Графи

1 част

"Графи-ти"

Декември 2024

Полезно. Задачите с графи са много ранообразни и често една задача може да се реши по няколко начина (така че експиремнтирайте). Има обаче няколко основни подхода при решаването, които вече сме виждали, но тук още по-често ще са ни от полза:
- *принцип на "крайния елемент" (избор на екстремален елемент)*
- *индукция*
- *принцип на Дирихле*

Съвет. Доказвайте и лемите наред със задачите, те също са добро упражнение;

1 Пътища, цикли, степен на връх

Лема 1. *Нека G е граф с n върха, m ребра и степени на върховете $d_1, ..., d_n$. Докажете, че $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$.*

Доказателство. Всяко ребро има два края (инцидентно е с два върха). Затова в сумата то е преброено точно два пъти. □

Лема 2 (*the hand-shaking lemma*)**.** *Нека G=(V,E) е (прост) граф с поне 2 върха. Докажете, че съществуват поне два различни върха $u, v \in V$ такива, че $d(u) = d(v)$.*

Доказателство. В прост граф максималната степен на връх е $n - 1$ (все пак един връх е свързан най-много с всички останали). Тогава степените d_i на върховете ще са измежду числата 0, 1, ... $n - 1$, което са точно n възможности.
Ако допуснем противното, че всички d_i са различни, то трябва да има връх от степен 0, от степен 1 и т.н. до $n - 1$. Добре, но последното е невъзможно, не може едновременно да има връх от степен 0 и такъв от степен $n - 1$ (който хем трябва да е свързан с всички, хем не е свързан с този от степен 0), противоречие. □

Забележка. Условието, че графът е прост е важно, при мултиграф горното не е винаги вярно.

Лема 3 (*оценка отдолу за броя цикли в свързан граф*)**.** *В свързан граф с n върха и m ребра има поне $m - n + 1$ цикъла.*

Доказателство. Разглеждме графа в процес на конструиране. - Първоначално имаме n несвързани върха (съответно толкова компоненти на свързаност) и 0 цикъла, последователно добавяме m-те ребра (редът е без значение). Наблюдение: всяко новодобавено ребро

- или увеличава броя на циклите,
- или свързва две отделни компоненти, т.е намалява компонентите на свързаност с една;

Понеже, ще добавим m ребра, $m \leq cycles + removed\ components$, откъдето
$m \leq cycles + (n - components) \Rightarrow m - n + components \leq cycles$, но $components \geq 1 \Rightarrow$
$m - n + 1 \leq m - n + components \leq cycles$ □

Задача 1. Кои от следните редици (и защо) могат да бъдат степени на върховете в прост граф?

- 1, 2, 3, 4, 4, 4;
- 1, 2, 3, 4, 4, 6;
- 0, 2, 2, 3, 3, 5;
- 1, 2, 2, 3, 3, 4;

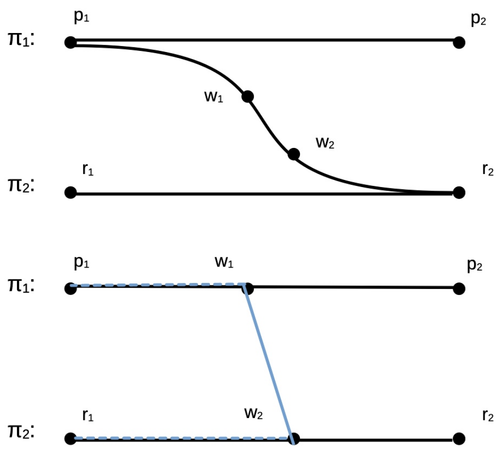
Решение. Да съществува такъв граф е:

- възможно, направете пример;
- невъзможно, няма как да има връх от степен 6 при също толкова върхове;
- невъзможно, няма как едновременно да има връх от степен 0 и такъв от степен 5;
- невъзможно, броят върхове от нечетна степен трябва да е четно число. ■

Задача 2. Нека G е свързан граф. Докажете, че два пътя, които са едновременно най-дълги имат поне един общ връх.

Решение. Нека в графа има два различни най-дълги пътя: $\pi_1 : p_1 - p_n$ и $\pi_2 : r_1 - r_n$ $d = |\pi_1| = |\pi_2|$. Да допуснем противното, че те нямат общ връх. Тогава $p_n \neq r_1$, а от свързаността на графа между p_n и r_1 има път $p_n - r_1$ (да го означим с π).
Сега да изберем два върха $w_1 \in \pi_1, w_2 \in \pi_2$ такива, че $w_1, w_2 \in \pi$ и разстоянието $w_1 - w_2$ в π е минимално *(*)*. (Важно е да отбележим, че такива върхове със сигурност има - например $w_1 = p_n, w_2 = r_1$., *виж картинката по-долу*)
Изборът на екстремален елемент ни дава следното: всеки вътрешен връх u от пътя $w_1 - w_2$ *НЕ* е нито от пътя π_1 ($u \notin \pi_1$), нито от π_2 ($u \notin \pi_2$) *(**)* - в противен случай ще има по-къс подпът на π с исканите свойства, като единият му връх е u, а другият w_1/w_2, противоречие с *(*)*.
Б.о.о нека w_1 е по-отдалечен от p_1, отколкото от p_2 и w_2 е по-отдалечен от r_1, отколкото от r_2, т.е. $|w_1 - p_1| \geq \frac{d}{2}, |w_2 - r_1| \geq \frac{d}{2}$, тогава пътят $_1 - w_1 - w_2 - r_1$ (който е валиден прост път, заради допускането, че π_1 и π_2 не се пресичат, и заради доказаното по-горе *(**)*) е с дължина поне $|p_1 - w_1| + |w_1 - w_2| + |w_2 - r_1| \geq \frac{d}{2} + 1 + \frac{d}{2} > d$, но това е противоречие с факта, че $d = |\pi_1| = |\pi_2|$ и π_1, π_2 са най-дълги пътища. ■

Нотация. С "$p_1 - p_n$" за краткост обозначаваме път от връх p_1 до връх. p_n



Задача 3 (НОМ2 2020 9.3)**.** В социална мрежа някои потребители са приятели, други не. В мрежата има поне едно приятелство и е известно, че ако двама имат еднакъв брой приятели, то те нямат общ приятел. Да се докаже, че в мрежата има потребител само с един приятел.

Решение. Да уточним, че на езика на графите мрежата може да се гледа като граф, в който приятелствата са ребра, а върховете са потребителите.
Да допуснем, че връх от степен 1 няма. Разглеждаме върха от максимална степен v, нека $d(v) = k$ ($k > 1$, защо?). Тогава за всички останали върхове $w_i : d(w_i) \leq k$. Но връх v има k съседа, всеки от степен между 2 и k ($k - 1$ възможности), по Дирихле има два с еднаква степен, но това е противоречие с условието. ■

Задача 4. Ако всеки връх в граф е от степен поне k ($\forall u \in V : \delta(u) \geq k$), dа се докаже, че съществува ребро, което участва в поне $k - 1$ цикъла.

Решение. Разглеждаме конкретен най-дълъг път в графа, нека един такъв е $u - v$. Нека първият връх след u по този път е w_1. По условие u има още поне k-1 съседа (нека $w_2, ...w_k$). Да забележим, че ако за произволно $i \leq k : w_i$ не е част от пътя $u - v$, то последният би могъл да се продължи, с което бихме намерили нов по-дълъг път, което е противоречие. Ето защо всеки връх w_i е част от пътя $u - v$.
Сега лесно се вижда (на картинка), че реброто (u, w_1) участва в поне $k - 1$ цикъла: i-тият цикъл включва реброто (u, w_{i+1}) и частта от пътя $u - v$ между върховете u и w_{i+1}. ■

Следствие 1. *Ако всеки връх в граф е от степен поне 2, то в графа има цикъл.*

Задача 5. Ако всеки връх в граф е от степен поне $k > 1$ ($\forall u \in V : \delta(u) \geq k, k > 1$), да се докаже, че съществува цикъл с дължина поне $k + 1$.

Решение. Ползваме абсолютно същата идея, като в началото на миналата задача. - Щом всички върхове w_i са част от пътя $u - v$, то най-отдалеченият от u от тях (б.о.о. това е w_k) е на разстояние поне k. Тогава цикълът, съдържащ реброто (u, w_{i+1}) и частта от пътя $u - v$ между върховете u и w_{i+1}, има дължина поне $k + 1$. ■

Следствие 2. *Ако всеки връх в граф е от степен поне k, то съществува прост път с дължина поне k.*

Задача 6 (*)**.** Нека G е свързан граф с четен брой върхове. Докажете, че може да се избере подмножество от ребра ($E' \subseteq E$) на G така, че всеки връх е инцидентен с нечетен брой от избраните ребра.

Решение (полуконструктивно)*.* Ще покажем нещо като алгоритъм, който да генерира исканото:

Наблюдение 1: Понеже във всеки граф броят на върховете от нечетна степен е четен, то тук и броят на върховете от четна степен ще е четен (2k). □

Ако върхове от четна степен няма, то задачата си е решена, взимаме $E' = E$.
Нека има поне един (а от четността ще са поне два) върха от четна степен. От свързаността на графа между върховете от четна степен има пътища. Разглеждаме най-краткия път между два върха от четна степен, нека един такъв е $u_0 - u_t$ с междинни върхове $u_1, ...u_{t-1}$.

Наблюдение 2: Върховете $u_1, ...u_{t-1}$ са от нечетна степен, в противен случай (ако някой u_j от тях е от четна) ще съществува по-къс път между върхове от четна степен (например пътят $u_0 - u_j$). □

Стъпка: Ако премахнем ребрата от пътя u_j, в оставащия граф всички върхове $u_1, ...u_{t-1}$ продължават да са от нечетна степен, но вече и u_0, u_t са от нечетна степен. Така намалихме броя върхове от нечетна степен с две.

Тогава след краен брой такива стъпки (по-конкретно k) няма да има останали върхове от четна степен, т.е. останалото множество от ребра изпълнява условието. ■

Забележка. На практика с това последователно трансформиране на 2 върха от четна в нечетна степен е индукция, но изказана пр друг (неявен) начин.

2 Свързаност

Лема 4. *Граф е свързан точно тогава, когато има единствена компонента на свързаност.*

Лема 5. *Ако граф G е свързан и edge е ребро, участващо в цикъл точно когато след премахване на реброто графът остава свързан (т.е. $G - edge$ е свързан).*

Лема 6 (*)**.** *Ако (неориентиран) граф G с n върха, m ребра има k свързани компоненти, то $m \leq \binom{n-k+1}{2}$.*

Доказателство. Нека в компонентите има съответно по $n_1, ..., n_k$ върха, $n_i \geq 1$. Ясно е, че $n_1 + ... + n_k = n$. Също така в компонента i има не повече от $\frac{n_k(n_k-1)}{2}$ ребра, като равенство се достига, когато съответната компонента е пълен граф. Нека положим $n'_i = n_i - 1,\ n'_i \geq 0$. Оттук $n'_1 + ... + n'_k = n - k$.
Тогава:
$m \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_k(n_k-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_k.(n_k - 1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n'_k+1).n'_k = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k} n'^2_k + \sum_{i=1}^{k} n'_k.] = \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{k} n'^2_k + (n-k)] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n'^2_k + \frac{n-k}{2} \leq \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} n'_k)^2 + \frac{n-k}{2} = \frac{1}{2}(n-k)^2 + \frac{n-k}{2} = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) = \binom{n-k+1}{2}$

Забележете, че последното неравенство е изпълнено точно когато $n_i = 0$ за всички i с изключение на едно, т.е. във всяка копонента освен една (в която има $n - (k-1)$ върха) има по един връх. □

Следствие 3 (точна долна граница)**.** *Ако $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$, то G е свързан.*

Доказателство. От лемата горе следва, че ако графът има $k \geq 2$ компоненти, то $m \leq \binom{n-k+1}{2} \leq \binom{n-2+1}{2} = \binom{n-1}{2}$. Тогава при $m > \binom{n-1}{2}$, $k < 2 \Rightarrow k = 1$, т.е. графът е свързан (*получихме долна граница*).
За да докажем, че показаната долна граница е точна, достатъчно е да дадем пример, показващ, че $m \geq \binom{n-1}{2}$ ребра *невинаги* са достатъчни, за да твърдим, че графът е свързан. При две копмпоненти, едната от които K_{n-1}, а другата изолиран връх тази бройка точно се достига, но графът наистина не е свързан. □

Задача 7. Нека G е несвързан граф. Докажете, че $\overline{G}$ е свързан.

Решение. Нека $u, v \in V(G)$ са произволни.
1 сл.) $(u, v) \notin E(G) \Rightarrow (u, v) \in E(\overline{G})$, т.е. u, v са съседни в $\overline{G}$, а оттук и свързани. □
2 сл.) $(u, v) \in E(G)$, значи u, v са били в една свързана компонента в граф G, но от това, че G не е свързан, съществува връх w в друга негова компонента $\Rightarrow (u, w), (v, w) \notin E(G) \Rightarrow (u, w), (v, w) \in E(\overline{G})$, а оттук u, v са свързани (имат път през w). □
Получаваме, че произволни два върха са свързани в $\overline{G}$, значи и той е свързан. ■

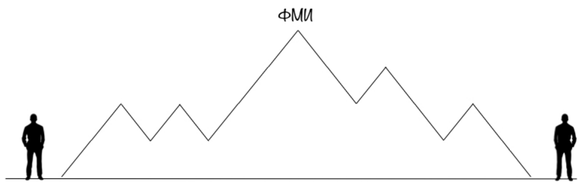
Задача 8. Ако G е граф с n връха такъв, че $\delta(u) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, то докажете, че G е свързан.

Решение. Ето две възможни решения:
1 н.) Допускаме противното, нека графът има поне две свърани копмоненти. Нека най-малката от тях (по брой върхове) има к върха. $\Rightarrow \quad k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow$ за всеки връх u от въпросната компонента: $d(u) \leq k - 1 \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, което противоречи на условието. ■

2 н.) Нека $u,\ v$ са произволни два върха. Имаме, че $d(u) + d(v) \geq 2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil \geq n - 1$. Ако двата върха не са съседни, то от Дирихле измежду оставащите $n - 2$ върха те имат общ съсед. И в двата случая u и v са свързани (има път помежду им). Понеже те бяха произволни всеки два върха, а оттам и графът са свързани. ■

Задача 9 (*ППМГ Бургас Challenge 2020)**.** Двама ентусиасти искат да стигнат до планински връх по два различни пътя, като те тръгват от едно ниво (еднаква надморска височина). Двата пътя са разделени на равни стъпки, всяка от които е или нагоре, или надолу, но пътищата не са задължително с еднакъв релеф (виж *фигура 9*). Двамата решили да се движат, спазвайки правилото във всеки момент да са на еднаква височина, като на всеки ход всеки от тях прави по една стъпка напред или назад по пътеката. Винаги ли е възможно да стигнат до върха, спазвайки правилото си?

Забележка. Двете пътеки никога не слизат под първоначалната си надм. височина, нито стигат по-висока точка от върха. (Какво става, ако бяхме допуснали това?)



Решение. Да, винаги е възможно, при това без да има нужда някой да напуска пътеката си (т.е. да преминава от другата страна на върха).
- Конструираме граф с върхове двойки точки от релефа, които са на еднаква височина и такива, че първата точка е от лявата пътека, втората - от дясната. Реално всяка такава двойка (да я наричаме състояние) ще представлява една потенциална позиция на двамата по време на похода.
Свързваме два върха (две състояния/двойки позиции) с ребро, ако за един ход всеки от двамата може да премине от съответната си позция от първото сътояние в съответната си позиция от второто състояние.
- Задачата се свежда до това да кажем дали съществува път в графа (с други думи последователност от ходове) такъв, че от първоначалното състояние (start-1, start-2) /ако така обозначим изходните позиции/ стигаме до финалното състояние (peak, peak). Достатъчно е да покажем, че са в една компнента на свързаност:
- Понеже от първоначалното състояние можем да отидем в единствено друго, както и във финалното можем да стигнем от единствено друго, то в графа тези върхове са от 1-ва степен, *нечетна.* Всички останали състояния от двойки позиции ще са върхове от четна степен (има два лесни случая, които е добре да се проверят, вижте с картинка).
- Във всяка компнента на даден граф обаче има четен брой върхове от нечетна степен, тогава единствените два върха от нечетна степен, а именно началното и финалното състояние са в една компонента, което и искахме. ■

Дефиниция 2.1 (мост)**.** Ребро се нарича *мост*, ако неговото разделя графа, т.е. увеличава броя на свързаните компоненти.

Задача 10. Докажете, че ребро *не* е мост точно тогава, когато е част от цикъл.

Решение. Ребро не е мост точно когато премхването му не увеличава броя компоненти. Това означава, че ако реброто е било в свързана компонента $comp_1$, след махането му $comp_1$ остава свързана. Тогава (от лема 5), $comp_1$ остава свързна тстк реброто е участвало в цикъл. Или по-просто:
реброто не е мост $\Leftrightarrow$ премахването му запазва свързаността на компонените $\Leftrightarrow$ реброто участва в цикъл. ■

3 (Анти)клики

Дефиниция 3.1 (анти-кликово число)**.** Имаме следните дефиниции:
- кликовото число $\omega(G)$ бележи размера на максималната клика;
- антикликовото число $\alpha(G)$ бележи размера на максималната антиклика.

Лема 7. *Ако $U \subseteq V$ е клика в $G = (V, E)$, то $U \subseteq V$ е антиклика в $\overline{G}$.*

Следствие 4. $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$

Лема 8. *G=(V,E) е граф с поне 6 върха. Тогава в G има 3-клика или 3-антиклика.*

Доказателство. Нека u е един от шестте върха. Остават 5, с които u е или инцидентен, или не. По Дирихле u е (не)инцидентен с поне 3 от тях (б.о.о приемаме, че са инцидентни), нека това са $v_1,\ v_2,\ v_3$. Ако което и да е (v_i, v_j) от ребрата $(v_1, v_2),\ (v_1, v_3),\ (v_2, v_3) \in E$, то имаме 3-кликата $v_i - u - v_j$, ако и трите не са в графа, то пък намерихме 3-антиклика $v_1 - v_2 - v_3$.

Забележка. Забележете, че може да не говорим за ребра, които ги има/няма в графа, а например за такива, оцветени в два цвята. Тогава (анти)кликите са едноцветните триъгълници.

□

Задача 11 (*)**.** Докажете, че в граф с поне 9 върха има 3-клика или 4-антиклика.

Решение. Допускаме противното, нека няма нито 3-клика, нито 4-антиклика.
- От лемата горе вече знаем, че измежду всеки 6 върха има 3-клика или 3-антиклика. Ако случаят е първият, то веднага получаваме противоречие.

Значи измежду всеки 6 върха има 3-антиклика. Да разгледаме какво става с конкретен връх v, като нека останалите върхове са съответно $u_1,\ u_2,\ ...\ u_8$:

- Според горното измежду 6-те върха $u_1,\ u_2,\ ...\ u_6$ има 3-антиклика (нека $u_1 - u_2 - u_3$). Ясно е, че ако v *не* е инцидентен с поне един от $u_1,\ u_2,\ u_3$, ще има 4-антиклика $v - u_1 - u_2 - u_3$, което е противоречие с допускането. Тоест v е инцидентен с някой от тях, б.о.о с u_1.

- Ако повторим разсъждението, но този път върху върховете $u_2,\ u_3,\ ...\ u_7$, а после го и потретим за $u_3,\ u_4,\ ...\ u_8$, ще видим, че връх v има поне 3 върха, $d(v) \geq 3$.

- Да предположим, че е възможно $d(v) \geq 4$ (по-конкретно нека $w_1, ...w_4$ са съседи на v), по допускане в графа няма 4-антиклки $\Rightarrow$ някои два от четирите съседа на v са инцидентни, б.о.о това са w_1 и w_2. Но тогава получаваме 3-кликата $v - w_1 - w_2$, противоречие. Ето защо $d(v) < 4$, оттук $d(v) = 3\ \forall v \in V$.

Получихме, че всеки връх трбява да е от степен 3 (нечетно), но имаме 9 върха (нечетно), това е невъзможно, противоречие с допускането. ■

Следствие 5. *В граф с поне 9 върха има 4-клика или 3-антиклика.*

Решение. Интуитивно е ясно, че при липсата на всякакви допълнителни условия нещата трябва да са симетрични, или по-точно да имат симетрична аналогия. Може да се направи същото решение като по-горе, разбира се, обърнато, но тук предлагаме друго, една идея по-поучително:
Нека даденият граф е G. Разглеждаме неговото допълнение $\overline{G}$, което е отново с 9 върха. Според задачата $\overline{G}$ има 3-клика или 4-антиклика. Добре де, но от *лема 7* в G тези върхове образуват съответно 3-антиклика или 4-клика. ■

Задача 12. Докажете, че в граф с поне 18 върха има 4-клика, или 4-антиклика.

Решение. Съществува връх u, който е (не)инцидентен с поне 9 от останалите, (б.о.о примемаме, че са инцидентни). Тогава измежду тези 9 (според предната задача) винаги има 3-клика или 4-антиклика. Във втория случай задачата е директно решена, в първия посочвсаме кликата от върхове u, v_i, v_j, v_f, където v_i, v_j, v_f са върховете, образуващи 3-кликата. ■

Благодарности

Благодаря на Георги Тончев за предложената лема 3.