3. Релации

"Relatable"

Март 2025

1 Преговор

Дефиниция 1 (релация)**.** Нека $A_1, \cdots, A_n$ са множества. n-местна *релация* R над декартовото прозиведение $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ наричаме всяко множество $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n$, то релацията е *хомогенна.*

Нотация 1. За *двуместни* релации вместо $(x, y) \in R$, пишем xRy.

Дефиниция 2 (свойства)**.** За двумсетна хомогенна релация $R \subseteq A^2$ дефинираме свойствата:

- рефлексивност: $\forall a \in A : aRa$
- антирефлексивност: $\forall a \in A : \neg aRa$
- симетричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \to bRa$ (също $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow bRa$)
- антисиметричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \to \neg bRa$ (също и $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \to a = b$)
- силна антисиметричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$
- транзитивност: $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \to aRc$ (*не е необходимо a, b, c да са различни)

Дефиниция 3 (затваряне)**.** Транзитивно затваряне на релацията $R \subseteq A^2$ е минималното множество R^+ такова, че: $R \subseteq R^+$ и R^+ е транзитивна (аналогично за рефклексивно и симетрично затваряне).
*Множеството R^+ е минимално, ако е подмножество на всички релации, изпълняващи горното изискване. (Получава се, че транзитивното затваряне на R е $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$, виждате ли умножаването на матрици?)

Лема 1. *Релация е транзитивна (аналогично рефлексивна/симетрична) тстк съвпада с транзитивното (съответно рефлексивното/симетричното) си затваряне.*

Дефиниция 4. Наричаме една релация $R \subseteq A^2$:

- релация на *еквивалентност* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна;
- релация на *частична наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (в частичните наредби може да има *несравними* елементи, т.е. между тях няма приоритет: $\neg aRb \wedge \neg bRa$);
- релация на *строга частична наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна (тук не допускаме да има равни по "старшинство" елементи);
- релация на *линейна наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна (линейните наредби са частен случай на частичните);
- релация на *преднаредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна и транзитивна;

Начини за представяне на релации:
- описване в явен вид: $R = \{(a, b), (a, c), \cdots, (c, f)\}$
- чрез матрица (при двуместни релации): $M_{i,j} = 1$ при iRj и 0 в противен случай.
- чрез диаграма: граф с върхове елементите, като еднопосочното ребро (v_i, v_j) е в графа точно когато a_iRa_j.

Дефиниция 5. Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, а $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че: R *се влага в* R' или R' е *линейно разширение* на R (броят линейни разширения е между 1 и $n!$).

Дефиниция 6 (верига, контур)**.** Ако $R \subseteq A^2$ е релация и $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, *верига* е всяка последователност $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ $(i_0, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, n\})$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ $\forall j(0 < j < k), k \geq 0$
Ако $a_{i_0} = a_{i_n}$ и $k > 0$ веригата се нарича контур (всъщност оттук и горните изисквания, следва и $k > 1$, защо?).

Дефиниция 7. Дефинираме R^{-1} по следния начин: $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$.

Дефиниция 8 (композиция на релации)**.** Нека $R, S \subseteq A^2$ са релации, тогава дефинираме $R \circ S := \{(a, c)|\ \exists b \in A : aRb \wedge bSc\}$.

2 Основни задачи

Задача 1. Вярно ли е, че ако R е симетрична и транзитивна, то тя е рефлексивна?

Решение. Не е вярно, ето контрапример: $A = \{1, 2, 3\}, R = \varnothing$ или пък $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Задача 2. Нека $m \in \mathbb{N}^+$ е константа и $\equiv_m \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е релация, като $a \equiv_m b$, ако $|a - b|$ се дели на m. Докажете, че $\equiv_m$ е релация на еквивалентност.

Решение. Изследваме трите свойства:
рефлексивност: Понеже $\forall n \in \mathbb{N} : |n - n| = 0$ се дели на m, то $n \equiv_m n$. ✓
симетричност: Нека за някои $a, b \in \mathbb{N}$ е в сила $a \equiv_m b$, тогава $|a - b| = |b - a|$ се дели на m, откъдето и $b \equiv_m a$. ✓
транзитивност: Нека а някои $a, b, c \in \mathbb{N}$ е в сила $a \equiv_m b \wedge b \equiv_m c$, тогава m дели $|a - b|$ и $|b - c| \Rightarrow |a - b| = k_1 m$ и $a - b = sgn(a - b)k_1 m$, където $sgn(x) \in \{-1, 0, 1\}$ е знакът на x. Аналогично $b - c = sgn(b - c)k_2 m \Rightarrow |a - c| = |(a - b) + (b - c)| = |sgn(a - b)k_1 m + sgn(b - c)k_2 m| = |(sgn(a - b)k_1 + sgn(b - c)k_2)m| = |sgn(a - b)k_1 + sgn(b - c)k_2|m$, откъдето $|a - c|$ се дели на m и $a \equiv_m c$. ■

Забележка: Всъщност няма нужда да се ограничаваме до естествени числа и да разглеждаме абсолютни стойности, можем спокойно да разглеждаме делимостта над целите числа, което значително би улеснило показването на транзитивността, но пък горното показва, че можем да се справим и без това.

Задача 3. Нека $\vdots \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ е релация, като $a \vdots b$, ако $\exists c \in \mathbb{N}^+ : a = bc$. Докажете, че $\vdots$ е релация на частична наредба.

Решение. Изследваме трите свойства за частична наредба:

рефлексивност: Понеже $\forall n \in \mathbb{N}^+ : n = n.1$, то $n \vdots n$. ✓

антисиметричност: Нека за някои $a, b \in \mathbb{N}^+$ е в сила $a \vdots b$ и $b \vdots a$, тогава $a = b.c_1$ и $b = a.c_2 \Rightarrow a =$

$a.c_1.c_2 \Rightarrow c_1.c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow a = b.1 = b.$ ✓
транзитивност: Нека за някои $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ е в сила $a \vdots b \wedge b \vdots c$, тогава $a = b.c_1$ и $b = c.c_2 \Rightarrow a = c(c_2c_1) \Rightarrow a \vdots c.$ ■

Задача 4. За $R \subseteq A^2$ да се докаже, че:

- R е симетрична тстк $R = R^{-1}$,
- R е антисиметрична тстк $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$;
- R е едновременно симетрична и антисиметрична точно когато $R \subseteq \{(a, a) |\ a \in A\}$.

Решение.

- От дефинициите: R е симетрична тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow bRa$ тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow aR^{-1}b$. Да забележим обаче, че последното не доказва директно $R = R^{-1}$, защото имаме условие $a \neq b$. Но от дефиницията на R^{-1} за $a = b : aRb \leftrightarrow aR^{-1}b$, значи наистина е изпълнено, че $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow aR^{-1}b$ тстк $R = R^{-1}$. ■
- От дефинициите: R антисиметрична тстк $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : aRb \wedge R^{-1}b \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : ((a, b) \in R) \wedge ((a, b) \in R^{-1}) \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (a, b) = (a, a)$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (a, b) \in \{(x, x) | x \in A\}$ тстк $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$ ■
- *1 н.)* Ползваме директно горните две подточки. Получаваме, че релацията е едноверeменно симетрична и антисиметрична тстк $R = R^{-1}$ и $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\} \Leftrightarrow R \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$. ■
  2 н.) Двете посоки показваме поотделно:
  $(\Leftarrow)$: Нека $R \subseteq \{(a, a) |\ a \in A\}$, тогава $\forall a \in A\ \forall b \in A : \neg aRb$, откъдето условията за симетричност $\forall a, b \in A, \underline{a \neq b} : aRb \rightarrow bRa$ и за антисиметричност $\forall a, b \in A, \underline{a \neq b} : aRb \rightarrow \neg bRa$ са тривиално изпълнени.
  $(\Rightarrow)$: Обратно, нека R е едновременно симетрична и антисиметрична. Нека $a \neq b$ и aRb, тогава bRa от симетричността, но същевременно и $\neg bRa$, което е противоречие. ■

Задача 5. Ако $R_1, R_2 \subseteq A^2$ са релации на еквивалентност, то релации на еквивалентност ли са:

- $R_1 \cap R_2$
- $R_1 \triangle R_2$
- $R_1 \cup R_2$
- $R_1 \circ R_2$

Решение.

- Да, ще покажем, че сечението запазва трите свойства. Нека $R = R_1 \cap R_2$:
  рефлексивност: от рефлексивността на R_1, R_2, $\forall a \in A : aR_1a \wedge aR_2a \equiv \forall a \in A : (a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2 \equiv \forall a \in A : (a, a) \in R_1 \cap R_2$, тоест R е рефлексивна. ✓
  симетричност: Нека $a, b \in A$ и aRb. Тогава $(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \overset{\text{симетр.}}{\Rightarrow} (b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$. ✓
  транзитивност: Нека $a, b, c \in A$ и $aRb \wedge bRc \Rightarrow (aR_1b \wedge aR_2b) \wedge (bR_1c \wedge bR_2c) \Rightarrow (aR_1b \wedge bR_1c) \wedge (aR_2b \wedge bR_2c) \overset{\text{транз.}}{\Rightarrow} aR_1c \wedge aR_2c \Rightarrow aRc$. ■.
- Не, рефлексивността ще бъде нарушена, ето контрапример: $A := \{1\}, R_1 = R_2 := \{(1, 1)\}$, са релации на еквивалентност, но $R := R_1 \triangle R_2 = \varnothing$, защото $(1, 1) \notin R$. ■
- Не, транзитивността може да бъде нарушена, ето контрапример: $A := \{1, 2, 3\}$ и $R_1 := \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 := \{(2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ са релации на еквивалентност, но $R := R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ не е, защото $(1, 2) \in R \wedge (2, 3) \in R$, но $(1, 3) \notin R$. ■

- Всъщност $R_1 \circ R_2$ остава рефлексивна и симетрична (докажете, добро упражнение), но пък композицията не е непременно транзитивна, ето контрапример: $R_1 := \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, $R_2 := \{(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, тогава $R := R_1 \circ R_2 = \{(1,3),(3,5),\cdots\}$, но пък $(1,5) \notin R$. ■

Задача 6. (*) Да се докаже, че транзитивното затваряне на релация $R \subseteq A^2$ е единствено.

Решение. Нека $F := \{P|\ R \subseteq P \subseteq A^2 \wedge P \text{ е транзитивна}\}$ е фамилията от транзитивните "надрелации" (релации, които са надмножества) на R. F е множество и формално може да бъде получено с отделяне от $\mathscr{P}(A^2)$ (тоест $F \subseteq \mathscr{P}(A^2)$), като също така е непразно, защото $A^2 \in F$ е транзитивна. Тогава и $R' := \bigcap F$ е множество от наредени двойки, в частност релация. Ясно е и, че $R \subseteq R' \subseteq A^2$. Нека $a, b, c \in R'(= \bigcap F), aR'b \wedge bR'c$. Тогава $\forall P \in F : aPb \wedge bPc \stackrel{\text{транз. на } P}{\Rightarrow} \forall P \in F : aPc \Rightarrow (a,c) \in \bigcap F = R'$, което доказва, че R' е транзитивна.
Получихме, че $R' \supseteq R$ е транзитивна и за всяка друга транзитивна $P \supseteq R$ е изпълнено $R' \subseteq R$, тоест е най-малка по отношение на включването. Оттук излиза, че така намереното сечение R', което е единствено (от единственост на сечението), е именно търсеното транзитивно затваряне. ■

Алтернативен начин да се докаже единственост е като се покаже, че транзитивното затваряне на R е $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, където $R^n = \underbrace{R \circ R \cdots \circ R}_{n}$, като за това би се наложило да се ползва индукция.

Лема 2. *Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава R е частична наредба тстк няма контури.*

Лема 3. *Нека A е крайно множество, тогава всяка релация на частична наредба $R \subseteq A^2$ има поне един минимален и поне един максимален елемент.*

Решение. Ще докажем, че съществува минимален елемент, съществуването на максимален е аналогично. Да допуснем противното, че няма такъв, тоест $\forall a \in A\ \exists b \in A \backslash \{a\} : bRa$. Нека a_0 е произволен, тогава от горното съществува $a_1 \neq a_0 : a_1Ra_0$, $\exists a_2 \neq a_1 : a_2Ra_1$. Така може да бъде генерирана редица $a_0, a_1, \cdots, a_{|A|}$ такава, че $\forall i < |A| : a_{i+1}Ra_i$. В редицата има $|A|+1$ члена, откъдето по принципа на Дирихле съществуват поне два еднакви члена, нека това са a_i, a_j. Тогава подредицата от елементи с индекси между i и j включително образува контур, което е противоречие с факта, че R е частична наредба (по горната лема). ■

Теорема 1 (*)**.** *За всяка частична наредба R съществува поне едно линейно разширение R' на R.*

3 Релация на еквивалентност

Дефиниция 9 (клас на еквивалентност)**.** Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всяко $a \in A$ дефинираме $[a] = \{b \in A | aRb\}$.

Теорема 2. *$F = \{[a] | a \in A\}$ е разбиване на множеството A.*

Задача 7. Нека $R \subseteq A^2$ е преднаредба (транзитивна и рефлексивна), дефинираме $[a] := \{b \in A \mid aRb \wedge bRa\}$. Тогава $F := \{[a] |\ a \in A\}$ е разбиване на множеството A.

Решение. От дефиницията на $[a]$ директно следва, че F е фамилия от подмножества на A, откъдето и $\bigcup F \subseteq A$. При това множествата $[x]$ са непразни, защото $\forall x \in A : xRx \Rightarrow \forall x \in A : x \in [x]$ (от рефлексивността на R). Това ни дава и $A \subseteq \bigcup F \Rightarrow A = \bigcup F$. Получихме, че е F покриване на A.
Нека $a, b \in A$ и $[a] \cap [b] \neq \varnothing \Rightarrow \exists c \in A : c \in [a] \wedge c \in [b] \Rightarrow (aRc \wedge cRa) \wedge (bRc \wedge cRb)$. Разглеждаме произволен $a' \in [a]$, тогава $aRa' \wedge a'Ra$. От $a'Ra, aRc, cRb$ и транзитивността на R следва, че $a'Rb$,

а от bRc, cRa, aRa' следва bRa', отново по транзитивност. Така $a'Rb \wedge bRa' \Rightarrow a' \in [b]$. Но a' беше произволен елемент на $[a]$, значи $[a] \subseteq [b]$.
По аналогичен начин (наобратно) доказваме, че $[b] \subseteq [a] \Rightarrow [a] = [b]$. Това показва, че два от така дефинираните класове се пресичат тстк когато са равни, с други думи всеки два различни класа имат празно сечение, $\forall a, b \in A : [a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$, откъдето следва, че покриването е и разбиване. ■

Задача 8. (*) Дадено е множество X с $|X| = n$. Да се намери:

$$\sum_{A,B \subseteq X} |A \cap B|$$

Решение. дефинираме релацията $\sim \subseteq \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$. Като $(A, B) \sim (C, D)$ точно когато $(A = C \vee A = X \backslash C) \wedge (B = D \vee B = X \backslash D)$. Лесно се проверява, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Всеки клас на релацията се състои от четири двойки от вида: (A, B), $(A, X \backslash B)$, $(X \backslash A, B)$, $(X \backslash A, X \backslash B)$, всяка двойка подмножества участва в точно един такъв клас, така че класовете са $2^n.2^n/4 = 4^{n-1}$. Сега правим наблюдението, че всеки елемент $x \in X$ принадлежи на точно едно сечение $P \cap Q$ на двойка (P, Q) от всеки клас. Значи всеки елемент участва в 4^{n-1} такива сечения, или сумарната мощност е: $n.4^{n-1}$. ■

Задача 9. (*) Дадени са n точки в равнината, $n \geq 5$. Построени са $n + 1$ различни триъгълника, да се докаже, че някои два от тях имат точно една обща точка.

Решение. Допускаме противното, тоест, че всеки два различни триъгълника имат точно 0 или 2 общи върха. Дефинираме релацията $\sim \subseteq T^2$ (T е множеството от триъгълниците), като $\triangle_1 \sim \triangle_2$ тстк $\triangle_1$ имат поне 2 общи върха $\triangle_2$. Релацията е очевидно *рефлексивна* (всеки триъгълник има поне 2 общи върха със себе си) и *симетрична* (ако $\triangle_1$ има поне 2 общи върха с $\triangle_2$, то и обратното е вярно).
транзитивност: Нека $\triangle_1 \sim \triangle_2$ и $\triangle_2 \sim \triangle_3$. Понеже $\triangle_2$ има поне 2 общи върха с $\triangle_1$, както и с $\triangle_3$, а самият той има 3 върха (...понеже е триъгълник, нали), то от Дирихле (2+2>3) ще има връх, който е общ и за трите триъгълника, откъдето $\triangle_1$ и $\triangle_3$ имат поне 1 общ връх. Но по допускане няма триъгълници с точно един общ връх, така че те трябва да имат поне 2 общи върха, или $\triangle_1 \sim \triangle_3$. □
Получаваме, че релацията $\sim$ е релация на еквивалентност. Да разгледаме произволен клас на еквивалентност на тази релация, нека k е броят на различни върхове/точки на триъгълници от разглеждания клас:

- Ако $k = 3$, то в класа има точно 1 триъгълник;
- Ако $k = 4$, то в класа има не повече от 4 триъгълника с върхове измежду тези точки (все пак от 4 точки могат да се конструират не повече от $\binom{4}{3} = 4$ триъгълника);
- Ако $k > 4$, то в класа има не повече от k триъгълника:
  Нека в класа има поне 2 различни триъгълника, ABC и ABD (от дефиницията на релацията следва, че те имат две общи точки). Нека T_1 е произволна точка в разглеждания клас на еквивалентност, различна от горните 4. Ако тази точка участва в триъгълник $\triangle$, то твърдим, че другите две точки на този триъгълник са именно A и B. Ако не са, то от $\triangle \sim ABC$, една от точките на $\triangle$ е C, по аналогична причина (от $\triangle \sim ABD$) една от точките на $\triangle$ е D. Но тогава $\triangle = T_1CD$, което обаче няма поне 2 общи точки с ABC , което е невъзможно. Значи всеки триъгълник в нашия клас на еквивалентност, имащ точка T_i, която не е измежду A, B, C, D съдържа A и B. Ако всички точки в класа са $A, B, C, D, T_1, ...T_m$, то имаме не повече от $4 + m = k$ триъгълника с върхове тези точки (понеже от A, B, C, D могат да се конструират до 4 триъгълника, а всички останали триъгълници имат вида ABT_i);

В крайна сметка (от трите случая) излиза, че броят триъгълници не би трябвало да надвишава този на точките, противоречие с условието. Значи винаги има два триъгълника с точно 1 общ връх.
■