

מטלת מנחה (ממ"ן) 01

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה המוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{3} \\ 0, & -\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{3} \\ -1, & \frac{\pi}{3} \leq x < \pi \end{cases}$$

כאשר מחוץ לקטע זה הפונקציה מוגדרת באופן מחזורי עם מחזור 2π .

א. חשבו את טור פורייה של הפונקציה.

ב. חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)] \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 12.16 מספר הלימוד:

- 12.16 By finding a cosine Fourier series of period 2 for the function $f(t)$ that takes the form $f(t) = \cosh(t-1)$ in the range $0 \leq t \leq 1$, prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + 1} = \frac{1}{e^2 - 1}.$$

Deduce values for the sums $\sum (n^2\pi^2 + 1)^{-1}$ over odd n and even n separately.

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 12.17 מספר הלימוד:

- 12.17 Find the (real) Fourier series of period 2 for $f(x) = \cosh x$ and $g(x) = x^2$ in the range $-1 \leq x \leq 1$. By integrating the series for $f(x)$ twice, prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sinh 1} - \frac{5}{6} \right).$$

שאלה 4 (20 נקודות)

א. חשבו את טור הקוסינוסים של הפונקציה $f(x) = x \cdot (\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

ב. השתמשו בסעיף א כדי למצוא את סכומי הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ כאשר a ממשי לא שלם, המוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. מצאו את טור פוריה של הפונקציה.

ב. הראו כי

$$\cot \pi a = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n^2 - a^2} \right]$$