4. Функции

"(Не) функционира"

Март 2025

1 Общи задачи за функции

Дефиниция 1 (*функция*)**.** Функцията е двуместна релация $f \subseteq X \times Y$, която има свойството *функционалност*: $\forall x \in X \forall y_1, y_2 \in Y : (x\ f\ y_1) \land (x\ f\ y_2) \to y_1 = y_2$.

Дефиниция 2 (*тотална функция*)**.** Ако освен свойството *функционалност*, релация има и свойството *томалност*: $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in f$, то нея наричаме *тотална функция* (ако няма тоталност, то фунцкията е *частична*). Неформално казано: *фунцкионалност + тоталност = тотална фунцкия.*

Дефиниция 3 (*композиция на функции*)**.** Да напомним, че ако $g : A \to B$ и $f : B \to C$ са произволни фунцкии, вместо $f(g(x))$ можем да пишем $(f \circ g)(x)$.

Задача 1 (Семестриално КН 21)**.** Дадено е множество А и функция $h : A \to A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \to A$ и всяка функция $g : A \to A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$

Решение. От h сюрекция $\forall y \in A \exists x \in A : h(x) = y$. Тогава за произволно $y_0 \in A : f(y_0) = f(h(x_0)) = g(h(x_0)) = g(y_0)$, т.е $f = g$ ■

Задача 2. Ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е биекция и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е такава, че $g(x) = af(x) + b$, където $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ са константи, докажете, че g също е биекция. Остава ли твърдението в сила, ако $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?

Решение. Последователно проверяваме дали функцията е инекция и сюрекция:
инективност: нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$. Тогава от инективността на $f : f(x_1) \neq f(x_2)|.a(\neq 0) \Rightarrow af(x_1) \neq af(x_2)| + b \Rightarrow af(x_1) + b \neq af(x_2) + b \Leftrightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$. ✓

сюрективност: нека $y \in \mathbb{R}$ е произволно, тогава $\frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Понеже f е биекция, $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{y-b}{a} \Rightarrow g(x) = af(x) + b = a\frac{y-b}{a} + b = y$. ✓
От горните две следва, че g е биекция. ■

Ако обаче функциите са дефинирани само в цели числа нямаме гаранция, че $\frac{y-b}{a} \in \mathbb{Z}$, тоест сюрективността може да се счупи и тогава g няма да е биекция.

Задача 3 (Семестриално КН 23)**.** Нека $f, g : S \to S$, като $\forall x \in S : f(x) = g(f(f(x))) \land g(x) = f(g(f(x)))$. Да се докаже, че $f = g$ (т.е. $\forall x \in S : f(x) = g(x)$)

Решение. едно възможно решение е: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}ff = f\boldsymbol{gff}f = ff\boldsymbol{f} = f\boldsymbol{fgf}f = \boldsymbol{fgf} = g$

Лирическо отклонение (разяснение):
Оказва се, че до голяма степен объркването в тази задача идваше от сложния запис на вложените функции (многото букви и скоби). Затова първо ще олекотим този запис:

С нотацията от по-горе $g(f(f(x)))$ би изглеждало като $(g \circ f \circ f)(x)$, а $f(g(g(f(g(g(f(x)))))))$ ето така: $(f \circ g \circ g \circ f \circ g \circ g \circ f)(x)$. За целите на задачата можем да опуснем и $\circ$ и просто да представяме вложените функции като низ: $fggfggf$ (*разбира се, последното не е е общо приет запис).

Обратно към задачата. По условие имаме, че $\forall x \in S : f = gff$, както и $g = fgf$. На практика сведохме задачата до следното: имаме позволени две операции върху низ:

1. замени f с gff (или обратно)
2. замени g с fgf (или обратно)

Започваме с низ f, искаме с горните еквивалентни преобразувания да получим g, ето един възможен начин: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}\mathit{ff} = f\boldsymbol{g}\mathit{fff} = \mathit{f}\boldsymbol{ff} = \mathit{ff}\boldsymbol{g}\mathit{ff} = \boldsymbol{fgf} = g$ ■

Задача 4 (Семестриално КН 19). Ако $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ изпълнява $f(f(f(n))) = n\ \forall n \in \mathbb{N}$, следва ли, че f е биекция?

Решение. Да, ще покажем, че функцията е биекция:

- сюрективност: f е сюрекция, ако $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{N} : f(x) = y$. По условие за прозиволно $y_0 \in \mathbb{N}$: $f(f(f(y_0))) = y_0$, т.е. ако изберем $x_0 = f(f(y_0)), f(x_0) = y_0$, което и ни трябва □
- инективност: допсукаме противното, нека $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}, x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2) = y$, ,тогава $x_1 = f(f(f(x_1))) = f(f(y)) = f(f(f(x_2))) = x_2$, противоречие с допускането □

функцията е тотална, като е инекция и сюрекция, а оттук и биекция ■

Задача 5. Да се докаже, всяка монотонна функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ няма повече от изброимо много точки на прекъсване.

Задача 6 (ДР И 22). Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ изпълнява неравнествата: $f(x + 19) \leq f(x) + 19$ и $f(x + 94) \geq f(x) + 94$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ Докажете, че $f(x + 1) = f(x) + 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$

Решение. Нека x е произволно

- След 94-кратно прилагане на първото неравенство, получаваме: $f(x + 19.94) \leq f(x) + 19.94$
- След 19-кратно прилагане на първото неравенство, получаваме: $f(x + 94.19) \geq f(x) + 94.19$

Оттук $f(x + 19.94) = f(x) + 19.94$, но тогава във веригата от неравенства
$f(x+19.94) \geq f(x+18.94)+94 \geq f(x+17.94)+2.94 \geq ... \geq f(x)+19.94$ навсякъде имаме равенство, т.е. $f(x + 19.94) = f(x + 18.94) + 94 = f(x + 17.94) + 2.94 = ... = f(x) + 19.94$ *(1)*
Съвсем аналогично имаме и равенствата:
$f(x + 94.19) = f(x + 93.19) + 19 = f(x + 92.19) + 2.19 = ... = f(x) + 94.19$ *(2)*
Понеже x беше произволно, получаваме, че:
$\forall x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0 + 94) = f(x_0) + 94$ *(*)* и
$f(x_0 + 19) = f(x_0) + 19$ *(**)*
/формално това се получава при заместване на $x = x_0 - 18.94$ в *(1)* и $x = x_0 - 19.93$ в *(2)*, проверете/ Като ползваме (*) и (**): $\forall x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0+95) = f(x_0+5.19) = f(x_0)+5.19 = f(x)+95 = f(x) + 94 + 1 = (f(x) + 94) + 1 = f(x + 94) + 1,$ т.е. $f(x_0 + 95) = f(x_0 + 94) + 1$ и понеже x_0 е произволно, горното е еквиваленто на $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 1) = f(x) + 1$. С други думи, ако искаме да получим, че $f(a + 1) = f(a) + 1$ е изпълнено за конкретно a, то достатъчно е в равенството $f(x_0 + 95) = f(x_0 + 94) + 1$ да заместим x_0 с $(a - 94)$.
■

Задача 7 (*ДР). $f : S \to S$ е биекция, S е крайно. Да се докаже, че $\exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = f^{-1}(x)$, където $f^n(x) = f(f(...f(x)...))$ /n пъти/, $x \in S$.

Решение. Нека за начало $x_0 \in S$ е фиксиран елемент. Ще покажем, че $\exists n_0 \in \mathbb{N} : f^{n_0}(x_0) = f^{-1}(x_0)$ Разглеждаме редицата от елементи $f^{-1}(x_0)$, $x_0 = f^0(x_0)$, $f(x_0)$, $f(f(x_0)), ...\ f^k(x_0), ...$, т.е. редицата е $\{f^i(x_0)\}_{i=-1}^{\infty}$ Ясно е, че заради крайността на S в някакъв момент елемент от тази редица ще се повтори. Ще докажем, че първото такова повторение е именно на елемента $f^{-1}(x_0)$. Да допуснем

противното. Нека първият повтарящ се елемент е y и първите две позиции, на които се среща са $p_1 > -1, p_2 > -1$ (по-точно $y = f^{p_1}(x_0) = f^{p_2}(x_0)$), строгото неравенство дойде от допускането. Тогава $f^{p_1-1}(x_0) = f^{-1}(y) = f^{p_2-1}(x_0)$, но така намерихме нов повтарящ се елемент, а именно $f^{-1}(y)$, който обаче е по-напред в редицата. Това е противоречие с допускането, че сме взели първия повтарящ се. Ето защо първият повтарящ се елемент е тъкмо $f^{-1}(x_0)$, значи съществува $n_0 > -1 : f^{n_0}(x_0) = f^{-1}(x_0)$.
Тук има още една важна подробност, така конструираната редица е периодична с период $n_0 + 1$. Това ще рече, че след всеки $n_0 + 1$ прилагания на f от x_0 се връщаме пак там (т.е. $f^{n_0+1}(x_0) = x_0$); тогава след всеки $k.(n_0 + 1) - 1$ ще сме в $f^{-1}(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$.
Но x_0 беше произволно, така че $\forall x_i \exists n_i > -1 : f^{n_i}(x_i) = f^{-1}(x_i)$. Достатъчно е да изберем $n =$ НОК$(n_0 + 1, ..., n_i + 1, ...) - 1$. Така след $n + 1$ прилагания на f от кое да е x, ще сме обратно в него. Значи на n-тата стъпка ще сме в $f^{-1}(x)$ $\blacksquare$

Забележка. Може би нещата са малко по-ясни ако вместо условието $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in S : f^n(x) = f^{-1}(x)$ използваме еквивалентното $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in S : f(f^n(x)) = f(f^{-1}(x))$, което пък е същото като: $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in S : f^{n+1}(x) = x$.

Коментар. Защо условието за крайност е необходимо? Да допуснем, че условието остава в сила и при некрайни множества. Да разгледаме обаче следната функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{при } x \text{ четно} \\ 0, & \text{при } x = 1 \\ x - 2, & \text{иначе} \end{cases}$$

Лесно се проверява, че въпросната функция е биекция. Също така се вижда, че за което и да е $n : f^{n+1}(x) \neq x$ (т.е. исканото по условие не е валидно). Това е така, защото от дефиницията горе следва, че след прилагане/композиране на f краен брой пъти:
- Ако x е четно, то $f^{n+1}(x) = x + 2(n + 1) > x$;
- Ако x е нечетно, то $f^{n+1}(x)$ е или нечетно, по-малко от x, или 0, или четно число. И в трите случая се стига до нещо различно от началното число. $\square$

Задача 8 (*Румъния)**.** Ако $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция, да се докаже, че:

- $\exists a, b, c \in \mathbb{N}, a < b < c : f(a) + f(c) = 2f(b)$
- $\exists a, b, c \in \mathbb{N}, a + c = 2b : f(a) < f(b) < f(c)$

Решение.

- Нека фиксираме $a = 0$ и b е минималното естествено число такова, че $f(a) < f(b)$ (*защо има такова?*), да разгледаме $y = 2f(b) - f(a) > f(b)$; от сюрективността $\exists c \in \mathbb{N} : f(c) = y = 2f(b) - f(a)$. Забележете, че $f(c) = 2f(b) - f(a) > f(b) > f(a)$ *(*)*! Твърдим, че така избраните a, b, c изпълняват исканото: От избора наистина $2f(b) = f(a) + f(c)$, вярно ли е обаче, че $a = 0 < b < c$? Ако допуснем, че *c не* е $> b$, т.е. $0 = a < c \leq b$ *(! равенство $c = b$ отпада, защото $f(c) > f(b)$)*, то от *(*)*, $f(c) > f(a)$, но това е противоречие с допускането, че b е минималното число с такова свойство. Ето защо и $a < b < c$ $\blacksquare$ *Трябва ли ни тук инективността?*
- Ще сведем до първата подзадача. Разглеждаме обратната биекция f^{-1}. От показаното горе, съществуват $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N} : (a_0 < b_0 < c_0) \wedge (f^{-1}(a_0) + f^{-1}(c_0) = 2f^{-1}(b_0))$, ако положим $a = f^{-1}(a_0), b = f^{-1}(b_0), c = f^{-1}(c_0)$ (а оттук $a_0 = f(a), b_0 = f(b), c_0 = f(c)$), получаваме именно: $\exists a, b, c \in \mathbb{N} : (f(a) < f(b) < f(c)) \wedge (a + c = 2b)$ $\blacksquare$

Забележка. В задачата ползваме идея, наречена "принцип на крайния елемент", която се състои в избор на екстремален елемент (най-малък/най-голям по отношение на някакво свойство), което ни дава повече информация за работа с него и ни улеснява. Това се ползва често при графи.

Задача 9 (*)**.** Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които $f(n + 1) = f(f(n)) + 1$.

Решение. Лесно че вижда, че идентитетът $Id(n) = n$ е решение на функционалното уравнение. Обикновено в такива задачи тривиалните решения се оказват и единствени, ще покажем точно това.

монотонност: За начало ще покажем, че функцията е растяща. Разглеждаме множеството от естествени числа $\{f(n)|\ n \in \mathbb{N}\}$. В това множество винаги има най-малък елемент (формално причината е, че множеството естествените числа е добре наредимо относно релацията $\leq$) и нека тази стойност се достига за някое m_0, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} : f(m_0) \leq f(n)$ *(1)*. Да допуснем, че $m_0 \neq 0$, тогава $(m_0 - 1) \in \mathbb{N}$, откъдето по условие $f((m_0 - 1) + 1) = f(f(m_0 - 1)) + 1 \Rightarrow f(m_0) = f(f(m_0 - 1)) + 1$, но тогава $k := f(m_0 - 1) \in \mathbb{N}$ е такова, че $f(k) = f(m_0) - 1 < f(m_0)$, което е противоречие с избора на m_0, за което стойността на функцията е минимална, противоречие с *(1)*. Заключаваме, че $m_0 = 0$, нещо повече, това дава и единственост на m_0, значи неравенството в *(1)* е строго $\forall n > 0 : f(0) < f(n)$. Можем да повторим горното разсъждение, но този път избирайки такова $m_1 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, че $f(m_1) = min\{f(n)|n \geq 1\}$, т.е. $\forall n \geq 1 : f(m_1) < f(n)$. По същата причина, както и горе, се оказва, че $m_1 = 1$ и $\forall n > 1 : f(1) < f(n)$. Това може да бъде продължено по индукция, получаваме, че функцията е строго растяща.

С това задачата става относително лесна. По условие $\forall n \in \mathbb{N} : f(n+1) = f(f(n)) + 1 \Rightarrow f(f(n)) = f(n+1) - 1$, но от строгото нарастване на функцията $\forall m < n : f(m) < f(n) \leq f(n+1) - 1$, а $\forall m > n : f(m) \geq f(n+1) > f(n+1) - 1$. И в двата случая $f(m) \neq f(n+1) - 1$ $(\forall m \neq n)$. Но пък знаем, че при $m = f(n)$ е в сила $f(m) = f(n+1) - 1$, единствената възможност е $f(n) = n$, което, както упоменахме, наистина върши работа. ■

2 Приложение на фунцкиите при броене

**Полезно* (Броене с функции). В дискретната математика може би едно от основните приложения на функциите е свързано с броене на сложни обекти. По-конкрерно това броене може да се изразява в:

- сравняване на мощностите на множества; *(Каква информация за отношението между броя обекти в две множества ни дават инекцията/сюрекцията/биекцията?)*
- покзване на (не)четност на бройка обекти; *(Например можем да докажем, че елементи в множество са четен брой, без да ги броим, като разделим множеството на две подмножества с еднаква мощност и намерим биекция между тях)*

Дефиниция 4. Две множества A и B са равномощни ($|A| = |B|$), ако съществува биекция между тях.

Задача 10 (припомнете си от лекции)**.** Докажете, че множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$ са равномощни (т.е. намерете биекция между тях).

Решение. Ще покажем две възможни решения:

1 н.) Това е подробно покзавано на лекции, така че само ще напомним идеята.

0	2	5
1	4	
3		

Ако си представим наредените двойки естествени числа като клетки на таблица, биекцията с ествените числа ще е номерирането им по диагонали, както на картинката.
Коя функция реализира въпросната наредба?

2 н.)
Ще се възползваме от факта, че всяко естествено число (освен 0) може да се представи като произведение на нечетно число и степен на двойката по единствен начин (това задава тотална функция), например $12 = 3.2^2$, в общия случай $a = x.2^y$, където x е нечетно. Можем да означим $x.2^y$ като наредена двойка (x, y).

Обратно, вярно е и че всяка такава наредена двойка съответства на число (имаме сюрекция и инекция). Имаме обаче два малки проблема пред това да кажем че функцията, определена от горните разсъждения, е биекция:

1. Опускаме 0-та; както казахме, тя няма такова представяне. - Това може да се преодолее лесно, ако изместим всеки елемент с едно, т.е. $f(a-1) = (x, y)$, където $a = x.2^y$ $\square$

2. В момента биекцията ни не е между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}^2$, а между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_{odd} \times \mathbb{N}$ (нали x бяха нечетни). Това също можем да преодолеем лесно, като определим за първи елемент от наредената двойка не самото нечетното число x, както беше досега, а кое подред нечетното е то (нулевото нечетно е 1, първото - 3 и т.н)

В крайна сметка биективната ни функция трябва да изглежда горе-долу така: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $\forall a \in \mathbb{N}^+ : f(a-1) = (\lfloor \frac{x}{2} \rfloor, y)$, където $a = x.2^y$, а с $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ означаваме цялата част на x при деление на 2 (това всъщност ни дава кое подред е нечетното число).

Макар валидността на биекцията да не е фокусът на задачата, ето кратка аргументация:
инективност: Ако $a_1 \neq a_2$, като $a_1 = x_1 2^{y_1}, x_1 \in \mathbb{N}_{odd}$ и $a_2 = x_2 2^{y_2}, x_2 \in \mathbb{N}_{odd}$, то $(\lfloor \frac{x_1}{2} \rfloor, y_1) \neq (\lfloor \frac{x_2}{x} \rfloor, y_2)$. ✓
сюрективност: Нека $(v, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, разглеждаме $n = (2v+1)2^w - 1$, по дефиницията горе $f(n) = f(2^w(2v+1) - 1) = (\lfloor \frac{2v+1}{2} \rfloor, w) = (v, w)$ (просто направихме нещата наобратно). ✓

От инективност и сюрективност следва биективност. ■

Задача 11. Да се намери биекция:

- $f : [0, 1] \to (0, 1]$
- $f : [0, 1] \to (0, 1)$
- (*) $f : [0, 1) \to [0, +\infty)$
- $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to (-\infty, +\infty)$

Решение.

- *Идея:* аналогия с хотела на Хилберт тук би била подходяща (представете си, че 0 е този допълнителен човек). Биекцията е взаимно еднозначно съответствие между два интервала, тоест на всяко число от първия търсим "другарче" от втория. Би било удобно, ако въпросното "другарче" е самото число. За 0 обаче това би било невъзможно (0-та не е част от втория интервал). Затова можем да подходим така: "другарчето" на 0 става $\frac{1}{2}$. Но тогава $\frac{1}{2}$ от първия интервал ще остане без другарче от втория, нищо, връзваме го с $\frac{1}{4}$. Но тогава пък $\frac{1}{4}$ от първия интервал ще трябва да вържем с нещо друго, например $\frac{1}{8}$. Този процес можем да продължим до безкрай, така всяко от числата в тази безкрайна последователност все пак ще бъде съотнесено към някое друго. Всяко от останалите числа от първия интервал пък ще вържем със самото себе си (например $\frac{1}{3}$ от първия интервал остава в двойка с $\frac{1}{3}$ от втория).

  Сега формално: дефинираме

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } x = 0 \\ \frac{1}{2^{k+1}}, & \text{при } x = \frac{1}{2^k}, k \geq 1 \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

  инективност на f: достатъчно е да покажем, че трите случая от дефиницията са независими, т.е. дават различни стойности.Нека $x_1 \neq x_2$.
  - При $x_1 = 0 : f(x_1) = \frac{1}{2}$. Ако допуснем, че е възможно и $f(x_2) = f(x_1) = \frac{1}{2}$, то трябва или да сме във във втория случай (но тогава ще излезе, че $f(x_2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow k = 0$, което би било в противоречие с дефиницията), или сме в третия случай и $\frac{1}{2} = f(x_2) = x_2$ (но тогава въобще нямаше да сме в случай три). Значи такъв сценарий няма, това показва, че първият случай от дефиницията е независим от другите два, при тях не може да се получи стойност $\frac{1}{2}$.

- По подобни причини вторият и третия случай от дефиницията на f са независими. В единия $f(x)$ е винаги от вида $\frac{1}{2^m}$, а във втория $f(x) = x$, което пък винаги е различно от $\frac{1}{2^m}$, щом сме в третия случай. ✓
сюрективност на f: ако y е от вида $\frac{1}{2^m}$, то от дефиницията има такова x (при $m = 1, x = 0$ $x = \frac{1}{2^{m-1}}$), че $f(x) = y$. В останалите случаи $f(y) = y$. И при двата варианта y е "покрито". ✓

Имаме инективност и сюрективност, значи f наистина е биекция. ■

- Доказателството повтаря това на горната подзадача, като единствено функцията трябва да е по-внимателно дефинирана, един добър вариант е:
  - 0 отива в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ в $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ в $\frac{1}{8}$ и т.н.
  - 1 отива в $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ в $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$ в $\frac{1}{27}$ и т.н.
  - всички останали числа отиват в себе си;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } x = 0 \\ \frac{1}{2^{k+1}}, & \text{при } x = \frac{1}{2^k}, k \geq 1 \\ \frac{1}{3^{k+1}}, & \text{при } x = \frac{1}{3^k}, k \geq 0 \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Можем първо да намерим биекция $g : (0,1) \to (0,+\infty)$. Ето два възможни начина:
1 н.) Дефинираме $g(x) = \frac{1}{x} - 1$. В такъв случай g е сюрекция, защото за произволно $y_0 \in (0,+\infty)$ може да изберем $x_0 = \frac{1}{y_0+1} \in (0,1) : g(x_0) = \frac{1}{x_0} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{y_0+1}} - 1 = y_0 + 1 - 1 = y_0$. Също така при $x_1 \neq x_2 : g(x_1) \neq g(x_2)$, значи е и инекция.

  2 н. /предложи А. Иванов/) Дефинираме $g : (0,1) \to (0,+\infty)$ така, че $g(x) = tg(x\frac{\pi}{2})$. Понеже $x\frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2})$, в който интервал tg е биективна функция (с кодомейн тъкмо $(0,+\infty)$).

  Понеже по условие интервалите бяха затворени в 0, а ние дефинирахме биекцията g за отворени, то достатъчно да додефинираме $g(0) = 0$. ■

- Ако не се изискваше явна биекция, а само доказателство за равномощност, тогава можеше просто да кажем, че $(-1,1) \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq (-\infty,+\infty)$ и да ползваме $|(-1,1)| = |(-\infty,+\infty)|$ като следствие от предната подточка. Значи и $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ще има същата мощност като тях (следва от *Теорема за междинното множество*, която пък е резултат от *Теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн*).
Едно възможна биекция е следната: първо правим биекция h между $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ по начина, познат от втората подточка. Сега ни трябва биекция между $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $(-\infty,+\infty)$. Ами всъщност функцията $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty)$ прави точно такава биекция. В крайна сметка решението е функцията композиция $tg \circ h$. ■

Задача 12 (*Диагонален метод на Кантор*)**.** Докажете, че множеството $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *не* е изброимо, т.е. не съществува инекция $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ (а оттук и биекция).

Решение. Да допуснем, че такава инекция f съществува. Нека $\mathscr{K} := \{f(S) \mid S \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \wedge f(S) \notin S\}$, което е добре дефинирано множество. Тогава $\mathscr{K} \subseteq \mathbb{N}, f(\mathscr{K}) \in \mathbb{N}$ и $f(\mathscr{K}) \in \mathscr{K}$ тстк $\exists S \subseteq \mathbb{N} : f(\mathscr{K}) = f(S) \wedge f(\mathscr{K}) \notin S$, но от инективността на $f, \exists! S \subseteq \mathbb{N} : f(S) = f(\mathscr{K})$ и това е именно $\mathscr{K}$. Тогава $f(\mathscr{K}) \in \mathscr{K}$ тстк $f(\mathscr{K}) \notin \mathscr{K}$, противоречие. ■

Забележка. Тук нарочно даваме малко по-формално обяснение на диагонализацията (без да минаваме през геометричната му аналогия с таблица).

Задача 13 (**Теорема на Кантор*, припомнете си от лекции)**.** За кое да е множеството A не съществува сюрекция $g : A \to \mathscr{P}(A)$.

Решение. Допускаме противното, нека такава сюрекция g съществува и нека $S := \{a \in A | a \notin g(a)\}$ Тъй като $S \subseteq A$, то $S \in \mathscr{P}(A) \Rightarrow$ от допускането $\exists x \in A : g(x) = S$

- ако предположим, че $x \in S$, получаваме противоречие с дефиницията на S (според нея $x \in S \Rightarrow x \notin g(x) = S$) ✓

- ако предположим, че $x \notin S$, получаваме противоречие с дефиницията на S (според нея $x \notin S \Rightarrow x \in g(x) = S$) ✓

И в двата случая получихме противоречие, т.е. такова животно няма. ∎

Следствие. Горното ни дава, че $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Задача 14. Докажете, че множеството ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизброимо.

Решение. Достатъчно е да разгледаме само функциите от вида ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{f | f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$. Ако те са неизброимо много, то и първоначалните са.
1 н.) Ползвайте идеята от диагоналния метод на Кантор, за да докажете, че са неизброимо много.
2 н.) Покажете (например като дефинирате биекция), че всяка такава функция съответства на едно подмножество на естествените числа ($f(x) = 1$ тстк x участва в подмножеството и 0 иначе), но $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ е неизброимо множество. □

Задача 15. Нека $|A_1| = |A_2|$ и $|B_1| = |B_2|$. Докажете, че $|\{f | f : A_1 \to B_1\}| = |\{f | f : A_2 \to B_2\}|$

Решение. Щом $|A_1| = |A_2|$, то съществува биекция $g_1 : A_1 \to A_2$. Аналогично съществува биекция $g_2 : B_1 \to B_2$. Дефинираме функция $h : \{f_1 | f_1 : A_1 \to B_1\} \to \{f_2 | f_2 : A_2 \to B_2\}$, като $h(f_1) = f_2$, където f_2 е дефинирана така: $\forall x \in A_1 : f_2(g_1(x)) = g_2(f_1(x))$ Тук трябва да се направят няколко уточнения (повечето ясни):

- така определените функции f_2 са добре дефинирани
- така определените функции f_2 са тотални (заради g_1 биекция)
- така определената h е добре дефинирана
- така определената h е инекция (ако две функции се различават и образите им ще, проверете)

Инективността на h ни дава, че $|\{f | f : A_1 \to B_1\}| \leq |\{f | f : A_2 \to B_2\}|$. Абсолютно същият аргумент обаче може да се направи и наобратно, откъдето $|\{f | f : A_1 \to B_1\}| \geq |\{f | f : A_2 \to B_2\}|$, или в крайна сметка двете са равномощни ∎

Коментар. Обикновено когато искаме да покажем, че две множества са равномощни, се опитваме да намерим биекция между тях. Тук бяхме умни и си спестихме малко работа, като намерихме сюрекция, което ни дава, че броят елементи в едното $\geq$ от този в другото. Но понеже в конкретния случай множествата са практически неразличими, същото може да се направи и наобратно по аналогичен начин, т.е. броят елементи във второто множество е $\geq$ от този в първото. Е значи са равни.

**Въпрос.* Ако в условието изрично уточним, че функциите f може да са частични (а не тотални, както по-горе), как това променя решението?

Задача 16. Нека A е множество. Да се докаже, че броят на релациите на еквивалентност $R \subseteq A \times A$ е равен на броя на разбиванията на A.

Решение. Ще докажем исканото, като намерим биекция между множеството от релации върху A^2 и това от разбивания на A. Разглеждаме множеството от всички разбивания на $A, \mathscr{F} := \{F | F$ е разбиване на $A\}$ и това от всички релации на еквивалентност $\mathscr{R} := \{R | R \subseteq A^2 \wedge R$ е релация на еквивалентност $\}$ (строго формално двете са множества, защото първото може да се получи по аксиома за отделянето от $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$, а второто съответно чрез отделяне от $\mathscr{P}(A \times A)$).
Дефинираме $h : \mathscr{F} \to \mathscr{R}$ по следния начин: $h(F) := \{(a, b) | \exists S \in F : a \in S \wedge b \in S\}$.

коректност на дефиницията: Ясно е, че така дефинираната релация h е и функция (на всяко разбиване съответства единствена релация). Трябва обаче да гарантираме, че функцията наистина има кодомейн множеството, което очакваме, т.е. да проверим дали наистина $h(F) \in \mathscr{R}, \forall F \in \mathscr{F}$. Нека F е произволно разбиване, проверяваме дали релацията $h(F)$ (за краткост ще бележим с R) има трите свойства:

- *рефлексивност:* Нека $a \in A$ е произволно, от F - разбиване $\exists S \in F : a \in S \Rightarrow (a, a) \in R$. ✓
- *симетричност:* Нека $a, b \in A, a \neq b$ са произволни и $aRb \Rightarrow \exists S \in F : a \in S \wedge b \in S \Rightarrow bRa$. ✓
- *транзитивност:* Нека $a, b, c \in A$ са произволни и $aRb \wedge bRc \Rightarrow (\exists S_1 \in F : a, b \in S_1) \wedge (\exists S_2 \in F : b, c \in S_2)$, но понеже F е разбиване и $b \in S_1 \wedge b \in S_2 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow \exists S \in F : a, c \in S \Rightarrow aRc$. ✓

Забележка. Всъщност рефлексивността и симетричността могат да се докажат едновременно, като се премахне условието $a \neq b$ в доказателството за симетричност.

инективност: Нека $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ са различни разбивания, б.о.о $\exists S_1 \in F_1 : S_1 \notin F_2$. Нека $a \in S_1$ е произволен. Понеже F_2 е разбиване, $\exists S_2 \in F_2 : a \in S_2$. От допускането, че $S_1 \notin F_2 \Rightarrow S_1 \neq S_2$. Тогава съществува елемент b, който е в едното множество, но не е в другото, б.о.о. $b \in S_1 \wedge b \notin S_2 \Rightarrow (a, b) \in h(F_1) \wedge (a, b) \notin h(F_2) \Rightarrow h(F_1) \neq h(F_2)$. ✓

сюрективност: Нека сега $R \in \mathscr{R}$ е произволна релация на еквивалентност. Разглеждаме разбиването, определено от класовете ѝ на еквивалентност (което вече е доказвано) $F := \{[a]_R | a \in A\}$. Ще покажем, че $h(F) = R$: $(a, b) \in h(F) \Leftrightarrow \exists S \in F : a, b \in S \Leftrightarrow a \in [b]_R \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R$. ✓

Намерихме биекция h между $\mathscr{F}$ и $\mathscr{R}$, значи множествата са равномощни. ■

Задача 17 (*INMO 2013)**.** Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и T е броят непразни подмножества S на $= \{1, 2, ..., n\}$ такива, че средното аритметично на елементите в S е цяло число. Да се докаже, че $T - n$ е четно

Решение. Ще бележим средното аритметично на множество S с $\overline{S}$. Ясно е, че всички едноелементни подмножества на изпълняват условието $\overline{S}$ да е цяло - те са n на брой.

Наблюдение 1: за което и да е подмножество S: $\overline{S}$ не надвишава n - нормално, все пак елементите в S са $\leq n$ $\square$

Наблюдение 2:
- Ако за някое подмножество S, изпълняващо условието, е вярно, че $\overline{S} \notin S$, то ако $S' = S \cup \{\overline{S}\}$, $\overline{S'}$ също е цяло, т.е. и S' изпълнява условието. *проверете*
- Обратното също е вярно, ако за някое подмножество S, изпълняващо условието, е вярно, че $\overline{S} \in S$, то ако $S' = S \backslash \{\overline{S}\}$, $\overline{S'}$ също е цяло $\square$

Забележка. Казано по-просто, прибавянето и махането на средното аритметично (стига то да е цяло число) не променя средното аритметично на множеството;

Сега можем да разгледаме два вида множества:

1. тези, които имат $\overline{S}$ цяло число, като то се съдържа в тях,
   $A' = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число и $\overline{S} \in S\}$
2. тези, които имат $\overline{S}$ цяло число, като то не се съдържа в тях,
   $B = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число и $\overline{S} \notin S\}$

Ясно е, че търсената бройка $T = |A'| + |B|$
Понеже вече преброихме едноелементните подмножества отделно (напомняме, че те винаги изпълняват условието), а те се съдържат в A', ще ги пропуснем, така че нека
$A = \{S \subseteq M | \overline{S}$ е цяло число, $\overline{S} \in S$ и $|S| > 1\}$

Тоест $T = |A'| + |B| = n + |A| + |B|$ (n на брой са едноелементните), а оттук $T - n = |A| + |B|$

От *наблюдение 2* забелязваме, че съществува взаимно еднозначно отношение /биекция/ между елементите на A и B, (формално това се получава с дефиниране на функция $h : A \to B$ такава, че $h(S) = S \backslash \{\overline{S}\}$), откъдето $|A| = |B|$ и $T - n = |A| + |B| = 2|A|$ е четно ■

Задача 18 (*Контролно МОМ 2006)**.** Дадено е просто число $p \geq 3$ и множеството $A = \{1, 2, ..., p - 1\}$. Да се намери броят на подмножествата на A със сума от елементите, кратна на p

Решение (Е. Кайряков).

Дефиниция 5. Вместо остатък "при деление на p" често за краткост се ползва изразът остатък "по модул p";

Тази задача е пример за това как добавянето (или премахването) на елемент от множество ни помага да намерим подходящата биекция. В случая е по-лесно да решим задачата с множеството $B = \{1, 2, ..., p-1, p\}$ вместо с A и после да видим как следва нашата задача от решената.
Разглеждаме произволно подмножество $X = \{a_1, a_2, ..., a_s\}, X \neq \varnothing, B$ със сбор на елементите си, кратен на p. На всяко такова множество съпоставяме всички множества, получени от него с "транслация" на елементите му последователно с $1, 2, ..., p-1$ по модул p (т.е. прибавяме i модулно към всеки елемент). Така получаваме групиране на подмножествата в "пакети", всеки съдържащ множествата:
$X = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$
$X_1 = \{a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_s + 1\}$
$\cdots$
$X_{p-1} = \{a_1 + (p-1), a_2 + (p-1), ..., a_s + (p-1)\}$

Забележка. Да напомним, че в горните множества реално прибавянето на 1, ... p-1 е модулно, т.е. ако сумата стане повече от p, прехвърля обратно на 1. Така всички множества от групата остават подмножества на B

Вижда се, че във всяка група/пакет всеки две множества имат суми от елементите, даващи различен остатък по модул p. Иначе казано образуват пълна система остатъци по модул p и от тях *винаги точно едно има сума, кратна на p.*
Ето защо е достатъчно да намерим броя групи, той е равен на броя на търсените множества (тоест съществува биекция между тях).Множествата $\varnothing, B$ не са в никоя група, но също изпълняват условието, прибавяме още 2:
$\frac{1}{p}[\binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p-1}] = \frac{2^p - 2}{p} + 2$
Не забравяме, че в момента решаваме задачата за множество B, а не A. Понеже наличието на p не променя кратността на p, то всяко множество от оригиналната задача реално е броено 2 пъти, разделяме на 2: $\frac{2^{p-1} - 1}{p} + 1$. ■

3 Геометрично приложение на биекциите

Коментар. Тук ще илюстрираме малко по-нетривиално приложение на биекциите, ще направим биекция между геометрични обекти

Задача 19. Да се направи биекция между:

- затворен интервал (например [0,1]) и отсечка
- полузатворен интервал (например [0,1)) и лъч
- отворен интервал (например (0,1)) и права

Решение. Педантично ще направим само първата подточка, другите са аналогични:

- Нека отсечката е AB. Дефинираме $f : AB \to [0, 1]$ (тук е добре да си мислим за отсечката като множество от точки) такава, че $f(P) = \frac{|AP|}{|AB|}$, P е точка от отсечката.
  инективност: понеже знаменателят $|AB|$ е константа, то стойността зависи само от числителя. Тогава имаме, че ако точка P_1 е различна от точка P_2, то $AP_1 \neq AP_2 \Rightarrow f(P_1) \neq f(P_2)$. ✓
  сюрективност: Нека $k \in [0, 1]$ Тогава съществува точка P от отсечката $AB : |AP| = k * |AB|$ (на практика коефициентът k показва каква част от отсечката е "взета", например при $k = 1$ AP ще е цялата отсечка). Оттук по дефиниция $f(P) = k$, получихме и сюрективност. ■

- Разглеждаме лъча, произволна точка от него можем да характеризираме спрямо разстоянието ѝ от началото му (както при отсечки). Това би ни дало биекция на лъча и интервала $[0, +\infty)$ (понеже разстоянията на точки спрямо началото на лъча варират в този интервал). Имайки тази биекция, можем да ползваме вече показаната биекция в *задача 11* между $[0, +\infty)$ и $[0, 1)$. Търсената по условие биекция е композиция на вече споменатите две. ■

- Тук можем да използваме горната подточка. Фиксираме произволна точка от правата, която ще служи за начало. Така правата се разделя на два лъча. Вече знаем, че можем да направим биекция между единия лъч и интервала $[0, +\infty)$. Аналогично можем да направим такава и между втория лъч и интервала $(-\infty, 0]$. Всъщност обединението на тези две непресичащи се биекции задава биекцията между целия интервал и цялата права. ■

Задача 20. Да се направи биекция между две отсечки

Решение. Ще направим биекция от точките от едната права с тези от другата. Нека те са съответно AB и CD, дефинираме $h : AB \to CD$, като за $P \in AB : h(P) = C + \frac{|AP|}{|AB|}(D - C) = (1 - k)C + kD$, където $k = \frac{|AP|}{|AB|}$.
Малко геометрични уточнения: ако C, D са две точки в пространството, то всяка точка от *правата* с краища тях може да се представи във вида $kD + (1 - k)C$, като тук умножаването със скалар (число) и събирането на точки на практика са покоординатни (все едно точката е вектор). Ако сложим допълнителното изискване за коефициента $k \in [0, 1]$, то тогава ограничаваме точките, получени по горната "формула", само до тези от *отсечката* CD, като тогава говорим за *изпъкнала комбинация* на точките C, D.
Идеята е, че $h(P) = \frac{|AP|}{|AB|}(D - C)$ определя еднозначно точка от отсечката CD, като очевидно за $P_1 \neq P_2 : h(P_1) = \frac{|AP_1|}{|AB|}(D - C) \neq \frac{|AP_2|}{|AB|}(D - C) = h(P_2)$ (инективност), също и всяка точка от кодомейна отсечката CD има такова представяне $C + k(D - C) = C + \frac{|AP_0|}{|AB|}(D - C)$ за подходящо P_0 (стига $k \in [0, 1]$, както уточнихме) $\Rightarrow$ и сюрективност. ■

Коментар. Забележете, че на практика направихме биекция между затоврени интервали, но геометрично (затвореният интервал си е един вид отсечка, както видяхме и в горната задача)

Задача 21. Да се намери биекция между произволни две затворени криви в $\mathbb{R}^2$

Упътване. Изберете произволна точка от кривата и "развийте" кривата, така че да стане отсечка, сега ползваме горната задача.

Задача 22 (*). Да се намери биекция между:

- отсечка и лъч
- отсечка и права
- лъч и права

Идея. Възможни са чисто геометрични решения, но задачата може да се реши, като се използват резултатите от *задачи 11 и 19* и първо се направят биекции на геометричните обекти с интервали, а после се направи биекция между получените интервали.

Коментар. Тук пък геометрично правим биекция между отворен/затоврен/полузатоврен интервал, както например беше при [0,1] и (0,1).

#Бонус

Задача 1 Докажете, че $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$, като намерите явна биекция между множествата.

Дефиниция (монотонна функция). За фиксирано множество A и функция $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ казваме, че f е монотонна, ако $(\forall X_1 \subseteq A)(\forall X_2 \subseteq A)[X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2)]$.

Дефиниция (неподвижна точка). Нека $f : A \to B$. Казваме, че x е неподвижна точка за f, ако $f(x) = x$.

Задача 2 (**Knaster-Tarski theorem*). Нека $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ е монотонна функция. Тогава f има най-малка неподвижна точка X_0 и най-голяма неподвижна точка X_1, т.е. $f(X_0) = X_0$, $f(X_1) = X_1$ и $(\forall X \subseteq A)[f(X) = X \to X_0 \subseteq X \subseteq X_1]$.

Решение. Ще докажем само съществуването на най-малка неподвижна точка, доказателството за най-голяма е аналогично. Макар функцията да е върху подмножества на A, за краткост изложението ги наричаме *точки*.
Да напомним, че $f(X) = X \Leftrightarrow f(X) \subseteq X \wedge X \subseteq f(X)$. Дефинираме множеството от кандидат-неподвижни точки - тези, които изпълняват първото включване: $T := \{Y | Y \subseteq A \wedge f(Y) \subseteq Y\}$. Да уточним, че това множество е непразно, защото $A \subseteq A \wedge f(A) \subseteq A \Rightarrow A \in T$. Тогава можем да разгледаме унарното сечение $X := \bigcap T$.

- Нека $Y \in T$ е произволно, значи $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y) \subseteq Y$, като първото включване следва от монотонността, а второто от дефиницията на точките в T. Но горните са изпълнени за всяко $Y \in T \Rightarrow f(X) \subseteq \bigcap T = X$. *(1)*.

- От монотонността и $f(X) \subseteq X$ следва $f(f(X)) \subseteq f(X) \Rightarrow f(X) \in T \Rightarrow X = \bigcap T \subseteq f(X)$. *(2)*

От *(1)* и *(2)* следва $f(X) = X$, т.е. е неподвижна точка. При това всяка неподвижна точка на функцията се съдържа в T, а $\forall Y \in T : X \subseteq Y$, значи X е и най-малка сред неподвижните точки. ■

Задача 3 (**Schröder-Bernstein theorem*). Ако съществуват инективни функции $f : A \to B$ и $g : B \to A$, то множествата A и B са равномощни (тоест съществува биекция между тях).