7. Комбинаторика

"По колко начина могат да те скъсат?"

28 февруари 2026 г.

1 Основни задачи

Принципи на събирането и умножението

Задача 1. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, ако всяко меню се състои от супа, основно, десерт?

Решение. Принцип на умножението: 5.2.4=40. ■

Задача 2. В ресторант сервират 5 вида супа, 2 вида основно, 4 вида десерт. Колко различни менюта можем, не е задължително менютата да са тристепенни, но трябва да имат поне по едно ядене?

Решение. Задачата е същата, но можем да си представим "невзимането" на дадено ядене като още един вариант (например така вече имаме 5+1=6 супи, като последната супа е просто празна купа). Принцип на умножението: (5+1).(2+1).(4+1)=90. Изваждаме 1 (защото в бройката сме включили възможността нищо да не е взето). 90-1=89 ■

Задача 3. Колко са трицифрените числа с различни цифри?

Решение. За първа цифра имаме 9 варианта (всичко без 0), за втора отново 9 (една цифра вече е използвана), за трета - 8. Принцип на умножението: 9.9.8=648. ■

Задача 4. Колко са трицифрените числа с три различни или три еднакви цифри?

Решение. Има 9 числа с еднакви цифри, прибавяме, принцип на събирането: 648+9=657 ■

Задача 5. Колко са четните трицифрени числа с различни цифри?

Решение. Разглеждаме два варианта:

- последната цифра е 0, тогава за първа цифра имаме 9 варианта, за втора остават 8. От принципа за умножението: 8.9=72 числа.
- последната цифра не е 0 (значи е 2, 4, 6 или 8). За първа цифра този път има 8 варианта, за втора отново 8. Има 8.8.4=256 такива числа.

Принцип на събирането: 72+256=328. ■

Задача 6. Нека $S = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$. Колко са подмножествата на S, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

Решение. Можем да разглеждаме елементите a_i и b_j независимо. Броят непразни подмножества на $\{a_1, \dots, a_n\}$ е $2^n - 1$, съответно $2^m - 1$ са непразните подмножества на $\{b_1, \dots, b_n\}$. Можем независимо да комбинираме едните и другите, така че умножаваме двете числа, крайният отговор е $(2^n - 1)(2^m - 1)$.
Можем да обосновем и малко по-формално. Нека $A := \{a_1, \dots, a_n\}, B := \{b_1, \dots, b_m\}$. Тогава търсените по условие множества са точно елементите на $(\mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\}) \times (\mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\})$, които са $|\mathcal{P}(A) - 1|.|\mathcal{P}(B) - 1| = (2^n - 1)(2^m - 1)$. ■

Задача 7. Колко са 10-буквените низове, съставени от различни малки латински букви, в които не се срещат една до друга буквите a и b?

Решение. Низовете с различни букви са $26.25.\cdots.17$. Да преброим в колко от тях се срещат една до друга буквите a, b, можем да си ги представяме в "пакет", като нова буква (съответно ab или ba), който задължително трябва да присъства. Сега обаче няма да строим 10-буквени низове, а 9-буквени, в които една от буквите е въпросният "пакет". 9 възможности за разполагането му, 2 за реда на буквите a и b, $24.23\cdots.17$ варианта за оставащите 10-2=8 букви. Краен отговор: $(26.25.\cdots.17) - 9.2.(24.23\cdots.17)$ ■

Задача 8. Колко са n-буквените низове, съставени от малки латински букви, в които се срещат поне две поредни еднакви букви?

Решение. Да преброим в колко низа няма две поредни еднакви букви: За първата буква имаме 26 варианта, за втората, понеже не можем да повторим предната, имаме 25. Аналогично за третата отново имаме 25 варианта, същото за четвъртата и т.н. В крайна сметка имаме общо $26.25^{(n-1)}$ варианта. Изваждаме това от общата бройка, остават $26^n - 26.25^{(n-1)}$ низа. ■

Задача 9. Нека S е n-елементно множество и A, B, C са негови подмножества такива, че

$$A \cap B \cap C = \varnothing \text{ и } A \cup B \cup C = S$$

Колко са тройките множества A, B, C, удовлетворяващи горните условия?

Решение. Задачата става сравнително лесна, ако гледаме нещата спрямо елементите, а не спрямо множествата. Двете условия можем да изкажем и така: *всеки елемент на S принадлежи на поне едно от трите множества A, B, C и не принадлежи и на трите едновременно.* Тоест всяко $x \in S$ принадлежи на точно едно или две от множествата A, B, C. Следователно x е елемент на точно едно от следните:

$$A\backslash(B \cup C),\ B\backslash(A \cup C),\ C\backslash(A \cup B),\ (A \cup B)\backslash C,\ (A \cup C)\backslash B,\ (B \cup C)\backslash A$$

Имаме 6 възможности, при това принадлежността към някое от горните не зависи от другите елементи на множеството. Така че имаме общо $\boxed{n^6}$ възможности. ■

Пермутации, Мултиномен коефициент

Задача 10. По колко начина могат да се хванат n души на хоро?

Отговор. $(n-1)!$

Задача 11. Колко различни гривни могат да бъдат направени от n различни мъниста?

Отговор. $\frac{(n-1)!}{2}$

Задача 12. Колко различни думи могат да се построят от буквите на думата "МИШКА"?

Отговор. 5!

Задача 13. Колко различни думи (последователности от букви) могат да се построят от буквите на думата "МАТЕМАТИКА", а от буквите на "МИСИСИПИ"?

Отговор. $\frac{10!}{2!3!2!}$ (заради повтарящите се М-та, А-та, Т-та) и $\frac{8!}{4!2!}$ (заради повтарящите се И-та и С-та).

Задача 14. Колко са низовете с дължина n, съставени от буквите a, b, c, в които имат точно k_1 букви a, k_2 букви b, k_3 букви c, където $k_1 + k_2 + k_3 = n$?

Отговор. Тази задача е аналогична на предната, броят е $\frac{n!}{(k_1!)(k_2!)(k_3!)}$, което също може да се изрази и като $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ (последният множител е единица и може да се изпусне). Всъщност това често наричаме *мултиномен коефициент* и бележим $\binom{n}{k_1,k_2,k_3}$.

Задача 15. Клас от 23 ученици трябва да се раздели на 5 групи от по *трима* ученици и 2 групи от по *четирима* ученици за учебен проект. По колко начина може да стане това?

Решение. Нека номерираме групите с числата от 1 до 7 включително и б.о.о. да считаме, че първите 5 са тези с по трима ученици.
Разглеждаме редица $\{a_i\}_{i=1}^{23}$ от 23 числа, като нека a_i е номерът на групата, в която е ученик i. Следователно разглежданите редици са точно тези, в които числата от 1 до 5 се срещат по три пъти, а числата 6 и 7 по четири. Такива редици има

$$\binom{23}{3,3,3,3,3,4,4} = \frac{23!}{(3!)^5(4!)^2}$$

Проблемът в горното преброяване е, че еднакви групирания на учениците броим по няколко пъти в зависимост номерата на групите, в които са. За да игнорираме номерацията, достатъчно е да разделим на 5!2! (понеже петте групи с по трима ученици са неразличими откъм номерация, както и двете групи с по четирима). Окончателно отговорът е $\frac{1}{2!5!}\binom{23}{3,3,3,3,3,4,4} = \boxed{\frac{23!}{(2!)(3!)^5(4!)^2(5!)}}$. ■

Впрочем можем да разсъждаваме и по следния начин: за първия човек от първата група имаме 23 възможности, за втория от първата група остават 22 възможности и т.н. - общо 23!. *Понеже редът на хората в първата група няма значение, трябва да разделим на 3!, аналогично за всяка от останалите. Накрая взимаме предвид, че и номерацията на групите, които имат еднакъв брой хора, не е от значение и разделяме на още* 5!2!.

Кп,н

Задача 16. Колко са всички подмножества на n-елементно множество?

Отговор. 2^n

Задача 17. Колко са всички тотални функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. n^m

Задача 18. Колко са всички частични функции от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн?

Отговор. $(n+1)^m$, представяме си в кодомейна има още едно състояние $''undefined''$.

Задача 19. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи могат да бъдат съставени?

Отговор. n^m

Задача 20. Колко са всички функции $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,2026\}$, за които $f(1)+f(2)+\dots+f(n)$ е нечетно?

Решение. За стойността на $f(i)$ за всяко $i < n$ имаме 2026 възможности, или общо 2026^{n-1} варианта. При фиксирани $f(1),\dots,f(n-1)$, независимо четността на $f(1)+\dots+f(n-1)$, имаме 2026/2=1013 варианта за избор на стойност за $f(n)$ така, че да допълним до нечетна сума. Крайният отговор е $2026^{n-1}1013 = \frac{2026^n}{2}$. Впрочем същото можем да заключим и ако просто направим биекция между функциите с четна сума и тези с нечетна сума. ■

К (C_n^k)

Задача 21. По колко начина могат да се изберат m човека от група от n?

Отговор. $\binom{n}{m}$

Задача 22. Колко са всички низове с n символа $'*'$ и m символа $'|'$?

Отговор. $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$

Задача 23. По колко начина от 12 топки, половината от които са бели, а другите черни, може да се изберат 3 черни и 2 бели топки?

Отговор. $\binom{6}{3}\binom{6}{2}$

Задача 24. Нека $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Колко са решенията на уравнението

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 2k,$$

ако числата $a_i \in \{-1, 1\}$.

Решение. Ако $k < 0$, можем да умножим двете страни на равенството с -1 и да търсим броя на решенията на уравнението $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = 2|k|$. Ясно е, че ако $k \geq 0$, то броят на неизвестните a_i със стойност $+1$ трябва да е с $2k$ повече от броя на тези със стойност -1. Тогава точно $n + k$ от неизвестните има стойност $+1$, а останалите $n - k$ съответно имат стойност -1. Следователно крайният отговор е $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{n-k}$. ∎

Кн (V_n^k)

Задача 25. По колко начина 10 човека могат да седнат на 5-местна пейка (не се позволява да стоят един в друг).

Отговор. $10.9.8.7.6 = \frac{10!}{5!}$

Задача 26. В азбука има n букви. Колко различни m-буквени думи с различни букви могат да бъдат съставени от тях?

Отговор. $\frac{n!}{n-m!} = \binom{n}{m}m!$

Задача 27 (*тотални инективни функции*)**.** Нека X, Y са множества от естествени числа, $|X| = m, |Y| = n$. Колко са инективните (тотални) функции $f : X \to Y$.

Отговор. Ясно е, че при $m > n$ такива инекции няма. Нека $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. За стойността на $f(x_1)$ имаме n възможности - всяко от числата $y_1, \ldots, y_n$. За стойността на $f(x_2)$ съответно остават $n-1$ възможности: всяко от числата y_i с изключение на $f(x_1)$. Можем да продължим аналогично, получаваме формулата $n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$. ∎

Кп ($\widetilde{C}_n^k$)

Задача 28. По колко начина можем да изберем 6 пасти, ако са налични 3 различни вида пасти?

Решение. Можем да си мислим за пастите като 6 * в редица. За да различаваме по колко пасти са от всеки вид, ще слагаме разделители, например $**||****$ би означавало 2 пасти от първи вид, 0 от втори, 4 от трети. Използваме вече решената по-горе задача, има $\binom{6+2}{2} = \binom{6+2}{6}$ варианта. ∎

Задача 29. По колко начина можем да изберем n пасти, ако са налични k различни вида пасти?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

Задача 30. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, като може да има празни кутии? Какво става, ако кутиите са неразличими?

Отговор. $\binom{n+(k-1)}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Задача 31. По колко начина можем да разположим n неразличими предмета в k номерирани кутии, ако няма празни кутии?

Решение. Да сложим във всяка кутия по предмет, остават $n-k$ неразличими предмета, сведохме до горната задача, значи търсеният отговор е: $\binom{(n-k)+(k-1)}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$ $\blacksquare$.
Ако кутиите са неразличими, задачата се свежда до намиране на *integer partitions* на n-елементно множество, за което кратка формула няма. (виж *12fold way*)

Задача 32 (*наредени разлагания*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$. Две решения $(x_1, \cdots, x_k), (y_1, \cdots, y_k)$ се считат различни, ако $\exists i : x_i \neq y_i$. Как се променя задачата, ако искаме всичките числа да са положителни?

Решение. Отново прилагаме трика с разделителите, имаме n, трябва да го разбием на k части (редът има значение). Отново слагаме разделители, $k-1$ на брой. Общо вариантите са: $\binom{n+k-1}{n}$. Ако искаме само положителни решения (ненулеви), трябва $\forall i : x_i \geq 1$. Тогава $(x_1-1)+\cdots+(x_n-1) = n-k$ е ново уравнение, в което всеки член $y_i = x_i - 1 \geq 0$, така сведохме задачата до старата, търсеният брой в случая е:$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ $\blacksquare$

Задача 33 (*брой мултиподмножества*)**.** Дадено е множество S с $|S| = n$ и естествено число k. Колко са на брой k-елементните мултимножества M с елементи от S?

Решение. Ако $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, можем да считаме, че x_i се среща n_i на брой пъти в множеството M. Тогава задачата се свежда до намиране на решенията на $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$. Според горната задача това става по $\binom{n+k-1}{k}$ начина. $\blacksquare$

Задача 34 (*наредени разлагания при допълнителни ограничения*)**.** Да се намери броят на всички решения в естествени числа на уравнението $x_1 + \cdots + x_k = n$, за които $x_1 \leq 30$.

Решение. Да намерим колко са всички решения, в които $x_1 > 30$ и да ги извадим от общия брой. Искаме $x_1 - 31 \geq 0$, тогава $(x_1 - 31) + x_2 + \cdots + x_n = n - 31$, след полагане $y_1 = x_1 - 31$ можем да запишем и като $y_1 + x_2 + \cdots + x_n = n - 31$ $(*)$, но така сведохме до оригиналната задача (понеже в момента за y_1 няма ограничения). Броят решения на $(*)$ е: $\binom{n-31+k-1}{k-1} = \binom{n+k-32}{k-1}$. $\blacksquare$

Задача 35 (*брой растящи функции*)**.** Нека X, Y са множества от естествени числа, $|X| = m, |Y| = n$. Колко са растящите (нестрого) функции $f : X \to Y$. А колко са строго растящите?

Решение. Нека с $a_i, 1 \leq i \leq n$ бележим броя числа от X, за които $f(x) = y_i$. Ясно е, че $a_1+\cdots+a_n = m$. Всяко решение на тази система еднозначно определя някоя растяща функция. Според горните твърдения броят е $\binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1}$.
Колкото до монотонно растящите, вижда се, че $a_i \leq 1$. Тоест трябва да изберем кои m от n-те a_i да бъдат единици, т.е. отговорът е $\binom{n}{m}$. $\blacksquare$

2 По-трудни задачи

Задача 36. В редица има n стола, а също и k човека, които искат да седнат така, че да няма двама човека на съседни столове. По колко начина може да стане това?

Решение. Можем да считаме, че първо настаняваме всички хора на столове, а после поставяме празни столове между тях. Имаме k човека, около и между тях има $k+1$ места, в които можем да разположим оставащите $n-k$ стола. Достатъчно е да намерим решенията в естествени числа на уравнението

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_k = n - k,$$

при допълнителното изискване, че $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{N}^+$ (понеже между всеки двама трябва да има поне един стол разстояние). Свеждаме до намирането на решенията на

$$a_0 + (a_1 - 1) + \cdots + (a_{k-1} - 1) + a_k = n - k - (k-1) = n - 2k + 1$$

в естествени числа. А те са точно $\binom{n-2k+1+k}{k} = \binom{n-k+1}{k}$. Накрая трябва да умножим по $k!$, защото все още не сме взели предвид в какъв ред са разположени хората в редицата. Получаваме $\boxed{\binom{n-k+1}{k}k!} = \frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!} = (n-k+1)\dots(n-2k+2) = V_{n-k+1}^k$. ■

Задача 37 (*)**.** Колко n-цифрени числа могат да се построят с помощта на k_1 на брой цифри 1, k_2 цифри 2, ..., k_9 цифри 9 (не непременно всички)? Приемаме, че $n \leq k_1 + \cdots + k_9$.

Задача 38 (*)**.** По колко начина n бели и m черни топки може да се подредят в кръг, ако топките от един цвят са неразличими помежду си?

Задача 39 (*)**.** Разглеждаме низове с дължина $2n$, съставени само от отварящи и затварящи скоби, например "(( ))) (( )".

а) Каква е вероятността произволно избран низ от горния вид да съдържа равен брой отварящи и затварящи скоби (по n от всеки вид)?

б) Колко са низовете, които са *коректна* последователност от скоби (една последователност е коректна тогава и само тогава, когато всеки неин префикс съдържа не по-малко отварящи скоби от затварящи)?

Решение.

а) Низовете с точно n отварящи и също толкова затварящи скоби са точно $\binom{2n}{n}$ - съответства на броя начини, по които можем да изберем къде да стоят отварящите скоби. Всички низове пък са общо 2^{2n} (за всяка позиция имаме по два възможни символа). Търсената вероятност е

$$\frac{\text{брой благоприятни}}{\text{общ брой}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Интересно е, че този израз може да бъде опростен, ако използване *приближението на Стърлинг*: $m! \sim \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$, откъдето

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} = \frac{2\sqrt{\pi n}\,2^{2n}n^{2n}\frac{1}{e^{2n}}}{2\pi n\,n^{2n}\frac{1}{e^{2n}}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

И така получаваме, че търсената вероятност е приблизително

$$\frac{\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}}{2^{2n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

б) Сега да преброим колко за *коректните* последователности от n отварящи и n затварящи скоби.
Нека на всяка отваряща скоба да съпоставим израза *+1*, а на всяка затваряща съответно *−1*. Можем да считаме, че започваме със стойност 0, четем низа от ляво надясно и при всяка отваряща скоба вдигаме въпросната стойност (да я наречем брояч) с 1, а при затваряща намаляваме с 1. Последователността е коректна точно когато във всеки един момент този брояч има неотрицателна стойност. Тоест:

Лема 1

Броят на коректните последователности от скоби с дължина $2n$ съответства на броя на решенията на

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 0,$$

за които $a_i = \pm 1$ и $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq 0$ за всяко $i \leq 2n$.

Ясно е, че решенията на $a_1 + \cdots + a_{2n} = 0$ с $a_i = \pm 1$ са $\binom{2n}{n}$. От тях обаче трябва да извадим тези, в които съществува $i \leq 2n$ такова, че: $a_1 + \cdots + a_i < 0$. Нека тези решения наричаме *лоши*.

Разглеждаме произволно *лошо* решение и нека k е най-малкият индекс, за който $a_1 + \cdots + a_k < 0$. Тогава $a_1 + \cdots + a_k = -1$ (защото това е първият път, в който сме "слезли" под 0). Тогава имаме

$$(-a_1) + (-a_2) + \cdots + (-a_k) + a_{k+1} + \cdots + a_{2n} = 2$$

и отново всяко от събираемите е ± 1. Така забелязваме, че съществува биекция (проверете) между броя *лоши решения* и броя на решенията на уравнението

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = 2,$$

където $b_i = \pm 1$. Според задача 24 този брой е $\binom{2n}{n+1}$. Следователно търсеният брой (*добри*) решения е

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} \quad \blacksquare$$

Впрочем ако броя на коректните последователности означим с C_n, можем да открием рекурентна зависимост за C_n, зависеща от $C_0, \ldots, C_{n-1}$. Проблемът е, че полученото рекурентно уравнение е с безкрайна история и да се работи с него е трудно. Стойностите C_n се наричат числа на Каталан и често се появяват в комбинаторни задачи.
https://brilliant.org/wiki/catalan-numbers/

Задача 40 (*). По колко начина можем да стигнем от точката (0, 0) до т. (n, n) в стандартна квадратна решетка, ако правим единични стъпки само надясно и нагоре? А ако трябва да не преминаваме над диагонала, свързващ тези две точки?

Решение. Трябва да бъдат направени общо $2n$ стъпки, n от които нагоре, а останалите надясно. Това може да стане по $\binom{2n}{n}$ начина.

Сега да решим задачата с допълнителното ограничение да не преминаваме над диагонала x, x. Това означава, че във всеки един момент за текущата позиция (x, y) е в сила $x \geq y \iff x - y \geq 0$. Да съпоставим $+1$ на всяка стъпка надясно и -1 на всяка стъпка нагоре. това условието се свежда до това да намерим последователност от $2n$ на брой числа ± 1 с обща сума 0 и такива, че във всеки префикс сумата на числата е неотрицателна (тоест са направени поне толкова ходове надясно, колкото са тези нагоре). Сведохме до постановката на предната задача, така че търсеният брой е тъкмо *числото на Каталан* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. $\blacksquare$