

# Рекурентни уравнения

”Историята са повтаря”

Декември 2025

## Алгоритъм

**Дефиниция 1.** (рекурентно уравнение) Виж дефиниция 1.

Ще покажем метод за решаване на рекурентни уравнения от вида:

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{P_1(n).b_1^n + \dots + P_l(n).b_l^n}_{\text{нехомогенна част}},$$

където:  $c_1, \dots, c_{n-k}, b_1, \dots, b_l$  са константи,  $b_1, \dots, b_l$  са две по две различни,  $P_1(n), \dots, P_l(n)$  са (крайни) полиноми на  $n$ .

За да отговаря едно уравнение на горния вид са особено важни следните:

- уравнението има крайна история (т.e.  $k, l$  са константи)
- уравнението има константни коефициенти

**Забележка** (начални условия). Самото уравнение може да се реши еднозначно (да се намери формула за общия член, в която да няма неизвестни), стига да са дадени стойности за поне  $k$  члена (начални условия).

Разглеждаме само хомогенната част, в нея заменяме  $a_i$  с  $x^i$ , така получаваме равенството:

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \dots + c_k x^{n-k} \quad | : x^{n-k}$$

$$x^k = c_1 x^{k-1} + \dots + c_k x^0 \quad (1) / \text{характеристично уравнение} /$$

От решенията на характеристичното уравнение образуваме мултимножеството (мулти, защото някои корени могат да са двойни):

$$M_1 = \{x_0 \mid x_0 \text{ е решение на } (1)\}_M$$

От нехомогенната част образуваме и второ мултимножество, чиито елементи са основите на експонените (т.e.  $b_i$ -тата), като всяка ще участва в множеството  $\deg_i + 1$  на брой пъти, където  $\deg_i + 1$  е степента на полинома  $P_i(n)$ :

$$M_2 = \left\{ \underbrace{b_1, b_1, \dots, b_1}_{\deg(P_1(n)) + 1}, b_2, \dots, \underbrace{b_l, b_l, \dots, b_l}_{\deg(P_l(n)) + 1} \right\}_M$$

Вземаме обединението на двете мултимножества:  $M = M_1 \cup M_2$  (забележете, че  $|M| = |M_1| + |M_2| = k + l$ ). Тогава общото решение на рекурентното уравнение е:

$$a_n = \underbrace{A_1 n^0 x_1^n + A_2 n^1 x_1^n + \dots + A_{r_1} n^{r_1-1} x_1^n}_{r_1 \text{ на брой}} + \dots + \underbrace{A_{r_t} n^0 x_t^n + \dots + A_{|M|} n^{r_t-1} x_t^n}_{r_t \text{ на брой}},$$

където  $x_1, \dots, x_t$  са различните стойности в мултимножеството  $M$ ,  $r_i$  е съответно броят срещания на  $x_i$  в  $M$ , а  $A_1, \dots, A_{|M|}$  са коефициенти, чиито точни стойности излизат от базовите случаи. ■

\*Полезно. Понякога самата формула за общия член е сравнително очевидна (или вече известна), но минаването през алгоритъма, който ще доведе до нея, е тежко. В такъв случай алтернативен вариант е да докажем валидността на формулата директно по индукция.

# 1 Задачи по алгоритъма

**Задача 1.** Кои от следните рекурентни уравнение могат да бъдат решени с горепосочения алгоритъм?

- a)  $a_n = 2a_{n-1} + (n^2 + 3n - 4)2^n + 3^n$
- б)  $a_n = 3a_{n-2} + (2n - 3)3^n + 5^n$
- в)  $a_n = a_{n-1} + (2n - 3)3^n + (n^2 + 3)3^n$
- г)  $a_n = 3a_{n-1} + (3n^2 + 5n - 4)2^{n+2}$
- д)  $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1}$
- е)  $a_n = (n - 1)a_{n-1} + 3n2^{n+1}$
- ж)  $a_n = a_{n-1} + n^2 + 2n + 5$
- з)  $a_n = 4a_{n-1} + (n^2 - 4)2^{2n+1} + (n - 1)2^{2n-1}$
- и)  $a_n = a_{n-1} + 4^{n/2}$
- к)  $a_n = a_{n-1} + \dots + a_1$
- л)  $a_n = 2a_{n-2} + 4^{n/2}$
- м) (\*)  $a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n$

*Решение.* а) може, б) може, в) може (свежда се до  $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n)3^n$ ),  
г) може (свежда се до  $a_n = 3a_{n-1} + (12n^2 + 20n - 16)2^n$ ),  
д) може (свежда се до  $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n$ ),  
е) не може (неконстантни коефициенти),  
ж) може (свежда се до  $a_n = a_{n-1} + (n^2 + 2n + 5)1^n$ ),  
з) може (свежда се до  $a_n = 4a_{n-1} + (2n^2 - 8)4^n + (\frac{n}{2} - \frac{1}{2})4^n = 4a_{n-1} + (2n^2 + \frac{n}{2} - \frac{17}{2})4^n$ ),  
и) може (свежда се до  $a_n = a_{n-1} + 2^n$ ),  
к) може (въщност се свежда до  $a_n = 2a_{n-1}$ ), л) може;  
м) трябва да се обрне внимание, че индексът отляво е  $n + 1$ , а не  $n$ , тогава вдясно полиномите трябва да са на  $n + 1$ , както и степените на експонентите, в случая можем да сведем в такъв вид:  
$$a_{n+1} = a_n + (3n^2 + 9n + 6)3^n = a_n + ((n + 1)^2 + (n + 1))3^{n+1} \blacksquare$$

**Задача 2.** Да се решат следните рекурентни уравнения:

- $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , ако  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ;
- (\*)  $a_{n+1} = 10a_n - 21a_{n-1} + 3^n$ , ако  $a_0 = 1, a_1 = 4$ ;
- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3^{n+2}$ , ако  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ;
- (\*)  $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$ , ако  $a_0 = 1, a_1 = 5$ ;
- (\*)  $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2}$ , ако  $a_0 = 3, a_1 = 7$ ;
- $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + (-1)^n$ , ако  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ;

*Решение.*

- За упражнение
- Единствено ще обрнем внимание, че даденото е еквивалентно на  $a_n = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + 3^{n-1} = 10a_{n-1} - 21a_{n-2} + \frac{1}{3}3^n$  (разликата е, че приведохме израза във форма, в която индексът отляво си е  $n$ , а не  $n + 1$ , което искаме, за да не стават обърквания). Оттук нататък *решението остава на Вас :)*
- За упражнение

- Уравнението има само хомогенна част. Характеристичното му уравнение е  $x^2 = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$ . Тук обаче има проблем, поне на пръв поглед, дискриминантата е отрицателна, корени няма... по-точно реални корени няма (но пък си има комплексни):  $x_1 = 1 - 2i, x_2 = 1 + 2i \Rightarrow M = M_1 = \{1 - 2i, 1 + 2i\}$ , откъдето общото решение на уравнението е:  $a_n = C_1(1 - 2i)^n + C_2(1 + 2i)^n$ . Знаем, че  $a_0 = 1, a_1 = 5 \Rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = a_0 = 1 \\ C_1(1 - 2i) + C_2(1 + 2i) = a_1 = 5 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{1}{2} + i \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} + i\right)(1 - 2i)^n + \left(\frac{1}{2} - i\right)(1 + 2i)^n = \left(\frac{1+2i}{2}\right)(1-2i)^n + \left(\frac{1-2i}{2}\right)(1+2i)^n = \frac{5}{2}(1-2i)^{n-1} + \frac{5}{2}(1+2i)^{n-1} \blacksquare$$

*Забележка.* Макар коефициентите да са комплексни, общият член  $a_n$  си остава реално число (даже цяло).

- За упражнение (не ми се пише повече :/)
- За упражнение

**Задача 3.** (двойно рекурентно уравнение) Нека  $a_0 = 0, b_0 = 1$  и  $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$ . Да се намерят формули за  $a_n$  и  $b_n$ .

*Решение.* Малко повече за този тип задачи:

\*Полезно: обикновено идеята при решаване на рекурентни уравнения, в които участват няколко взаимно свързани рекурентни редици, е чрез елементарни преобразувания да намерим прости рекурентни уравнения (с елементите на една редица, а не на няколко, както по начало).

Разглеждаме разликите:

- от  $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2b_{n-1}$ ;  
-  $b_n - b_{n-1} = (-a_{n-1} + 4b_{n-1}) - (-a_{n-2} + 4b_{n-2}) = -(a_{n-1} - a_{n-2}) + 4(b_{n-1} - b_{n-2})$ , заместваме от горното  $\Rightarrow b_n - b_{n-1} = -2b_{n-2} + 4(b_{n-1} - b_{n-2}) = 4b_{n-1} - 6b_{n-2}$ ;  
 $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$  има само хомогенна част, характеристичното уравнение е  $x^2 = 5x - 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3 \Rightarrow M = \{2, 3\} \Rightarrow b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ . От  $b_0 = 1, b_1 = 4 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2 \Rightarrow b_n = -2^n + 2 \cdot 3^n$ . Сега например можем да заместим  $b_{n-1} = -2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$  директно в  $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \Rightarrow a_n = a_{n-1} - 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{2}2^n + \frac{2}{3}3^n \Rightarrow M_1 = \{1\}_M, M_2 = \{2, 3\}_M \Rightarrow M = \{1, 2, 3\}_M \Rightarrow a_n = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n$ . От  $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 10 \Rightarrow A_1 = -3, A_2 = 4, A_3 = -1 \Rightarrow a_n = -3 + 4 \cdot 2^n - 3^n = -3 + 2^{n+2} - 3^n$ . ■

**Задача 4.** Колко  $n$ -цифрени цели положителни числа съдържат в записа си четен брой петици (включително нито една)?

*Решение.* Нека  $a_n$  е броят  $n$ -цифрени числа, съдържащи нечетен брой петици в записа си, а  $b_n$  е броят  $n$ -цифрени числа, съдържащи четен брой петици в записа си. Имаме  $a_1 = 1, b_1 = 8, a_2 = 17, b_2 = 73$ . Разглеждаме  $n$ -цифreno число с четен брой петици, имаме два случая:

- Ако последната цифра е 5, то при премахването ѝ, оставащото число е с  $n - 1$  цифри и нечетен брой петици в записа си (такива числа има  $a_{n-1}$ ).
- Ако последната цифра не е 5 (тоест за нея има 9 други възможности), то при премахването ѝ, оставащото число е с  $n - 1$  цифри и отново четен брой петици в записа си (такива числа има  $b_{n-1}$ ).

От направените съображения  $b_n = a_{n-1} + 9b_{n-1}$ . За да сведем до решаване на едно уравнение, се сещаме, че  $a_n + b_n = 9 \cdot 10^{n-1} \Rightarrow b_n = (9 \cdot 10^{n-2} - b_{n-1}) + 9b_{n-1} = 8b_{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} = 8b_{n-1} + \frac{9}{100} \cdot 10^n$ .

Конструираме  $M_1 = \{8\}_M, M_2 = \{10\}_M \Rightarrow M = \{8, 10\}_M \Rightarrow b_n = C_1 8^n + C_2 10^n$ . От базовите случаи следва, че  $8C_1 + 10C_2 = 8$  и  $64C_2 + 100C_2 = 73 \Rightarrow C_2 = \frac{9}{20}, C_1 = \frac{7}{16} \Rightarrow b_n = \frac{7}{16}8^n + \frac{9}{20}10^n$ . ■

**Задача 5.** Да се намерят формули за сумите:

- $s_n = s_{n-1} + \dots + s_1, s_1 = 1;$
- $s_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2;$
- $s_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3;$

*Решение.*

- На пръв поглед това уравнение е с некрайна история и алгоритъмът е неприложим, но пък може да бъде сведено до такова с крайна:  $s_n - s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i - \sum_{i=1}^{n-2} s_i = s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2s_{n-1} \Rightarrow s_n = 2^{n-1}$ . ■
- $s_n = s_{n-1} + n^2 = s_{n-1} + n^2 \cdot 1^n$  Характеристичното уравнение е тривиално:  $x^n = x^{n-1} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 = \{1\}_M$ .

От нехомогенната част пък следва, че  $M_2 = \{1, 1, 1\}_M$ , значи  $M = \{1, 1, 1, 1\}_M \Rightarrow s_n = C_1 1^n n^0 + C_2 1^n n^1 + C_3 1^n n^2 + C_4 1^n n^3$ . Имаме базови случаи  $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 5, s_3 = 14 \Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5 \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{6}, C_3 = \frac{1}{2}, C_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow s_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 =$$

$$= \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ■$$

- За упражнение, Отг.  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

**Задача 6.** Дадена е правоъгълна таблица  $2 \times n$ , по колко начина тя може да бъде покрита с домино плочки  $1 \times 2$ , като последните могат да се завъртат, но не и застъпват.

*Решение.* Нека с  $a_n$  означим броя на покритията за лента с размери  $2 \times n$ . Ясно е, че  $a_0 = 1, a_1 = 1$ . За  $a_n$  имаме два случая:

- На последната колона стои едно домино (изправено). Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери  $2 \times (n-1)$ , които са точно  $a_{n-1}$ .
- На последната колона стоят две хоризонтални домино плочки. Те покриват и предната колона. Възможните такива покрития са колкото тези за лента с размери  $2 \times (n-2)$ , които са точно  $a_{n-2}$ .

Двета случая се независими и допълващи се, от принципа за събиране:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , Което ни дава формулата за числата на Фиbonacci, изместени с едно, т.e.  $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ . ■

**Задача 7.** По колко начина човек може да се изкачи по стълба с  $n$  стъпала, ако е възможно да се качва и през стъпало (тоест да минава на следващото или по-следващото)?

- Да се реши същата задача, ако се знае, че на стъпало с номер  $i, 1 < i < n$  не може да се стъпва (да кажем е счупено).

*Решение.* Ако  $a_n$  е броят начини, по които може да се изкачат  $n$  стъпала, то явно  $a_0 = 1, a_1 = 1$ . Човекът може да се качи на стъпало  $n$  от стъпало  $n-1$  или от стъпало  $n-2$ , тоест  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Отново получаваме редицата на Фиbonacci, изместена с един член напред, значи  $a_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ . ■

Сега за втората част, до стъпало  $i-1$  промяна в разсъжденията няма. Понеже  $i$  е счупено,  $a_i = 0, a_{i+1} = a_{i-1}$ . Оттам нататък рекурентната зависимост отново е в сила. Можем да считаме, че това е нова рекурентна редица,  $b_0 = a_i = 0, b_1 = a_{i+1} = a_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{i-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{i-1} = F_i$ , тогава до стъпало  $n$  можем да се изкачим по  $b_{n-i}$  начина, където  $b_{n-i} = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-i} + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-i}$ , като от

$$b_0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2 \text{ и от } b_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = C_1\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = C_1\sqrt{5} \Rightarrow C_1 = \frac{F_i}{\sqrt{5}}.$$

Така крайният отговор е  $b_{n-i} = \frac{F_i}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} - \frac{F_i}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-i} = F_i F_{n-i}$ . ■

Това горе е малко тъп начин да се реши втората час, вместо това можем да мислим за двете изкачвания като независими процеси. Щом трябва да се прескочи стъпало  $i$ , трябва да се мине от стъпало  $i-1$  направо на  $i+1$ . Явно търсеният брой е произведението на двете:

*answer* = (броя начини, по които можем да стигнем до  $i-1$ )  $\times$  (броя начини, по които можем да стигнем, от  $i+1$  до  $n$ ) =  $F_i F_{n-i}$ . ■

## 2 По-трудни задачи

За повечето от задачите по-долу по нищо не личи, че се свеждат именно до решаване на рекурентно уравнение, което и ги прави по-нетривиални.

**Задача 8** (*derangements*). Колко са пермутациите на числата от 1 до  $n$  такива, че никое число не е на мястото си (т.e. число  $i$  не е на позиция  $i$ ), да се даде рекурентна формула?

*Решение.* Тази задача вече сме решавали (само че с друг подход - с принципа на включване и изключване). Тук обаче ще търсим рекурентно решение. Нека с  $D_n$  бележим броя на тези пермутации. Лесно се вижда, че  $D_1 = 0, D_2 = 1$ . За  $n > 2$  разглеждаме произволна пермутация с исканото свойство. Значи на позиция 1 стои число  $x \neq 1$ . Да разгледаме два случая:

- На позиция  $x$  стои 1 (тоест 1 и  $x$  са си разменили местата). Можем да съобразим, че броят на пермутациите решения, за които това е изпълнено е  $D_{n-2}$ . Причината е, че застопорявайки 1 и  $x$ , съдохме задачата до разпределение на оставащите числа:  $2, 3, \dots, x-1, x+1, \dots, n$  върху собствените им позиции:  $2, 3, \dots, x-1, x+1, \dots, n$  така, че никое да не стои на мястото си. Ясно е, че задачата е същата като намирането на деранжименти на числата  $1, \dots, n-2$ , единствено "имената" на числата не са същите, това са  $D_{n-2}$  валидни пермутации.
- На позиция  $x$  не стои 1, а някое друго число. Вече застопорихме  $x$  на първа позиция, тоест търсим броя разпределения на числата  $1, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$  върху позиции  $2, 3, \dots, n$  така, че никое число (това важи за всички числа без 1 и  $x$ ) не е на позицията си и 1 не е на позиция  $x$ . Тъй като позиция 1 не участва в разглежданите (там вече стои  $x$ ), можем да си мислим, че позиция  $x$  е новата позиция 1, все едно сменяме името ѝ на  $\tilde{1}$ . Така съдохме до: "по колко начина можем да разпределим числата  $1, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$ " на позиции  $\tilde{1}, 2, \dots, x-1, x+1, \dots, n$  така, че никое число не е на позицията си, това е същата задача, има  $D_{n-1}$  такива пермутации.

Понеже  $x$  е произволно,  $x \neq -1$ , а за избора му има  $n-1$  варианта и двата случая са независими и допълващи се  $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ , което обаче не е в хубавия вид за алгоритъма. ■

### *derangements*

**Задача 9** (\*). Да се намери броят на всички  $k$ -елементни низове, съставени от символите  $a, b, c$ , в които няма два съседни букви  $b$  и всички букви  $b$  са вляво от всички букви  $c$ . Изисква се точен отговор (числена формула).

*Решение.* За краткост ще наричаме низовете, отговарящи на двете условия (да не съдържат последователност " $bb$ ", както и буква ' $c$ ' вляво от ' $b$ ') и независимо тяхната дължина, *решения*.

Да обърнем внимание, че всеки подниз на решение също е решение. В частност, всеки префикс/суфикс на решение отново е такова.

Нека с  $ans_n$  означим бройката на всички решения с дължина  $n$ , а с  $f_n$  бройката на тези от тях, в които не се среща символ  $c$ . Тогава  $ans_1 = 3, f_1 = 2, ans_2 = 7, f_2 = 3, ans_3 = 16, f_3 = 5$  и т.н.

Ще покажем два възможни начина за решаване на задачата:

## 1 н. /предложи Велислав Гърков/)

Можем да разгледаме 4 различни случая за решението спрямо префиксите, с които започват:

- решения от вида **a** · · · : Понеже наличието на буква  $a$  не налага други ограничения, броят на низовете от този вид съответства на броя решения с дължина  $n - 1$ , а именно  $\underline{ans}_{n-1}$ .
- решения от вида **c** · · · : Следващите букви от низа могат да са само  $a, c$  (но не и  $b$ ). Други допълнителни ограничения няма, така че решението от този вид е  $\underline{2^{n-1}}$ .
- решения от вида **ba** · · · : Наличието на префикс  $ba$  не налага други ограничения за оставащите букви в низа. Единствено те трябва да изпълняват началните условия, тоест да образуват решение с дължина  $n - 2$ . Следователно низовете от разглеждания вид са колкото решението с дължина  $n - 2$ , тоест  $\underline{ans}_{n-2}$ .
- решения от вида **bc** · · · : Понеже вече имаме поставена буква  $c$ , на оставащите  $n - 2$  позиции в низа може да стоят само буквите  $a, c$ , като други ограничения няма. Низовете от този вид са  $\underline{2^{n-2}}$ .

Получаваме  $ans_n = ans_{n-1} + 2^{n-1} + ans_{n-2} + 2^{n-2} = ans_{n-1} + ans_{n-2} + 3 \cdot 2^{n-2} = ans_{n-1} + ans_{n-2} + \frac{3}{4} \cdot 2^n$ .

Мултимножеството, получено от алгоритъма е  $M = \{2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}_M \Rightarrow$

$$ans_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_3 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

От базовите случаи  $ans_0 = 1, ans_1 = 3, ans_2 = 7, ans_3 = 16$  получаваме:

$$ans_n = 3 \cdot 2^n + (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}}) \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (-1 + \frac{2}{\sqrt{5}}) \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n. \blacksquare$$

## 2 н.)

При горе направените означения ще докажем следните (за  $n \geq 2$ ):

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_n = F_{n+2} \\ ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

За начало, разглеждаме решението в които не се среща символът  $c$ . Тях можем да разделим на два вида - такива, завършващи на  $a$ , и такива, завършващи на  $b$ :

- · · **a**: Префиксът, съставен от първите  $n - 1$  символа на всеки такъв низ, отново съдържа само буквите  $a, b$  и отговаря на началните условия. Следователно броят низове от вида · · · **a** съответства на броя на решението с дължина  $n - 1$ , в които няма буква  $c$ , тоест е точно  $\underline{f_{n-1}}$ .
- · · **b**: Разглежданите низове от втория вид завършват на  $b$ , следователно предпоследната им буква трябва да е  $a$ , тоест имат вида · · · **ab**. За буквите преди това ограничения няма, освен да са  $a, b$  и да съставят решение. В крайна сметка, бройката низове от текущия вид съответства на бройката решенија с дължина  $n - 2$  и съставени само от буквите  $a, b$ , или е точно  $\underline{f_{n-2}}$ .

Оттук получаваме рекурентната зависимост  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  и понеже тя е същата като тази на редицата на Фиbonачи, а също  $f_1 = 2 = F_3, f_2 = 3 = F_4$ , то  $f_n = F_{n+2}$  (тоест редицата  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  е редицата на Фиbonачи, изместена с два члена "наляво").

Решението с дължина  $n > 1$  можем да разбием на такива, завършващи на  $b$  и такива, завършващи на  $a$  или  $c$ .

Понеже преди  $b$  може да стои единствено  $a$ , първите имат видът · · · **ab**, а както показвахме по-горе, такива низове с дължина  $n$  са  $\underline{f_{n-2}}$  на брой.

За завършващите на  $a$  или  $c$  префиксът, определен от оставащите  $n - 1$  символа, е произволно решение с дължина  $n - 1$ , така че те са  $\underline{2 \cdot ans_{n-2}}$  на брой (по 2, защото може да завършват както на  $a$ , така и на  $c$ ).

В крайна сметка,  $ans_n = 2ans_{n-1} + f_{n-2} = 2ans_{n-1} + F_n = 2ans_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Мултимножеството, получено от алгоритъма е  $M = \{2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}_M \Rightarrow ans_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_3 \cdot \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Отново получаваме:

$$ans_n = 3 \cdot 2^n + (-1 - \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (-1 + \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n. \blacksquare$$

*Поука:* Макар въвеждането на още зависими редици (както дефинирането на  $f_n$  във второто решение) с цел разбиване на търсените обекти на подвидове понякога да носи по-леки съобразления, то обикновено води и до по-тежки системи от зависимости. Ето защо придръжането към модел с една рекурентна редица е за предпочитане.

**Задача 10.** (\*) Да се докаже, че числото  $(4+\sqrt{7})^{2024} + (4-\sqrt{7})^{2024}$  е цяло и да се намери последната му цифра.

*Решение.* Сепчаме се да представим числото като член на рекурентна редица.. Нека  $a_n = 1 \cdot (4 + \sqrt{7})^n + 1 \cdot (4 - \sqrt{7})^n$  - общо решение/уравнение. Тогава  $a_0 = 2, a_1 = 8$ . Ако разглеждаме  $a_n$  като рекурентно уравнение, то  $M = \{4 + \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7}\}$  са решения на характеристичното му уравнение. Навсякърно последното е от втора степен (с два корена  $x_1 = 4 + \sqrt{7}$  и  $x_2 = 4 - \sqrt{7}$ ), тогава то би имало вида  $x^2 = bx + c$ , знаем корените му, значи можем да ползваме формулите на Виет (за  $a = 1$ ):  $-(-b) = x_1 + x_2 = 8, -c = x_1 x_2 = 9$ , на което съответства рекурентното  $a_n = 8a_{n-1} - 9a_{n-2}$ .

Понеже  $a_0, a_1, 8, -9 \in \mathbb{Z}$ , а целите числа остават цели след събиране и умножение, така че и  $a_n$ , в частност  $a_{2024} \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Последната цифра е остатъкът на числото при деление на 10, т.е. търсим  $a_{2024} \pmod{10}$ . Понеже остатъците при деление на 10 са краен брой, то в даден момент те ще започнат да се повтарят. Търсим "pattern":

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\dots$
$a_i \pmod{10}$	2	8	6	6	4	8	8	2	4	4	6	2	2	8	$\dots$

Вижда се, че на всеки 12 члена редицата от остатъците се повтаря, ние се интересуваме от  $a_{2024}$ ,  $2024 \pmod{12} = 8 \Rightarrow$  остатъкът ще е същият като на  $a_8$ , т.е. 4.  $\blacksquare$

**Задача 11.** (\*\*\*) Намерете цифрите директно вляво и вдясно от десетичната запетая на числото  $(\sqrt{7} + \sqrt{13})^{2024}$ .

*Решение.* За начало да намерим последната цифра. Разглеждаме  $a_{2024} = (\sqrt{7} + \sqrt{13})^{2024} + (\sqrt{7} - \sqrt{13})^{2024}$ . Всъщност второто събирамо е пренебрежимо малко, така че то не би се отразило на цифрата на единиците на сумата, т.е.  $(\sqrt{7} + \sqrt{13})$  и  $a_{2024}$  имат еднаква последна цифра на цялата част. Сведохме до намиране на цифрата на единиците на  $a_{2024}$ .

Аналогично на горната задача, можем да гледаме на  $a_n = (\sqrt{7} + \sqrt{13})^n + (\sqrt{7} - \sqrt{13})^n$  като общо решение на рекурентно уравнение. Характеристичното уравнение на последното би било  $x^2 = ((\sqrt{7} + \sqrt{13}) + (\sqrt{7} - \sqrt{13}))x - (\sqrt{7} + \sqrt{13})(\sqrt{7} - \sqrt{13}) = 2\sqrt{7}x + 6 \Rightarrow a_n = 2\sqrt{7}a_{n-1} + 6a_{n-2}$

**Задача 12.** (\*) Да се намерят всички функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , за които  $f(f(x)) = 21x - 4f(x) \forall x \in \mathbb{N}$ .

*Решение.* Разглеждаме произволно  $a_0 \in \mathbb{N}$ , нека означим  $a_1 := f(a_0), \dots, a_n := f^n(a_0), \dots$ , получаваме безкрайна редица. Заместваме  $x$  в даденото по условие уравнение с  $a_n, f(f(a_n)) = 21a_n - 4f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 21a_n - 4a_{n+1}$ . Така образуваме характеристичното уравнение  $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$  с корени  $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 3$ . Значи общото уравнение има вида  $a_n = C_1(-7)^n + C_23^n, C_1, C_2$  са коефициенти. Имаме също  $a_0 = C_1(-7)^0 + C_23^0 = C_1 + C_2$  (1), както и  $a_1 = -7C_1 + 3C_2$  (2).

Да забележим, че независимо знака на  $C_1$ , при  $C_1 \neq 0, n$  нечетно :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , което би било противоречие с  $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$ . Заключаваме, че  $C_1 = 0$ . Оттук, от (1) и от (2) директно  $a_0 = C_2, a_1 = 3C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 3C_2 = 3a_0$ , тоест  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 3x$  е единствен кандидат за решение!

Правим проверка в условието:  $f(f(x)) = 3(3x) = 9x = 21x - 4(3x) = 21x - 4f(x)$ , тоест върши работа.  $\blacksquare$

**Задача 13.** (\*) Да се намерят всички функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , за които  $f(f(x)) = 6x - f(x) \forall x \in \mathbb{N}$ .

*Решението* повторя това на предната задача. Разглеждаме произволно  $a_0 \in \mathbb{N}$ , нека означим  $a_1 := f(a_0), \dots, a_n := f^n(a_0), \dots$ , получаваме безкрайна редица. Заместваме  $x$  в даденото по

условие уравнение с  $a_n$ ,  $f(f(a_n)) = 6a_n - f(a_n) \Leftrightarrow a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$ . Така образуваме характеристичното уравнение  $\lambda^2 + \lambda - 6$  с корени  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$ . Значи общото уравнение има вида  $a_n = C_1(-3)^n + C_22^n$ ,  $C_1, C_2$  са коефициенти. Имаме също  $a_0 = C_1(-3)^0 + C_22^0 = C_1 + C_2$  (1), както и  $a_1 = -3C_1 + 2C_2$  (2).

Да забележим, че независимо знака на  $C_1$ , при  $C_1 \neq 0, n$  - нечетно :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , което би било противоречие с  $a_n = f^n(a_0) \in \mathbb{N}$ . Заключаваме, че  $C_1 = 0$ . Оттук, от (1) и от (2) директно  $a_0 = C_2, a_1 = 2C_2 \Rightarrow f(a_0) = a_1 = 2C_2 = 2a_0$ , тоест  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$  е единствен кандидат за решение!

Правим проверка в условието:  $f(f(x)) = 2(2x) = 4x = 6x - 2x = 6x - f(x)$ , тоест върши работа. ■

**Задача 14.** По колко начина числата от 1 до  $n$  могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от *някое* от числата вляво от него.

*Решение.* Ще покажем две възможни решения:

1 н.) /комбинаторни съобразжения/ Нека първият елемент в редицата е  $k$ . Сравнително лесно се вижда, че числата  $k+1, k+2, \dots, n$ , които се намират някъде надясно, трябва да са в точно този ред (в противен случай ще се наруши условието за наличие на елемент с разлика 1 вляво от всеки). Аналогично числата  $k-1, k-2, \dots, 1$  също трябва да са в този (от подобни съобразжения). Сега остава да видим колко са пермутациите на числата  $1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ , които имат като подредици  $k+1, k+2, \dots, n$  и  $k-1, k-2, \dots, 1$ . Имаме  $n-1$  позиции, от тях трябва да изберем например на кои места ще стоят числата по-малки от  $k$  (оттам нататък нещата са еднозначно определени) - има  $\binom{n-1}{k-1}$ . Понеже  $k, 1 \leq k \leq n$  е произволно число, то общо редиците/пермутациите са  $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^n 1^n = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$ . ■

\*2 н.) /рекурентно решение/ Нека  $T_n$  е броят такива редици при конкретно  $n$ . Първо докажем следното помошно твърдение:

**Твърдение:** За всяка редица, отговаряща на условието, последният член е винаги или  $n$ , или 1.  
**Д-во:** Да обърнем внимание на броя възможни различни ненаредени двойки числа с разлика едно - има общо  $n-1$  такива двойки ( $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}$ ). Нецо повече, в исканите пермутации някъде вляво на всяко число  $x$  (изключено първото) трябва да стои друго число  $y$  такова, че  $|x-y|=1$ , ако има няколко такива  $y$ , гледаме само последното. Да наречем такава двойка "връзка" и да я означим с множеството  $\{x, y\}$ . Тези "връзки" са различни и за всяка валидна редица те трябва да са точно  $n-1$  (за всеки елемент освен първия има по една). Също така "връзките" са измежду написаните по-горе двуелементни множества от числа с разлика едно, които обаче също са точно  $n-1$  на брой. Значи "връзките" съвпадат с гореописаните двуелементни множества. Да допуснем, че числото  $t, 1 < t < n$  стои на последна позиция в редицата, от една страна то ще участва в точно една "връзка" (няма как в повече, щом е последно), но от друга, то участва в две двойки множества ( $\{t-1, t\}$  и  $\{t, t+1\}$ ). Това е противоречие с факта, че множествата съвпадат с "връзките". (навсярно има и по-често доказателство, приемат се предложение) □

Лесно се забелязва, че ако последният елемент на редицата е  $n$ , то можем да си представим, че той не съществува. За членовете преди това няма допълнителни ограничения и задачата се свежда до намиране на всички валидни редици с елементи  $1, 2, \dots, n-1$ , които са  $T_{n-1}$ . Аналогично в случая, когато последният елемент е 1. Така общо валидните редици с дължина  $n$  са  $2T_{n-1}$ ,  $T_1 = 1 \Rightarrow T_n = 2^{n-1}$ . ■

**Задача 15. (tridiagonal matrix determinant)** Да се пресметне детерминантата  $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

*Решение.* Развиваме детерминантата по първи ред, а после по първи стълб:  $D_n = 7D_{n-1} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} =$

$$7D_{n-1} - 6 \cdot 2D_{n-2} = 7D_{n-1} - 12D_{n-2}.$$

Ако разглеждаме последното като рекурентно уравнение, неговото характеристично уравнение ще е  $\lambda^2 = 7\lambda - 12$  с корени  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$ , откъдето общото решение е  $D_n = C_1 4^n + C_2 3^n$ , където  $C_1, C_2$  са коефициенти. От  $D_1 = 1, D_2 = 37, D_3 = 175, \dots \Rightarrow C_1 = 4, C_2 = -3 \Rightarrow D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$ . ■

## Още задачи

Допълнителни задачи с решения за рекурентни уравнения може да откриете на:

<https://www.math.bas.bg/smb/izmat/izvanredna/resources/mathadvanced2.pdf>

(вижте стр. 55/3, стр. 57/6, стр. 58/7,8, стр. 62/12)

## Бонус - решаване на рекурентни уравнения с матрици

<https://www.youtube.com/watch?v=CXMgvJSwyvo>

<https://math.stackexchange.com/questions/124178/generating-matrix-for-a-recurrence-relation>

<https://www.hackerearth.com/practice/notes/solving-linear-recurrence-relation/>