

פתרון:

שאלה 1 א.

צריך למצוא את משוואות התנועה עבור תנ"ז קבוע l , עבור חלקיק שנע תחת השפעת פוטנציאל $V(r) = \beta r^3$. כלומר צריך למצוא שתי משוואות דיפרנציאליות (מספר המשוואות כמספר הנעלמים, r ו- θ) בלתי תלויות. הדרך הכי פשוטה לעשות את זה, זה עם משוואות אוילר לגראנג:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \beta r^3 \quad (1)$$

נמצא את משוואת אוילר לגראנג' ל r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - 3\beta r^2 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \quad (2)$$

$$m r \dot{\theta}^2 - 3\beta r^2 - m \ddot{r} = 0 \quad (3)$$

ואת משוואת אוילר לגראנג' עבור θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} m r^2 \dot{\theta} = 0 \quad (5)$$

$$m r^2 \dot{\theta} = l \quad (6)$$

ב. התנאי לתנועה מעגלית הוא שלפונציאל האפקטיבי תהיה נקודת מיני/מקס:

$$V_{\text{eff}} = \beta r^3 + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr} V_{\text{eff}} = 3\beta r^2 - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \quad (8)$$

$$r_0 = \left(\frac{l^2}{3\beta m} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (9)$$

שאלה 2.

א. הפוטנציאל הוא $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$ לכן הפוטנציאל האפקטיבי הוא:

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (10)$$

ב. נתון שהחלקיק נע במסלול מעגלי עם רדיוס R . כמו מקודם התנאי למסלול מעגלי הוא שהנגזרת השנייה של הפוטנציאל האפקטיבי יתאפס:

$$V'_{\text{eff}} = 2\lambda^2 V_0 r e^{-\lambda^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3} \Big|_{r=R} = 0 \quad (11)$$

$$l^2 = 2mV_0 \lambda^2 R^4 e^{-\lambda^2 R^2} \quad (12)$$

ג. שיווי משקל יציב מתקבל כאשר $V''_{\text{eff}} \geq 0$ ושיווי משקל לא יציב מתקבל כאשר $V''_{\text{eff}} < 0$:

$$V''_{\text{eff}} = 2V_0 \lambda^2 e^{-\lambda^2 r^2} (1 - 2\lambda^2 r^2) + \frac{3l^2}{mr^4} \quad (13)$$

מעניין אותנו מה קורה לנגזרת השנייה בנק' R לכן נציב $r = R$ וגם נשתמש בקשר שמצאנו בסעיף קודם עבור התנאי:

$$V''_{\text{eff}} \geq 0 \quad (14)$$

$$(15)$$

$$2V_0 \lambda^2 e^{-\lambda^2 R^2} (1 - 2\lambda^2 R^2) + \frac{6}{mR^4} \lambda^2 V_0 R^4 m e^{-\lambda^2 R^2} \geq 0 \quad (16)$$

$$R \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \quad (17)$$

$$R_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \quad (18)$$

ד. נשים לב שהתנאי שמצאנו תלוי ב R לכן נציב את R_{max} שמצאנו בסעיף הקודם.

$$l^2(R = R_{\text{max}}) = 2\lambda^2 V_0 \frac{4}{\lambda^4} m e^{-\lambda^2 \frac{2}{\lambda^2}} = 8 \frac{V_0}{\lambda^2} m e^{-2} \quad (19)$$

$$l_{\text{max}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{8V_0 m e^{-2}} \quad (20)$$

ה. שואלים אותנו האם זה אפשרי שתהיה תנועה מעגלית עבור רדיוס R שמקיים $V_{\text{eff}} < 0$ ו- $V_{\text{eff}} \geq 0$. צריך לשים פה לב, התנאי הוא פונקציה של R (כמו שמצאנו בסעיף ב') וישנם ערכים מסויימים של R שלא מאפשרים מסלול מעגלי, לכן אנחנו צריך לבדוק את V_{eff} עבור ערכי l שכן מאפשרים מסלול מעגלי, וזה בדיוק התנאי שמצאנו בב'. נציב את הביטוי בפוטנציאל האפקטיבי:

$$V_{\text{eff}} = V_0 e^{-\lambda^2 R^2} (\lambda^2 R^2 - 1) \quad (21)$$

נקבל שעבור $R < \frac{1}{\lambda}$, $V_{\text{eff}} < 0$ ו- $R \geq \frac{1}{\lambda}$, $V_{\text{eff}} \geq 0$. מתקיים $V_{\text{eff}} \geq 0$ לכן שני התנאים מתקיימים.

הערה: שימו לב שכאשר l מקיים מסלול מעגלי, ו- R גדול מ $\frac{1}{\lambda}$ גורר ש $V_{\text{eff}} \geq 0$. זה לא אומר שבהכרח כול $r \geq \frac{1}{\lambda}$ גורר תנועה מעגלית סגורה. (ואותה הערה ל $R < \frac{1}{\lambda}$).

שאלה 3.

קודם כל שימו לב שהכוונה ב- $\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha$ היא: $\ln\left(\frac{r^\alpha}{r_0^\alpha}\right)$.

נשתמש במשוואות בינה (Binet):

$$\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (22)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \pm \frac{m}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (23)$$

(+) עבור כוח דוחה ו-(-) עבור כוח מושך.
נמצא קודם כל את הכוח ואח"כ את הפוטנציאל.

$$\ln\left(\frac{r^\alpha}{r_0^\alpha}\right) = \theta \Rightarrow r = r_0 e^{\theta/\alpha} \Rightarrow u = \frac{1}{r_0} e^{-\theta/\alpha} \quad (24)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{\alpha^2 r_0} e^{-\theta/\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} u \quad (25)$$

נציב ב 23:

$$\frac{1}{\alpha^2}u + u = -\frac{m}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha^2} + 1\right)\frac{1}{r} = -\frac{m}{l^2}r^2F(r) \quad (26)$$

$$F(r) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2r^3} \quad (27)$$

נמצא כעת את הפוטנציאל:

$$V(r) = -\int F(r)dr = \frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2} \int \frac{1}{r^3}dr = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2} \frac{1}{r^2} + C \quad (28)$$

ניתן להגדיר $V(\infty) = 0$ ולקבל

$$V(r) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2} \frac{1}{r^2} \quad (29)$$

ב. נמצא קודם את \dot{r} בעזרת:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - (V(r) + \frac{l^2}{2mr}) \right)} \quad (30)$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \left(+\frac{l^2}{2mr} \right) \right)} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{1}{2m\alpha^2r^2} \right)} \quad (31)$$

המהירות עבור θ היא הקשר הרגיל של התנאי

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \quad (32)$$

ג.

הפוטנציאל האפקיבי הוא :

$$V_{\text{eff}} = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2} \frac{1}{r^2} \quad (33)$$

לפוטנציאל לא קיימות נק' קיצון, ולכן עבור כל אנרגיה קטנה מ-0, הפוטנציאל ימשוך את החלקיק. ניתן לראות גם לפי:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \left[\frac{d}{du} V \left(\frac{1}{u} \right) \right] \quad (34)$$

נציב $\frac{1}{u}$ ב- $\left[V \left(\frac{1}{u} \right) \right]$:

$$V \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2} u^2 \quad (35)$$

$$\frac{d}{du} V \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2} u \quad (36)$$

נציב במשוואה 34 :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{(1+\alpha^2)}{\alpha^2} u = \frac{1}{\alpha^2} u \quad (37)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{\alpha^2} u = 0 \quad (38)$$

קיבלנו מד"ר שניתן לפתור עם $u = e^{\lambda\theta}$. הפתרון הכללי הוא :

$$u = ae^{\theta/\alpha} + be^{-\theta/\alpha} \quad (39)$$

נפתור עבור r :

$$r = \frac{1}{ae^{\theta/\alpha} + be^{-\theta/\alpha}} \quad (40)$$

ניתן לראות שעבור $\theta \rightarrow \infty$ (כלומר המון סיבובים), r שואף לאפס. ז"א אין מסלול מעגלי.

שאלה 4.

צריך להסתכל על הפוטנציאל האפקטיבי של הבעיה ולהבין מה קורה שם :

$$V_{\text{eff}} = \left(\frac{l^2}{2m} - B \right) \frac{1}{r^2} = (b^2 E - B) \frac{1}{r^2} \quad (41)$$

אנחנו יודעים שהחלקיק צריך להיבלע ולא להתפזר, לכן המקדם של $1/r^2$ צריך להיות שלילי. אנחנו מקבלים את התנאי הזה עבור- $b^2 E - B < 0$. מכאן אפשר למצוא את b :

$$b < \sqrt{\frac{E}{B}} \Rightarrow b_{\text{max}} = \sqrt{\frac{E}{B}} \quad (42)$$

וחתך הפעולה הוא:

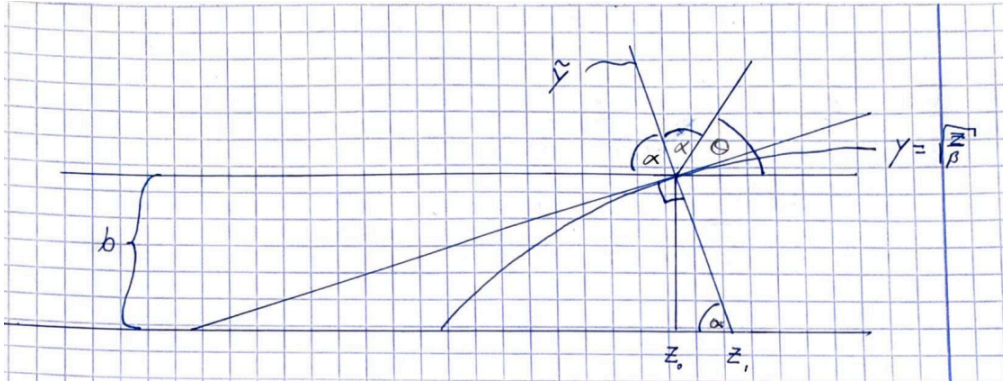
$$\sigma = \pi b_{\text{max}}^2 = \pi \frac{E}{B} \quad (43)$$

שאלה 5. א.

צריך לחשב את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור החלקיקים מהעקומה $z = \beta y^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (44)$$

נמצא קודם כל את $b(\theta)$. אנחנו רוצים למצוא את הקשר $\tan \alpha = \frac{b}{\Delta z}$ עם $\Delta z = z_1 - z_0$, ולהביע את הנעלמים בקשר הזה רק עם הקבועים b , β ו- θ .



נמצא את z_0 שעבורו הפונקציה y שווה ל- b .

$$y(z_0) = b = \sqrt{\frac{z_0}{\beta}} \Rightarrow z_0 = \beta b^2 \quad (45)$$

נמצא את הביטוי ל- \tilde{y} , שהוא הישר הניצב למשוואת המשיק בנק' z_0 .

$$y'(z) = \frac{1}{2\beta\sqrt{z/\beta}} \Rightarrow y'(z_0) = \frac{1}{2\beta b} \quad (46)$$

שיפוע הניצב למשיק הוא:

$$m \cdot \frac{1}{2\beta b} = -1 \quad (47)$$

$$m = -2\beta b \quad (48)$$

$$\tilde{y} = -2\beta bz + \tilde{y}_0 \quad \text{with} \quad \tilde{y}(z_0) = b \Rightarrow \tilde{y}_0 = b(1 + 2\beta^2 b^2) \quad (49)$$

$$\tilde{y} = -2\beta bz + b(1 + 2\beta^2 b^2) \quad (50)$$

אנחנו רוצים למצוא את נק' החיתוך z_1 : נציב 0 ב- \tilde{y} ונקבל $z_1 = \frac{1}{2\beta} + \beta b^2$.

$$\Delta z = \frac{1}{2\beta} \quad (51)$$

נשים לב ש שתי הזוויות אלפה ותטא יושבות על אותו ישר. לכן $2\alpha + \theta = \pi$. כעת ניתן להציב הכל ב- $\tan \alpha = \frac{b}{\Delta z}$ ולפתור עבור b .

$$\tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{\tan(\theta/2)} = \frac{b}{\Delta z} = 2b\beta \quad (52)$$

$$\frac{1}{\tan(\theta/2)} = 2b\beta \quad (53)$$

$$b(\theta) = \frac{1}{2\beta \tan(\theta/2)} \quad (54)$$

נמצא כעת את $\left| \frac{db}{d\theta} \right|$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{4\beta \sin^2(\theta/2)} \quad (55)$$

נציב הכל ב- 44 :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2\beta \tan(\theta/2) \sin(\theta)} \frac{1}{4\beta \sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{16\beta^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (56)$$