פתרון:

שאלה 1 א.
צריך למצוא את משוואות התנועה עבור תנ"ז קבוע l, עבור חלקיק שנע תחת השפעת פוטנציאל $V(r) = \beta r^3$. כלומר צריך למצוא שתי משוואות דיפרנציאליות (מספר המשוואות כמספר הנעלמים, r ו- θ) בלתי תלויות.
הדרך הכי פשוטה לעשות את זה, זה עם משוואות אוילר לגראנג':

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2) + r^2\dot{\theta}^2 - \beta r^3 \tag{1}$$

נמצא את משוואת אוילר לגראנג' ל r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - 3\beta r^2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \tag{2}$$

$$mr\dot{\theta}^2 - 3\beta r^2 - m\ddot{r} = 0 \tag{3}$$

ואת משוואת אוילר לגראנג' עבור θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} = 0 \tag{5}$$

$$mr^2\dot{\theta} = l \tag{6}$$

ב. התנאי לתנועה מעגלית הוא שלפונציאל האפקטיבי תהיה נקודת מינ/מקס:

$$V_{\text{eff}} = \beta r^3 + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dr}V_{\text{eff}} = 3\beta r^2 - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \tag{8}$$

$$r_0 = \left(\frac{l^2}{3\beta m}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{9}$$

שאלה 2.

א. הפוטנציאל הוא $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$
לכן הפוטנציאל האפקטיבי הוא:

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2} + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{10}$$

ב. נתון שהחלקיק נע במסלול מעגלי עם רדיוס R.
כמו מקודם התנאי למסלול מעגלי הוא שהנגזרת השנייה של הפוטנציאל האפקטיבי יתאפס:

$$V'_{\text{eff}} = 2\lambda^2 V_0 r e^{-\lambda^2 r^2} - \frac{l^2}{mr^3}\Big|_{r=R} = 0 \tag{11}$$

$$l^2 = 2mV_0\lambda^2 R^4 e^{-\lambda^2 R^2} \tag{12}$$

ג. שיווי משקל יציב מתקבל כאשר $V''_{\text{eff}} \geq 0$ ושיווי משקל לא יציב מתקבל כאשר $V''_{\text{eff}} < 0$:

$$V''_{\text{eff}} = 2V_0\lambda^2 e^{-\lambda^2 r^2}(1 - 2\lambda^2 r^2) + \frac{3l^2}{mr^4} \tag{13}$$

מעניין אותנו מה קורה לנגזרת השניה בנק' R לכן נציב $r = R$ וגם נשתמש בקשר שמצאנו בסעיף קודם עבור התנ"ז:

$$V''_{\text{eff}} \geq 0 \tag{14}$$

(15)

$$2V_0\lambda^2 e^{-\lambda^2 R^2}(1 - 2\lambda^2 R^2) + \frac{6}{mR^4}\lambda^2 V_0 R^4 m e^{-\lambda^2 R^2} \geq 0 \tag{16}$$

$$R \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \tag{17}$$

$$R_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \tag{18}$$

ד. נשים לב שהתנ"ז שמצאנו תלוי ב R לכן נציב את R_{max} שמצאנו בסעיף הקודם.

$$l^2(R = R_{\text{max}}) = 2\lambda^2 V_0 \frac{4}{\lambda^4} m e^{-\lambda^2 \frac{2}{\lambda^2}} = 8\frac{V_0}{\lambda^2} m e^{-2} \tag{19}$$

$$l_{\text{max}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{8V_0 m e^{-2}} \tag{20}$$

ה. שואלים אותנו האם זה אפשרי שתהיה תנועה מעגלית עבור רדיוס R שמקיים $V_{\text{eff}} < 0$ ו- $V_{\text{eff}} \geq 0$. צריך לשים פה לב, התנ"ז הוא פונקציה של R (כמו שמצאנו בסעיף ב') וישנם ערכים מסויימים של תנ"ז שלא מאפשרים מסלול מעגלי, לכן אנחנו צריך לבדוק את V_{eff} עבור ערכי l שכן מאפשרים מסלול מעגלי, וזה בדיוק התנאי שמצאנו בב'.
נציב את הביטוי בפוטנציאל האפקטיבי:

$$V_{\text{eff}} = V_0 e^{-\lambda^2 R^2}(\lambda^2 R^2 - 1) \tag{21}$$

נקבל שעבור $R < \frac{1}{\lambda}$, V_{eff} שלילי.
ועבור $R \geq \frac{1}{\lambda}$ מתקיים $V_{\text{eff}} \geq 0$.
לכן שני התנאים מתקיימים.

הערה:
שימו לב שכאשר l מקיים מסלול מעגלי, ו- R גדול מ $\frac{1}{\lambda}$ גורר ש $V_{\text{eff}} \geq 0$. זה לא אומר שבהכרח כול $r \geq \frac{1}{\lambda}$ גורר תנועה מעגלית סגורה. (ואותה הערה ל $R < \frac{1}{\lambda}$).

שאלה 3.

א. קודם כל שימו לב שהכוונה ב- $\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha$ היא: $\ln\left(\frac{r^\alpha}{r_0^\alpha}\right)$.
נשתמש במשוואות בינה (Binet) :

$$\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \tag{22}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \pm\frac{m}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \tag{23}$$

(+) עבור כוח דוחה ו-(-) עבור כוח מושך.
נמצא קודם כל את הכוח ואח"כ את הפוטנציאל.

$$\ln\left(\frac{r^\alpha}{r_0^\alpha}\right) = \theta \quad \Rightarrow \quad r = r_0e^{\theta/\alpha} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r_0}e^{-\theta/\alpha} \tag{24}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{\alpha^2 r_0}e^{-\theta/\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}u \tag{25}$$

נציב ב 23 :

$$\frac{1}{\alpha^2}u + u = -\frac{m}{l^2u^2}F(\tfrac{1}{u}) \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{\alpha^2}+1)\frac{1}{r} = -\frac{m}{l^2}r^2F(r) \tag{26}$$

$$F(r) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2r^3} \tag{27}$$

נמצא כעת את הפוטנציאל:

$$V(r) = -\int F(r)dr = \frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2}\int\frac{1}{r^3}dr = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2}\frac{1}{r^2} + C \tag{28}$$

ניתן להגדיר $V(\infty) = 0$ ולקבל

$$V(r) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2}\frac{1}{r^2} \tag{29}$$

ב. נמצא קודם את $\dot{r}$ בעזרת:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - (V(r) + \frac{l^2}{2mr)}\right)} \tag{30}$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - (+\frac{l^2}{2mr)}\right)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{1}{2m\alpha^2r^2}\right)} \tag{31}$$

המהירות עבור θ היא הקשר הרגיל של התנ"ז

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \tag{32}$$

ג.

הפוטנציאל האפקיבי הוא :

$$V_{\text{eff}} = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2}\frac{1}{r^2} \tag{33}$$

לפוטנציאל לא קיימות נק' קיצון, ולכן עבור כל אנרגיה קטנה מ-0, הפוטנציאל ימשוך את החלקיק.
ניתן לראות גם לפי:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\left[\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right)\right] \tag{34}$$

נציב $\frac{1}{u}$ ב- $\left[V\left(\frac{1}{u}\right)\right]$:

$$V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{2m\alpha^2}u^2 \tag{35}$$

$$\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{l^2(1+\alpha^2)}{m\alpha^2}u \tag{36}$$

נציב במשוואה 34 :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{(1+\alpha^2)}{\alpha^2}u = \frac{1}{\alpha^2}u \tag{37}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{\alpha^2}u = 0 \tag{38}$$

קיבלנו מד"ר שניתן לפתור עם $u = e^{\lambda\theta}$. הפתרון הכללי הוא :

$$u = ae^{\theta/\alpha} + be^{-\theta/\alpha} \tag{39}$$

נפתור עבור r:

$$r = \frac{1}{ae^{\theta/\alpha} + be^{-\theta/\alpha}} \tag{40}$$

ניתן לראות שעבור $\theta \to \infty$ (כלומר המון סיבובים), r שואף לאפס. ז"א אין מסלול מעגלי.

שאלה 4.
צריך להסתכל על הפוטנציאל האפקטיבי של הבעיה ולהבין מה קורה שם :

$$V_{\text{eff}} = \left(\frac{l^2}{2m} - B\right)\frac{1}{r^2} = \left(b^2 E - B\right)\frac{1}{r^2} \tag{41}$$

אנחנו יודעים שהחלקיק צריך להיבלע ולא להתפזר, לכן המקדם של $1/r^2$ צריך להיות שלילי.
אנחנו מקבלים את התנאי הזה עבור- $b^2 E - B < 0$.
מכאן אפשר למצוא את b:

$$b < \sqrt{\frac{E}{B}} \quad \Rightarrow \quad b_{\text{max}} = \sqrt{\frac{E}{B}} \tag{42}$$

וחתך הפעולה הוא:

$$\sigma = \pi b_{\text{max}}^2 = \pi \frac{E}{B} \tag{43}$$

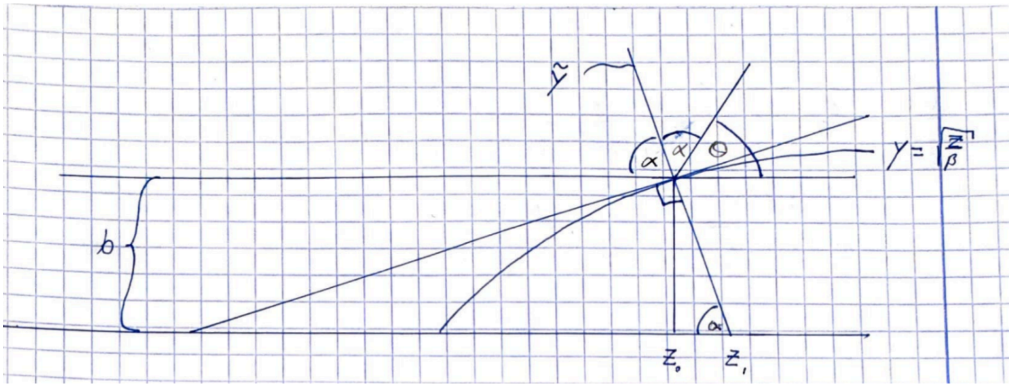
שאלה 5. א.

צריך לחשב את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור החלקיקים מהעקומה $z=\beta y^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{44}$$

נמצא קודם כל את $b(\theta)$.

אנחנו רוצים למצוא את הקשר $\tan\alpha=\frac{b}{\Delta z}$ עם- $\Delta z=z_1-z_0$, ולהביע את הנעלמים בקשר הזה רק עם הקבועים b , β ו- θ.



נמצא את z_0 שעבורו הפונקציה y שווה ל- b.

$$y(z_0)=b=\sqrt{\frac{z_0}{\beta}}\quad\Rightarrow\quad z_0=\beta b^2 \tag{45}$$

נמצא את הביטוי ל- $\tilde{y}$, שהוא הישר הניצב למשוואת המשיק בנק' z_0 .

$$y'(z)=\frac{1}{2\beta\sqrt{z/\beta}}\quad\Rightarrow\quad y'(z_0)=\frac{1}{2\beta b} \tag{46}$$

שיפוע הניצב למשיק הוא:

$$m\cdot\frac{1}{2\beta b}=-1 \tag{47}$$

$$m=-2\beta b \tag{48}$$

$$\tilde{y}=-2\beta bz+\tilde{y_0}\quad\text{with}\quad\tilde{y}(z_0)=b\quad\Rightarrow\tilde{y_0}=b(1+2\beta^2b^2) \tag{49}$$

$$\tilde{y}=-2\beta bz+b(1+2\beta^2b^2) \tag{50}$$

אנחנו רוצים למצוא את נק' החיתוך z_1 : נציב 0 ב- $\tilde{y}$ ונקבל $z_1=\frac{1}{2\beta}+\beta b^2$.

$$\Delta z=\frac{1}{2\beta} \tag{51}$$

נשים לב ש שתי הזוויות אלפה ותטא יושבות על אותו ישר. לכן $2\alpha+\theta=\pi$.

כעת ניתן להציב הכל ב- $\tan\alpha=\frac{b}{\Delta z}$ ולפתור עבור b.

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\tan(\theta/2)}=\frac{b}{\Delta z}=2b\beta \tag{52}$$

$$\frac{1}{\tan(\theta/2)}=2b\beta \tag{53}$$

$$b(\theta)=\frac{1}{2\beta\tan(\theta/2)} \tag{54}$$

נמצא כעת את $|\frac{db}{d\theta}|$

$$|\frac{db}{d\theta}| = \frac{1}{4\beta\sin^2(\theta/2)} \tag{55}$$

נציב הכל ב- 44 :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\beta\tan(\theta/2)\sin(\theta)}\frac{1}{4\beta\sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{16\beta^2\sin^4(\theta/2)} \tag{56}$$