3. Релации

"Relatable"

Октомври 2024

1 Преговор

Дефиниция 1.1 (релация)**.** Нека $A_1, \cdots, A_n$ са множества. n-местна *релация* R над декартовото прозиведение $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ наричаме всяко множество $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n$, то релацията е *хомогенна.*

Нотация 1. За *двуместни* релации вместо $(x, y) \in R$, пишем xRy.

Дефиниция 1.2 (свойства)**.** За двумсетна хомогенна релация $R \subseteq A^2$ дефинираме свойствата:

- рефлексивност: $\forall a \in A : aRa$
- антирефлексивност: $\forall a \in A : \neg aRa$
- симетричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$ (също $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow bRa$)
- антисиметричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$ (също и $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$)
- силна антисиметричност: $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$
- транзитивност: $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$ (*не е необходимо a, b, c да са различни)

Дефиниция 1.3 (затваряне)**.** Транзитивно затваряне на релацията $R \subseteq A^2$ е минималното множество R^+ такова, че: $R \subseteq R^+$ и R^+ е транзитивна (аналогично за рефклексивно и симетрично затваряне).
*Множеството R^+ е минимално, ако е подмножество на всички релации, изпълняващи горното изискване. (Получава се, че транзитивното затваряне на R е $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$, виждате ли умножаването на матрици?)

Лема 1.1. *Релация е транзитивна (аналогично рефлексивна/симетрична) тстк съвпада с транзитивното (съответно рефлексивното/симетричното) си затваряне.*

Дефиниция 1.4. Наричаме една релация $R \subseteq A^2$:

- релация на *еквивалентност* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна;
- релация на *частична наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (в частичните наредби може да има *несравними* елементи, т.е. между тях няма приоритет: $\neg aRb \wedge \neg bRa$);
- релация на *строга частична наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна (тук не допускаме да има равни по "старшинство" елементи);
- релация на *линейна наредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна (линейните наредби са частен случай на частичните);
- релация на *преднаредба* $\Leftrightarrow$ R е едновременно рефлексивна и транзитивна;

Начини за представяне на релации:
- описване в явен вид: $R = \{(a,b),(a,c),\cdots,(c,f)\}$
- чрез матрица (при двуместни релации): $M_{i,j} = 1$ при iRj и 0 в противен случай.
- чрез диаграма: граф с върхове елементите, като еднопосочното ребро (v_i, v_j) е в графа точно когато $a_i R a_j$.

Дефиниция 1.5. Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, а $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че: *R се влага в R'* или R' е *линейно разширение* на R (броят линейни разширения е между 1 и $n!$).

Дефиниция 1.6 (верига, контур)**.** Ако $R \subseteq A^2$ е релация и $A = \{a_1,\cdots,a_n\}$, *верига* е всяка последователност $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ $(i_0,\cdots,i_k \in \{1,\cdots,n\})$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ $\forall j (0 < j < k), k \geq 0$
Ако $a_{i_0} = a_{i_n}$ и $k > 0$ веригата се нарича контур (всъщност оттук и горните изисквания, следва и $k > 1$, защо?).

2 Основни задачи

Задача 1. Вярно ли е, че ако R е симетрична и транзитивна, то тя е рефлексивна. Ако не, то къде е проблемът в следното доказателство:
от R - симетрична, $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \leftrightarrow bRa$

Задача 2. Да се докаже, че $R \subseteq A^2$ е едновременно симетрична и антисиметрична точно когато $R \subseteq \{(a,a) |\ a \in A\}$.

Задача 3. Ако $R_1, R_2 \subseteq A^2$ са релации на еквивалентност, то релации на еквивалентност ли са:

- $R_1 \cap R_2$
- $R_1 \cup R_2$
- $R_1 \triangle R_2$

Задача 4. (*) Да се докаже, че транзитивното затваряне на крайна релация $R \subseteq A^2$ е единствено.

Решение. Нека $F = \{P_1, ...P_m\}$ е фамилията от релациите със свойството: $R \subseteq P_j \subseteq A^2$ и P_j е транзитивна (те са краен брой, заради крайността на R). По дефиниция транзитивното затваряне на R е минималното P_i от всички горе, с други думи $\forall j : P_i \subseteq P_j$. Нека $R' = \bigcap_{1 \leq j \leq m} P_j$. В *задача* 3 показахме, че сечение на две (съответно и на всеки краен брой) транзитивни релации е транзитивна релация. От това и факта, че P_j са транзитивни, то сечението им R' е транзитивна релация. Също и $\forall j : R \subseteq P_j \Rightarrow R \subseteq \bigcap P_j = R'$, откъдето $R' \in F$ (по дефиницията на F). Излиза, че така намереното сечение R', което е единствено (от единственост на сечението), е именно търсеното транзитивно затваряне. $\blacksquare$

Задача 5. (*) Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава R е частична наредба тстк няма контури.

Задача 6. (*) При крайни множества в релация на частична наредба R има поне един минимален и поне един максимален елемент.

Дефиниция 2.1. Дефинираме R^{-1} по следния начин: $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$.

Задача 7. За $R \subseteq A^2$ да се докаже, че е симетрична тстк $R = R^{-1}$.

Решение. От дефинициите: $x = (a,b) \in R \Leftrightarrow aRb\ a\{-1\}$ симетрична. $\blacksquare$

Задача 8. За $R \subseteq A^2$ да се докаже, че е антисиметрична тстк $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x,x) | x \in A\}$.

Решение. От дефинициите: R антисиметрична тстк $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : aRb \wedge R^{-1}b \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : ((a, b) \in R) \wedge ((, b) \in R^{-1}) \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow a = b$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (a, b) = (a, a)$ тстк $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \cap R^{-1} \rightarrow (a, b) \in \{(x, x) | x \in A\}$ тстк $R \cap R^{-1} \subseteq \{(x, x) | x \in A\}$ ■

Задача 9. За всяка частична наредба R съществува поне едно линейно разширение R' на R.

3 Релация на еквивалентност

Дефиниция 3.1 (клас на еквивалентност)**.** Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всяко $a \in A$ дефинираме $[a] = \{b \in A | aRb\}$.

Задача 10. $F = \{[a] | a \in A\}$ е разбиване на множеството A.

Задача 11. (*) Дадено е множество X с $|X| = n$. Да се намери:

$$\sum_{A, B \subseteq X} |A \cap B|$$

Решение. дефинираме релацията $\sim \subseteq \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$. Като $(A, B) \sim (C, D)$ точно когато $(A = C \vee A = X \backslash C) \wedge (B = D \vee B = X \backslash D)$. Лесно се проверява, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Всеки клас на релацията се състои от четири двойки от вида: (A, B), $(A, X \backslash B)$, $(X \backslash A, B)$, $(X \backslash A, X \backslash B)$, всяка двойка подмножества участва в точно един такъв клас, така че класовете са $2^n.2^n/4 = 4^{n-1}$. Сега правим наблюдението, че всеки елемент $x \in X$ принадлежи на точно едно сечение $P \cap Q$ на двойка (P, Q) от всеки клас. Значи всеки елемент участва в 4^{n-1} такива сечения, или сумарната мощност е: $n.4^{n-1}$. ■

Задача 12. (*) Дадени са n точки в равнината, $n \geq 5$. Построени са $n + 1$ различни триъгълника, да се докаже, че някои два от тях имат точно една обща точка.

Решение. Допускаме противното, тоест, че всеки два различни триъгълника имат точно 0 или 2 общи върха. Дефинираме релацията $\sim \subseteq T^2$ (T е множеството от триъгълниците), като $\triangle_1 \sim \triangle_2$ тстк $\triangle_1$ имат поне 2 общи върха $\triangle_2$. Релацията е очевидно *рефлексивна* (всеки триъгълник има поне 2 общи върха със себе си) и *симетрична* (ако $\triangle_1$ има поне 2 общи върха с $\triangle_2$, то и обратното е вярно).
транзитивност: Нека $\triangle_1 \sim \triangle_2$ и $\triangle_2 \sim \triangle_3$. Понеже $\triangle_2$ има поне 2 общи върха с $\triangle_1$, както и с $\triangle_3$, а самият той има 3 върха (...понеже е триъгълник, нали), то от Дирихле (2+2>3) ще има връх, който е общ и за трите триъгълника, откъдето $\triangle_1$ и $\triangle_3$ имат поне 1 общ връх. Но по допускане няма триъгълници с точно един общ връх, така че те трябва да имат поне 2 общи върха, или $\triangle_1 \sim \triangle_3$. □
Получаваме, че релацията $\sim$ е релация на еквивалентност. Да разгледаме произволен клас на еквивалентност на тази релация, нека k е броят на различни върхове/точки на триъгълници от разглеждания клас:

- Ако $k = 3$, то в класа има точно 1 триъгълник;
- Ако $k = 4$, то в класа има не повече от 4 триъгълника с върхове измежду тези точки (все пак от 4 точки могат да се конструират не повече от $\binom{4}{3} = 4$ триъгълника);
- Ако $k > 4$, то в класа има не повече от k триъгълника:
  Нека в класа има поне 2 различни триъгълника, ABC и ABD (от дефиницията на релацията следва, че те имат две общи точки). Нека T_1 е произволна точка в разглеждания клас на еквивалентност, различна от горните 4. Ако тази точка участва в триъгълник $\triangle$, то твърдим, че другите две точки на този триъгълник са именно A и B. Ако не са, то от $\triangle \sim ABC$, една от точките на $\triangle$ е C, по аналогична причина (от $\triangle \sim ABD$) една от точките на $\triangle$ е D. Но тогава $\triangle = T_1CD$, което обаче няма поне 2 общи точки с ABC , което е невъзможно. Значи всеки

триъгълник в нашия клас на еквивалентност, имащ точка T_i, която не е измежду A, B, C, D съдържа A и B. Ако всички точки в класа са $A, B, C, D, T_1, ...T_m$, то имаме не повече от $4 + m = k$ триъгълника с върхове тези точки (понеже от A, B, C, D могат да се конструират до 4 триъгълника, а всички останали триъгълници имат вида ABT_i);

В крайна сметка (от трите случая) излиза, че броят триъгълници не би трябвало да надвишава този на точките, противоречие с условието. Значи винаги има два триъгълника с точно 1 общ връх. ■