2. Множества

"Множество множества"

Октомври 2024

1 Основни задачи

Дефиниция 1.1 (операции върху множества).

- $A \cup B \coloneqq \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$ /обединение/,
- $A \cap B \coloneqq \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$ /сечение/,
- $A \backslash B \coloneqq \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$ /разлика/,
- $A \triangle B \coloneqq \{a \mid a \in A \oplus\ a \in B\}$ /симетрична разлика/,
- $A \times B \coloneqq \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ /декартово произведение/,
- $\overline{A^U} = A^{\complement} \coloneqq \{a \mid a \notin A \wedge a \in U\}$ /допълнение/, където U ($A \subseteq U$) е някакъв универсум.

Забележка. Най-голям универсум няма! (помислете защо)

Свойство 1.1 (Свойства на операциите върху множества).

- асоциативност на обединението, сечението, сим. разлика: $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \triangle B \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- комутативност на обединението, сечението, сим. разлика:$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \triangle B = B \triangle A$
- *De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- дистрибутивен закон: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- свойства на празното множество и универсума: $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup U = U,\ A \cap U = A$
- двойно допълнение: $\overline{\overline{A}} = A$
- поглъщане (absorption): $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$
- *други полезни: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Полезно. Забележете, че операциите върху множества (без декартовото) доста напомнят логическите (което не е изненадващо, ако се загледаме в дефинициите им по-горе). Обединението е аналог на дизюнкцията, сечението на конюнкцията, допълнението на негацията, симетричната разлика на изключващото или.
Въпрос: Кое тогава "отговаря" на импликацията?
Всъщност релацията "подмножество" носи подбна информация. По-ясно това става от връзката: $B \subseteq A$ тстк $\forall a[(a \in B) \rightarrow (a \in A)]$.

Свойство 1.2. Подобно на таблиците на истинност при логиката, тук отново можем да правим таблици на включване, вместо T и F обаче стойностите са 1 (елементът е част от множеството) и 0 (не е част от него).

Малко за парадокса на Ръсел: Използваме "множество" като базово понятие, което не дефинираме. Идва обаче въпросът всичко ли може да бъде множество (или по-конкретно всяко нещо, което може да се дефинира като колекция, ли е множество). Известно време се е считало, че може. Оказва се обаче, че такова безраборно ползване на понятието довежда до неконситентност, парадокси. Ето пример с такъв:
Парадокс на Ръсел: Нека $R = \{x \mid x \notin x\}$, тогава за произволно множество y: $y \in R$ тстк $y \notin y$, замествайки $y = R$: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, което е виден парадокс. Проблемът тук не е във възможността множество да бъде елемент на себе си, а конкретно в считането на R за множество. За да се избегнат такива противоречия, са установени различни аксиоматични системи, които регулират кое е валидно множество (съответно в тях R не е такова).

Задача 1. Кои от следните са верни?

а) $a \in \{\{a\}, b\}$	б) $a \subseteq \{a, b\}$	в) $a \subseteq \{a, \{a\}\}$	г) $\{a\} \in \{b, c, a\}$
д) $\{a\} \in \{b, \{a, b\}, a\}$	е) $\{a, b\} \subseteq \{a, c, \{a, b\}\}$	ж) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, b\}$	з) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}, b\}$
и) $\{\{a, b\}\} \in \{a, \{a, b\}, b\}$	й) $\{\{a, b\}\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$	к) $\{a, b\} \in \{a, b\}$	л) $\varnothing \in \{a, b\}$
м) $\varnothing \in \{a, \varnothing\}$	н) $\varnothing \in \varnothing$	о) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$	п) $\{\varnothing\} \subseteq \{a, \varnothing\}$
р) $\{\varnothing\} \subseteq \{a\}$	с) $\varnothing \in \{a, b\}$	т) $\{\varnothing\} \in \{a, \varnothing\}$	у) $a \in \mathscr{P}(\{a, b\})$

Решение. Не, не, не, не, не, не, да, да, не, да, не, не, да, не, да, да, не, не, не, не; ■

Задача 2. Нека A е множество. Вярно ли е, че ако $|\mathscr{P}(A)| = 0$, то $A = \varnothing$

Решение. Ако сте се сетили, поздравления, Вие сте *майстор на математическата логика.* Отговорът е ДА; всъщност степенното множество никога не е празно (все пак $\varnothing$ е подмножество на всяко друго), но цялото твърдение е вярно, защото това е (леко скрита) импликация с антецедент F : \ ■

Задача 3. Съществува ли множество A, за което $A \cap \mathscr{P}(A^2) \neq \varnothing$? Ако не, обосновете защо, ако да, дайте поне два примера.

Решение. Съществува, ето две възможни:

- $A = \{\varnothing, ...\}$, понеже $\varnothing$ е подмножество на всяко друго, то $\varnothing \in A \cap \mathscr{P}(A^2)$
- $A = \{a, b, \{(a, b)\}\} = \{a, b, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}\}$, тогава $(a, b) \in A^2$, откъдето $\{(a, b)\} \in \mathscr{P}(A)$ ■

Задача 4. За множества A, B да се докаже, че $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Решение. $x \in A \backslash B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \equiv x \in (A \cup \overline{B})$ ■

Задача 5. Ако A, B, C са множества, да се докаже, че $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$

Решение. $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cup B) \backslash C$ ■

Задача 6. Да се докаже, че $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Решение. Ето 3 възможни решения:

1 н.) С таблица:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

От нея се вижда, че винаги когато елемент принадлежи на $A \cap B$, то той принадлежи и на $A \cup B$, т.е. $\forall x : (x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$, откъдето $A \cap B \in A \cup B$. ■

2 н.) Достатъчно е да докажем, че $\forall x : (x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$, т.е. $(x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B)$ е тавтология. За начало нека за конкретен x, p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$:
$(x \in A \cap B) \to (x \in A \cup B) \equiv$
$(x \in A \land x \in B) \to (x \in A \lor x \in B) \equiv$
$(p \land q) \to (p \lor q) \equiv$
$\neg(p \land q) \lor (p \lor q) \equiv$
$\neg p \lor \neg q \lor p \lor q \equiv T$ ■

3 н.) Може да докажем и че е валиден изводът: $\frac{x \in A \cap B}{\therefore\ x \in A \cup B}$, или $\frac{p \land q}{\therefore\ p \lor q}$:

$$p \land q \overset{\text{правило за опростяване}}{\vdash} p \overset{\text{правило за добавяне}}{\vdash} p \lor q \quad ■$$

Задача 7. Да се докаже, че $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Решение. Ако пробваме да решим с таблица, възниква проблем с декартовото произведение - то борави с наредени двойки, което не се вписва в таблицата.
Решаваме с еквивалентни преобразувания: За произволна наредена двойка z:
$z = (z_1, z_2) \in A \times (B \cup C) \equiv (z_1 \in A) \land (z_2 \in B \cup C) \equiv (z_1 \in A) \land ((z_2 \in B) \lor (z_2 \in C)) \overset{\text{дистрибутивност}}{\equiv}$
$[(z_1 \in A) \land (z_2 \in B)] \lor [(z_1 \in A) \land (z_2 \in C)] \equiv [z \in A \times B] \lor [z \in A \times C] \equiv z \in (A \times B) \cup (A \times C)$
Тоест произволен елемент приндлежи на лявата страна от условието точно когато приндлежи и на дясната, т.е. двете съвпадат. ■

Задача 8. Да се докаже, че $B \subseteq C$, то $B \backslash C = \varnothing$.

Решение. Ще демонстрираме 3 възможни решения:

1 н.) С таблица:

B	C	$B \backslash C$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Полезно. Когато имаме допълнителни условия (например от вида $B \subseteq C$), задраскваме редове, неотговарящи на условието.

Ето защо в случая се абстрахираме от третия ред на таблицата, който не отговаря на условието (понеже в B има елемент, който не е в C), и разглеждаме само останалите.
В оставащите редове се вижда, че за всеки елемент x, $x \notin B \backslash C$ (навсякъде в последната колона има 0), тоест $B \backslash C = \varnothing$. ■

2 н.) Допсукаме противното - нека $B \backslash C \neq \varnothing$, т.е. $\exists x \in B : x \notin C$. Тогава обаче $B \nsubseteq C \Rightarrow$ противоречие с условието. ■

3 н.) Спокойно може да се гледа на условието като на импликация, за която трябва да се докаже, че винаги е вярна (т.е. тавтология).
$(B \subseteq C) \to (B \backslash C = \varnothing) \equiv$
$\forall x(x \in B \to x \in C) \to \neg\exists y(y \in B \land y \notin C) \equiv$

$\neg\forall x(x \notin B \vee x \in C) \vee \neg\exists y(y \in B \wedge y \notin C) \equiv$
$\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \vee \neg\exists y(y \in B \wedge y \notin C) \equiv$
$\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \vee \neg\exists x(x \in B \wedge x \notin C) \equiv T$ ■

Задача 9. Намерете редица от множества $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такава, че $\forall i \in \mathbb{N} : A_i \subseteq A_{i+1}$, но $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \varnothing$

Решение. това е сравнително тривиален пример от гледна точка на анализа: сечението на отворените интервали $(0,1), (0,\frac{1}{2}), ...(0,\frac{1}{n}), ...$ е именно празното множество (защо интервалите са множества?) ■

Задача 10. Вярно ли е, че:

- ако $C \subseteq A \cup B$, то $C \subseteq A \vee C \subseteq B$
- ако $C \subseteq A \cap B$, то $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$
- ако $A \subseteq B$, то $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$
- $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$
- $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

Решение.

- Невинаги е вярно, ето контрапример: $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}, C = \{1,3\}$ (обратната посока обаче винаги е вярна). ■
- За разлика от предното, това е винаги вярно. За прозиволен елемент $x \in C : \ x \in C \subseteq (A \cap B) \subseteq A \Rightarrow x \in A$, значи $\forall x \in C : x \in A \Rightarrow C \subseteq A$ аналогично и $x \in C \subseteq (A \cap B) \subseteq B \Rightarrow x \in B \Rightarrow \forall x \in C : x \in B \Rightarrow C \subseteq B$. Получихме $(C \subseteq A) \wedge (C \subseteq B)$. ■
- Да. Нека $S \in \mathscr{P}(A)$ е произволно подмножество на A, тогава $S \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S \in \mathscr{P}(B)$. Понеже S е произволно, то $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$. ■
- Ще докажем исканото на две части (като покажем, че ляата част се съдържа в дясната и обратно). Нека $S \in \mathscr{P}(A \cap B) \Rightarrow S \subseteq A \cap B \Rightarrow (S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B) \Rightarrow (S \in \mathscr{P}(A)) \wedge (S \in \mathscr{P}(B)) \Rightarrow S \in (\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B))$. Това показва, че всеки елемент от лявото множество е и в дясното, откъдето $\mathscr{P}(A \cap B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. □
  Сега наобратно: нека $S \in (\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)) \Rightarrow (S \in \mathscr{P}(A)) \wedge (S \in \mathscr{P}(B)) \Rightarrow (S \subseteq A) \wedge (S \subseteq B) \Rightarrow S \subseteq A \cap B \Rightarrow S \in \mathscr{P}(A \cap B)$. ■
- Не е винаги вярно, ето контрапример: $A = \{1\}, B = \{2\}$, тогава $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, докато $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$. ■

Задача 11. Нека F е фамилия от n различни подмножества на множество A, $n \geq 2$. Докажете, че съществуват поне n различни множества от вида $A \triangle B,\ A, B \in F$ ($A \triangle B$ е симетричната разлика на множествата).

Решение. Достатъчно е да направим наблюдението, че $A \triangle B \neq A \triangle C$ тстк $B \neq C$ (достатъчна ни е само обратната посока).
Лема: Ако $B \neq C$, то $A \triangle B \neq A \triangle C$
Д-во на лемата: допускаме противното, че $B \neq C$, но $A \triangle B = A \triangle C = S$. От $B \neq C$, б.о.о $\exists x_0 : x_0 \in B \wedge x_0 \notin C$ (съответно може и наобратно). Сега имаме:

- От една страна $x_0 \in S = A \triangle B$ тстк $x_0 \notin A$ (защото вече занем, че $x_0 \in B$)
- От друга страна $x_0 \in S = A \triangle C$ тстк $x_0 \in A$ (защото вече занем, че $x_0 \notin C$)

Но тогава $x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \in A$, абсурдно, противоречие с допускането. □

Ако $A_1, ..., A_n$ са множествата от фамилията, то $A_1 \triangle A_1, A_1 \triangle A_2, ..., A_1 \triangle A_n$ според лемата са именно n различни множества от искания вид. ■

Задача 12 (*). Нека $F = \{A_1,\ A_2\ ...\ A_k\}$ е фамилия от различни подмножества на А, като $|A| = n$. Ако всеки две множества от F се пресичат, докажете, че $k \leq 2^{n-1}$.

Решение. Да групираме всички възможни подмножества на A (общо 2^{n-1}) по двойки, като всяко да бъде в двойка с допълнението си до A, т.е. произволно подмножество S е в двойка с $A \backslash S$. Това са 2^{n-1} двойки.
Ако $k > 2^{n-1}$, то от принципа на Дирихле (който официално ще вземем след 3 занятия) измежду множествата от фамилията ще има поне две, които са част от една двойка (напр. A_i и $A_j, i \neq j$). Но тогава те не се пресичат, противоречие с допускането, значи $k \leq 2^{n-1}$. ■

Дефиниция 1.2 (фамилия)**.** Множество от множества наричаме фамилия.

Забележка. Формално в аксиоматичната система ZF протоелементи (прости единици, които изграждат множества) няма, там всички обекти са множества, така че случай, различен от горния, там е невъзможен. Ние обаче считаме, че такива най-прости съставни елементи съществуват.

Дефиниция 1.3 (покритие, разбиване)**.** Фамилия от множества $F = X_1, ..., X_k$ наричаме *покриване* на непразното множество A, ако са изпълнени:

1. $\forall i : X_i \subseteq A$ /опционално, следва от 3/,
2. $\forall i : X_i \neq \varnothing$,
3. $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = A$;

Ако освен това е изпълнено: $\forall i \forall j, i \neq j : X_i \cap X_j = \varnothing$, то поркиването се нарича *разбиване*.

Задача 13. Ако A е множество от множества, докажете, че $A \subseteq \mathscr{P}(\bigcup A)$ (с $\bigcup A$ онзачаваме $\bigcup_{a \in A} a$).

Решение. Трябва да покажем, че ако $x \in LHS$, то $x \in RHS$. Нека $x \in A$, значи $\bigcup_{a \in A} a = a_1 ... \cup x \cup ... \cup a_n$, откъдето $x \subseteq \bigcup A$ (понеже за произволни множества $V \subseteq V \cup W$). От $x \subseteq \bigcup A$ директно следва, че $x \in \mathscr{P}(\bigcup A)$. ■

Задача 14 (ДР1 И 23)**.** Нека А е множество, а P, R са произволни негови разбивания. Да се докаже, че множеството $F = \{X \cap Y | X \in P \wedge Y \in R\} \backslash \{\varnothing\}$ също е разбиване на А.

**Въпрос: защо "$\varnothing$" е във фигурни скоби?*

Решение. Последователно проверяваме по дефиницията. Понеже X, Y са множества, то сечението им е множество, така че F наистина е фамилия от множества (за определеност нека $F = \{F_1, ..., F_k\}$). При това:
- X, Y са елементи от разбиванията P, R на A, така че сеченията им F_i са подмножества на А. ✓

- Понеже *елементът* празно множество е премахнат от фамилията ("$\backslash\{\varnothing\}$"), то всеки елемент $F_i \neq \varnothing$. ✓

- Сега да покажем, че $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = A$. Разглеждаме конкретен елемент $a \in A$. Понеже P, R са разбивания на A, то съществуват множества $X_0 \in P$ и $Y_0 \in R : a \in X_0 \wedge a \in Y_0 \Rightarrow a \in X_0 \cap Y_0 = F_0 \Rightarrow a \in \bigcup_{i=1}^{k} F_i$. С това заключаваме, че всеки елемент от A е "покрит". ✓

- Остава да проверим дали $\forall i \forall j, i \neq j : F_i \cap F_j = \varnothing$. По дефиниция $F_t = X \cap Y, (X \in P) \wedge (Y \in R)$, съответно нека $F_i = X_1 \cap Y_1,\ F_j = X_2 \cap Y_2$, където $(X_1, X_2 \in P) \wedge (Y_1, Y_2 \in R)$. Понеже $F_i \neq F_j$, то $(X_1 \neq X_2) \vee (Y_1 \neq Y_2)$. Б.о.о. е изпълнено първото, $X_1 \neq X_2$, нещо повече, тъй като те са част от разбиване, то те не се пресичат, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, но тогава и сечението $F_i \cap F_j = (X_1 \cap Y_1) \cap (X_2 \cap Y_2) = X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. ✓

Всички изисквания от дефиницията са изпълнени, значи даденото множество наистина е разбиване. ■

Задача 15 (*). Нека $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ е фамилия от r-елементни множества. Ако сечението на всеки $r+1$ множества от F е непразно, да се докаже, че и сечението на всички n множества от F е непразно.

Решение. Последователно (по индукция) ще докажем, че сечението на всеки k от множествата е непразно, където $k > r$.
База: за $k = r+1$ сечението на всеки $r+1$ множества е непразно по условие. ✓
И.П: Нека сечението на всеки $k,\ r < k < n$ множества е непразно.
И.С: Нека $B_1, B_2, ...B_{k+1}$ са произволни множества от фамилията, искаме да докажем, че тяхното сечение също е непразно. Допускаме противното, нека $\bigcap_{i=1}^{k+1} B_i = \varnothing$. От И.П.:
$B_2 \cap B_3 \cap ... \cap B_k \cap B_{k+1} = C_1 \neq \varnothing$
$B_1 \cap B_3 \cap ... \cap B_k \cap B_{k+1} = C_2 \neq \varnothing$
$\cdots$
$B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap B_{k+1} = C_k \neq \varnothing$
Тоест във всяко C_t има елемент от B_{k+1}. Но последното множество е r-елементно и $k > r$. Тогава от принципа на Дирихле съществуват индекси $i, j;\ 0 < i \neq j \leq k$ такива, че множествата C_i, C_j имат общ елемент с $B_{k+1} \Rightarrow C_i \cap C_j \neq \varnothing$ откъдето $B_1 \cap .... \cap B_{k+1} = [B_1...B_{i-1} \cap B_{i+1}...B_{k+1}] \cap [B_1...B_{j-1} \cap B_{j+1}...B_{k+1}] = C_i \cap C_j \neq \varnothing$, с което индукционната стъпка е завършена. ✓

От индукцията директно следва, че сечението на всички n множества е непразно. ∎

Задачи за вкъщи/в общежитието

Задача 1. Да се докаже, че $A = B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$.

Задача 2. Да се докаже, че $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Задача 3. (*предложи М. Георгиев) Да се докаже, че за множество A: $\bigcup A \subseteq A$ тстк $A \subseteq \mathscr{P}(A)$.
/Множество, изпълняващо горните свойства, се нарича *транзитивно.*