cap Y_2) = X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. ✓

Всички изисквания от дефиницията са изпълнени, значи даденото множество наистина е разбиване. ■

Задача 16 (*)**.** Нека $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ е фамилия от r-елементни множества. Ако сечението на всеки $r+1$ множества от F е непразно, да се докаже, че и сечението на всички n множества от F е непразно.

Решение. Последователно (по индукция) ще докажем, че сечението на всеки k от множествата е непразно, където $k > r$.
База: за $k = r+1$ сечението на всеки $r+1$ множества е непразно по условие. ✓
И.П: Нека сечението на всеки $k,\ r < k < n$ множества е непразно.
И.С: Нека $B_1, B_2, ...B_{k+1}$ са произволни множества от фамилията, искаме да докажем, че тяхното сечение също е непразно. Допускаме противното, нека $\bigcap_{i=1}^{k+1} B_i = \varnothing$. От И.П.:
$B_2 \cap B_3 \cap ... \cap B_k \cap B_{k+1} = C_1 \neq \varnothing$
$B_1 \cap B_3 \cap ... \cap B_k \cap B_{k+1} = C_2 \neq \varnothing$
...
$B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap B_{k+1} = C_k \neq \varnothing$
Тоест във всяко C_t има елемент от B_{k+1}. Но последното множество е r-елементно и $k > r$. Тогава от принципа на Дирихле съществуват индекси $i, j;\ 0 < i \neq j \leq k$ такива, че множествата C_i, C_j имат общ елемент с $B_{k+1} \Rightarrow C_i \cap C_j \neq \varnothing$ откъдето $B_1 \cap .... \cap B_{k+1} = [B_1...B_{i-1} \cap B_{i+1}...B_{k+1}] \cap$

$[B_1...B_{j-1} \cap B_{j+1}...B_{k+1}] = C_i \cap C_j \neq \varnothing$, с което индукционната стъпка е завършена. ✓

От индукцията директно следва, че сечението на всички n множества е непразно. $\blacksquare$.

Задача 17 (**)**.** Дадена е A с n елемента. Да се докаже, че ако подмножествата $A_1, A_2, ..., A_k$ на A са такива, че $\forall i \neq j : |A_i \cap A_j| = 1$, то $k \leq n$.

Решение (Ланджев, ОТ 2008). Ще ползваме алгебричен подход за решаването на задачата. На всяко от множествата съпоставяме характеристичен вектор $v_i := (e^i_1, ..., e^i_n)$, където $e^i_j = 1$, ако елементът a_j на A принадлежи на подмножеството A_i и $e^i_j = 0$ в противен случай. Ще покажем, че векторите $v_1, v_2, ..., v_k$ са линейно независими.
Нека $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = \mathscr{O}$ е тяхна нулева линейна комбинация. Можем да забележим, че от дефиницията ни скаларното $\langle v_i, v_j \rangle = |A_i \cap A_j| = 1$. Тогава $\mathscr{O} = \langle v_i, \mathscr{O} \rangle = \langle v_i, \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \rangle = c_1 + \cdots + c_{i-1} + c_i |A_i| + c_{i+1} + \cdots + c_k = c_1 + \cdots + c_k + c_i(|A_i| - 1)$. Тогава $S := c_1 + \cdots + c_k = -c_i(|A_i| - 1) = c_i(1 - |A_i|)\ \forall i \leq k$.
Но понеже $1 - |A_i| \leq 0$, то $\forall i$: коефициентите c_i имат еднакъв знак (противоположен на този на сумата им). Това е единствено възможно при $S = 0$ и $c_i(1 - |A_i|) = 0$ *(*)* ,$\forall i \leq k$.
Ако за някое $i_0 : |A_{i_0}| = 1$, то директно от условието $\forall i \leq k : A_{i_0} \subseteq A_i$, а оттук $\forall i, j : A_i \cap A_j = A_{i_0}$, значи всеки друг елемент на A попада в не повече от едно от множествата, така $k \leq 1 + (n-1) = n$.
В противен случай $\forall i \leq k : |A_i| \neq 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \forall i \leq k : c_i = 0$. Единствената линейна комбинация, която дава нулевия вектор е тривиалната, тогава векторите са линейно независими. В n-мерно пространство има най-много n линейно независими вектора, значи и тук $k \leq n$. $\blacksquare$

Задача 18 (***Sperner's theorem*)**.** Дадена е фамилия $F = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ от подмножества на A, като $|A| = n$ и никои две множества от фамилията не са сравними по отношение на включването, т.е. $\forall i, j \leq k, i \neq j : A_i \nsubseteq A_j$. Да се докаже, че $k \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Решение. Нека F е така избрана фамилия, че за нея се достига най-голяма стойност за k (т.е. разглеждаме едно оптимално решение). Нека също $d := max\{|A_i| \mid A_i \subseteq A\}$ и $S := \{A_i \subseteq A \mid |A_i| = d\}$.
Да допуснем, че $d > \lceil \frac{n}{2} \rceil$ Дефинираме $S' := \{B \mid (\exists A_i \in S)[B \subseteq A_i] \wedge (|B| = d - 1)\}$.

Правим наблюдението, че $(\forall A_i \in F \backslash S)(\forall B \in S')[A_i \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A_i]$. Нека B_i е произволно.

- От дефиницията на $S', \exists A_j \in S : B \subset A_j$. Тогава $A_i \subseteq B$ влече $A_i \subset A_j$, което е невъзможно, т.е. $\forall i \leq k : A_i \nsubseteq B$.
- Обратно, ако за някое $A_{i_0} \in F \backslash S : B \subset A_{i_0}$, то $|A_{i_0}| \geq d$, но от избора ни d да е най-голямата възможна мощност, $|A_{i_0}| = d$, но тогава $A_{i_0} \in S \Rightarrow A_{i_0} \notin F \backslash S$, което е противоречие

Понеже множествата в S' са с еднаква мощност, то никое от тях не се включва в друго. Имайки предвид и горното наблюдение, заключаваме, че фамилията $(F \backslash S) \cup S'$ изпълнява изискването от условието.
Имаме също, че $|(F \backslash S) \cup S'| = |F| - |S| + |S'|$, което следва от $S \subseteq F$ и това, че множествата $F \backslash S S'$ са чужди (непресичащи се). Но $|S'| \geq \frac{|S|.d}{n-d+1}$ - причината е, че всяко множество от S задава d на брой $(d-1)$-елементни подмножества, същевременно всяко от последните участва в не повече от $n-d+1$ на брой множества от S (тоест е преброено не повече от толкова пъти). Но по допускане, $d > \lceil \frac{n}{2} \rceil \Rightarrow n - d + 1 < n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq d$, но тогава $\frac{d}{n-d+1} > 1$, откъдето $|S'| \geq \frac{|S|.d}{n-d+1} > S|(F \backslash S) \cup S'| = |F| - |S| + |S'| > |F|$, което е по-добро решение от първоначалното, което е противоречие с максималния избор. Значи максимално k се достига при $max\{|A_i| \mid A_i \subseteq A\} =: d \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
По аналогичен начин можем да докажем, че съществува решение, за което $min\{|A_i| \mid A_i \subseteq A\} \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Този факт, комбиниран с горното ни дава съществуване на оптимално решение, в което всички множества от F са с мощност точно $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Но тогава $|F| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. $\blacksquare$

Задача 19 (**Предложи Богдан Стаменов*)**.** Дадено е множество A с $|A| = 2n$. Подмножества X и Y на наричаме съседни, ако $|X \cap Y| = 1$ и $X \cup Y = A$. Да се докаже, че могат да бъдат избрани най-много $\frac{2^{2n} + \binom{2n}{n} - 2}{2}$ подмножества на A така, че никои две от тях *не* са съседни.

Задача 20 (***Erdős-Ko-Rado theorem*). Нека $F = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ е фамилия от r-елементни подмножества на n-елементно множество A, като $r < \frac{n}{2}$. Ако сечението на всеки две множества от F е непразно, да се докаже, че $k \leq \binom{n-1}{r-1}$.

Задачи за вкъщи/в общежитието

Задача 1. Да се докаже, че $A = B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.

Задача 2. Да се докаже, че $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Задача 3. (*предложи М. Георгиев) Да се докаже, че за множество A: $\bigcup A \subseteq A$ тстк $A \subseteq \mathscr{P}(A)$. Множество, изпълняващо горните свойства, се нарича *транзитивно*.