פתרון:

שאלה 1 א.
מדובר באוסצילטור הרמוני חד- ממדי כמו מסה על קפיץ. האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית הן:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2}kx^2$$

ע"מ למצוא את משוואת התנועה נשתמש במשוואת אויילר לגראנג':

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad ; \qquad L = T - V \tag{1}$$

נציב ונפתור:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad kx + m\ddot{x} = 0$$

ב.

$$L = (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}\dot{x}^2)e^{\gamma t}$$

נחשב את הנגזרות עבור משוואה 1 :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kxe^{\gamma t} \ , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}e^{\gamma t} + m\dot{x}\gamma e^{\gamma t}$$

נציב במשוואת אוילר לגראנג':

$$\begin{aligned} m\ddot{x}e^{\gamma t} + m\gamma\dot{x}e^{\gamma t} + kxe^{\gamma t} &= 0 \qquad / : e^{\gamma t} \\ m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו משוואה של מתנד הרמוני עם כוח גרר.

שאלה 2

1. נשתמש במערכת קורדינטות פולרית ע"מ לתאר את מיקום החרוז:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \qquad & \dot{x} &= -a\dot{\theta}\sin\theta \\ y &= a\sin\theta \qquad & \dot{y} &= a\dot{\theta}\cos\theta \\ z &= \frac{\theta b}{2\pi} \qquad & \dot{z} &= \frac{\dot{\theta} b}{2\pi} \end{aligned}$$

האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של החרוז היא:

$$T = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \tfrac{1}{2}m\left[(a\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \left(\tfrac{\dot{\theta}b}{2\pi}\right)^2\right]$$

$$T = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + \tfrac{b^2}{4\pi^2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$V = mgz = mg\frac{\theta b}{2\pi}$$

הלגראנג' הוא:

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + \tfrac{b^2}{4\pi^2}\right)\dot{\theta}^2 - mg\frac{\theta b}{2\pi}$$

2. נגזור עבור משוואות אוילר לגראנג':

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\tfrac{b}{2\pi} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(a^2 + \tfrac{b^2}{4\pi^2})\ddot{\theta}$$

ונציב במשוואה 1

$$\frac{gb}{2\pi} + (a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2})\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\pi gb}{b^2 + 4\pi^2 a^2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\ddot{\theta}b}{2\pi} = -\frac{b^2}{b^2 + 4\pi^2 a^2}\, g$$

3.

$\underline{a >> b}$: כש a גדול מאוד מ b המכנה שואף לאין סוף והביטוי עבור $\ddot{z}$ שואף לאפס.
זה מתאר מצב שבו הסליל כל כך רחב שהתאוצה של החרוז מתאפסת.

$$\ddot{z}_{a>>b} = 0$$

$\underline{a << b}$: כש b גדול מאוד מ a מחוקי גבולות אנחנו יודעים שהביטוי בשבר שואף לאחד והביטוי עבור $\ddot{z}$ שואף ל $-g$.
זה מתאר מצב שבו הסליל נורא צר, כלומר הרדיוס שלו שואף כביכול ל0 והתאוצה שלו זהה לתאוצה בנפילה חופשית.

$$\ddot{z} = -g$$

שאלה 3

א. עקרונית, הבחירת קורדינטות בשאלה הזו לא משנה את הפתרון, אבל חשוב לבחור קורדינטות שנוח לתאר איתן את המיקום של המסות והגלגלת בשאלה. ע"מ להקל על הסימונים,גדלים שקשורים לגלגלת יסומנו עם אינדקס 3.

נסמן את המיקום של הגלגלת מהתקרה ב y_3. y_1 ו- y_2 הם המיקום של מסה 1 ומסה 2 מהתקרה בהתאמה. θ היא זווית הפתיחה של הגלגלת.

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y \\
y_1 &= y_3 + R\theta = y + R\theta \\
y_2 &= y_3 - R\theta = y - R\theta
\end{aligned}
$$

נגזור לפי הזמן:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_3 &= \dot{y} \\
\dot{y}_1 &= \dot{y}_3 + R\dot{\theta} = \dot{y} + R\dot{\theta} \\
\dot{y}_2 &= \dot{y}_3 - R\dot{\theta} = \dot{y} - R\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

עבור כל מערכת ללא קשר לכמות המסות שבה, יש לגראנג' אחד שמכיל בתוכו את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של כל הגופים במערכת:

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}\Big(m_1(\dot{y}+R\dot{\theta})^2 + m_2(\dot{y}-R\dot{\theta})^2 + m_3\dot{y}^2\Big) + \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_1-m_2)R\dot{y}\dot{\theta} + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 + m_3gy_3 = m_1g(y+R\theta) + m_2g(y+R\theta) + m_3gy \\
&= (m_1+m_2+m_3)gy + (m_1-m_2)gR\theta
\end{aligned}
$$

והלגראנ' $L = T - V$ הינו:

$$
L = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{y}^2 + (m_1-m_2)R\dot{y}\dot{\theta} + \tfrac{1}{2}\big((m_1+m_2)R^2 + I\big)\dot{\theta}^2 - (m_1+m_2+m_3)gy - (m_1-m_2)gR\theta
$$

ב. ע"מ למצוא את משוואות התנועה צריך לגזור את הלגראנג', נשים לב שיש לנו שתי קורדינטות מוכללות, y ו- θ. נגזור לפי משוואה 1 פעם אחת לפי y ופעם אחת לפי θ .

$$
\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gR(m_1-m_2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = R\ddot{y}(m_1-m_2) + R^2\ddot{\theta}(m_1+m_2) + I\ddot{\theta}
$$

נציב במשוואת אוילר לגראנג'

$$
\Rightarrow \quad gR(m_1-m_2) + R\ddot{y}(m_1-m_2) + \ddot{\theta}(R^2(m_1+m_2)+I) = 0
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial y} = -g(m_1+m_2+m_3) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \ddot{y}(m_1+m_2+m_3) + R\ddot{\theta}(m_1-m_2)
$$

$$
\Rightarrow \quad g(m_1+m_2+m_3) + \ddot{y}(m_1+m_2+m_3) + R\ddot{\theta}(m_1-m_2) = 0
$$

ג. במקרה שבו הקפיץ לא זז לא מספיק להציב במשוואות התנועה שקיבלנו $\ddot{y} = 0$, אלא צריך לשים לב ש y כבר לא קורדינטה, אלא קבוע כלשהו.

צריך א' להתייחס אליו כקבוע בביטויים לאנרגיה הפוטנציאלית והקינטית וב' לגזור את הלגראנג' שמתקבל רק לפי θ.

המשוואת תנועה שתתקבל הינה אותה משוואת תנועה שקיבלנו עבור θ בלי הנגזרת השנייה לפי y.

$$
\Rightarrow \quad gR(m_1-m_2) + \ddot{\theta}(R^2(m_1+m_2)+I) = 0
$$

נפתור עבור $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = -g\,\frac{R(m_1 - m_2)}{R^2(m_1 + m_2) + I}$$

אחרי אינטגרציה נקבל:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t - \tfrac{1}{2}g\frac{R(m_1 - m_2)}{R^2(m_1 + m_2) + I}t^2$$

שאלה 4

$$L = -mc^2\sqrt{1-|\dot{\mathbf{r}}|^2/c^2} - e\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}$$

נשים לב ש

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}|\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

ובמקום לסמן את הנגזרות לפי x , y ו- z נשתמש ב r_i ו $\dot{r}_i$.

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}|\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\dot{r}_i}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

בנוסף:

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\mathbf{r} = \hat{r}_i$$

כש- $\hat{r}_i$ הוא ווקטור היחידה בכיוון r_i .

א. נגזור בכיוון כללי r_i.

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -e\,\mathbf{E}\,\hat{r}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = mc^2\frac{|\dot{\mathbf{r}}|\,\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}|\dot{\mathbf{r}}|\,c^{-2}}{\sqrt{1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2}}} = \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2}}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\frac{d}{dt}\frac{\dot{r}_i}{\sqrt{1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2}}} = m\frac{d}{dt}\dot{r}_i(1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}} = m\ddot{r}_i(1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}} + m\dot{r}_i\frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\;c^{-2}}{(1-|\dot{\mathbf{r}}|^2c^{-2})^{\frac{3}{2}}}$$

שימו לב ש:

$$\frac{d}{dt}|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = 2\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\gamma\ddot{r}_i + m\tfrac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})\dot{r}_i \qquad \text{with} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-|\dot{\mathbf{r}}|^2/c^2}}$$

עבור שדה בעל כיוון כללי $\mathbf{r}$ נקבל:

$$m\gamma\ddot{r}_i + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}})\dot{r}_i = -e\mathbf{E}\hat{r}_i$$

ב.

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \qquad \mathbf{E} = (0, 0, E)$$

$$m\gamma\ddot{x} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{x} = 0$$
$$m\gamma\ddot{y} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{y} = 0$$
$$m\gamma\ddot{z} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{z} = -eE$$

לא, הבחירה לא מגבילה את הכלליות.
כל שדה חשמלי אחיד אפשר תמיד ליישר עם אחד הצירים בעזרת סיבוב מערכת הצירים.

ג.

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}} = -e\mathbf{E}\hat{r}_i$$
$$m\dot{r}_i = (-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c_i')\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}$$
$$\dot{r}_i = \frac{-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c_i'}{\sqrt{m^2 + c^{-2}(-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c_i')}}$$

כאשר c_i' הוא קבוע אינטגרציה בציר ה-i.

התנע ב x יהיה:

$$P_x = \gamma m\dot{x}\Big|_{E_x=0} = \frac{c_x'}{\sqrt{m^2 + c^{-2}c_x'^2}}$$

התנע בציר ה x קבוע. אנלוגית מתקבלת אותה התוצאה עבור התנע בציר ה-y.

ד. נתון שהאלקטרון מתחיל לנוע מראשית הצירים ממצב של מנוחה. כלומר עבור $t = 0$ מתקיים

$$m\gamma(0)\dot{x}(0) = m\gamma(0)\dot{y}(0) = 0$$

בסעיף הקודם הוכחנו שיש שימור תנע בציר x ו- y. כלומר המהירות עבור כל $t \geq 0$ בצירים האלה שווה ל-0 ומכאן ש:

$$x(t) = y(t) = 0$$

ע"מ לפתור את משוואת התנועה בציר z, נחזור למשוואות אוילר לגראנג' שמצאנו בסעיף א':

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2 c^{-2}}} = -eE \quad \Rightarrow \quad \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2 c^{-2}}} = -eEt + \dot{z}_0$$

$\dot{z}_0$ הוא קבוע אינטגרציה. ידוע אבל שהמהירות ההתחלתית היא 0, לכן $\dot{z}_0 = 0$.
נשאר לפתור את המשוואה עבור $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \frac{-eEt}{\sqrt{m^2 + (eEt/c)^2}}$$

בעזרת u-sub פשוט ושימוש ב $z(0) = 0$ אפשר לפתור את האינטגרל ולמצוא את משוואת התנועה עבור z.
מכאן ש $\mathbf{r}(t)$ הוא:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c^2}{eE}\sqrt{m^2 + (eEt/c)^2} - \frac{c^2 m}{eE} \end{pmatrix}$$

שאלה 5

א. אנחנו צריכים להוכיח בחלק הזה של השאלה שהאנרגיה הפוטנציאלית של השרשרת היא: $U = \mu g \int_{x1}^{x2} y\sqrt{1+(dy/dx)^2}dx$. אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה האנרגיה הפוטנציאלית של קטע קטן מהשרשרת ששוקל dm. התשובה לזה היא $dU = dmgy$. אפשר לרשום את המסה dm בתור $dm = \mu dl$ כאשר μ זו צפיפות השרשרת ו dl זה אורך אינפיטיסימלי של השרשת.

בספר הוכיחו את הקשר $dl = \sqrt{1+(dy/dx)^2}dx = \sqrt{1+y'^2}dx$.

ולכן ניתן לשכתב את האנרגיה הפוטנציאלית של קטע אינפיטיסימלי כ:

$$dU = \mu g y\sqrt{1+y'^2}dx$$

מה שנשאר לעשות זה לקחת את האינטגרל של הביטוי הזה על פני כל אורך השרשרת:

$$U = \mu g \int_{x1}^{x2} y\sqrt{1+(dy/dx)^2}dx$$

ב. שימו לב להדרכה, יש כאן רמז גדול שקיים אילוץ במערכת. האילוץ הוא שהאורך הכולל של החבל הוא l שניתן לכתוב כ:

$$l = \int_{x1}^{x2} ds = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+y'^2}dx$$
$$\int_{x1}^{x2} \sqrt{1+y'^2}dx - l = 0$$

מדובר באילוץ הולונומי אינטגרלי, כלומר ניתן לכתוב את האילוץ כ:

$$f(q, \dot{q}, t) = 0$$

הפונקציונאל אנרגיה שממנו "נוציא" את הלגראנג' הוא :

$$U = \int_{x1}^{x2} \left[\mu g y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right] dx$$

שימו לב שלא הוספתי את הקבוע $-l$ (שאלגברית צריך להוסיף אחרי האינטגרל), מכיוון שמדובר בקבוע והוא יפול בכל גזירה שתבוא. בנוסף, λ הוא קבוע ולא פונקציה של x (כלומר $\lambda(x)$).

באילוץ אינטגרלי הλ נלקח כקבוע ובאילוץ הולונומי לא אינטגרלי (לדוגמא $x^2+y^2-R^2=0$) λ הינו פונקציה של x.

הלגראנג' שלנו הוא האינטגרט באינטגרל

$$L = \mu g y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

לא נגזור את הלגראנג' לפי הנגזרות החלקיות במשוואת אוילר לגראנג' (משוואה 1), כי יצא ביטוי שנורא קשה לעבוד איתו $\ddot{y}(\mu g\dot{y} + \lambda - \lambda\dot{y}^2) = \mu g$.

מכיוון ש- L אינו תלוי ב- x, פונקציית האנרגיה של הלגראנג' היא גודל משמר:

$$h = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \tag{2}$$

נותר לגזור ולפתור את המשוואה הדיפרנציאלית שתתקבל:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\mu g y + \lambda)$$

נציב בפונקצית האנרגיה:

$$h = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}(\mu g y + \lambda) - (\mu g y + \lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

$$y' = \sqrt{\tfrac{1}{h^2}(\mu g y + \lambda) - 1}$$

נפתור בהפרדת משתנים:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\tfrac{1}{h^2}(\mu g y + \lambda) - 1}} = \frac{h^2 dy}{\sqrt{(\mu g y + \lambda) - h^2}}$$

$$y = \tfrac{h}{\mu g}\cosh\left(\tfrac{\mu g}{h}(x+A)\right) - \frac{\lambda}{\mu g}$$