

7. Комбинаторни разсъждения

”Двата пътя”

Декември 2025

1 Задачи с комбинаторни разсъждения

Идея. В задачите с ”комбинаторни съображения/разсъждения” обикновено ползваме принципа на ”двукратното броене”, т.e. се стремим да представим едно и също нещо по два различни начина.

Дефиниция 1 (*Stirling numbers of the first kind*). С $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ означаваме броя пермутациите на n -елементно множество с точно k цикъла.

Дефиниция 2 (*Stirling numbers of the second kind*). С $\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \}$ означаваме броя на разбиванията на n -елементно множество на k части.

Свойство 1.1 (*Правило на Паскал*).

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Свойство 1.2 (*Нютонов бином*). /Често се полват частните случаи с $y = 1, x = 1$ и $2/$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Задача 1 (*Vandermonde's identity*). Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

Решение. Имаме група от m мъже и n жени.

- Тогава лявата страна $\binom{m+n}{k}$ показва по колко начина можем да изберем k души от тях;
- Ако от избраните k са мъже, то $k - i$ са жени. От принципа на умножението изборът може да стане по $\binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ начина. Понеже i може да приема прозиволни стойности от 0 до k (т.e. от избраните k броят мъже варира от 0 до k включително), то по общо $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$ начина можем да изберем k души от всички $n+m$, което е именно изразът от дясната част на равенството. ■

Задача 2 (*Hockey-stick identity*). Ако $r \leq n$ и $r, n \in \mathbb{N}$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина $n+1$ и точно $r+1$ единици в записа си. Те са точно $\binom{n+1}{r+1}$ на брой.

Да погледнем от друг ъгъл, последната единица във всеки такъв низ може да стои на всяка позиция i от r до n включително (започваме броенето от 0). Същевременно, щом тя е на позиция i , то преди нея има i на брой цифри, като точно r от тях са единици, а след нея има само нули. При фиксирано i низовете от този вид са точно $\binom{i}{r}$, тогава общата бройка е именно $\sum_{i=r}^n \binom{i}{r}$. ■

Задача 3 (Семестриално КН 25). За естествените числа $x, y \in \mathbb{N}, x > y$ докажете с комбинаторни разсъждения:

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Решение. Разглеждаме азбука Σ_1 , съставена от $x = |\Sigma_1|$ различни букви (символа) и нейно подмножество азбуката Σ_2 с $|\Sigma_2| = y$.

LHS (лявата страна): В контекста на горното x^n е бройката на всички думи с дължина n , съставени от буквите в Σ_1 , съответно y^n е бройката на всички думи с дължина n и съставени само от буквите в Σ_2 . Тогава лявата част на равенството $x^n - y^n$ отговаря на бройката на всички думи с дължина n над азбука Σ_1 , в които има *поне* една буква, която е част от Σ_1 , но не е от подмножеството Σ_2 (т.e. буква, принадлежаща на $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$).

RHS (дясната страна): Отново разглеждаме думите с дължина n с букви от Σ_1 , в които поне една буква е от $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$. Нека най-дясната такава буква (от Σ_1 , но не и от Σ_2) е на позиция $k, 0 \leq k \leq n-1$, т.e. всички $n-k-1$ букви вдясно от нея са част от Σ_2 . Добре е да уточним, че този критерий задава разбиване на всички думи от търсения вид. За самата буква на позиция k има $x - y$ възможности (защото толкова са буквите в $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$). Що се отнася до буквите вляво от нея, за тях няма допълнителни ограничения и могат да са произволни. Това показва, че при фиксирано k броят думи от търсения вид е $|\Sigma_1|^k \cdot (x - y) \cdot |\Sigma_2|^{n-k-1}$.

Тогава общият брой думи с поне една буква от $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$ е:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k (x - y) y^{n-1-k} = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}. \blacksquare$$

Задача 4. Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n}{n+1} + 2 \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

Решение. Задачата става сравнително проста, ако я разделим на две части:

- $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2 \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$
- $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$, откъдето и $\binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2$

Оттук директно следва исканото: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 = \binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2 \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$. ■
Но да докажем двете равенства поотделно:

- /предложи K. Прончева/ 1 н.) $\binom{2n}{n+1} + 2 \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = [\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n}] + [\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}]$ правило на Паскал $\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n}$ правило на Паскал $\binom{2n+2}{n+1}$

2 н.) Имаме група от $2n + 2$ предмета, като сме си харесали два от тях (да ги наречем "специални"). По колко начина можем да вземем $n + 1$ предмета (половината), редът на взимане не е от значение?

LHS (лявата страна): $n + 1$ предмета от общо $2n + 2$ можем да изберем по $\binom{2n+2}{n+1}$ начина.

RHS (дясната страна): спомняхаме, че имаме два "специални" предмета, тогава имаме 3 случая за избор на $n + 1$ предмета:

- да вземем и двата, както и още $n - 1$ от останалите;
- да вземем точно 1 от тях (може да стане по два начина) и още n от останалите;
- да не вземем никой от тях, а $n + 1$ от останалите;
тогава имаме общо $\binom{2n}{n+1} + 2 \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$ начина.

Както се вижда, двете страни броят едно и също нещо по два различни начина. □

- Равенството $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ би трябвало да е показвано на лекции, но нека го докажем. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$. Разглеждаме множество от $2n$ предмета, от тях искаме да изберем n . Нека сега разделим по произволен начин предметите на две равни групи (от по n). Ако от n -те избрани k са взети от първата група, то $n - k$ са от втората, двата избора са независими, значи при фиксирано k имаме $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ начина (принцип на умножението). k е произволно, така че сумираме по него $\Rightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. \square

Задача 5 (Поправителен 2024). Ако $n, m, k \in \mathbb{N}$ и $k + m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1} \binom{n-i}{m} = \binom{n}{k+m}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с дължина n и точно $k + m$ единици в записа си. Ясно е, че те са $\binom{n}{k+m}$ на брой.

Да се спрем върху един такъв низ, нека k -тата единица в записа му е на позиция i , започваме броенето от 1. Тогава вляво от тази нея има $i - 1$ позиции, като на точно $k - 1$ тях има цифра 1, възможните такива префикси са $\binom{i-1}{k-1}$ на брой. Вдясно от позиция i има $n - i$ цифри, като точно m от тях са 1-ци, възможните такива суфиксии са $\binom{n-i}{m}$.

Понеже суфиксите и префиксите са независими, а $k \leq i \leq n - m$, то общо има $\sum_{i=k}^{n-m} \binom{i-1}{k-1} \binom{n-i}{m}$ такива низа. ■

Задача 6 (*). Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

Решение. Разглеждаме $2n$ съпружески двойки (общо $4n$ човека). От тях искаме да изберем $2n$ човека. Ясно е, че това може да се случи по $\binom{4n}{2n}$ начина, да дадем обаче и алтернативното пребояване: От всяка съпружеска двойка в избраните може да не присъства човек, да присъства точно един от двамата или да присъстват и двамата. Нека k са двойките, които нямат представител измежду избраните, l да са тези с двама представители и съответно $2n - k - l$ са двойките с точно един представител в избраните.

Наблюдение: Понеже искаме $0 \cdot k + 2 \cdot l + 1 \cdot (2n - k - l) = 2n \Rightarrow 2n - k + l = 2n \Rightarrow k = l$.

Сега да преброим: за фиксирано k по $\binom{2n}{k+l} = \binom{2n}{2k}$ начина можем да изберем двойките с по 0 или 2 представители (съответно всички останалите ще са с по 1). От тези $2k$ по $\binom{k+l}{k} = \binom{2k}{k}$ начина избираме от кои k двойки няма да има човек. Уточниме, че от останалите $2n - k - l = 2n - 2k$ двойки ще има точно по 1 представител, такъв можем да изберем по 2 начина за всяка, или общо 2^{2n-2k} начина.

Понеже трите избора са независими, а k е произволно, имаме общо $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k}$ начина за избор на $2n$ души. ■

Задача 7 (*). Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$$

Решение. Разглеждаме двоичните низове с $m + n + 1$ цифри. Те са 2^{m+n+1} на брой. Ще покажем, че лявата страна брои същото:

Можем да разделим въпросните низове на две групи: такива с $\geq m + 1$ единици в записа си и такива

$c < m + 1$ единици в записа си. Забележете, че последното може да се изкаже и по друг начин – низове с $\geq n + 1$ нули в записа си.

За начало да преbroим тези от първи вид. Казахме, че те имат $\geq m + 1$ единици, нека $(m + 1)$ -вата единица е на позиция p , започвайки броенето от 0. Ясно е, че $p \geq m$ (все пак преди нея има още единици), както и $p \leq m + n$. Нека $k := p - m \Rightarrow 0 \leq k \leq n$. Понеже искаме *поне* k 1-ци, то след позиция p цифрите в записа на низа могат да са произволни, все пак вече сме "гарантирали" исканата бройка, т.e. имаме $2^{n+m-p} = 2^{n-k}$ варианта за тях. Колкото до цифрите на позиции от 0 до $p - 1$ знаем, че измежду тях има точно m 1-ци, имаме $\binom{p}{m} = \binom{m+k}{m} = \binom{m+k}{k}$ варианта. k може да приема различни стойности, в крайна сметка низовете от първи вид са общо: $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} 2^{n-k}$. За тези от втори вид ($c < m$ единици) дадохме алтернативното "с $\geq n+1$ нули", което свежда непщата до вече решената задача. Аналогично на предното, низвоете от втори вид са: $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} 2^{m-k}$. Всеки двоичен низ попада в точно една от двете посочени групи, така че общата бройка е именно сумата: $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} 2^{m-k}$ ■

Задача 8 (Семестриално КН 2024). Ако $k \leq m \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n-i}{m} = \binom{n-k}{m-k}$$

Решение. Нека $A = \{1, 2, \dots, n\}$ е опорно множество. Интересуваме се колко са m -елементните подмножества $B \subseteq A$, които съдържат числата от 1 до k . От една страна, това може да се сметне така: елементите 1 до k са "фиксиранi" (винаги са между m -те), така че имаме $\binom{n-k}{m-k}$ такива множества.

Да намерим същата бройка с метода за включване и изключване: Всички m -елементни подмножества са $\binom{n}{m}$. От тях обаче трябва да извадим неотговарящите на условието, а именно тези, от които липсва 1 от числата в интервала 1 до k . Забележете обаче, че бройката пак не е точна, така бихме извадили няколко пъти множествата, от които отсъства повече от едно от числата в интервала 1 до k . Става ясно, че трябва да ползваме inclusion-exclusion, точната бройка ще е: $\sum_{i=0}^k (\text{брой на } m\text{-елементните подмножества, които НЕ съдържат поне } i \text{ от числата } 1, 2, \dots, k)$.

За фиксирано i такива множества има $\binom{k}{i} \binom{n-i}{m}$ (числата, които няма да присъстват, можем да изберем по $\binom{k}{i}$ начина, а самите m -елементни подмножества B , които не ги съдържат, са $\binom{n-i}{m}$). Заместваме в сумата и получаваме лявата част на даденото по условие. ■

Задача 9 (IMO 1981). Нека $1 \leq r \leq n$. Разглеждаме всички r -елементни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Всяко от тези подмножества има най-малък елемент. Нека с $F(n, r)$ означаваме средното аритметично на всички такива най-малки числа. Докажете, че: $F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Търсим средно аритметично, за целта ще ни трябва сумата на всички най-малки елементи и бройката им. Понеже всяко подмножество има най-малък елемент, то бройката е именно $\text{count} = \binom{n}{r}$ (толкова са подмножествата).

Търсим и сумата. Вместо да събираме минималните елементи за всяко подмножество, нека с a_i означим бройката подмножества, за които i е минимален елемент. Тогава търсената сума е: $\text{sum} = \sum_{i=1}^n ia_i$. Лесно се вижда, че r -елементните подмножества с най-малък елемент i са точно $a_i = \binom{n-i}{r-1}$. Заместваме и получаваме $\text{sum} = \sum_{i=1}^n i \binom{n-i}{r-1}$.

Тогава търсеното средно аритметично е $\bar{X} = \frac{\text{sum}}{\text{count}} = \frac{\sum_{i=1}^n i \binom{n-i}{r-1}}{\binom{n}{r}} = ?$. Знаем, че трябва да получим $\frac{n+1}{r+1}$, тоест $\text{sum} = \text{count} \cdot \frac{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} \frac{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ние обаче получихме друго, това ни подсеща, че трябва да потърсим алтернативен запис на сумата, тук идват комбинаторните разсъждения, искаме да покажем, че $\text{sum} = \sum_{i=0}^n i \binom{n-i}{r-1} = \binom{n+1}{r+1}$. Ето защо:

Дясната страна брои всички двоични низове с дължина $n+1$, в чийто запис има точно $r+1$ единици ($r+1 \geq 2$).

Нека втората единица (такава има) е на позиция $i+1, i \geq 1$ (започваме номерацията от 1). Първата единица е някъде вляво, за нея имаме i варианта, оставащите $r+1-2=r-1$ единици трябва да са вдясно от втората единица, имаме $n+1-(i+1)=n-i$ позиции, от които да избираме, значи имаме $\binom{n-i}{r-1}$ варианта за избор, умножаваме. Така за фиксирано i , получихме $i \binom{n-i}{r-1}$ варианта, i

може да приема произволни стойности, правим сумата $\sum_{i=0}^n i \binom{n-i}{r-1}$, откъдето двете страни броят едно и също нещо. ■

Задача 10. Ако $n^k := n(n-1) \cdots (n-k+1)$, да се докаже с комбинаторни разсъждения:

$$n^m = \sum_{k=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} n^k$$

Решение. Разглеждаме числата $1, 2, \dots, m$ и n различни цвята (да ги бележим с c_1, c_2, \dots, c_n). Под оцветяване на числата ще разбираем тогава функция от множеството на числата в множеството на цветовете. Всяко число оцветяваме в един от n възможни цвята, така че броят на оцветяванията на числата $1, 2, \dots, m$ в n цвята е тъкмо n^m (каквото брои лявата страна).

Оцветяванията могат да бъдат характеризирани спрямо броя на различните използвани цветове в тях. Съответно този критерий задава разбиване на множеството от оцветявания. Нека с A_k да означим множеството от оцветявания на числата, в които са използвани точно k различни цвята. Тогава броят на всички оцветявания е $\sum_{k=1}^m |A_k|$.

Остава да преброим $|A_k|$ при фиксирано k . Ясно е, че ако в дадено оцветяване с k цвята един от цветовете бъде сменен с друг (неприсъстващ в оцветяването), ще получим ново оцветяване. Структурата на оцветяването обаче остава същата. Под структура разбираем скелета на оцветяването, информацията кои числа ще са в еднакъв цвят и кои в различен. Всъщност структурата на оцветяване съответства на някакво разбиване на множеството $\{1, 2, \dots, m\}$ на k части (и обратно). Броят такива разбивания е $\left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\}$. При фиксирана структура за първия участващ цвят имаме n варианта, за втория $n-1, \dots, 1$, а за последния $n-k+1$ варианта, или общо n^k . Така оцветяванията в k различни цвята са точно $|A_k| = \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} n^k$, откъдето всички оцветявания са $\sum_{k=1}^m |A_k| = \sum_{k=1}^m \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} n^k$. ■

Още примери

Задача 11. Да се докажат с комбинаторни разсъждения следните:

- $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
- $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}$
- $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} + n \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n \end{matrix} \right\}$
- $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$
- $K_n(n, k) = K_n(n-1, k) + k \cdot K_n(n-1, k-1)$, където с $K_n(n, k) = V_n^k$ означаваме броя начини да се подредят k от общо n различни обекта в редица
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$
- $\prod_{k=1}^m \binom{n_1+\dots+n_i}{n_i} = \frac{(n_1+\dots+n_m)!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_m!)}$, където $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$
- (*) $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) 2^n + 1$
- (*) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n+1-k)^m = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (n+1-k)^m + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$