Графи

3 част

"Нови ремонти по Графа..."

Декември 2024

1 Планарни графи

Теорема 1 (*Теорема на Куратовски*)**.** *Граф е планарен тстк не съдържа подграф, хомеоморфен на K_5 или $K_{3,3}$.*

Лема 1. *За планарен (мулти)граф G граф с m ребра и произволно негово планарно вписване с f лица $(s_1, ..., s_f)$ е в сила: $\sum_{i=1}^{f} d(s_i) = 2m$.*

Лема 2 (*Характеристика на Ойлер*)**.** *За всеки свързан планарен (мулти)граф G с n върха и m ребра е вярно, че всяко негово планарно вписване има точно f лица, където: $n - m + f = 2$.*

Лема 3. *В планарен (прост) граф с $n \geq 3$ върха има не повече от $3n - 6$ ребра.*

Теорема 2 (Теорема за 4-те цвята)**.** *Всеки планарен граф е 4-оцветим.*

Доказателство. Proof is left as an exercise to the reader... (*тоест не сме в състояние да докажем) □

Задача 1. Всеки планарен граф е 5-оцветим.

Задача 2. Във всеки планарен граф има връх от степен не по-голяма от 5.

Задача 3. Да се докаже, че ако G е планарен граф с $n \geq 11$ върха, то графът допълнение $\overline{G}$ *не* е планарен.

Решение. Нека в G има m_1 върха, а в $\overline{G}$ има m_2 върха. Тогава $m_1 + m_2 = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{11.10}{2} = 55$. Да допуснем, че $\overline{G}$ е планарен. От *лема 3* следва, че $m_1 \leq 3n - 6$ и $m_2 \leq 3n - 6$, т.е $55 \leq m_1 + m_2 \leq 6n - 12 \leq 6.11 - 12 = 54$, противоречие. ■

Задача 4 (*)**.** Дадени са n точки в равнината (координатна система), като разстоянието между всеки две е поне k (можем да приемем, че $k = 1$). Да се докаже, че броят дойки точки на разстояние точно k (в частност 1) е най-много:

- $3n$ за $n \geq 1$;
- $3n - 6$ за $n \geq 3$;

Решение. Да уточним, че може да се приеме, че $k = 1$, защото разстоянията между точките винаги могат да умножат с подходящ коефициент, по-конкретно с $\frac{1}{k}$ (т.е. мащабираме/минимизираме, scaling), без това да променя задачата.
Макар че втората подточка директно решава първата, за всяка ще покажем различно решение:

- Разглеждаме конкретна точка O от дадените и окръжност с радиус 1 (k в общия случай) с център нея. По условие търсим други точки, на разстояние точно 1 от т. O - ясно, че те трябва да лежат върху окръжността.
  Наблюдение: Върху окръжността има не повече от 6 точки. Ако допуснем, противното, че има поне 7, то централният ъгъл между поне две от тях (на *фиг. 1а* това са P и Q) ще е $\leq \frac{360°}{7} < 60°$, а оттам $|PQ| < 1$, като страна срещу на-малкия ъгъл в триъгълник POQ, което е противоречие с условието, че всеки две точки са на разсточние поне 1.
  Построяваме граф, с върхове дадените точки, като между две точки има ребро тстк са на разстояние точно 1. Ясно, че търсеният отговор съответства на броя ребра в така получения граф. Както се вижда от по-горе, всеки връх u в него е от степен $d(u) \leq 6 \Rightarrow 2m = \sum_{i=1}^{n} d(u_i) \leq 6n \Rightarrow m \leq 3n$. ■

(а) при 7 точки по окръжността

(б) ако има пресичане

Фигура 1: Лявата фигура е за първата подточка, дясната - за втората

- Отново ползваме графа (или по-точно неговото планарно вписване върху равнината) с върхове точките и ребра, получени при свързването на два върха на разстояние 1.
  Наблюдение: Графът е планарен: Да допуснем, противното, че има пресичащи се ребра (както са AB и CD на *фиг. 1б*), тогава $|AB| = |CD| = 1$. Б.о.о. $|AD| \leq |BC| \Rightarrow 2|AD| \leq |AD| + |BC| < |AB| + |CD| = 2$, като последното следва от неравенство на триъгълника. Но така получаваме $|AD| < 1$, което е противоречие с факта, че всички точки са на разстояние поне 1.
  Последното може да се покаже и по друг начин (*предложи Венцислав Пейчев*): В четириъгълника $ACBD$ поне един от ъглите е $\geq 90°$, б.о.о нека това е $\angle A$, тогава в триъгълник $CAD : CD > AC$ ($\wedge$ $CD > AD$), което е противоречие с факта, че $CD = 1$ е минимално разстояние.
  Знаем обаче, че в планарен граф с n върха и *поне 2 ребра* има не повече от $3n - 6$ ребра. Ако реброто е единствено, т.е. има единствена двойка върхове на разстояние 1, то неравенството очевидно отново е ипълнено. ■

2 Хамилтонов и Ойлеров цикъл

Лема 4 (*НДУ за ойлеров цикъл и ойлеров път*)**.** *Граф има ойлеров цикъл тстк всеки връх е от четна степен. Граф има Ойлеров път тстк най-много деа върха са от нечетна степен.*

Задача 5. Let G be a graph on n vertices. Let u, v be two non-adjacent vertices such that $deg(u) + deg(v) \geq n$. Then G is Hamiltonian if and only if $G + (u, v)$ is Hamiltonian

Задача 6 (*Dirac*)**.** Ако в прост граф G с $n \geq 3$ върха $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, то графът е хамилтонов.

Задача 7 (*Ore*)**.** Ако в прост граф G с $n \geq 3$ върха $\forall v \in V\ \forall u \in V, u \neq v, (u, v) \notin E : d(v) + d(u) \geq n$ (сборът от степените на всяка двойка несъседни върхове е поне n), то графът е хамилтонов.

Задача 8. Броят хамилтонови пътища в граф G и броят хамилтонови пътища в графа му допълнение $\overline{G}$ имат еднаква четност.

Задача 9. Let G be a graph of odd order such that G and $\overline{G}$ are connected. Prove that G is Eulerian if, and only if, $\overline{G}$ is Eulerian.

Задача 10. Prove that if a graph is regular with even order and odd size, then it is not Eulerian.

3 Ориентирани графи

Дефиниция 1 (*Ориентиран граф*)**.** Граф $G = (V, E)$, чиито ребра имат зададена посока, наричаме *ориентиран*, т.е. ребрата тук са нареден двойки от върхове: $E \subseteq (V \times V)_{\setminus\{(u,u)\ |\ u \in V\}}$, като последната част от условието зависи от това дали допускаме наличие на примки.

Дефиниция 2 (*DAG*)**.** *DAG* е съкращение за *ориентиран ацикличен граф (directed acyclic graph).*

Дефиниция 3 (*степен на връх в ориентиран граф*)**.** С $d(u), u \in V$ бележехме броя ребра, с които връх u е инцидентен. Тук е удобно да разширим тази дефиниция с брой "излизащи" ребра (изходна степен) $d(u)^+$ и брой "влизащи" ребра (входна степен) $d(u)^-$.

Лема 5. $\sum_{v \in V} d(u)^+ = |E| = \sum_{v \in V} d(u)^-$

Доказателство. Всяко ребро е броено точно веднъж като "влизащо" и точно веднъж като "излизащо". □

Лема 6. *Във всеки dag съществува връх* $v : d(v)^- = 0$ *(наричаме source, източник) и съществува връх* $u : d(u)^+ = 0$ *(наричаме sink, "сифон").*
(Намирате ли аналогията на тази лема на езика на релациите?)

Дефиниция 4 (*граф-турнир*)**.** *Граф-турнир* ще наричаме всеки ориентиран граф без примки, в който всяка двойка върхове е свързана с единствено ребро ($\forall v, u \in V : (v, u) \in E \oplus (u, v) \in E$).
Съвсем естествено *граф-турнир* (дори неназован експлицитно) може да срещнете в задачи, в които се говори за... турнири, мачове и прочее (макар контекстът да не се ограничава само до това).

Задача 11. В турнир участват шестима тенисисти, всеки играе срещу всеки точно веднъж. Да се докаже, че могат да се изберат двама така, че всеки от останалите е загубил от поне един от двамата. Докажете или опровергайте, че твърдението остава в сила за произволен брой хора n.

Лема 7 (*King Chicken theorem*)**.** *В турнир участват n човека, като всеки е играл срещу всеки точно веднъж. Казваме, че играч A е "пред" B, ако A е победил B или съществува трети играч C такъв, че A е победил C и C е победил B (забележете, че е възможно едновременно A да е "пред" B, но и обратно). Да се докаже, че съществува играч, който е "пред" всички останали.*

Забележка. В сила е и обратното, че има играч, който е "след" всички (загубил е пряко или косвено от тях).

Решение. Задачата може да се реши поне по два начина - по индукция с раглеждане на различни случаи (една идея по-тромаво решение) или с избор на екстремален елемент.
Моделираме турнира с ориентиран граф с върхове хората и ребра двойки от вида (v, u) (v е победил u). Разглеждаме връх, който е "пред" възможно най-много други (тоест максимизиращ броя на победените пряко или косвено). Нека такъв връх е v, като в турнира той е победил (има ребро с) върхове $u_1, u_2, ..., u_k$, а също така е победил (само) непряко върхове $w_1, w_2, ..., w_m$ (това ще рече $\forall j \leq m\ \exists i \leq k : (v, u_i) \in E \wedge (u_i, w_j) \in E$ *(*)*), изобщо v е "пред" върхове $u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m$.
Да допуснем обаче противното, че в тези върхове не участват всички останали $n - 1$ върха на

графа. Тоест има връх $v_0 : (v, v_0) \notin E \wedge \neg\exists i : (u_i, v_0) \in E$. Тук е моментът да ползваме, че за всеки два върха a, b в граф-турнир $(a, b) \in E \vee (b, a) \in E$, тоест горното условие е еквивалентно на: $(v_0, v) \in E \wedge \forall i \leq k : (v_0, u_i) \in E$. Но от това и от *(*)*: $\forall j \leq m\ \exists i \leq k : (v_0, u_i) \in E \wedge (u_i, w_j) \in E$, което означава, че връх v_0 е "пред" върхове $v, u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m$, но това означава, че v_0 е "пред" повече върхове, отколкото v, което е противоречие с допускането. Значи множеството $\{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_m\}$ съвпада с $V \backslash \{v\}$, тоест v е решение. ■

Лема 8 (*Redei's theorem*)**.** *Даден е "граф-турнир", да се докаже, че съществува хамилтонов път. При това броят на хамилтоновите пътища е нечетен.*

Задача 12. Ако G е свързан ненасочен граф с четен брой ребра, докажете, че ребрата му могат да бъдат насочени така, че от всеки връх да има четен брой "излизащи" ребра.

Задача 13. Докажете, че граф турнир има Хамилтонов цикъл тстк графът е силно свързан (от всеки връх до всеки има насочен път).

Задача 14 (Иран 2005)**.** Даден е граф-турнир G, чиито ребра са оцветени в два цвята - зелен и червен. Да се докаже, че съществува връх v такъв, че за всеки друг връх w съществува насочен път от v до w, който е едноцветен.