Графи

"Епиграф"

Май 2025

1 Дървета, покриващи дървета

Лема 1 (алтернативни дефиниции)**.** *Следните са еквивалентни за (неориентиран) граф G с n върха:*

- *G е дърво;*
- *G е свързан и ацикличен;*
- *G е свързан и има $n-1$ ребра*
- *за всеки два върха в G съществува единствен път, който ги свързва;*
- *G е свързан и премахването на кое да е ребро от него го разделя (т.е. всяко ребро е мост);*

Дефиниция 1 (*дърво, индуктивна дефиниция*)**.**

- Тривиалният граф е дърво (граф с единствен връх и без ребра);
- Ако $T = (V, E)$ е дърво и $v \in V, u \notin V$ са върхове, то $T' = (V \cup \{u\}, E \cup \{(v, u)\})$ също е дърво.

Дефиниция 2 (*покриващо дърво*)**.** Нека $G = (V, E)$ е свързан граф. *Покриващо дърво* за графа е всяко дърво $T = (V, E')$ такова, че $E' \subseteq E$.

Лема 2. *Граф G има покриващо дърво тстк е свързан.*

Лема 3. *Всяко непразно дърво T има поне едно листо. Всяко дърво с поне два върха има поне две листа.*

Задача 1. Даден е граф, в който от всеки връх може да се стигне до всеки друг по единствен начин и броят на ребрата е четно число. Докажете, че има поне един връх, инцидентен с четен брой ребра.

Решение. Първото нещо, което ни дава условието, е, че графът е дърво. Оттук $m = n - 1$, значи броят върхове n е нечетно число. Знаем, че в граф броят върхове от нечетна степен е четен, така че няма как всичките n върха да са от нечетна степен (заради n четно). Тогава има връх от четна степен. ■

Задача 2. Ако T е дърво с поне 2 върха и всеки връх на T, съседен на листо, е от степен поне 3, докажете, че в дървото има двойка листа с общ съсед.

Решение. Разглеждаме кое да е кореново представяне на T. Нека u е връх на височина 1 (такъв има, в противен случай графът има единствен връх). u има (най-много) един родител в дървото, съответно и поне 2 деца. Да забележим, че заради избора на връх с височина 1, всяко от децата на u е на височина 0, т.е. е листо. Така u е общ съсед за поне една двойка листа. ■

Задача 3. Даден е *свързан* граф с n върха и поне $2n-1$ ребра, да се докаже, че съществува цикъл, след премахване на ребрата на който графът остава свързан.

Решение. Да изберем произволно покриващо дърво $T=(V,E')$ на $G=(V,E)$, такова има заради свързаността на графа. В дървото има n върха и $n-1$ ребра, остават още $(2n-1)-(n-1)=n$ ребра. Да разгледаме графа съставен само от тях и върховете, т.е. $G' := G \backslash T = (V, E \backslash E')$ в този граф има $|V| = n$ върха и $|E \backslash E'| = n$ ребра, значи има цикъл C, да означим множеството от ребрата на цикъла с E_{cycle}, $E_{cycle} \subseteq E \backslash E'$.
Да забележим, че премахването на този цикъл не влияе на свързаността - това е така, понеже $T = G \backslash G' = (V, E \backslash (E \backslash E')) \subseteq (V, E \backslash E_{cycle}) = G \backslash C$. Тоест T е покриващо дърво и за графа $G \backslash C$, значи последният е също свързан. ■

Задача 4. Докажете, че всяко безкрайно дърво T (т.е. имащо безброй много върхове) с крайна разклоненост (всеки връх има краен брой ребра, с които е инцидентен) има безкраен път.

Решение. Ще генерираме такъв път индуктивно. Да фиксираме произволен връх $v_0 \in V$ за корен и да разгледане полученото кореново дърво.
База: Нека $d(v_0) = d_0 \in \mathbb{N}$ и децата на корена са $w_1, ..., w_{d_0}$. Да разгледаме поддърветата с корени тези деца: $T_1, T_2, ..., T_{d_0}$. Понеже имаме безброй много върхове, то по принципа на Дирихле за безкрайности, в поне едно от поддърветата, които пък са краен брой, ще има безкраен брой върхове. Нека това е поддървото на дете w_i. Полагаме $v_1 = w_i$ и вече разглеждаме само поддървото T_i.
ИП: Дървото с корен v_n е безкрайно за някое n.
ИС: Нека $d(v_n) = d_n \in \mathbb{N}$ и децата на текущия корен v_n са $w_1^n, ..., w_{d_n}^n$ (двойното индексиране е, за да не става объркване с буквите). Да разгледаме поддърветата с корени тези деца: $T_1^n, T_2^n, ..., T_{d_0}^n$. Понеже имаме бесзброй много върхове, то по принципа на Дирихле за безкрайности, в поне едно от поддърветата, които пък са краен брой, ще има безкраен брой върхове. Нека това е поддървото на дете w_i^n. Полагаме $v_{n+1} = w_i^n$.
От индуктивната конструкция следва, че $\forall i \in \mathbb{N} : (v_i, v_{i+1}) \in E(T) \Rightarrow$ пътят с върхове $v_0, v_1, v_2, ...$ е валиден и безкраен. ■

Задача 5. Да се докаже, че редицата от положителни числа $\{d_i\}_{i=1}^n, n > 1$ е степенна редица (на върховете) на дърво тстк $\forall i, 1 \leq i \leq n : d_i \geq 1$ *(*)* и $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$ *(**)*.

Решение. Ще покажем двете посоки поотделно:

- *необходимост* ($\Rightarrow$): Понеже дървото е свързан граф, $\forall i (d_i \geq 1)$, а от $m = n-1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n d_i = 2m = 2(n-1) = 2n-2$. □
- *достатъчност* ($\Leftarrow$): Ще докажем с индукция по n.
  База: Единствената редица с дължина 2, която удовлетворява изискването, е редицата $\{1,1\}$, която отговаря на графа K_2 (2 свързани върха), който пък е дърво. ✓
  ИП: Нека за *някое* n твърдението е изпълнено за *всички* редици с дължина $n-1$, удовлетворяващи *(*)* и *(**)*.
  ИС: Ще докажем, че твърдението е изпълнено и за произволна редица с дължина n, изпълняваща условия *(*)* и *(**)*. Б.о.о редицата е сортирана, $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Да обърнем внимание, че $d_1 = 1$, в противен случай $\sum_{i=1}^n d_i \geq \sum_{i=1}^n d_1 \geq n.2 = 2n > 2n-2$, което би било противоречие. Също така $d_n > 1$ (иначе сумата би станала твърде малка).
  Да разгледаме редицата $\{d_2, \cdots, d_{n-1}, d_n - 1\}$ с $n-1$ члена, в която всяко число е поне 1, а също така общата им сума е $(\sum_{i=2}^n d_i) - 1 = (\sum_{i=1}^n d_i) - 1 - d_1 = (2n-2) - 1 - 1 = 2n-4 = 2(n-1)-2$. Тоест за тази редица можем да ползваме **ИП**, откъдето следва, че съществува дърво, за което тя е редица на степените. Към него добавяме още един връх и го свързваме с върха от дървото със степен $d_n - 1$, така новополученото дърво е с редица от степените тъкмо $\{1, d_2, \cdots, d_n\} = \{d_1, \cdots, d_n\}$. ■

Задача 6. Всяко дърво има поне един връх такъв, че след премахването му (на него и инцидентните му ребра) във всяка компонента на свързаност на оставащия граф има не повече от $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ върха.

Решение. Нека v е такъв връх, че броят върхове в максималната получена компонента е минимален (*избор на екстремален елемент*). Ще покажем, че този връх удовлетворява исканото условие. Да допуснем, че не го, т.е. някоя от компонентите $Comp_0$ има $x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ върха. Да отбележим, че броят получени компоненти съответства на степента на v в T, като всеки съсед е в различна компонента. Нека u е съседът на v във въпросната максимална компонента, нарушаваща условието.
Да разгледаме какво се получава при изтриване на u и ребрата му от G (вместо на v): В компонентата на v остават $n - x < n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil \Rightarrow n - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < x$ върха. Във всички останали компоненти също има $< x$ върха (защото те са се съдържат в компонентата $Comp_0$, но не съдържат u). Така получаваме, че при изтриване на u максималната компонента е по-малка от максималната $Comp_0$ при премахване на v, което е противоречие с екстремалния избор. ■

Задача 7. Докажете, че ако G е свързан граф и не е дърво, то той има поне 3 различни покриващи дървета.

Решение. Ако графът има повече от n ребра, да "изтрием" (тоест да се абстрахираме от) някои така че, оставалият граф G' е свързан и има n ребра (това винаги е постижимо, защо?). Явно G' също не е дърво, значи в него има цикъл. Да разгледаме произволен такъв, в него има поне 3 ребра (с по-малко не може да е цикъл). Нека три ребра от този цикъл са например e_1, e_2, e_3. Знаем, че при премахване на ребро от цикъл графът остава свързан, значи $G' \backslash e_1, G' \backslash e_2, G' \backslash e_3$ са 3 различни свързани подграфа на G, всеки с по $n-1$ ребра, значи и трите са дървета (покриващи). ■

Какъв е смисълът на първоначалното "премахване" на ребра, което оставя точно n ребра в графа, не може ли без него?

Задача 8. Ако T е дърво, докажете, че върховете му са от нечетна степен тогава и само тогава, когато за всяко ребро $e \in E(T)$: двете компоненти на $T - e$ имат нечетен брой върхове.

Решение. ($\Rightarrow$) Нека върховете на дървото са от нечетна степен и $e = (u, v) \in E$ е произволно. Тогава в $T - e$ върховете u, v са в различни компоненти, като всеки от тях е от четна степен (степента им е намаляла с 1), а всеки от останалите върхове продължава да е от нечетна степен. Тогава във всяка от двете компоненти има по един връх от четна степен, а всички останалите върхове са от нечетна. Но върховете от нечетна степен в граф (в частност компонента) са четен брой, така че във всяка компонента има нечетен брой върхове (като прибавим и единствените от четна степен). ✓
($\Leftarrow$) Нека за всяко ребро $e \in E(T)$: двете компоненти на $T - e$ имат нечетен брой върхове и $u \in V$ е произволен връх. Да допуснем, че u е от четна степен, нека съседите са му $w_1, \cdots, w_{2k}$. По предположение за всяко $i, 2 \leq 2k$ компонентата на $T - (u, w_i)$, съдържаща w_i, има нечетен брой ребра. Не е трудно да се види, че компонентата $T - (u, w_1)$, сдържаща u, се явява обединение на върха u, останалите му инцидентни ребра и компонентите на $T - (u, w_i)$, съдържащи $w_i, \forall i, 2 \leq i \leq 2k$. Тоест броят върхове в компонентата на $T - (u, w_1)$, сдържаща u, е сбор на нечетен брой (по-точно $2k - 1$) нечетни числа плюс 1 (заради самия u), което е четно число, което е противоречие с допускането, че компонентите на $T - (u, w_1)$ са от нечетен ред. ■

Задача 9. Ако $v \in V$ е връх на дърво $T = (V, E)$, $\sum_{u \in V} dist(v, u) \leq \binom{n}{2}$.

Решение. Нека ексцентрицитетът на v е $d := \epsilon(v) = max\{dist(v, u) \mid u \in V\} \leq n - 1$. Понеже има връх на разстояние d от v, то има път с такава дължина от v, значи по този път има и връх на разстояние $d - 1$ от v, също и такъв на разстояние $d - 2$, ... Можем да обобщим $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq d \ \exists u \in V : dist(v, u) = i$ (като върхът на разстояние 0 е самият v). Значи редицата от разстояния на върховете до ще v изглежда така: $0, 1, ..., d - 1, d, x_1, x_2, ..., x_{n-d-1}$, като $1 \leq x_j \leq d$. Тогава $\sum_{u \in V} dist(v, u) = 0 + 1 + \cdots + d + x_1 + \cdots + x_{n-d-1} \leq 0 + 1 + \cdots + d + d + \cdots + d \leq 0 + 1 + \cdots + d + (d + 1) + \cdots + (d + (n - d - 1)) = 0 + 1 + \cdots + (n - 1) = \binom{n}{2}$. ■

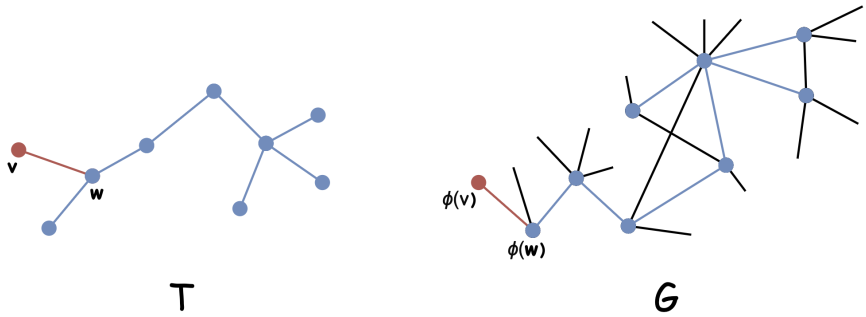
Задача 10. Да се докаже, че всеки граф има връх, който *не* е срязващ.

Решение. Разглеждаме коя да е компонента на свързаност G на дадения по условие граф и кое да е нейно покриващо дърво T. Нека връх v е листо в дървото T. Твърдим, че v *не* е срязващ.

Достатъчно е да докажем, че $G - v$ е свързан. Нека u, w са произволни два други върха от G. В покриващото дърво T те продължават да са свързани, следователно между тях има път. Понеже избрахме v да е листо, този път не минава през върха v, така че той ще продължи да съществува и в графа $T - v$, а следователно и в $G - v$. Тоест между всеки два върха в $G - v$ има път, значи е свързан. Това доказва, че v не е срязващ. $\blacksquare$

Задача 11. Нека G е прост граф с $\delta(G) \geq k$, а T е произволно дърво с $k+1$ върха. Докажете, че съществува подграф H на G, изоморфен на T.

Решение. Ще докажем по индукция по k.
База: При $k = 0$ дървото T има единствен връх. Тогава всеки връх на G индуцира граф, изоморфен на T. ✓
ИП: За някое k, всеки граф G' с $\delta(G') \geq k - 1$ и всяко дърво T' с k върха е в сила, че съществува подграф H' на G', изоморфен на T'.
ИС: Ще докажем същото за произволен граф G с $\delta(G) \geq k$ и дърво T с $k+1$ върха. Нека v е листо (висящ връх) в T и w е неговият единствен съсед. Тогава $T - v$ е дърво с k върха. Понеже $\delta(G) \geq k > k - 1$, то можем да използваме ИП за G и $T - v$. Получаваме, че G има подграф H, изоморфен на $T - v$. Да обозначим функцията на съответствие с $\phi : V(T - v) \to V(H)$. Нека с $w' \in V(H)$ да бележим върха от H, съответстващ на w от $T - v$, т.е. $w' := \phi(w)$. В графа G е в сила, че $d_G(w') \geq k$, а в $H \subseteq G$ имаме $d_H(w') \leq k - 1$. Следователно в G съществува съсед v' на връх w', който не е част от H.
Лесно се проверява, че графът $(V(H) \cup \{v'\}, E(H) \cup \{(w', v')\})$ е изоморфен на T, тоест биективната функция $\phi \cup \{(v, v')\}$ (с домейн $V(T)$ и кодомейн $V(H) \cup \{v'\}$) задава изоморфизъм. $\blacksquare$



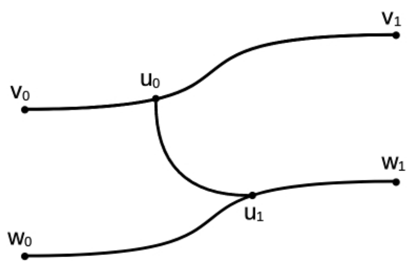
Дефиниция 3 (*Диаметър на дърво*)**.** Дефиницията за диаметър ("максималният ексцентрицитет") в частния случай с дървета, в които между всеки два върха има точно един път, може да се изкаже и така: Дължината на най-дългия път в дърво наричаме диаметър.

Задача 12 (**Намиране на диаметър на дърво*)**.** Нека $T = (V, E)$ е дърво и v_0 е произволен връх. Нека v_1 е най-отдалеченият връх от v_0 в дървото (ако има няколко такива, избираме кой да е) и аналогично v_2 е най-отдалечен от v_1. Да се докаже, че пътят $v_1 - v_2$ е най-дългият в T.

Решение. За начало да обърнем внимание, че сечението на произволни два пътя в дърво също е път (потенциално празен). С други думи, всеки два пътя могат да имат най-много един общ участък (в противен случай - ако се събират и разделят - в дървото би имало цикъл). В частност, ако два различни пътя имат общо начало (разбира се, посоките са условни), то в някакъв момент те ще се разделят и повече няма да се пресекат.

Достатъчно е да докажем, че v_1 е край на някой най-дълъг път в графа. Така $v_1 \leftrightsquigarrow v_2$ очевидно ще е един такъв най-дълъг път, което и искаме.
Нека $w_0 \leftrightsquigarrow w_1$ е произволен най-дълъг път в графа. Ако $\{w_0, w_1\} \cap \{v_0, v_1\} \neq \varnothing$, лесно се вижда, че исканото следва. Да разгледаме пътя $v_0 \leftrightsquigarrow w_1$ (такъв има). Нека последният общ връх (считано

от v_0) на пътищата $v_0 \leftrightsquigarrow v_1$ и $v_0 \leftrightsquigarrow w_1$ е u_0, а последният общ връх (считано от w_1) на пътищата $v_0 \leftrightsquigarrow w_1$ и $w_0 \leftrightsquigarrow w_1$ е u_1 (*виж картинката*). Да отбележим, че u_0, u_1 е възможно да съвпадат.
По условие $v_0 \leftrightsquigarrow v_1$ е един най-дълъг път от $v_0 \Rightarrow |u_0 \leftrightsquigarrow v_1| \geq |u_0 \leftrightsquigarrow u_1 \leftrightsquigarrow w_1|$, но тогава $|u_1 \leftrightsquigarrow u_0 \leftrightsquigarrow v_1| \geq |u_1 \leftrightsquigarrow w_1| \Rightarrow |w_0 \leftrightsquigarrow v_1| = |w_0 \leftrightsquigarrow u_1 \leftrightsquigarrow u_0 \leftrightsquigarrow v_1| \geq |w_0 \leftrightsquigarrow u_1 \leftrightsquigarrow w_1| = |w_0 \leftrightsquigarrow w_1|$, но $w_0 \leftrightsquigarrow w_1$ по допускане е един най-дълъг път в дървото, така че в израза горе има равенство, или $|w_0 \leftrightsquigarrow v_1| = |w_0 \leftrightsquigarrow w_1|$, така получихме, че v_1 е край на някой най-дълъг път в дървото (в случая $v_1 \leftrightsquigarrow w_0$), исканото следва. ■



Задача 13. Нека $T = (V, E)$ е дърво с $n = 2k$ върха. Да се докаже, че съществуват k пътя без общи ребра така, че краищата не тези пътища са всичките върхове във V.

Решение. 1 н.) Ще докажем твърдението със силна индукция по броя върхове, като ще добавим допълнително твърдение и за дървета с нечетен брой върхове.
База: всеки празен граф отговаря на условието. ✓

ИП: Нека за дадено $t \in \mathbb{N}$ всяко дърво с:
• *четен* брой върхове $t_0 \leq t$ може да раздели на $\frac{t_0}{2}$ пътя с различни краища и различни ребра (исканото по условие); (*)
• *нечетен* брой върхове $t_0 \leq t$ и произволен връх v може да раздели на $\frac{t_0-1}{2}$ пътя с различни краища и различни ребра (исканото по условие), като никой от тези краища не е върхът v; (**)

ИС: Ще докажем, че едно от горните условия (в зависимост четността на t) е в сила и за дърво с $t+1$ върха. Нека T' е такова дърво. Имаме два случая:
• t е *нечетно*: Избираме произволно негово листо v. Нека единственият връх, към който то е свързано, е u. Да отбележим, че графът $T' - v$ (съответно и без реброто (v, u)) също е дърво. Според ИП дървото $T'-$ може да се разбие на $\frac{t-1}{2}$ двойки пътища, като върхът u не е край на нито един от тях. Взимайки и пътя-ребро $u - v$, получаваме точно $\frac{t+1}{2}$ непресичащи се (откъм ребра) пътя с различни краища. ✓
• t е *четно*: Нека v е произволен връх. Искаме да разделим дървото на пътища с различни краища, като никой от тях не е v. Можем да гледаме на T като кореново дърво с корен v. Разглеждаме съседите $u_1, u_2, ...u_d$ на v, всеки от които задава една компонента (поддърво) в графа $T - v$. Да означим въпросните с $T_1, ..., T_d$ и да отбележим, че те също са дървета.
Общият брой върхове в поддърветата е четен (точно t), така че от тях поддърветата $T_{i_1}, T_{i_2}, ...T_{i_l}$ с нечетен брой върхове са четен брой. Според ИП произволно поддърво с *четен* брой върхове може да бъде разделено на пътища. Всяка поддърво с *нечетен* брой върхове T_{i_j} пък може да се раздели на пътища така, че само коренът му u_{i_j} не е край на път.
Прилагайки ИП за всяка поддърво, получаваме частично (защото не включва ребрата, инцидентни на v) разделяне на пътища на дървото T, като само върховете $v, u_{i_1}, ...u_{i_l}$ не са краища на такива. l беше четно, така че прекарваме двуребрените пътища $u_{i_1} - v - u_{i_2}, \cdots, u_{i_{l-1}} - v - u_{i_l}$, с което единственият връх, който не е край на цикъл остава v, както и искахме. ■

Задача 14 (*). Нека $G = (V, E)$ е свързан граф с четен брой върхове. Докажете, че може да се избере подмножество от ребра на G така, че всеки връх е инцидентен с нечетен брой от избраните ребра.

Решение. Ще предложим алгоритъм за намирането на исканото подмножество.
Наблюдение: Ако знаем, че за подграф $G' = (V, E'), E' \subseteq E$ на дадения съществува такова подмножество от ребра, то последното ще удовлетворява условието и за самия граф G (понеже върховете му са същите).
Идея за решение: Щом условието е в сила за произволен граф с четен брой върхове, то ще е в сила и за частния случай на дървета с четен брой върхове. Комбинирайки това, с наблюдението по-горе, ще видим, че такова подмножество от ребра за графа G съществува тстк такова съществува и за кое да е от поддърветата му. С други думи, можем да сведем задачата до търсене на множество ребра само за някое покриващо дърво T на G.

Алгоритъм: Нека T е кореново дърво. Тръгваме от долу нагоре по дървото. "Свързваме" (ще рече запазваме ребрата между) всяко листо и родителя му - така листата са от нечетна степен 1 ✓.Ако някой от родителите има нечетен брой листа, също е наред, повече не го и гледаме. Така оставаме с дърво с $d-1$ реда, като всяко от новите "листа" (върховете на ред $d-1$) или е от степен 0 (т.е. още не е свързано), или е от старите родители с по четен брой "избрани" ребра. - И в двата случая ще му трябват нечетен брой нови връзки (за да изпълним условието за нечетност). Този процес на повтаряме, докато "оправим" всички върхове до корена, така получаваме:
Инвариант: При всяко такова опростяване на задачата и "махане" на ред от дървото (по-скоро абстрахиране от него), броят "активни" разглеждани върхове остава четен (не е особено трудно да се съобрази). Тоест на последна стъпка на алгоритъма ще е останал коренът и *нечетен* брой поддървета, чиито корени все още се нуждаят от нечетен брой връзки. - Това върши работа, взимаме ребрата между корена и тях, така "оправяме" и неговата нечетност, и на въпросните му деца.
Хубавото е, че това решение дава линеен алгоритъм за решаването на проблема $O(n+m)$. ■

**Формално това всичко трябва да стане по индукция, например следвайки индуктивната дефиниция за построяване на кореново дърво от листата към корена, но за момента авторът не вижда твърде голяма практическа полза от подобно доказателство (нито пък има енергия за писане на такова)...*

Задача 15. Нека v е връх в свързан граф G, да се докаже, че съществува покриващо дърво T на G такова, че разстоянията от v са до всеки друг връх на графа са същите в G и T.

Упътване. Всъщност пример за такова е *"bfs дървото"*, получено при прилагане на *bfs* алгоритъма от начален връх v, обхождането в широчина (*bfs*) запазва разстоянията между началния връх и останалите.

Задача 16 (*). Даден е граф с G с n върха и *повече от* $\frac{3(n-1)}{2}$ ребра. Докажете, че съществуват два различни върха v и u, между които съществуват поне 3 непресичащи се пътя.

Упътване. Разгледайте покриващо дърво на графа (т.нар. *dfs tree/bfs tree*), получено при прилагане на *dfs* (или *bfs*) върху него. Какво може да се каже за оставащите ребра?

Фигура 1: *По принцип нямам авторски права*

2 Двуделни графи

Дефиниция 4 (*двуделен граф*)**.** Графът $G = (V, E)$ е *двуделен*, ако множеството V има разбиване на подмножества V_1, V_2 (*дялове*) така, че краищата на всяко ребро са в различни дялове. Ползваме нотацията $G = (V_1, V_2, E)$

Лема 4. *Нека $G = (V_1, V_2, E)$ е двуделен. Да се докаже, че $\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v) = m$.*

Доказателство. Всяко ребро е преброено веднъж в единия дял, заради края си там, и отново веднъж във втория дял, заради другия си край. □

Лема 5. *Нека $G = (V_1, V_2, E)$ е двуделен. Ако между връх v и връх w има път с дължина d, то v и w са в един дял тстк d е четно.*

Лема 6. *Граф е двуделен тстк не съдържа нечетен цикъл.*

Доказателство. ($\Rightarrow$) Разглеждаме произволен цикъл с начален (и краен) връх v, ако разгледаме последователността от върховете в цикъла, всеки два съседни от тях са в различни дялове (всяко ребро, по което "минем", сменя дяла). Започваме и свършваме в един и същи дял, тоест броят ребра е четен.
($\Leftarrow$) Сега обратно, нека графът не съдържа нечетен цикъл, трябва да докажем, че е двуделен. Да отбележим, че отделните свързани компоненти на графа са напълно независими (както за наличието на цикъл, така и за възможността им за разбиване на два дяла), така че можем да разглеждаме една свързана компонента от дадения граф (или направо да мислим, че самият той е свързан). Този свързан граф/компонента има покриващо дърво. Тук ще използваме наготово, че всяко дърво е двуделен граф (проверете). Да използваме разбиването на дялове, определено от това покриващо дърво. - Два върха са в един дял тстк пътят в дървото между тях е с четна дължина (*по предната лема*). Да допуснем, че това разбиване на дялове не е коректно, т.е. има ребро e между два върха от един дял - нека това са v и w. Явно, че това ребро не е част от разглежданото покриващо дърво (защото последното е двуделен граф при това разбиване). Разглеждаме цикъла, образуван от пътя $v - w$ в покриващото дърво (който, уточнихме, е с четна дължина) и реброто $e = (v, w)$. Тогава полученият цикъл е с нечетна дължина, противоречие с условието, значи разбиването, определено от покриващото дърво, коректно задава двуделен граф. □

Забележка. Обратната посока може да се докаже и с индукция по броя на върховете, а също и с индукция по броя на ребрата (и двете са добро упражнение, пробвайте сами).

Задача 17. Докажете или опровергайте, че разбиването на граф, което го задава като двуделен такъв (ако такова има), е единствено с точност до смяна местата на V_1, V_2.

Решение. Не е вярно, ето *контрапример*: разглеждаме графа $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$. Тогава $V_1 = \{v_1, v_3\}, V_2 = \{v_2, v_4\}$ и $V_1 = \{v_1, v_4\}, V_2 = \{v_2, v_3\}$ са две различни валидни разбивания на върховете на два дяла. ■

Задача 18. Да се докажем, че всяко дърво е двуделен граф.

Решение. Граф е двуделен тстк няма цикли с нечетна дължина. В дърветата няма цикли с нечетна дължина (защото в тях изобщо няма цикли), така че те са двуделни графи. ■

Задача 19. Докажете, че граф G е двуделен тогава и само тогава, когато всеки подграф H на G има антиклика, съдържаща поне половината от върховете на H (закръглено нагоре, т.е. $\left\lceil \frac{|V(H)|}{2} \right\rceil$).

Решение. ($\Rightarrow$) Нека графът G е двуделен и H е негов подграф. Тогава поне $\left\lceil \frac{|V(H)|}{2} \right\rceil$ от върховете на H са в единия дял (по Дирихле). Но щом са в един дял, то няма ребра помежду им, тоест тези върхове образуват антиклика. ✓
($\Leftarrow$) Обратно, всеки подграф H на G има антиклика, съдържаща поне половината от върховете на H. Да допуснем, че G не е двуделен, тогава в G има цикъл C с нечетна дължина. В частност този цикъл е и подграф на G. Според предното, съществува антиклика, съдържаща поне $\left\lceil \frac{|V(H)|}{2} \right\rceil$ от върховете на C, но понеже броят върхове е нечетен, измежду всеки $\left\lceil \frac{|V(H)|}{2} \right\rceil$ върха на цикъла ще има два съседни. Значи между тях има ребро, но това е противоречие с предположението, че те са част от антиклика. Остава G да е двуделен. ■

Задача 20. В двуделен граф степента на всеки връх освен един е кратна на $p \in \mathbb{N}^+$, да се докаже, че и неговата степен също е кратна на p.

Решение. Нека за конкретика върхът е $w \in V_1$. Ползваме, че $\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v) \Rightarrow d(w) = \sum_{v \in V_2} d(v) - \sum_{v \in V_1, v \neq w} d(v)$, което се дели на p като сума/разлика на числа, кратни на p. ■

Задача 21. Ако за $G = (V, E)$ е изпълнено, че $\exists k \in \mathbb{N} : |V| = 2k + 1$ и $\exists p \in \mathbb{N}^+ \forall u \in V : d(u) = p$, да се докаже, че графът *не* е двуделен.

Решение. Нека графът е двуделен. От Дирихле в единия дял ще има поне $k+1$ върха, б.о.о. нека е в дял $V_1 \Rightarrow \sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_1} p = |V_1| p \geq (k+1)p$. Същевременно в другия дял броят върхове е $\leq k \Rightarrow \sum_{v \in V_2} d(v) \leq k.p < (k+1)p$, което противоречи на лемата, значи не е двуделен. ■

Задача 22 (*)**.** В граф с $2n$ върха, $n \geq 2$ всеки връх е от степен поне n. Докажете, че върховете могат да се разделят в две групи, така че за всеки връх поне половината му съседи са в другата група (т.е. в неговата са не повече от половината му съседи).

Решение. От всички възможни разделяния разглеждаме такова, максимизиращо броя ребра с краища върхове в различните дялове (избор на екстремален елемент). Ще докажем, че това разделяне върши работа, да допуснем противното, че не и съществува връх v такъв, че повече от половината му съседи $k > \frac{d(v)}{2}$ са в собствения му дял. Да разгледаме какво би станало, ако прехвърлим v в другия дял - ще се появят нови k ребра с краища в различните дялове и ще изчезнат $d(v) - k$ такива, тоест общата бройка ребра по средата ще се промени с: $+k - (d(v) - k) = +2k - d(v) > 2\frac{d(v)}{2} - d(v) = 0$, т.е. ще нарасне, но това е противоречие с избора на разделяне с максимален брой ребра по средата. ■

Забележка. Както би трябвало да сте забелязали, не използвахме цялото условие, което обикновено е достатъчен индикатор за грешно решение, но пък за момента не съм си открил грешка в доказателството (може да е в условието?). Това е добър пример за *proof by "I haven't found a contradiction yet"...*

Задача 23 (*Канада 2006)**.** В правоъгълна матрица $n \times m$ от естествени числа на всеки ред и на всеки стълб има поне по едно положително число. Освен това, ако ред и колона се пресичат в положително число, сумите от числата върху тях са равни. Да се докаже, че $n = m$.

Решение. Нека матрицата обозначаваме с $M_{n \times m}$. Разглеждаме двуделен тегловен граф $G = (V_1, V_2, E, w)$, където V_1 е множеството от редовете на матрицата, V_2 е множеството от колоните на матрицата, $E = \{(i,j) \mid (i \in V_1) \wedge (j \in V_2) \wedge (M_{i,j} > 0)\}$ е множеството ребра (между ред и колона има ребро тстк те се пресичат в положително число) и $w : E \to \mathbb{R}$ е тегловната функция, като $w((i,j)) = M_{i,j}$.
Да отбележим, че заради условието, че на всеки ред/стълб има положително число, в графа няма изолирани върхове.
Чрез това представяне на матрицата можем да изразяваме сумата на числата върху ред/стълб като сумата от теглата на инцидентните му ребра (например сумата на ред i е $sum(i) := \sum_{e=(i,j) \in E} w(e)$).

От условието, че ако ред и колона се пресичат в положително число, то те имат равни суми, следва пък, че във всяка свързана компонента на двуделния граф, всички редове и стълбове имат равни суми. При това сумата от сумите на всички редове в компонентата $Comp$ е тъкмо общата сума на теглата на ребрата в компонентата, аналогично и за сумата на сумите на стълбовете, т.е. $\sum_{row \in Comp} sum(row) = \sum_{e \in Comp} w(e) = \sum_{col \in Comp} sum(col)$, като $(\forall row \in Comp)(\forall col \in Comp)[sum(row) = const = sum(col)]$, както споменахме по-горе. Значи броят редове във всяка компонента е равен на броя стълбове във всяка компонента на свързаност. Оттук и общият брой редове съответства на общия брой стълбове, $n = m$. $\blacksquare$

3 Оцветявания

Дефиниция 5 (*хроматично число*)**.** Минималният брой цветове, с които могат да бъдат оцветени върховете на даден граф G така, че никой два съседни негови върха да не са в един цвят, се нарича хроматичното число на G и се бележи с $\chi(G)$.

Дефиниция 6 (*хроматичен индекс*)**.** Минималният брой цветове, с които могат да бъдат оцветени ребрата на даден граф G така, че никой две инцидентни негови ребра да не са в един и същи цвят, се нарича хроматичен индекс на G и се бележи с $\chi'(G)$.

Задача 24. Нека G е граф, в който всеки два цикъла с нечетна дължина имат общ връх. Докажете, че $\chi(G) \leq 5$.

Лема 7. *В сила са следните неравенства:*

- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$*;*
- $\chi(G) \geq \omega(G)$*;*
- $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$*;*

Теорема 1 (*Kőnig*)**.** *За двуделен граф G е в сила $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Теорема 2 (*Vising*)**.** *За всеки граф G е в сила $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Теорема 3 (*Brooks*)**.** *Ако G е свързан граф, който не е пълен и не е нечетен цикъл, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*