7. Комбинаторика

"По колко начина могат да те скъсат?"

Юли 2024

1 Задачи с комбинаторни разсъждения

Идея. В задачите с "комбинаторни съображения/разсъждения" обикновено ползваме принципа на "двукратното броене", т.е. се стремим да представим едно и също нещо по два различни начина.

Свойство 1.1 (Правило на Паскал)**.**

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m-1}$$

Свойство 1.2 (Нютонов бином)**.** /Често се полват частните случаи с $y = 1, x = 1$ и 2/

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Задача 1 (Vandermonde's identity)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Решение. Имаме група от m мъже и n жени.
- Тогава лявата страна $\binom{m+n}{k}$ показва по колко начина можем да изберем k души от тях;
- Ако от избраните k i са мъже, то $k - i$ са жени. От принципа на умножението изборът може да стане по $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина. Понеже i може да приема прозиволни стойности от 0 до k (т.е. от избраните k броят мъже варира от 0 до k включително), то по общо $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина можем да изберем k души от всички $n + m$, което е именно изразът от дясната част на равенството. ■

Задача 2 (Hockey-stick identity)**.** Ако $r \leq n$ и $r, n \in \mathbb{N}$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина $n + 1$ и точно $r + 1$ единици в записа си. Те са точно $\binom{n+1}{r+1}$ на брой.
Да погледнем от друг ъгъл, последната единица във всеки такъв низ може да стои на всяка позиция i от r до n включително (започваме броенето от 0). Същевременно, щом тя е на позиция i, то преди нея има i на брой цифри, като точно r от тях са единици, а след нея има само нули. При фиксирано i низовете от този вид са точно $\binom{i}{r}$, тогава общата бройка е именно $\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r}$. ■

Задача 3. Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

Решение. Задачата става сравнително проста, ако я разделим на две части:

- $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$
- $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, откъдето и $\binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2$

Оттук директно следва исканото: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. ■
Но да докажем двете равенства поотделно:

- имаме група от $2n+2$ предмета, като сме си харесали два от тях (да ги наречем "специални"). По колко начина можем да вземем $n+1$ предмета (половината), редът на взимане не е от значение?
  LHS (лявата страна): $n+1$ предмета от общо $2n+2$ можем да изберем по $\binom{2n+2}{n+1}$ начина.
  RHS (дясната страна): спонехаме, че имаме два "специални" предмета, тогава имаме 3 случая за избор на $n+1$ предмета:
  - да вземем и двата, както и още $n-1$ от останалите;
  - да вземем точно 1 от тях (може да стане по два начина) и още n от останалите;
  - да не вземем никой от тях, а $n+1$ от останалите;
  тогава имаме общо $\binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$ начина.

  Както се вижда, двете страни броят едно и също нещо по два различни начина. □

- Равенството $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ би трябвало да е показвано на лекции, но нека го докажем. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Разглеждаме множество от $2n$ предмета, от тях искаме да изберем n. Нека сега разделим по произволен начин предметите на две равни групи (от по n), Ако от n-те избрани k са взети от първата група, то $n-k$ са от втората, двата избора са независими, значи при фиксирано k имаме $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ начина (принцип на умножението). k е произволно, така че сумираме по него $\Rightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. □

Задача 4 (Поправителен 2024)**.** Ако $n, m, k \in \mathbb{N}$ и $k+m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m} = \binom{n}{k+m}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина n и точно $k+m$ единици в записа си. Ясно е, че те са $\binom{n}{k+m}$ на брой.
Да се спрем върху един такъв низ, нека k-тата единица в записа му е на позиция i, започваме броенето от 1. Тогава вляво от тази нея има $i-1$ позиции, като на точно $k-1$ тях има цифра 1, възможните такива префикси са $\binom{i-1}{k-1}$ на брой. Вдясно от позиция i има $n-i$ цифри, като точно m от тях са 1-ци, възможните такива суфикси са $\binom{n-i}{m}$.
Понеже суфиксите и префиксите са независими, а $k \leq i \leq n-m$, то общо има $\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i}{m}$ такива низа. ■

Задача 5 (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

Решение. Разглеждаме $2n$ съпружески двойки (общо $4n$ човека). От тях искаме да изберем $2n$ човека. Ясно е, че това може да се случи по $\binom{4n}{2n}$ начина, да дадем обаче и алтернативното преброяване: От всяка съпружеска двойка в избраните може да не присъства човек, да присътва точно един или да присъстват и двамата. Нека k са двойките, които нямат представител измежду избраните,

l да са тези с двама представители и съответно $2n - k - l$ са двойките с точно един представител в избраните.

Наблюдение: Понеже искаме $0.k + 2.l + 1.(2n - k - l) = 2n \Rightarrow 2n - k + l = 2n \Rightarrow k = l$.

Сега да преброим: за фиксирано k по $\binom{2n}{k+l} = \binom{2n}{2k}$ начина можем да изеберем двойките с по 0 или 2 представители (съответно всички останалите ще са с по 1). От тези $2k$ по $\binom{k+l}{k} = \binom{2k}{k}$ начина избираме от кои k двойки няма да има човек. Уточнихме, че от останалите $2n - k - l = 2n - 2k$ двойки ще има точно по 1 представител, такъв можем да изберем по 2 начина за всяка, или общо 2^{2n-2k} начина.
Понеже трите избора са независими, а k е произволно, имаме общо $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}$ начина за избор на $2n$ души. ■

Задача 6 (*)**.** Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с $m + n + 1$ цифри. Те са 2^{m+n+1} на брой. Ще покажем, че лявата страна брои същото:
Можем да разделим въпросните низове на две групи: такива с $\geq m+1$ единици в записа си и такива с $< m + 1$ единици в записа си. Забележете, че последното може да се изкаже и по друг начин - низове с $\geq n + 1$ нули в записа си.
За начало да преброим тези от първи вид. Казахме, че те имат $\geq m + 1$ единици, нека $(m + 1)$-вата единица е на позиция p, започвайки броенето от 0. Ясно е, че $p \geq m$ (все пак преди нея има още m единици), както и $p \leq m + n$. Нека $k := p - m \Rightarrow 0 \leq k \leq n$. Понеже искаме *поне* k 1-ци, то след позиция p цифрите в записа на низа могат да са произволни, все пак вече сме "гарантирали" исканата бройка, т.е. имаме $2^{n+m-p} = 2^{n-k}$ варианта за тях. Колкото до цифрите на позиции от 0 до $p - 1$ знаем, че измежду тях има точно m 1-ци, имаме $\binom{p}{m} = \binom{m+k}{m} = \binom{m+k}{k}$ варианта. k може да приема различни стойности, в крайна сметка низовете от първи вид са общо: $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k}2^{n-k}$.
За тези от втори вид (с $< m$ единици) дадохме алтернативното "с $\geq n+1$ нули", което свежда нещата до вече решената задача. Аналогично на предното, низвоете от втори вид са: $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k}2^{m-k}$.
Всеки двоичен низ попада в точно една от двете посочени групи, така че общата бройка е именно сумата: $\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k}2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k}2^{m-k}$ ■

Задача 7 (Семестриално КН 2024)**.** Ако $k \leq m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-i}{m} = \binom{n-k}{m-k}$$

Решение. Нека $A = \{1,\ 2,\ \dots\ n\}$ е опорно множество. Интересуваме се колко са m-елементите подмножества $B \subseteq A$, които съдържат числата от 1 до k. От една страна, това може да се сметне така: елементите 1 до k са "фиксирани" (винаги са имежду m-те), така че имаме $\binom{n-k}{m-k}$ такива множества.
Да намерим същата бройка с метода за включване и изключване: Всички m-елементни подмножества са $\binom{n}{m}$. От тях обаче трябва да извадим неотговарящите на условието, а именно тези, от които липсва *поне* 1 от числата в интервала 1 до k. Зебележете обаче, че бройката пак не е точна, така бихме извадили няколко пъти множествата, от които отсъства повече от едно от числата в интервала 1 до k. Става ясно, че трябва да ползваме inclusion-exclusion, точната бройка ще е:
$\sum_{i=0}^{k}$ *(брой на m-елементните подмножества, които НЕ съдържат поне i от числата $1,\ 2,\ \dots\ k$).*

За фиксирано i такива множества има $\binom{k}{i}\binom{n-i}{m}$ (числата, които няма да присъстват, можем да изберем по $\binom{k}{i}$ начина, а самите m-елементни подмножества B, които не ги съдържат, са $\binom{n-i}{m}$).
Заместваме в сумата и получаваме лявата част на даденото по условие. ■

2 Комбинаторни конфигурации

3 The 12 fold way