$$ב)\ א)\quad f(x) = \begin{cases} \pi - |2x| & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

מכיוון שהפונקציה זוגית ניתן להתעלם מ b_n.

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\Big[n^2(\pi-2x)\sin(nx) - 2\cos(nx)\Big]_0^{\pi/2}$$

כמו אינטגרל של פונקציה זוגית.

	D	I
+	$\pi - 2x$	$\cos(nx)$
−	-2	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
+	0	$-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$$a_n = \frac{4}{\pi n^2}\left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

צריך להבין מה מקבלים מהביטוי $(1-\cos(n\frac{\pi}{2}))$ עבור כל n.
נבנה טבלה קטנה:

n	$1-\cos(n\frac{\pi}{2})$
1	1
2	2
3	1
4	0

$$a_n = \frac{4}{\pi n^2}\begin{cases} 1 & n \text{ אי זוגי} \\ 0 & \text{כפולות של } 4 \\ 2 & \text{כפולות של } 2 \text{ בלי } 4 \end{cases}$$

מחזורי עם זמן מחזור
אם נבדוק נראה שהביטוי הנ"ל ~~מחזורי~~ ~~תמיד~~ ~~עם~~ $n=4$.

$$a_n = \frac{4}{\pi n^2}\begin{cases} 1 & n = 2k-1 \\ 0 & n = 4k \\ 2 & n = 4k-2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\pi - 2x)\cos(0x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) + \frac{8}{\pi(2(2n-1))^2}\cos(2(2n-1)x)\right)$$

להחליף ל
$n \to 2n-1$

להחליף ל
$n \to 4n-2$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1} \left(\frac{4}{\pi (2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + \frac{2}{\pi (2n-1)^2} \cos((2n-1)x) \right)$$

ב) $$\frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\pi - |2x||^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1} |a_n|^2$$

$$L.H.S: \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\pi - |2x||^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\pi - 2x)^2 \, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$R.H.S: \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1} \left(\frac{16}{\pi^2 (2n-1)^4} + \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \right) = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1} \left(\frac{20}{\pi^2 (2n-1)^4} \right)$$

שלפנו כזוגים ואי-זוגיים $2n-1$ היה שווה ל $2k+1$

$$\Rightarrow \quad 2k+1 = 2n-1$$
$$n = k+1$$
$$k_0 = n_0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=0} \frac{20}{\pi^2 (2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{20}{\pi^2} + \frac{20}{\pi^2} \sum_{k=1} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{20}{\pi^2} + \frac{20}{\pi^2} \sum_{k=1} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\sum_{k=1} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - 1$$

2)

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|^3}$$

פרסבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)f'(x)\,dx}_{=h(t)}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}(h(t))|^2\,d\omega$$

$$\mathcal{F}(h(t)) = \mathcal{F}(f(t) * f'(t)) = i\sqrt{2\pi}\,\omega\,\hat{f}^2(\omega)$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(1+|\omega|^3)^4}\,d\omega = 4\pi\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^2}{(1+\omega^3)^4}\,d\omega = \frac{4\pi}{3}\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u^4}$$

פונקציה זוגית

$u = 1+\omega^3$

$$= \frac{4}{9}\pi$$

3) $u(\underline{r})\big|_S = Axz = AR^2 \sin\theta\cos\theta\cos\varphi$

$$u(\underline{r}) = \int_S u(\underline{r})\big|_S \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}_0)}{\partial r} \, dS(\underline{r})$$

$$G(\underline{r}, \underline{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}_0|} + \frac{1}{4\pi\left|\underline{r} - R^2\underline{r}_0/|\underline{r}_0|^2\right|}$$

$: \partial r$

$$|\underline{r} - \underline{r}_0| = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\underline{r} - R^2\underline{r}_0/|\underline{r}_0|\right| = \left[\left(x - R^2x_0/|\underline{r}_0|^2\right)^2 + \left(y - R^2y_0/|\underline{r}_0|^2\right)^2 + \left(z - R^2z_0/|\underline{r}_0|^2\right)^2\right]^{1/2}$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad x_0 = r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0$

$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad y_0 = r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0$

$z = r\cos\theta \qquad z_0 = r_0\cos\theta_0$

$$|r_0|^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} AR^4 \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \, \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}_0)}{\partial r} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

4) (א) $$D\nabla^2 u = \partial_t u$$

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = 0$$

הפתרון הכללי הוא: $$u = \left(A_\lambda \cos(\lambda\varphi) + B_\lambda \sin(\lambda\varphi)\right)\left(C_\lambda \rho^{\lambda} + D_\lambda \rho^{-\lambda}\right)$$

כש λ לאו בהכרח מספר שלם.

$$u(\varphi=0) = 0 \Rightarrow A_\lambda = 0$$

$$u(\varphi=\gamma) = 0 \Rightarrow \quad \sin(\lambda\gamma) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\gamma}$$

$$u(\rho=a) = 0 = C_n a^{\lambda} + D_n a^{-\lambda}$$

$$D_n = -C_n a^{2\lambda}$$

$$u(\rho=b) = T_0 \sin^3\left(\frac{2\pi\varphi}{\gamma}\right) = C_n \sin(\lambda_n\varphi)\left(b^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n} b^{-\lambda_n}\right)$$

אפשר לפרק את $\sin^3 x$ לפי:

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{4\cdot 2i}\left(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

נקבל ישר שקיימים שני מודים:

$$T_0\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\pi\varphi}{\gamma}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{6\pi\varphi}{\gamma}\right)\right) = C_n \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\gamma}\right)\left(b^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n} b^{-\lambda_n}\right)$$

$$n = 2, 6$$

$$\frac{3}{4} T_0 = C_2\left(b^{\lambda_2} - a^{2\lambda_2} b^{-\lambda_2}\right)$$

$$-\frac{1}{4} T_0 = C_6\left(b^{\lambda_6} - a^{2\lambda_6} b^{-\lambda_6}\right)$$

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n\in\{2,6\}} C_n \sin(\lambda_n\varphi)\left(\rho^{\lambda_n} - a^{2\lambda_n}\rho^{-\lambda_n}\right) = T_\infty$$

ב) $$T_d = T - T_\infty \qquad T_d = f(\rho,\varphi)\, e^{-Dk^2 t} \qquad D\nabla^2 u = \partial_t u$$

הפונקציה f צריכה לענות על משוואת הלמהולץ בקואורדינטות פולריות ב 2D.

הפתרון הכללי הוא: $$f = \left[C_m J_n(k\rho) + D_m Y_m(k\rho)\right]\sin(\lambda_m\varphi)$$

השמטנו אוטומטית את $\cos(\lambda_m\varphi)$ כי כמו בסעיף א' שקיימים מודים רק ל$\sin(\lambda_n\varphi)$.

<u>תנאי שפה והתחלה:</u>

$$T_d(\rho,0;t) = 0, \quad T_d(\rho,\gamma;t) = 0, \quad T_d(a,\varphi;t) = 0, \quad T_d(b,\varphi;t) = 0$$

$$f(a,\varphi) = 0 = C_m J_m(ka) + D_m Y_m(ka)$$

$$f(b,\varphi) = 0 = C_m J_m(kb) + D_m Y_m(kb)$$

נמצא את C_m (או D_m) מאחת המשוואות ונציב במשוואה השנייה, ונקבל:

$$Y_m(kb) J_m(ka) - Y_m(ka) J_m(kb) = 0$$

(בלי קשר לשאלה: שימו לב שאפשר מהמשוואות כבר להסיק ש: $D_m = J_m(ka), C_m = -Y_m(ka)$)

d) נשתמש בקירובים שנתונים ונציב במשוואה, נסמן $\delta = -\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$$\sin(kb-\delta)\cos(ka-\delta) = \cos(kb-\delta)\sin(ka-\delta)$$

$$\tan(kb-\delta) = \tan(ka-\delta)$$

$$kb - \delta = ka - \delta + i\pi$$

$$k = \frac{i\pi}{b-a}$$

5) א)

$$f(z)=\frac{5z-1}{z^2-z-2} \qquad ; \qquad 3<z+1<4$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{5z-1}{z^2-z-2}=\frac{5z-1}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}$$

$$\frac{5z-1}{z+1}=\frac{A(z-2)}{z+1}+B$$

$$z=2 \Rightarrow \qquad 3=B$$

$$\frac{5z-1}{z-2}=A+B\frac{z+1}{z-2}$$

$$z=-1 \qquad 2=A$$

$$f(z)=\frac{2}{z+1}+\frac{3}{z-2}$$

הגורם הראשון בפיתוח יקבל עבור הצורה של טור לורן (טור עם איבר אחד)

נביא את הגורם השני לצורה $\frac{1}{(z+1)^n}$:

$$\frac{-3}{2-z}=\frac{-3}{3-(z+1)}=-3\sum\frac{-3^n}{(z+1)^{n+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{a-u}=\begin{cases}\sum\frac{u^n}{a^{n+1}} & |u|<|a| \\ -\sum\frac{a^n}{u^{n+1}} & |a|<|u|\end{cases}}$$

$$f(z)=\frac{2}{z+1}+\sum\frac{3^{n+1}}{(z+1)^{n+1}}$$

ב)

$$f(z)=\exp\left(\frac{3}{z}\right)=\sum\frac{3^n}{n!\,z^n}$$

השארית של הטור היא המקדם של z^{-1} שמתקבל עבור $n=1$.

$$Res=3$$

$$\oint f(z)=2\pi i\cdot(Res)=6\pi i$$

ג)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

נשתמש ב $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$ וב $z = e^{i\theta}$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} = \frac{-i\,dz}{z}$$

נחליף משתנה:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-i\,dz}{\left(1-a(z+z^{-1})+a^2\right)\cdot z}$$

נסתכל במכנה ע"מ למצוא שורשים:

$$z-a(z^2+1)+a^2z \;\Rightarrow\; z^2-\frac{a^2+1}{a}z+1 = 0$$

$$z_\pm = \frac{a^2+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{4a}-1} = \frac{a^2+1}{2a} \pm \frac{a^2-1}{2a}$$

$$z_+ = a \qquad z_- = \frac{1}{a}$$

מצאנו שני שורשים. נצטרך לחשב את האינטגרל לפי משפט השארית. בגלל שהחלפנו משתנה מ θ ל- $z=e^{i\theta}$ אנחנו צריכים להפריד מקרים ע"מ למצוא את ערך האינטגרל. $z=e^{i\theta}$ סוגר מסלול מעגלי על מעגל היחידה שראשיתו בצירים ולאינטגרל יש שתי תוצאות בהתאם למיקום נק' הסינגולריות, אם הן בתוך או מחוץ למעגל היחידה.

נחשב קודם את השארית למקרה כללי:

$$f(z) = \frac{-i}{a(z-a)(z-1/a)} = \frac{h(z)}{g(z)}$$

עבור נק' סינג' פשוטה השארית נתונה ע"י:

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{-i}{\left(2z-\frac{1}{a}-a\right)a}$$

אם $|a|>1$

הנק' סינג' שבתוך מעגל היחידה היא $z_- = \frac{1}{a}$

$$\operatorname{Res}(z_-) = \frac{-i}{1-a^2} \qquad \oint_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

אם $|a|<1$ נק' הסינג' שבתוך המעגל היא $z_+ = a$

$$\operatorname{Res}(z_+) = \frac{-i}{a^2-1} \qquad \oint_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{2\pi}{a^2-1}$$