Графи

1 част

"Графи-ти"

4 февруари 2026 г.

Полезно. Задачите с графи са много ранообразни и често една задача може да се реши по няколко начина (така че експипементирайте). Има обаче няколко основни подхода при решаването, които вече сме виждали, но тук още по-често ще са ни от полза:
- *принцип на "крайния елемент" (избор на екстремален елемент)*
- *индукция*
- *принцип на Дирихле*

Съвет. Доказвайте и лемите наред със задачите, те също са добро упражнение;

1 Пътища, цикли, степен на връх

Лема 1. *Нека G е граф с n върха, m ребра и степени на върховете $d_1, ..., d_n$. Докажете, че $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.*

Доказателство. Всяко ребро има два края (инцидентно е с два върха). Затова в сумата то е преброено точно два пъти. ☐

Следствие 1. *Броят върхове от нечетна степен е четен.*

Доказателство. В израза $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ дясната страна е четно число, значи и лявата е. За да бъде сума на естествени числа четна, трябва четен брой от тях да са нечетни. ☐

Лема 2 (*the hand-shaking lemma*)**.** *Нека G=(V,E) е (прост) граф с поне 2 върха. Докажете, че съществуват поне два различни върха $u, v \in V$ такива, че $d(u) = d(v)$.*

Доказателство. В прост граф максималната степен на връх е $n-1$ (все пак един връх е свързан най-много с всички останали). Тогава степените d_i на върховете ще са измежду числата 0, 1, ... $n-1$, което са точно n възможности.
Ако допуснем противното, че всички d_i са различни, то трябва да има връх от степен 0, от степен 1 и т.н. до $n-1$. Добре, но последното е невъзможно, не може едновременно да има връх от степен 0 и такъв от степен $n-1$ (който хем трябва да е свързан с всички, хем не е свързан с този от степен 0), противоречие. ☐

Забележка. Условието, че графът е прост е важно, при мултиграф горното не е винаги вярно.

Лема 3 (*оценка отдолу за броя цикли в свързан граф*)**.** *В свързан граф с n върха и m ребра има поне $m-n+1$ цикъла.*

Доказателство. Разглеждме графа в процес на конструиране. - Първоначално имаме n несвързани върха (съответно толкова компоненти на свързаност) и 0 цикъла, последователно добавяме m-те ребра (редът е без значение). Наблюдение: всяко новодобавено ребро

- или увеличава броя на циклите,

- или свързва две отделни компоненти, т.е намалява компонентите на свързаност с една;

Понеже, ще добавим m ребра, $m \leq cycles + removed\ components$, откъдето
$m \leq cycles + (n - components) \Rightarrow m - n + components \leq cycles$, но $components \geq 1 \Rightarrow$
$m - n + 1 \leq m - n + components \leq cycles$ □

Задача 1. Кои от следните редици (и защо) могат да бъдат степени на върховете в прост граф?

- 1, 2, 3, 4, 4, 4;
- 1, 2, 3, 4, 4, 6;
- 0, 2, 2, 3, 3, 5;
- 1, 2, 2, 3, 3, 4;

Havel–Hakimi algorithm

Решение. Да съществува такъв граф е:

- възможно, направете пример;
- невъзможно, няма как да има връх от степен 6 при също толкова върхове;
- невъзможно, няма как едновременно да има връх от степен 0 и такъв от степен 5;
- невъзможно, броят върхове от нечетна степен трябва да е четно число. ■

Задача 2 (НОМ2 2020 9.3)**.** В социална мрежа някои потребители са приятели, други не. В мрежата има поне едно приятелство и е известно, че ако двама имат еднакъв брой приятели, то те нямат общ приятел. Да се докаже, че в мрежата има потребител само с един приятел.

Решение. Да уточним, че на езика на графите мрежата може да се гледа като граф, в който приятелствата са ребра, а върховете са потребителите.
Да допуснем, че връх от степен 1 няма. Разглеждаме върха от максимална степен v, нека $d(v) = k$ ($k > 1$, защо?). Тогава за всички останали върхове $w_i : d(w_i) \leq k$. Но връх v има k съседа, всеки от степен между 2 и k ($k - 1$ възможности), по Дирихле има два с еднаква степен, но това е противоречие с условието. ■

Задача 3. Дадена е таблица с размери 100×100 клетки. Възможно ле е 517 от клетките да бъдат оцветени така, че всяка оцветена клетка е съседна (има обща страна) с точно 1 или 3 други оцветени клетки?

Решение. Нека V е множеството от оцветени клетки и E е множеството от ненаредени двойки оцветени клетки, които са съседни в таблицата. Тогава $G = (V, E)$ е прост граф. Ако допуснем, че е възможно всяка оцветена клетка да има точно 1 или 3 оцветени съседа, то това би означавало всеки връх в графа G да е от нечетна степен, но $|V| = 517$, което също е нечетно. Това е противоречие, защото броят върхове от нечетна степен във всеки графа трябва да е четен, а тук не е. Такова оцветяване няма. ■

Задача 4. Ако всеки връх в граф е от степен поне k ($\forall u \in V : \delta(u) \geq k$), да се докаже, че съществува ребро, което участва в поне $k - 1$ цикъла.

Решение. Разглеждаме конкретен най-дълъг път в графа, нека един такъв е $u - v$. Нека първият връх след u по този път е w_1. По условие u има още поне $k-1$ съседа (нека $w_2, ...w_k$). Да забележим, че ако за произволно $i \leq k : w_i$ не е част от пътя $u - v$, то последният би могъл да се продължи, с което бихме намерили нов по-дълъг път, което е противоречие. Ето защо всеки връх w_i е част от пътя $u - v$.
Сега лесно се вижда (на картинка), че реброто (u, w_1) участва в поне $k - 1$ цикъла: i-тият цикъл включва реброто (u, w_{i+1}) и частта от пътя $u - v$ между върховете u и w_{i+1}. ■

Следствие 2. *Ако всеки връх в граф е от степен поне 2, то в графа има цикъл.*

Задача 5. Ако всеки връх в граф е от степен поне $k > 1$ ($\delta(G) \geq k > 1$), да се докаже, че съществува цикъл с дължина поне $k+1$.

Решение. Ползваме абсолютно същата идея, като в началото на миналата задача. - Щом всички върхове w_i са част от пътя $u-v$, то най-отдалеченият от u от тях (б.о.о. това е w_k) е на разстояние поне k. Тогава цикълът, съдържащ реброто (u, w_{i+1}) и частта от пътя $u-v$ между върховете u и w_{i+1}, има дължина поне $k+1$. ■

Следствие 3. *Ако всеки връх в граф е от степен поне k, то съществува прост път с дължина поне k.*

Задача 6. Ако всеки връх на прост граф G е от степен поне 3, докажете, че G има цикъл с четна дължина.

Решение. Отново ползваме идеята за разглеждане на най-дългия път, нека един такъв път е $u-v$ (за краткост ще бележим с π) и първият връх по пътя след u да е w_1. По условие u има още поне $k-1$ съседа (да отбележим с $w_2, ...w_k,\ k \geq 3$). Понеже π е максимален, то той не може да бъде удължен, тоест $w_1, ..., w_k \in \pi$.
Да допуснем противното, в графа няма цикъл с четна дължина. Понеже за всяко $i, 2 \leq i \leq k$ частта $u - w_i$ от π, заедно с реброто (u, w_i) задават цикъл, то той е също е с нечетна дължина, откъдето, подпътят $u - w_i$ на π е с четна дължина. В частност това е вярно за $i = 2, i = 3 \Rightarrow$ подпътят $w_2 - w_3$ от π е с четна дължина като разлика на две четни числа. Но тогава пътят $u - w_2 \overset{\pi}{-} w_3 - u$, получен като обединение на подпътя $w_2 - w_3$ от π с върха u и ребрата $(w, w_1), (u, w_2)$, е цикъл с четна дължина, противоречие. ■

Задача 7. В прост граф е избран неизолиран връх v_0. Известно е, че има единствен най-дълъг прост път с начало v_0. Докажете, че другият му край v_t е връх от нечетна степен.

Решение. Да уточним, че от неизолираността следва, че $v_k \neq v_0$. Нека върховете от пътя $v_0 - v_t$ са $v_0, v_1, \cdots, v_t$. Ще докажем не само че върхът v_t е от нечетна степен, той е от първа степен. Да допуснем, че не е, нека им ребро $(v_t, u) \in E, u \neq v_{t-1}$. По условие пътят $v_0 - v_t$ е най-дългият възможен с начало v_0, тоест не може да бъде удължен повече. В частност не трябва да можем да включим реброто (v_t, u) към края на пътя - явно защото връх u вече е част от пътя, значи $u = v_i$ за някое $i : 0 \leq i < t-1$. Но тогава подпътищата $v_0 - v_i$ и $v_{i+1} - v_t$ заедно с реброто (v_t, v_i) образуват нов път със същата дължина (нарисувайте си го), различен от първия, но това е противоречие с единствеността от условието, значи остава $d(v_t) = 1$. ■

Задача 8. Ако G е свързан прост граф с поне 3 върха, който не е пълен, да се докаже, че съществуват 3 различни върха v, u, w такива, че $[(v, u) \in E] \wedge [(u, w) \in E] \wedge [(v, w) \notin E]$.

Решение. Да допуснем противното†, че ако съществуват върхове v, u, w, за които $(v, u) \in E, (u, w) \in E$, то и $(v, w) \in E$ *(1)*. Ще покажем, че при тези условия графът ще се окаже пълен, което би било противоречие.
1 н.) с индукция: Нека $v, u \in V$ са произволни два върха, ще докажем, че $(v, u) \in E$. По условие G е свързан, така че между тях има път, да означим върховете от пътя с $w_0 = v, w_1, \cdots, w_k = u$, можем да считаме $k > 1$ (в противен случай директно $w_1 = u, (v, u) = (w_0, w_1) \in E$). Понеже $(w_0, w_1), (w_1, w_2) \in E \overset{(1)}{\Rightarrow} (w_0, w_2) \in E$. Тогава $(w_0, w_2), (w_2, w_3) \in E \overset{(1)}{\Rightarrow} (w_0, w_3)$, като този процес може да бъде продължен аналогично. Накрая получаваме $(v, u) = (w_0, w_k) \in E$, но върховете бяха произволни, така че това може да се обобщи за всеки два. - Между всеки два върха има ребро, значи графът е пълен, противоречие. ■

Коментар: Тук е добре да кажем, че ако търсим повече формалност, частта с "аналогично" би трябвало да се направи с индукция, но това пък би утежнило доказателството излишно.

2 н.) с екстремален елемент: От всички двойки върхове, между които няма ребро, разглеждаме такава v, u, за която разстоянието между двата върха е минимално. Такива двойки има, понеже графът не е пълен, а свързаността гарантира, че между всички върховете има пътища, т.е. може да говорим за разстояния, защото са добре определени. Ако $w_0 = v, w_1, \cdots, w_k = u$ са върховете в някой *най-къс* път $v - u$, то $(v, w_{k-1}) \in E$ заради екстремалния избор (в противен случай трябваше да разглеждаме върховете v, w_{k-1} като по-близки). Тогава $(v, w_{k-1}), (w_{k-1}, w_k) \in E \overset{(1)}{\Rightarrow} (v, u) = (v, w_k) \in E$, което е противоречие, с разглеждането на върхове, за които $(v, u) \notin E$. ■

Въпрос: А защо разглеждаме най-къс път $v - u$, а не кой да е такъв?
И още един: Къде ползваме непълнотата на графа?

†*Забележка: Съветвам при допускането на противното да се изхожда от общи разсъждения и интуиция, а не директно да се взима отрицание на твърдението. Причината е, че в случая $\neg\exists v, u, w \in V : [(v, u) \in E] \wedge [(u, w) \in E] \wedge [(v, w) \notin E] \equiv \forall v, u, w \in V : [(v, u) \notin E] \vee [(u, w) \notin E] \vee [(v, w) \in E]$, с което се работи доста трудно, освен ако не бъде приведено във вида: $(...) \equiv \forall v, u, w \in V : \neg[(v, u) \in E \wedge (u, w) \in E] \vee [(v, w) \in E] \equiv \forall v, u, w \in V : [(v, u) \in E \wedge (u, w) \in E] \rightarrow [(v, w) \in E]$, което всъщност и направихме горе, но директно (и словесно).*

Задача 9. Ако в граф G няма изолирани върхове, както и *индуцирани* подграфи с точно 2 ребра, докажете, че G пълен граф.

Решение. Първо да забележим, че графът G е свързан, в противен случай съществува ребро с краища u_1, v_1 от една компонента и ребро с краища u_2, v_2 от от друга, тогава четирите върха индуцират именно подграф с 2 ребра, което би било противоречие.
Сега да допуснем, че G не е пълен, тогава бихме могли да приложим горната задача, което ни дава съществуването на три върха v, u, w такива, че $[(v, u) \in E] \wedge [(u, w) \in E] \wedge [(v, w) \notin E]$, тоест индуцират подграф с точно 2 ребра, противоречие. Остава G да е свързан. ■

Въпрос: Къде ползвахме, че няма изолирани върхове?

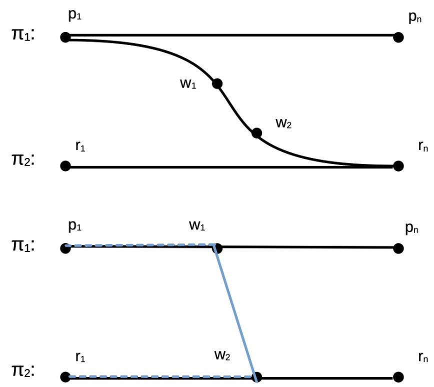
Задача 10. На парти има $2n + 1$ човека. Известно е, че измежду всеки трима има поне двама, които се познават (познанството е взаимно). Да се докаже, че съществува човек на партито, който познава поне n други.

Решение. Моделираме задачата с граф по естествения начин. Разглеждаме два върха u, v, които не са съседни. Ако такива няма, то всеки познава всеки друг и исканото е тривиално доказано. В противен случай, за всеки трети връх $w_i, 1 \leq i \leq 2n - 1$ ще е изпълнено, че w_i е съсед на поне един от върховете u, v. По Дирихле един от двата върха е съсед на поне $\left\lceil \frac{2n-1}{2} \right\rceil = n$ други. ■

Задача 11. Нека G е свързан граф. Докажете, че два пътя, които са едновременно най-дълги имат поне един общ връх.

Решение. Нека в графа има два различни най-дълги пътя: $\pi_1 : p_1 - p_n$ и $\pi_2 : r_1 - r_n$, като $d = |\pi_1| = |\pi_2|$ (*в случая n е произволен индекс, а не броят върхове в графа). Да допуснем противното, че те нямат общ връх. Тогава $p_1 \neq r_n$, а от свързаността на графа между p_1 и r_n има път $p_1 - r_n$ (да го означим с π).
Сега да изберем два върха $w_1 \in \pi_1, w_2 \in \pi_2$ такива, че $w_1, w_2 \in \pi$ и разстоянието $w_1 - w_2$ в π е минимално *(*)*. (Важно е да отбележим, че такива върхове със сигурност има - например $w_1 = p_1, w_2 = r_n$, *виж картинката по-долу*)
Изборът на екстремален елемент ни дава следното: всеки вътрешен връх u от пътя $w_1 - w_2$ *НЕ* е нито от пътя π_1 ($u \notin \pi_1$), нито от π_2 ($u \notin \pi_2$) *(**)* - в противен случай ще има по-къс подпът на π с исканите свойства, като единият му връх е u, а другият w_1/w_2, противоречие с *(*)*.
Б.о.о нека w_1 е по-отдалечен от p_1, отколкото от p_n и w_n е по-отдалечен от r_1, отколкото от r_n, т.е. $|w_1 - p_1| \geq \frac{d}{2}, |w_n - r_1| \geq \frac{d}{2}$, тогава пътят $p_1 - w_1 - w_n - r_1$ (който е валиден прост път, заради допускането, че π_1 и π_2 не се пресичат, и заради доказаното по-горе *(**)*) е с дължина поне $|p_1 - w_1| + |w_1 - w_n| + |w_n - r_1| \geq \frac{d}{2} + 1 + \frac{d}{2} > d$, но това е противоречие с факта, че $d = |\pi_1| = |\pi_2|$ и π_1, π_2 са най-дълги пътища. ■

Нотация. С "$p_1 - p_n$" за краткост обозначаваме път от връх p_1 до връх. p_n



Задача 12 (*)**.** В град има три училища, всяко с по точно n ученици. Известно е, че всеки ученик от всяко училище се познава с поне $n+1$ ученици от другите две училища. Докажете, че съществуват поне трима ученици, никои двама от които не са от едно и също училище, които се познават взаимно.

Решение. Моделираме задачата с граф - върховете са хората, познанствата са ребрата. Ясно е, че графът е триделен. Да означим множествата на върховете в дяловете съответно с V_1, V_2, V_3.
Нека k е минималният брой съседи от един и същи дял на връх в графа. С други думи, всеки връх в графа има най-много k съседи от един и същи дял. Вижда се, че $k \geq 1$ (защото всеки връх има поне един съсед от всеки от другите два дяла). Нека този минимум се достига във върха v. Б.о.о $v \in V_1$. Следователно v има k съседа в единия от другите два дяла (да кажем V_2) и още поне $n+1-k$ съседа във V_3.
Нека w е някой от k-те съседа на v във V_2. Заради допускането по-горе, w трябва да има поне k съседа във всеки от двата му чужди дяла, в частност w има поне k съседа във V_3. Но така получаваме, че съседните върхове v, w общо имат поне $(n+1-k)+k = n+1$ съседа във V_3. По Дирихле те трябва да имат поне един общ съсед $u \in V_3$ (понеже $|V_3| = n$).
Върховете $v \in V_1, w \in V_2, u \in V_3$ са от различни дялове (училища) и са съседни помежду си, което доказва исканото. ■

Задача 13 (*)**.** Нека G е свързан граф с четен брой върхове. Докажете, че може да се избере подмножество от ребра ($E' \subseteq E$) на G така, че всеки връх е инцидентен с нечетен брой от избраните ребра.

Решение. /по идея на Мария Дренчева/ Разглеждаме множество $E' \subseteq E$, за което броят на върховете, инцидентни с четен брой от избраните ребра, *е минимален.* Да отбележим, че този брой винаги е четно число. Причината е, че в графа (V, E'), върховете са четен брой (по условие) и броят на върховете от нечетна степен е четен, следователно и броят на върховете от четна степен ще е четен.
Да допуснем, че във $G'(V, E')$ има поне един (а оттам и поне 2, заради четността) върха от четна степен. да разгледаме кой да е път в G между два върха от четна степен в G', от допускането такъв има, да го означим с $w \rightsquigarrow u$. Нека множеството от ребрата, участващи в този път, означим с F, а междинните върхове от пътя - с $v_1, v_2, \cdots, v_k$. Разглеждаме графа $G''(V, E' \backslash (F \cap E') \cup (F \cap \overline{E'}))$, получен от G', като всяко вече избрано ребро от пътя $w \rightsquigarrow u$ бъде премахнато, а всяко неизбрано бъде добавено към избраните. В него върховете w, u вече са от четна степен (с единица разлика отпреди), върховете $v_1, \cdots, v_k$ запазват четността на степента си, а четността на степените на останалите върхове не се променя.
Така получаваме, че в G'' върховете от нечетна степен са по-малко, отколкото са в $G'(V, E')$, което

е противоречие с избора на минимален елемент. Следователно броят върхове от нечетна степен в графа (V, E') е точно 0, което и се иска по условия. ■

Забележка: същото решение може да бъде направено и по индукция.

Задача 14 (*). Даден е (прост) граф G с $2n$ върха. Да се докаже, че съществуват два върха с четен брой общи съседи.

Решение. Да допуснем противното, всеки два върха в графа имат нечетен брой общи съседи. *При това допускане*, ще докажем следното твърдение:

Твърдение: *Всеки връх в графа е от четна степен.*

Доказателство: *Нека v е произволен връх със съседи $N(v) = \{u_1, \cdots, u_k\}$. Разглеждаме графа H, който върховете $v, u_1, \cdots, u_k$ индуцират. Да забележим, че в този граф степента $d'(u_i)$ на кой да е от върховете u_i е тъкмо броят общи съседи на v и u_i, събран с 1, тоест $|N(v) \cap N(u_i)| + 1$. Да напомним, че по допускане $|N(v) \cap N(u_i)|$ е нечетно число.*
Тогава за броя ребра m' в графа H е вярно: $2m' = \sum_{w \in V(H)} d'(w) = d'(v) + \sum_{i=1}^{k} d'(u_i) = k + \sum_{i=1}^{k} (|N(v) \cap N(u_i)| + 1) = 2k + \sum_{i=1}^{k} |N(v) \cap N(u_i)|$.
Следователно $2m' - 2k = \sum_{i=1}^{k} |N(v) \cap N(u_i)|$. Лявата страна е четна. Тогава k също е четно (в противен случай дясната страна е сума на нечетен брой нечетни събираеми, тоест нечетна). □

Сега по задачата. Отново нека v е произволен връх и $u_1 \cdots, u_k$ са неговите съседи. Разглеждаме множествата: $N(u_1), \cdots, N(u_k)$. Тези множества са четен брой, всяко от тях има четен брой елементи (колкото е степента на съответния връх) и съдържа v като елемент. Следователно броят елементи, *различни от* v, в тях, с повторенията, е четен.
Нека w е произволен връх, различен от v. Всъщност броят на общите съседи на w и v е точно броят срещания на w като елемент на горните множества. По допускане всеки от останалите $2n - 1$ върха (без v) има нечетен брой общи съседи с v, следователно се съдържа в нечетен брой от тези множества. Тогава общият брой елементи, *различни от* v, в тях трябва да е нечетно число (като сума на $2n - 1$ нечетни), което е противоречие с показаното горе. ■

Задача 15 (APMO 1990 Variant). В група от $n \geq 2$ човека всеки двама са или приятели, или непознати. Изпълнени са и следните:

(1) Никой не е приятел с всички останали.

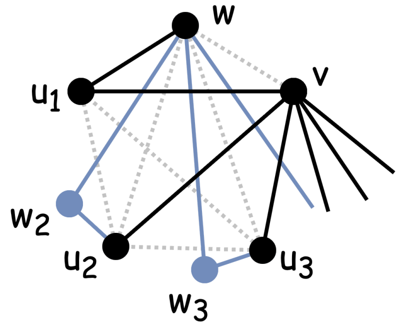
(2) Всеки двама непознати имат точно един общ приятел.

(3) Никои трима на са едновременно приятели един с друг.

Докажете, че всички имат равен брой приятели.

Решение. Моделираме задачата с неориентиран граф $G(V, E)$ (върховете са хората, а ребрата - познанствата). Трябва да докажем, че всички върхове са от еднаква степен. Достатъчно е да покажем, че всеки връх има степен не по-малка от тази на върха от максимална степен (оттук ще следва, че те са и равни на нея).
Нека v е произволен връх от максимална степен $deg(v) = k$, а $u_1, u_2, \cdots, u_k$ са неговите съседи. Заради условията *(1)* и *(2)* съществува връх от степен поне 2, следователно и $k \geq 2$. От условие *(3)* пък получаваме, че никои два върха u_i, u_j не са съседи (отбелязано на схемата по-долу с пунктир). Разглеждаме и произволен връх w, който не е съсед на v. Съществуването на такъв се гарантира от условие *(1)*.
Щом $(w, v) \notin E$, то по *(2)* съществува точно един връх x, който е техен общ съсед. Този връх е измежду съседите на v, б.о.о нека това е u_1. Тогава по *(2)* за всеки друг връх $u_i, i > 1$ получаваме $(u_i, w) \notin E$.
Отново от *(2)* следва, че за всяко $i > 1$ съществува връх w_i, който не е измежду върховете $v, w, u_1, \cdots, u_k$ и е общият съсед на w и u_i. Оказва се, че тези върхове $w_2, w_3, \cdots, w_k$ са различни.

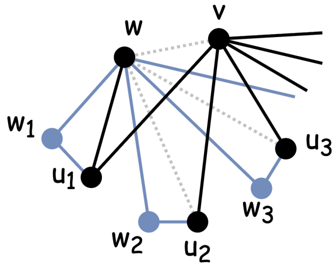
Наистина, ако допуснем, че за някои $j > i > 1$ е вярно $w_i = w_j$, то върхове u_i, u_j биха имали повече от един общ съсед (такива са v и $w_i = w_j$), противоречие.
И така, получихме $u_1, w_2, \cdots, w_k$ са различни и са едновременно съседи на w, тоест $deg(w) \geq k$. Но по допускане максималната степен на връх е тъкмо k, следователно $deg(w) = k$. Всъщност горните разсъждения показаха, че всеки *несъсед* на връх от максимална степен, също е връх от максимална степен. Същите аргументи могат да бъдат направени за върха от максимална степен w (вместо за v) и кои да е от върховете $u_2, \cdots, u_k$ (вместо w). Следователно $k = deg(v) = deg(w) = deg(u_2) = \cdots = deg(u_k)$. Аналогично за несъседните върхове u_2 (тук ползваме, че такъв съществува и е от степен k) и u_1. Получаваме и $deg(u_1) = deg(u_2) = k$. Изводът е, че всички съседи, както и всички несъседи на връх v са от степен k. ■

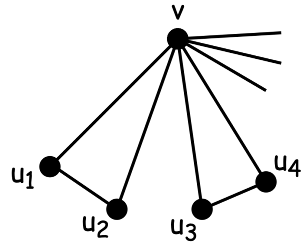


отсъстващите ребра са с пунктир

Задача 16 (*The Friendship theorem*). В граф G всеки два върха имат точно един общ съсед. Да се докаже, че съществува връх, който е съсед на всеки от останалите върхове и броят на върховете графа е нечетен.

Решение. Решението на тази задача наподобява това на горната.
Нека v е произволен връх от максимална степен $deg(v) = k$, а $u_1, u_2, \cdots, u_k$ са неговите съседи. Да допуснем, че има връх w, който *не* е съсед на v. По условие v и w имат точно един общ съсед, б.о.о нека това е u_1. Да отбележим, че това налага $(w, u_i) \notin E(G)$ за $i \geq 2$ (в противен случай v и w биха имали повече от един общ съсед).
За всяко $i \geq 1$ върховете w, u_i имат общ съсед, да го обозначим с w_i. От направените по-горе съображения става ясно, че $w_i \notin \{u_1, \cdots, u_k, v\}$. При това никои два върха w_i, w_j $(i \neq j)$ не съвпадат, защото иначе $w_i = w_j$ ще е втори общ съсед за върховете u_i, u_j. Така получаваме, че $u_1, w_1, \cdots, w_k$ за *различни* съседи на връх w, или $deg(w) > k$. Това обаче е противоречие с избора на $deg(v) = k$ като връх от максимална степен. Следва, че такъв връх w не съществува, следователно всички върхове са съседи на v, както и искахме.
Остава да се направи още едно съображение. За кой да е $i \geq 1$ върховете u_i, w имат единствен общ съсед, нека u_j, откъдето $(u_i, u_j) \in E(G)$. Нещо повече, върховете u_i, u_j нямат други съседи (в противен случай те биха имали повече от един общ съсед с v). Това налага броят съседи k на връх v да е четно число, откъдето $n = k + 1$ е нечетно. ■





2 Свързаност

Лема 4. *Граф е свързан точно тогава, когато има единствена компонента на свързаност.*

Лема 5. *Ако граф G е свързан и edge е ребро, участващо в цикъл точно когато след премахване на реброто графът остава свързан (т.е. G − edge е свързан).*

Лема 6 (*). *Ако (неориентиран) граф G с n върха, m ребра има k свързани компоненти, то $m \leq \binom{n-k+1}{2}$.*

Доказателство. Нека в компонентите има съответно по $n_1, ..., n_k$ върха, $n_i \geq 1$. Ясно е, че $n_1 + ... + n_k = n$. Също така в компонента i има не повече от $\frac{n_i(n_i-1)}{2}$ ребра, като равенство се достига, когато съответната компонента е пълен граф. Нека положим $n_i' = n_i - 1,\ n_i' \geq 0$. Оттук $n_1' + ... + n_k' = n - k$.
Тогава:
$m \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i.(n_i - 1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i' + 1).n_i' = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k} n_i'^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i'] = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k} n_i'^2 + (n-k)] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i'^2 + \frac{n-k}{2} \leq \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} n_i')^2 + \frac{n-k}{2} = \frac{1}{2}(n-k)^2 + \frac{n-k}{2} = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) = \binom{n-k+1}{2}$

Забележете, че последното неравенство е изпълнено точно когато $n_i = 0$ за всички i с изключение на едно, т.е. във всяка компонента освен една (в която има $n - (k-1)$ върха) има по един връх. □

Следствие 4 (точна долна граница). *Ако $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$, то G е свързан.*

Доказателство. От лемата горе следва, че ако графът има $k \geq 2$ компоненти, то $m \leq \binom{n-k+1}{2} \leq \binom{n-2+1}{2} = \binom{n-1}{2}$. Тогава при $m > \binom{n-1}{2}$, $k < 2 \Rightarrow k = 1$, т.е. графът е свързан (*получихме долна граница*).
За да докажем, че показаната долна граница е точна, достатъчно е да дадем пример, показващ, че $m \geq \binom{n-1}{2}$ ребра *невинаги* са достатъчни, за да твърдим, че графът е свързан. При две компоненти, едната от които K_{n-1}, а другата изолиран връх тази бройка точно се достига, но графът наистина не е свързан. □

Задача 17. Нека G е несвързан граф. Докажете, че $\overline{G}$ е свързан.

Решение. Нека $u, v \in V(G)$ са произволни.
1 сл.) $(u, v) \notin E(G) \Rightarrow (u, v) \in E(\overline{G})$, т.е. u, v са съседни в $\overline{G}$, а оттук и свързани. □
2 сл.) $(u, v) \in E(G)$, значи u, v са били в една свързана компонента в граф G, но от това, че G не е свързан, съществува връх w в друга негова компонента $\Rightarrow (u, w), (v, w) \notin E(G) \Rightarrow (u, w), (v, w) \in E(\overline{G})$, а оттук u, v са свързани (имат път през w). □
Получаваме, че произволни два върха са свързани в $\overline{G}$, значи и той е свързан. ■

Задача 18. Ако G е граф с n върха такъв, че $\delta(G) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, то докажете, че G е свързан.

Решение. Ето две възможни решения:
1 н.) Допускаме противното, нека графът има поне две свързани компоненти. Нека най-малката от тях (по брой върхове) има k върха. $\Rightarrow\ k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow$ за всеки връх u от въпросната компонента: $d(u) \leq k - 1 \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, което противоречи на условието. ■

2 н.) Нека $u,\ v$ са произволни два върха. Имаме, че $d(u) + d(v) \geq 2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil \geq n - 1$. Ако двата върха не са съседни, то от Дирихле измежду оставащите $n - 2$ върха те имат общ съсед. И в двата случая u и v са свързани (има път помежду им). Понеже те бяха произволни всеки два върха, а оттам и графът са свързани. ■

Задача 19. Нека G е граф с $n \geq 4$ върха такъв, че $\delta(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ и $\Delta(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Докажете, че G е свързан.

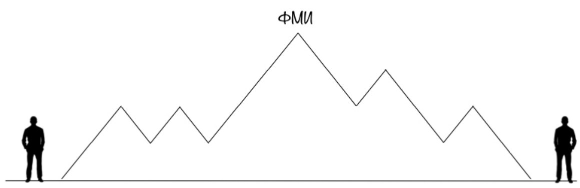
Решение. Ето две възможни решения: Понеже всеки връх е от степен поне $\delta(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, трябва всяка компонента на свързаност да съдържа поне $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ върха.
Съществуването на връх от степен $\Delta(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ пък налага в компонентата му да има поне $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ върха.
Да допуснем, че в графа има поне 2 компоненти на свързаност. Тогава броят върхове в графа ще е поне $(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n + 1 > n$, което е противоречие. ■

Задача 20. Докажете, че граф G е свързан тогава и само тогава, когато за всяко разбиване на множеството на върховете на два дяла съществува ребро с краища в двата дяла.

Решение. Двете посоки доказваме отделно:
($\Rightarrow$): Ще докажем контрапозитивното - ако съществува разбиване на множеството на върховете на два дяла, при което ребра с краища в двата дяла няма, то G не е свързан. Наистина, съществуването на такова разбиване директно влече, че графът има поне 2 компоненти на свързаност, тоест не е свързан. ✓
($\Leftarrow$): Обратно, нека за всяко разбиване на множеството на върховете на два дяла съществува ребро с краища в двата дяла. Да допуснем противното, че G не е свързан и нека $Comp$ е компонента на свързаност в него. Ясно е, че няма ребра между върховете на компонентата и останалите такива на графа, тогава за разбиването $M = \{V(Comp), V(G) \setminus V(Comp)\}$ ребра в срез-множеството няма да има, противоречие с допускането. ■

Задача 21 (*ППМГ Бургас Challenge 2020)**.** Двама ентусиасти искат да стигнат до планински връх по два различни пътя, като те тръгват от едно ниво (еднаква надморска височина). Двата пътя са разделени на равни стъпки, всяка от които е или нагоре, или надолу, но пътищата не са задължително с еднакъв релеф (както е на схемата по-долу). Известно е, че най-високата точка от релефа е върхът, а най-ниски са двете стартови позиции. Двамата решили да се движат, спазвайки правилото във всеки момент да са на еднаква височина, като на всеки ход всеки от тях прави по една стъпка напред или назад по пътеката. Винаги ли е възможно да стигнат до върха, спазвайки правилото си?

Забележка. Двете пътеки никога не слизат под първоначалната си надм. височина, нито стигат по-висока точка от върха. (Какво става, ако бяхме допуснали това?)



Решение. Да, винаги е възможно, при това без да има нужда някой да напуска пътеката си (т.е. да преминава от другата страна на върха).

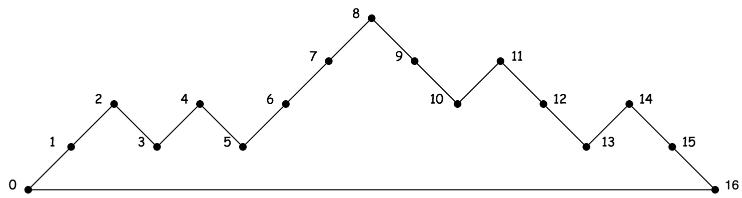
Конструираме граф с върхове двойки точки от релефа, които са на еднаква височина и такива, че първата точка е от лявата пътека, втората - от дясната (*вижте на схемата долу*). Реално всяка такава двойка (да я наричаме състояние) ще представлява една потенциална позиция на двамата по време на похода.

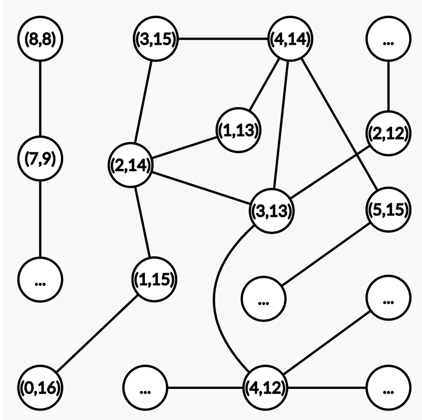
Свързваме два върха (две състояния/двойки позиции) с ребро, ако за един ход всеки от двамата може да премине от съответната си позиция от първото състояние в съответната си позиция от второто състояние.

Задачата се свежда до това да кажем дали съществува път в графа (с други думи последователност от ходове) такъв, че от първоначалното състояние (start_1, start_2) /ако така обозначим изходните позиции/ стигаме до финалното състояние (peak, peak). Достатъчно е да покажем, че са в една компонента на свързаност:

Понеже от първоначалното състояние можем да отидем в единствено друго, както и във финалното можем да стигнем от единствено друго, то в графа тези върхове са от *първа степен*, *нечетна*. Всички останали състояния от двойки позиции ще са върхове от четна степен (има няколко лесни случая, които е добре да се проверят, вижте с картинка).

Във всяка компонента на даден граф обаче има четен брой върхове от нечетна степен, тогава единствените два върха от нечетна степен, а именно началното и финалното състояние са в една компонента, което и искахме. ■





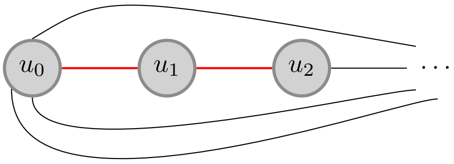
част от графа, който състоянията задават; $(0, 16)$ е началното състояние, а $(8, 8)$ е финалното

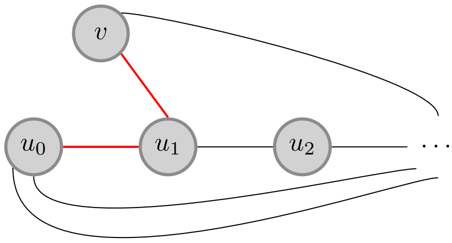
Задача 22. Да се докаже, че ако G е свързан граф с четен брой ребра, то той (по-точно ребрата му) може да се разпадне на отделни пътища с дължина 2.

Решение. Ще направим доказателство с индукция по броя ребра. Идеята зад самото доказателство е проста - премахваме 2 инцидентни ребра (такива с общ край) от G, а от ИП ползваме, че ребрата на останалия граф H също могат да бъдат разпаднати на пътища с дължина 2. Единствено трябва да гарантираме, че при свеждането до по-малък граф H графът, индуциран от ребрата му, остава свързан.
ИП: Ако ребрата на H, *индуцират* свързан граф с четен брой ребра $k < m$, то H (по-точно ребрата му) може да се разпадне на отделни пътища с дължина 2.
Забележка: В ИП не изискваме самият граф H да е свързан, а само този, индуциран от ребрата му, просто защото може да има изолирани върхове от степен 0, които правят H несвързан, но по същество не променят задачата.
ИС: Нека G е свързан с четен брой ребра и $|E| = m$. Разглеждаме някой най-дълъг (прост) път π в графа. Да отбележим, че заради условията за четност на ребрата и свързаност, най-дългият път в непразен граф е с дължина поне 2. Нека върховете от пътя са $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_d$ в този ред. Да уточним, че заради максималността на избрания път π всички съседи на u_0 са част от π и биха останали свързани, дори при премахване на реброто (u_0, u_1) *(*)*. Разглеждаме 2 случая:

- $deg(u_1) = 2$: тоест единствените съседи на u_1 в G са u_0, u_2 (на чертежа вляво). Дефинираме $H = G - u_1$. Ясно е, че H също има четен брой ребра, а заради *(*)* е и свързан. Тоест можем да използваме ИП за него и така получаваме, че целият G може да се разбие на пътища с дължина 2. ✓

- $deg(u_1) > 2$: тоест съществува съсед v на u_1, различен от u_0, u_1 (на чертежа вдясно). Отново от максималността на пътя π следва, че всички съседи на v са част от π (в противен случай съществува по-дълъг път с върхове $w, v, u_1, u_2, \cdots, u_k$ в този ред, което би било противоречие). Тогава за графа $H := G - (u_0, u_1) - (u_1, v)$ е вярно, че също е с четен брой ребра и е свързан. Ползваме ИП за него и заключаваме, че той, а оттам и G може да бъде разпаднат на пътища с двуребрени пътища. ■





Мостове и срязващи върхове

Дефиниция 2.1 (*мост*)**.** Ребро се нарича *мост*, ако неговото премахване разделя графа, т.е. увеличава броя на свързаните компоненти.

Дефиниция 2.2 (*срязващ връх/артикулационна точка*)**.** *Срязващ връх u* на граф G (още наричан *артикулационна точка*) е всеки връх, чието премахване увеличава броя на свързаните компоненти. В контекста на свързан граф G това е връх, за който $G - u$ не е свързан.

Задача 23. Докажете, че ребро *не* е мост точно тогава, когато е част от цикъл.

Решение. Ребро не е мост точно когато премахването му не увеличава броя компоненти. Това означава, че ако реброто е било в свързана компонента $comp_1$, след махането му $comp_1$ остава свързана. По лема 5 $comp_1$ остава свързана тстк реброто е участвало в цикъл. Исканото следва.
Или по-просто:
реброто не е мост $\Leftrightarrow$ премахването му запазва свързаността на компонентите $\Leftrightarrow$ реброто участва в цикъл. ■

Задача 24. Да се докаже, че всеки граф има връх, който *не* е срязващ.

Решение. Ограничаваме се до произволна свързана компонента G на разглеждания граф. Ще докажем, че всеки свързан граф (в частност G) има "несрязващ" връх. Разглеждаме един най-дълъг път π в графа G, нека той е с краища u, v. Твърдим, че u (съответно и v) не е срязващ, т.е. $G - u$ продължава да е свързан. Достатъчно е да докажем, че в $G - u$ всеки два съседа на u от G са свързани с път. Да отбележим, че съседите на u са част от пътя π (в предни задачи вече разяснихме защо). Следователно при премахване на върха u и инцидентите му ребра въпросните съседи продължават да са част от скъсения път $\pi - u$, значи са свързани. Последното влече свързаността на $G - u$. ■

Задача 25. В граф всички върхове са от четна степен. Да се докаже, че в графа няма мостове.

Решение. Да допуснем, че ребро (u, v) от графа е мост. Нека то е част от свързаната компонента G_1. Тогава $G_1 - (u, v)$ е несвързан с две компоненти на свързаност. Във всяка от тях всички върхове са от четна степен (както са били в G_1) с изключение на двата върха v или u, чиито степени са намалели с 1. Но това означава, че в получените две компоненти има нечетен брой върхове от нечетни степен, което е противоречие. ■

Задача 26. Докажете, че за всяко $k \in \mathbb{N}^+$ съществува $(2k+1)$-регулярен граф, който има срязващо ребро (мост).

Решение. Ясно е, че можем да се ограничим до конструиране на свързан $(2k + 1)$-регулярен граф с мост (ако не е свързан, то всяка негова компонента също е $(2k + 1)$-регулярен граф, като някоя от тях трябва да съдържа мост, така че просто бихме разглеждали нея).

По дефиниция след премахване на срязващо ребро в оставащия (вече несвързан) граф трябва да има 2 компоненти на свързаност. Във всяка от тях има един връх от степен $2k$ (съответният край на срязващото ребро), а всички останали са от степен $2k+1$. Такъв граф ще наречем *почти регулярен*. Сведохме задачата до намиране на *почти* $2k+1$-регулярен граф.
Дефинираме $V := \{v, u_1, u_2, w_1, \cdots w_{2k}\}$ с ребра
$E := \{(u_1, u_2)\} \cup \{(v, w_i) | 1 \leq i \leq 2k\} \cup \{(u_j, w_i) | 1 \leq i \leq 2k, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{(w_i, w_j) | 1 \leq i < j \leq 2k\} \backslash \{(w_{2i-1}, w_{2i}) | 1 \leq i \leq k\}$.
Директно се проверява, че този граф има исканото свойство (почти $2k+1$-регулярен). По аналогичен начин можем да дефинираме $G' = (V', E')$. Тогава в графа $(V \cup V', E \cup E' \cup \{(v, v')\})$ всички върхове са от степен точно $2k+1$ и реброто (v, v') е мост. ■

Как аджеба се сещаме?: Първо е добре да сведем до намиране на почти $(2k+1)$-регулярен граф. Задачата е конструктивна, можем да опитаме да построим примера-решение на стъпки. Пример за $k = 2$ се прави сравнително лесно, например с графа $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(2, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$. Опитваме се да доразвием този пример, така че да върши работа за $k = 3$, за целта трябва да вдигнем степента на всеки връх с 2. Сещаме се да добавим нови два върха и да ги свържем с ребро с всички вече съществуващи върхове (които са точно колкото и ни трябва - 5). Така от почти 3-регулярен получихме почти 5-регулярен граф. Същата идея може да се приложи индуктивно. За да си спестим писане на индукция, накрая дефинираме получената структура експлицитно, както по-горе.

Задача 27 (*Домашно КН 25)**.** Нека G е граф с $n > 2$ върха, който е изоморфен на своето допълнение $\overline{G}$. Докажете, че G има срязващ връх тогава и само тогава, когато G има връх от степен 1.

Решение. В *задача 17* показахме, че поне единият от графите G и $\overline{G}$ е свързан. Но по условие те са изоморфни, така че и *двата са свързани.*
($\Leftarrow$) Нека в G има връх u от степен 1 и единственият съсед на u е връх v. Понеже G е свързан, а в $G - v$ между u и останалите върхове път няма, то явно v е срязващ връх. ✓
($\Rightarrow$) Обратно, нека в G има срязващ връх u. Тогава $G - u$ *не* е свързан, а $\overline{G - u}$ като негово допълнение е. Съответно в $\overline{G}$ също съществува срязващ връх v и $\overline{G} - v$ *не* е свързан. Понеже $\overline{G} - u = \overline{G - u}$, а $\overline{G - u}$ е свързан, то $v \neq u$. Разглеждаме два случая:

- **G−u−v не е свързан:** Понеже $G - u - v$ не е свързан, то $\overline{G - u - v} = \overline{G} - u - v$ е свързан като негово допълнение. За $\overline{G} - v$ обаче знаем, че *не* е свързан, следователно u е изолиран връх, сам в свързана компонента в графа $\overline{G} - v$. Но пък $\overline{G}$ е свързан, така че $(u, v) \in \overline{G}$ и u е висящ връх (връх от степен 1) в $\overline{G}$, съответно неговият изоморфен в G също е от степен 1. ✓

- **G−u−v е свързан:** Тук нещата са аналогични. Знаем, че $G - u$ *не* е свързан, следователно v е изолиран връх в $G - u$, но понеже не е такъв в G (от свързаността на G), то съществува ребро $(u, v) \in G$. Така получаваме, че v е връх от степен 1 в G. ■

3 (Анти)клики

Дефиниция 3.1 (анти-кликово число)**.** Имаме следните дефиниции:
- кликовото число $\omega(G)$ бележи размера на максималната клика;
- антикликовото число $\alpha(G)$ бележи размера на максималната антиклика.

Лема 7. *Ако $U \subseteq V$ е клика в $G = (V, E)$, то $U \subseteq V$ е антиклика в $\overline{G}$.*

Следствие 5. $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$

Лема 8. *G=(V,E) е граф с поне 6 върха. Тогава в G има 3-клика или 3-антиклика.*

Доказателство. Нека u е един от шестте върха. Остават 5, с които u е или инцидентен, или не. По Дирихле u е (не)инцидентен с поне 3 от тях (б.о.о приемаме, че са инцидентни), нека това са

v_1, v_2, v_3. Ако което и да е (v_i, v_j) от ребрата (v_1, v_2), (v_1, v_3), $(v_2, v_3) \in E$, то имаме 3-кликата $v_i - u - v_j$, ако и трите не са в графа, то пък намерихме 3-антиклика $v_1 - v_2 - v_3$.

Забележка. Забележете, че може да не говорим за ребра, които ги има/няма в графа, а например за такива, оцветени в два цвята. Тогава (анти)кликите са едноцветните триъгълници.

□

Задача 28 (*)**.** Докажете, че в граф с поне 9 върха има 3-клика или 4-антиклика.

Решение. Допускаме противното, нека няма нито 3-клика, нито 4-антиклика.
- От лемата горе вече знаем, че измежду всеки 6 върха има 3-клика или 3-антиклика. Ако случаят е първият, то веднага получаваме противоречие.

Значи измежду всеки 6 върха има 3-антиклика. Да разгледаме какво става с конкретен връх v, като нека останалите върхове са съответно u_1, u_2, ... u_8:

- Според горното измежду 6-те върха u_1, u_2, ... u_6 има 3-антиклика (нека $u_1 - u_2 - u_3$). Ясно е, че ако v *не* е инцидентен с поне един от u_1, u_2, u_3, ще има 4-антиклика $v - u_1 - u_2 - u_3$, което е противоречие с допускането. Тоест v е инцидентен с някой от тях, б.о.о с u_1.

- Ако повторим разсъждението, но този път върху върховете u_2, u_3, ... u_7, а после го и потретим за u_3, u_4, ... u_8, ще видим, че връх v има поне 3 съседа, $d(v) \geq 3$.

- Да предположим, че е възможно $d(v) \geq 4$ (по-конкретно нека $w_1, ...w_4$ са съседи на v), по допускане в графа няма 4-антиклики $\Rightarrow$ някои два от четирите съседа на v са инцидентни, б.о.о това са w_1 и w_2. Но тогава получаваме 3-кликата $v - w_1 - w_2$, противоречие. Ето защо $d(v) < 4$, оттук $d(v) = 3 \; \forall v \in V$.

Получихме, че всеки връх трябва да е от степен 3 (нечетно), но имаме 9 върха (нечетно), това е невъзможно, противоречие с допускането. ■

Следствие 6. *В граф с поне 9 върха има 4-клика или 3-антиклика.*

Решение. Интуитивно е ясно, че при липсата на всякакви допълнителни условия нещата трябва да са симетрични, или по-точно да имат симетрична аналогия. Може да се направи същото решение като по-горе, разбира се, обърнато, но тук предлагаме друго, една идея по-поучително:
Нека даденият граф е G. Разглеждаме неговото допълнение $\overline{G}$, което е отново с 9 върха. Според задачата $\overline{G}$ има 3-клика или 4-антиклика. Добре де, но от *лема* 7 в G тези върхове образуват съответно 3-антиклика или 4-клика. ■

Задача 29. Докажете, че в граф с поне 18 върха има 4-клика, или 4-антиклика.

Решение. Съществува връх u, който е (не)инцидентен с поне 9 от останалите, (б.о.о приемаме, че са инцидентни). Тогава измежду тези 9 (според предната задача) винаги има 3-клика или 4-антиклика. Във втория случай задачата е директно решена, в първия посочваме кликата от върхове u, v_i, v_j, v_f, където v_i, v_j, v_f са върховете, образуващи 3-кликата. ■

Дефиниция 3.2 (*ексцентрицитет*)**.** Ексцентрицитет на връх (обикновено се дефинира за свързан граф) е най-голямото разстояние от върха до някой друг връх в графа (с напомнянето, че разстоянието между два върха е дължината на най-късия път между тях): $\epsilon(v) = max\{dist(v, u) \mid u \in V\}$.

Дефиниция 3.3 (*радиус на граф*)**.** Радиусът на граф е минималният ексцентрицитет на връх от графа: $rad(G) = min\{\epsilon(u) \mid u \in V\}$.

Дефиниция 3.4 (*диаметър на граф*)**.** Диаметърът на граф е максималният ексцентрицитет на връх от графа: $diam(G) = max\{\epsilon(u) \mid u \in V\}$.

Задача 30 (Държавен изпит 2024)**.** Да се докаже, че в свързан граф G: $\alpha(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+1}{2} \rceil$.

Решение. Нека $diam(G) = \epsilon(u) = dist(u,v)$ за някои u, v (такива има) и да положим $d := diam(G)$. Разглеждаме един най-кратък път $u - v$ (такъв, който определя разстоянието между върховете). Нека върховете в този път са $u, w_1, w_2, \cdots w_{d-1}, v$, считано от u. За яснота ще положим $w_0 = u, w_d = v$. Да разгледаме само върховете на четна позиция в тази редица (броим от 0), т.е. $A := \{w_i | \ i = 2k\}$, явно $|A| = \lceil \frac{d+1}{2} \rceil$.
Ще докажем, че множеството е антиклика. Нека $w_i, w_j \in A, 0 \leq i < j \leq d$ са два произволни върха, като отново да обърнем внимание, че i, j са четни, значи $j - i \geq 2$. Трябва да покажем, че между тях няма ребро. Ако допуснем противното и такова има (тогава $dist(w_i, w_j) = 1$), то $d = dist(u,v) = dist(w_0, w_d) \leq dist(w_0, w_i) + dist(w_i, w_j) + dist(w_j, w_d) \leq i + 1 + (d - j) \leq (j-2) + 1 + (d-j) = d - 1$, което е противоречие, значи такова ребро няма, откъдето A наистина е антиклика, при това с мощност $\lceil \frac{d+1}{2} \rceil$. ■

Задача 31. (*) В група има поне $n^2 + 1$ човека. Известно е, че за всеки двама непознати всеки от останалите или е техен общ познат, или е техен общ непознат. Да се докаже, че съществува група от $n+1$ души, всеки двама от които са познати, или група от $n+1$ души, всеки двама от които са непознати.

Решение. Възможни са различни решения на задачата, но тук ще представим едно, което илюстрира интересно приложение на релациите в контекста на графи (впрочем със същата техника по хубав начин може да бъде доказана *Теорема на Туран*).
Моделираме задачата с неориентиран граф $G = (V, E)$, чиито върхове са хората и ребра познанствата (между два върха има ребро точно когато двамата човека се познават). Тогава исканото от условието се свежда до това да докажем, че в графа G има $(n+1)$-клика или $(n+1)$-антиклика, но това е еквивалентно на това да докажем, че в графа допълнение $\overline{G}$ има $(n+1)$-клика или $(n+1)$-антиклика.
Нека релацията $\sim \subseteq V \times V$ е дефинирана като: $v \sim u \Leftrightarrow (v,u) \notin E$. Твърдим, че $\sim$ е релация на еквивалентност:
рефлексивност: понеже никой човек не познава себе си (вероятно не само в рамките на задачата...) $\forall v \in V : (v,v) \notin E \Rightarrow \forall v \in V : v \sim v$. ✓
симетричност: за произволни два различни върха $v, u \in V : v \sim u \Leftrightarrow (v,u) \notin E \Leftrightarrow (u,v) \notin E \Leftrightarrow u \sim v$. ✓
транзитивност: нека $v, u, w \in V, v \sim u$ и $u \sim w$. Да обърнем внимание, че изродените случаи (когато стойностите на някои от v, u, w съвпадат) следват от рефлексивността и симетричността, така че ще считаме, че $v \neq u \neq w \neq v$. От $v \sim u$ и $u \sim w$ следва $(v,u), (u,w) \notin E$, тогава условието задължава $(v,w) \notin E \Rightarrow v \sim w$. ✓
Релацията $\sim$ задава разбиване на множеството на върховете. Да забележим, че $v \sim u$ на практика съответства на ребро от графа допълнение $\overline{G}$, като изключение правят $v \sim v$, понеже примки в $\overline{G}$ няма (но пък това и не влияе на следващите разсъждения). Тогава разбиването на върховете, определено от релацията, отговаря на разбиването по компоненти на свързаност в $\overline{G}$, т.е. всеки клас на еквивалентност отговаря на една компонента. Това влече, че всяка компонента на свързаност на $\overline{G}$ е пълен граф. Ако в някоя компонента има поне $n+1$ върха, то те задават и $(n+1)$-клика, при което твърдението е доказано. Ако допуснем, че в $\overline{G}$ няма $(n+1)$-клика, във всяка компонента има не повече от n върха. Тогава броят свързани компоненти на $\overline{G}$ е $\geq \lceil \frac{n^2+1}{n} \rceil = n+1$. Но това означава, че можем да изберем по един връх от всяка компонента, като така получаваме $(n+1)$-антиклика. ■

Задача 32 (*IMO 2007)**.** Даден е граф G такъв, че $\omega(G)$ е четно число. Да се докаже, че върховете на графа могат да бъдат разделени на два дяла (всеки връх е в точно един от двата) така, че размерът на максималната клика в единия и в другия дял (по-точно в двата графа, индуцирани от върховете на двата дяла) са равни.

Благодарности

Благодаря на Георги Тончев за предложената *лема 3*, на Александър Иванов за предложената *задача 30*, на Иван Игнатов за откритата грешка в индексирането на *лема 6*, на Йоан Василев за откритата грешка в собственото му решение, на Димитър Стоилов за откритата неточност в индексирането на върховете в *задача 11*, на Мария Дренчева за предложеното хубаво решение на *задача 13*, на Михаил Минков за краткото решение на *задача 27*, на Велислав Гърков за предложената *задача 10*.