שאלה 1.

א. צריך לחשב את טנזור ההתמד במערכת $\bar{S}$ שמסתובבת עם המוט. ננסח את המיקום של שתי המסות במערכת הזו:

$$m_1 : \begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = 0 \\ z = l\cos\theta \end{cases} \qquad m_2 : \begin{cases} x = -l\sin\theta \\ y = 0 \\ z = -l\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

נחשב את הערכים של טנזור ההתמד באמצעות

$$I_{\alpha\beta} = m_i(\delta_{\alpha\beta} r_i^2 - r_{i\alpha} r_{i\beta}) \tag{2}$$

$$I_{xx} = m(l^2 - l^2\sin 2\theta) + m(l^2 - l^2\sin\theta) = 2ml^2\cos^2\theta \tag{3}$$

$$I_{yy} = 2ml^2 \tag{4}$$

$$I_{zz} = 2m(l^2 - l^2\cos^2\theta) = 2ml^2\sin^2\theta \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{zy} = I_{yz} = 0 \tag{7}$$

$$I_{xz} = 2m(0 - l^2\sin\theta\cos\theta) = -2ml^2\sin\theta\cos\theta \tag{8}$$

נקבל את הטנזור:

$$\mathbf{I} = 2ml^2 \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

ב. נמצא את הערכים העצמיים של הטנזור ע"י חישוב הדטרמיננטה $|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}_3| = 0$ ונפתח לפי השורה האמצעית (לא לשכוח להכפיל בחזרה את הגורם $2ml^2$ בסוף) :

$$\begin{vmatrix} \cos^2\theta - \lambda & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((\cos^2\theta - \lambda)(\sin^\theta - \lambda) - \sin^2\theta\cos^2\theta) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 1) \tag{10}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2ml^2 \tag{11}$$

הערכים העצמיים הינם מומנטי ההתמד הראשים, עבורם נוכל למצוא את הווקטורים העצמיים שמקיימים ביחד:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \tag{12}$$

פתרון המשוואה הזו נותן לנו את הכיוון ($\vec{\omega}$) שבו התנע הזוויתי יציב במערכת, כלומר אין מעבר אנרגיה בין המסות או במילים אחרות התנועה של המסות נשארת לאורך ציר קבוע $\vec{\omega}$.

ג. נחפש את הווקטור העצמי עבור $\lambda_1 = 0$

$$\mathbf{I} = 2ml^2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

$$a\cos^2\theta - c\sin\theta\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c\tan\theta \tag{14}$$

$$b = 0 \tag{15}$$

$$c = t \tag{16}$$

כאשר t מספר ריאלי כלשהו שנבחר להיות 1.

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} \tan\theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

והווקטורים העצמיים עבור $\lambda_{2,3} = 2ml^2$:

$$\mathbf{I} = 2ml^2 \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$-a\sin\theta - c\cos\theta = 0 \tag{19}$$

$$b = t \tag{20}$$

$$c = s \tag{21}$$

כאשר t,s מספרים ריאליים כלשהם שנבחר להיות 1.

$$\vec{\omega}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\theta \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

לסיכום:

$$\vec{\omega}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \qquad \vec{\omega}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{23}$$

המהירות הזוויתית במערכת נתונה והיא $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, נחשב את התנע הזוויתי:

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = 2ml^2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2ml^2\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ \sin^2\theta \end{pmatrix} = 2ml^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{24}$$

ד. צריך למצוא את וקטור התנ"ז במערכת S.
נשתמש לשם כך בטרספורמציה D (עמ' 153 בספר) עם $\phi = -\omega t$ שימו לב לבחירה של המינוס, זה מכיוון שמערכת הצירים שבמנוחה (S) נעה ביחס למערכת הצירים $\bar{S}$ עם כיוון השעון. והטרנספורמציה מוגדרת לסיבוב נגד כיוון השעון.

$$D = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

נסמן ב $\bar{\mathbf{L}}$ את התנע הזוויתי במערכת $\bar{S}$ ואת $\mathbf{L}$ את התנע הזוויתי במערכת S שאנחנו מחפשים.

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{I}\vec{\omega} \tag{26}$$

$$\mathbf{D}\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{D}(\mathbf{I}\vec{\omega}) \tag{27}$$

$$\mathbf{L} = 2ml^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 2ml^2\omega\sin\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\omega t \\ -\cos\theta\sin\omega t \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{28}$$

שאלה 2.

א.

שימו לב, צריך לחשב את מרכז המסה כתלות ממרחק ממרכז הגליל הגדול. כלומר צריך למקם את המערכת צירים שנעבוד איתה במרכז הגליל הגדול.

נגדיר את ציר ה y כניצב לשולחן, ציר ה z לאורך הגליל, וציר האיקס כ"יוצא" מהדף.

משיקולי סימטריה בציר ה- x וה- z מרכז המסה הוא - 0 .

ע"מ למצוא את מרכז המסה נחשב קודם כל את המסה של הגליל המלא (בלי החלל), ואת ה"מסה" השלילית של החלל. מסה כללית של גליל ניתן לחשב לפי $m = \rho\pi r^2 h$.

נסמן את המסה של הגליל המלא ב- $m_1 = 4\pi\rho R_0^2 H$, ואת המסה של החלל ב- $m_2 = -\pi\rho R_0^2 H = -\frac{1}{4}m_1$.

מרכז מסה, זה לא יותר מממוצע משוקלל של מרכזי המסות השונים,כשהמשקלים הם המסות, לכן נחשב:

$$Y_{cm} = \frac{Y_{cm_1}m_1 + Y_{cm_2}m_2}{m_1+m_2} = \frac{-R_0\frac{1}{4}m_1}{\frac{3}{4}m_1} = -\frac{R_0}{3} \tag{29}$$

בגלל שמיקמנו את מערכת הצירים שלנו במרכז הגליל המלא, מרכז המסה שלו בציר ה y נמצא כמובן ב-0.

ומרכז המסה של החלל ממוקם במרחק של רדיוס אחד מ0 שזה ב-R_0.

ב.

טנזור התמד של גליל ניתן בהרצאה, שימו לב ששם גובה הגליל היה 2h וצריך להתאים את הביטוי עבור הגובה h :

$$I = m\begin{bmatrix} \frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{bmatrix} \tag{30}$$

צריך לחשב את טנזור ההתמד של הגליל ביחס לשולחן. כדי לעשות את זה נחשב קודם כל את הטנזורים של הגליל המלא ושל החלל ביחס לציר המרכזי שלהם, בעזרת משפט שטיינר "נסיט" את מומנטי ההתמד, כל אחד למרחק המתאים לו מהשולחן, ורק אז נחבר בינהם.

הערה: מעכשיו ועד סוף התרגיל, איברים מחוץ לאלכסון הראשי שערכם אפס יושארו ריקים.

נתחיל בלהציב את הגובה $H = \sqrt{3}R_0$ את הרדיוסים המתאימים:

$$\mathbf{I}_{full} = m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_{hole} = m_2R_0^2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

נשתמש במשפט שטיינר[1] בצורה המטריציונית שלו על מנת לבצע את ההסטות של הטנזורים:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + m\left[(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d})\mathbf{E}_3 - \mathbf{d}\otimes\mathbf{d}\right] \tag{32}$$

d הוא ווקטור ההזזה,

$\mathbf{E}_3$ היא מטריצת היחידה מסדר 3,

$\otimes$ - סימון למכפלה חיצונית של שני ווקטורים.

נשתמש במשפט שטיינר על הטנזור של הגליל המלא עם ווקטור ההזזה $d = (0, 2R_0, 0)$

$$\mathbf{I'}_{full} = m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & 2 \end{bmatrix} + \left\{ m_1R_0^2\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix} - m_1R_0^2\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 4 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \right\} = m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{21}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & 6 \end{bmatrix} \tag{33}$$

באותה צורה נבצע את ההסטה עבור הטנזור של החלל עם ווקטור ההזזה $d = (0, 3R_0, 0)$:

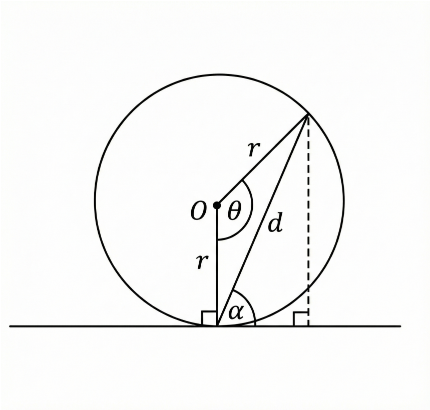
$$\mathbf{I'}_{hole} = m_2R_0^2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + m_2R_0^2\left\{ \begin{bmatrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \right\} = m_2R_0^2\begin{bmatrix} \frac{19}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{19}{2} \end{bmatrix} = -m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{19}{8} & & \\ & \frac{1}{8} & \\ & & \frac{19}{8} \end{bmatrix} \tag{34}$$

נסכום את שני הטנזורים ונקבל את הטנזור שביקשו בשאלה:

$$\mathbf{I'}_{total} = m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{21}{4} & & \\ & \frac{5}{4} & \\ & & 6 \end{bmatrix} - m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{19}{8} & & \\ & \frac{1}{8} & \\ & & \frac{19}{8} \end{bmatrix} = m_1R_0^2\begin{bmatrix} \frac{23}{8} & & \\ & \frac{9}{8} & \\ & & \frac{29}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}MR_0^2\begin{bmatrix} 23 & & \\ & 9 & \\ & & 29 \end{bmatrix} \tag{35}$$

[1] משפט שטיינר - ויקיפדיה

ג. צריך למצוא את הלגרנז'יאן של הגליל הנע, הבעיה היא שכשהגליל נע טנזור האינרציה שלו משתנה, כלומר פיזור המסה שלו משתנה במרחב. הטנזור שאנחנו מצאנו מתאים למצב שבו הגליל במנוחה על השולחן והחלל הריק נמצא בדיוק מעל מרכז המסה (כמו באיור בחוברת הקורס). צריך אם כך להתאים את הטנזור שמצאנו, שוב ע"י שימוש במשפט שטיינר, הפעם כשנשתמש במשפט שטיינר, המעבר הוא למרחק שתלוי בזווית הסיבוב θ .



ווקטור ההזזה הוא d וגודלו נתון לפי משפט הקוסינוסים:

$$d^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta = 2r^2(1-\cos\theta)\Big|_{r=2R_0} = 8R_0^2(1-\cos\theta) \tag{36}$$

$$d(\theta) = 2\sqrt{2}R_0\sqrt{1-\cos\theta} \tag{37}$$

צריך לפרק את הווקטור לרכיבי x y שלו. שימו לב שמתקיים $\alpha = \theta/2$.
אם כך, הווקטור d הוא:

$$\vec{d} = d(\theta)\left(\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right), \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right), 0\right) \tag{38}$$

נשתמש שוב במשפט שטיינר 32 ע"מ לחשב את הטנזור החדש שתלוי בזווית θ:

$$(\vec{d}\cdot\vec{d})\mathbf{E}_3 = d^2(\theta)\mathbf{E}_3 = d^2(\theta)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\vec{d}\otimes\vec{d} = d^2(\theta)\begin{pmatrix}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{40}$$

הטנזור $\mathbf{I}(\theta)$ אחרי משפט שטיינר:

$$\mathbf{I}(\theta) = \frac{1}{6}MR_0^2\begin{bmatrix}23 & & \\ & 9 & \\ & & 29\end{bmatrix} + Md^2(\theta)\begin{bmatrix}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{41}$$

האנרגיה הקינטית T נתונה ע"י :

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\mathbf{I}(\theta)\vec{\omega} = \frac{29}{12}MR_0\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2(\theta)\omega^2 \tag{42}$$

עם $\vec{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$

גובה מרכז המסה הוא $Y_{cm} = R_0(2-\frac{1}{3}\cos\theta)$ ומכאן האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$V = MgR_0(2-\frac{1}{3}\cos\theta) \tag{43}$$

הלגראנג' של המערכת הוא:

$$L = \frac{29}{12}MR_0\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2(\theta)\omega^2 - MgR_0(2-\frac{1}{3}\cos\theta) \tag{44}$$

ד. נחשב את משוואת התנועה של המערכת לפי משוואות אוילר לגראנג'

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{45}$$

ונקבל:

$$4R_0^2\dot{\theta}^2\sin\theta - \frac{1}{3}gR_0\sin\theta - \frac{29}{6}R_0\ddot{\theta} - 8R_0^2(1-\cos\theta)\ddot{\theta} - 8R_0^2\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \tag{46}$$

אחרי קירוב זוויות קטנות נקבל:

$$\frac{29}{6}R_0\ddot{\theta} = -\frac{1}{3}gR_0\theta \tag{47}$$

פתרון של משוואה דיפרנציאלית כזו נתון ע"י

$$\theta(t) = A\sin(\Omega t) \tag{48}$$

שכידוע התאוצה שלה לא מתאפסת עבור כל t, ומכאן שהמהירות אינה קבועה.

שאלה 3.

שימו לב, בספר בפרק 5.7 מסבירים באופן מפורט את הפתרון לסעיף א'.

א. צריך למצוא את הלגראנג' של המערכת, נמצא את האנרגיה הקינטית:

$$T = \frac{1}{2}\left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)\begin{pmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}I(\omega_x^2+\omega_y^2)+\frac{1}{2}I_3\omega_z^3 \tag{49}$$

נבטא את המהירויות הזוויתיות באמצעות זוויות אוילר ע"י הקשרים שנתונים בספר:

$$\omega_x = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \tag{50}$$

$$\omega_y = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \tag{51}$$

$$\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{52}$$

ונקבל

$$T = I(\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\psi + \dot{\theta}^2\cos^2\psi) + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{psi}\dot{\phi}\cos^2\theta) \tag{53}$$

האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$V = mgl\cos\theta \tag{54}$$

כש- l זה המרחק של מרכז המסה מנק' המגע עם הרצפה כשהסביבון ניצב אליה. ו- θ היא אחת מזוויות אוילר.

הלגראנג' הינו:

$$L = I(\dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\psi + \dot{\theta}^2\cos^2\psi) + \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{psi}\dot{\phi}\cos^2\theta) - mgl\cos\theta \tag{55}$$

ב.

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos^2\theta) \tag{56}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 2I\dot{\theta}\cos^2\psi \tag{57}$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = 2I\dot{\phi}\sin^2\theta\sin^2\psi + I_3(\dot{\phi}\cos^2\theta + \dot{\psi}\cos^2\theta) \tag{58}$$

ג. נבדוק האם אפשרי ש- $P_\psi = P_\phi$:

$$2I\dot{\phi}\sin^2\theta\sin^2\psi + I_3(\dot{\phi}\cos^2\theta + 2\dot{\psi}\cos^2\theta) = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos^2\theta) \tag{59}$$

שימו לב להגדרות של $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ ו- $\dot{\theta}$ בעמוד 209 בספר.

$\dot{\psi}$ לא יכול להיות 0, אבל זה אפשרי ש- $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$.

נציב במשוואה ונקבל:

$$I_3\dot{\psi}\cos^2\theta = I_3\dot{\psi} \tag{60}$$

$$\cos^2\theta = 1 \tag{61}$$

$$\Rightarrow \theta = 0, \pi \tag{62}$$

מכיוון ש $\theta = \pi$ לא פתרון פיזיקלי, נישאר עם $\theta = 0$, ϕ קבוע כלשהו, ו- $\psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0$-

שאלה 4.

א.

מצאנו כבר את הטנזור עבור גליל כללי:

$$I = m\begin{bmatrix} \frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12}+\frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \tag{63}$$

ב. גם את המהירות הזוויתית לפי זוויות אוילר הצגנו כבר:

$$\omega_x = \dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi \tag{64}$$

$$\omega_y = \dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi \tag{65}$$

$$\omega_z = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi \tag{66}$$

נציב $\phi(t)=0\ ;\ \theta(t)=\alpha t\ ;\ \psi(t)=\beta t^2$ ונקבל:

$$\vec\omega = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\beta t^2) \\ -\alpha\sin(\beta t^2) \\ 2\beta t \end{pmatrix} \tag{67}$$

ג.

1. משוואה (5.39') בספר נותנת לנו את הקשר בין המומנט החיצוני למהירויות הזווית ביחס למערכת הגוף:

$$\vec N = \begin{pmatrix} -2I\alpha\beta t\sin(\beta t^2) + \alpha^2\cos(\beta t^2)\sin(\beta t^2)(I-I_3) \\ -2I\alpha\beta t\cos(\beta t^2) - 2\alpha\beta t\cos(\beta t^2)(I_3-I) \\ 2\beta I_3 \end{pmatrix} \tag{68}$$

2. על מנת לעבור ממערכת הגוף למערכת המשוואה אנחנו צריכים את הטרנספורמציה ההופכית $\tilde A$ שנתונה בספר בעמוד 153.
אם נציב ב $\tilde A$ את $\phi(t)=0\ ;\ \theta(t)=\alpha t\ ;\ \psi(t)=\beta t^2$ נקבל את הטרנספורמציה הנחוצה לנו.
המומנט החיצוני במערכת המעבדה הוא:

$$\vec N' = \tilde A\vec N \tag{69}$$

שאלה 5. א. ע"מ למצוא את התנ"ז של הדיסקה צריך למצוא קודם את הטנזור אינרציה שלה. נתחיל מלחשב את הטנזור לפי:

$$I_{\alpha\beta} = \rho \int_A (\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta) dA = \rho \int_A (\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta) r dr d\theta \tag{70}$$

עם $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ ו- $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, $z = 0$.

$$I_{xx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R y^2 r dr d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2\theta dr d\theta = \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} M R^2 \tag{71}$$

$$I_{xx} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R x^2 r dr d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \cos^2\theta dr d\theta = \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} M R^2 \tag{72}$$

$$I_{zz} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 r dr d\theta = 2\pi\rho \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{73}$$

$$I_{xy} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \cos\theta \sin\theta r dr d\theta = 0 \tag{74}$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4} M R^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \tag{75}$$

הטנזור הזה הוא של דיסקה כללית שמרכזה ממוקם בראשית הצירים. צריך בעזרת משפט שטיינר "להזיז" את הדיסקה למרחק l מראשית הצירים.

וקטור ההזזה הוא: $d = (0, 0, l)$ הטנזור לאחר משפט שטיינר הוא:

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_3 \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} l^2 & & \\ & l^2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

יש לנו את טנזור האינרציה שאנחנו צריכים. כזכור התנ"ז הוא $L = \mathbf{I}\vec{\omega}$ ונתון שהדיסקה מסתובבת במהירות זוויתית Ω , המהירות הזוויתית הזו מוגדרת במערכת המעבדה ולא במערכת הגוף, לכן צריך לבצע טרנספורמציה על המהירות הזוויתית שתתאים למערכת הגוף של הדיסקה:

$$\vec{\omega}' = \mathbf{C}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix} \tag{77}$$

כש θ היא הזווית שיוצר המוט עם האנך.

התנ"ז הוא:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} l^2 & & \\ & l^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I\Omega\sin\theta \\ I_3\Omega\cos\theta \end{pmatrix} + Ml^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

ב. נמצא את הקשר שביקשו לפי:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \tag{79}$$

ניתן לראות שהנגזרת של התנ"ז לפי הזמן שווה ל-0.

נחשב את מומנט הכוח במערכת הגוף:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgl\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

ניתן להגיע ל $\vec{F}'$ בעזרת $\mathbf{C}\vec{F}$, כש - $\mathbf{C}$ זו אותה טרנספורמציה שביצענו על ווקטור המהירות הזוויתית $\vec{\omega}$ ו- $\vec{F}$ זה וקטור כוח הכבידה במערכת המעבדה.

נחשב את $\vec{\omega} \times \vec{L}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin\theta \\ \Omega \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ I\Omega \sin\theta \\ I_3 \Omega \cos\theta \end{pmatrix} + Ml^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin\theta \\ \Omega \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^2 I_3 \sin\theta \cos\theta - \Omega^2 I \sin\theta \cos\theta - Ml^2 \sin\theta \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

נשארנו עם משוואה רק בציר הx', שממנה ניתן להוציא את התנאי שביקשו:

$$\Omega^2 I_3 \cos\theta - \Omega^2 I \cos\theta - Ml^2 \Omega^2 \cos\theta = lmg \tag{82}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgl}{\cos\theta (I_3 - I - ml^2)}} \tag{83}$$

מכאן ש:

$$0 < I_3 - I - ml^2 = \frac{1}{2} mR^2 - \frac{1}{4} R^2 - ml^2 = \frac{1}{4} mR^2 - ml^2 \tag{84}$$

$$\frac{R}{l} > 2 \tag{85}$$