שאלה 1. א.

(1)
$$\psi(x) = A\exp\left(\frac{-x^2}{4\sigma^2}\right)$$

(2)
$$1 = A^2\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx = A^2\sigma\sqrt{2\pi}$$

(3)
$$A^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

נעשה שימוש ב: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ ע"מ לפתור את האינטגרל

ב.

צפיפות ההסתברות $\rho(x)$ היא:

(4)
$$\rho(x) = |\psi|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

הפונקציה מקסימלית כמובן עבור x=0 .

ג.

(5)
$$\Psi(x,t) = \frac{A\sigma}{\sqrt{\sigma^2+i\alpha t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4(\sigma^2+i\alpha t)}\right)\Big|_{t=0} = A\exp\left(\frac{-x^2}{4\sigma^2}\right)$$

ד. כדי למצוא את α צריך להציב את פונקציית הגל במשוואת שרדניגר עבור חלקיק חופשי, כלומר V=0:

(6)
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

בשביל לעשות את זה צריך לחשב את הנגזרות הרלוונטיות של פונקצית הגל. נבצע קודם החלפת משתנים עם:
$f(t) = \sqrt{\sigma^2+i\alpha t}$

(7)
$$\Psi(x,t) = \frac{A\sigma}{f(t)}\exp\left(\frac{-x^2}{4f^2(t)}\right)$$

(8)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

(9)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial f(t)} = \frac{-A\sigma}{f^2(t)}\exp\left(\frac{-x^2}{4f^2(t)}\right) + \frac{A\sigma}{f(t)}\left(\frac{x^2}{8f^3(t)}\right)\exp\left(\frac{-x^2}{4f^2(t)}\right) = \left(\frac{x^2}{8f^3(t)} - \frac{1}{f(t)}\right)\Psi(x,t)$$

(10)
$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{i\alpha}{2f(t)}$$

(11)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \left(\frac{x^2}{8f^3(t)} - \frac{1}{f(t)}\right)\frac{i\alpha}{2f(t)}\Psi(x,t)$$

(12)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{A\sigma}{f(t)}\left(\frac{-x}{2f^2(t)}\right)\exp\left(\frac{-x^2}{4f^2(t)}\right) = \frac{-x}{4f^2(t)}\Psi(x,t)$$

(13)
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{2f^2(t)}\right)\Psi(x,t) - \frac{x}{4f^2(t)}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = \frac{-1}{2f^2(t)}\Psi(x,t) + \frac{x^2}{4f^2(t)}\Psi(x,t)$$

(14)
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{x^2}{4f^2(t)} - \frac{1}{2f^2(t)}\right)\Psi(x,t)$$

כעת ניתן להציב הכל:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{x^2}{4f^2(t)}-\frac{1}{2f^2(t)}\right)\Psi(x,t)=i\hbar\left(\frac{x^2}{8f^3(t)}-\frac{1}{f(t)}\right)\frac{i\alpha}{2f(t)}\Psi(x,t) \tag{15}$$

ניתן לצמצם את המשוואה ב- $\Psi(x,t)$. בנוסף , בגלל שנתון ש- α הוא קבוע, הוא מתאים מן הסתם עבור כל זמן t וכל מיקום x. נוכל לפשט את המשוואה אם נציב $t=0$ ו- $x=0$:

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{1}{2\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\frac{\alpha}{2\sigma} \tag{16}$$

$$\alpha=\frac{\hbar}{2m} \tag{17}$$

כש- $f(0)=\sigma$.

ה.

$$\Psi(x,t)=\frac{A\sigma}{\sqrt{\sigma^2+i\alpha t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4(\sigma^2+i\alpha t)}\right)=\frac{A\sigma\sqrt{\sigma^2-i\alpha t}}{\sqrt{\sigma^4+\alpha^2t^2}}\exp\left(\frac{-x^2(\sigma^2-i\alpha t)}{4(\sigma^4+\alpha^2t^2)}\right) \tag{18}$$

$$\Psi^*(x,t)=\frac{A\sigma\sqrt{\sigma^2+i\alpha t}}{\sqrt{\sigma^4+\alpha^2t^2}}\exp\left(\frac{-x^2(\sigma^2+i\alpha t)}{4(\sigma^4+\alpha^2t^2)}\right) \tag{19}$$

צפיפות ההסתברות היא:

$$\rho(x)=\Psi\Psi^*=\frac{A^2\sigma^2\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\sigma^4+\alpha^2t^2}}\exp\left(\frac{-x^2\sigma^2}{2(\sigma^4+\alpha^2t^2)}\right) \tag{20}$$

$$\rho(x)=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi(\sigma^4+\alpha^2t^2)}}\exp\left(\frac{-x^2\sigma^2}{2(\sigma^4+\alpha^2t^2)}\right) \tag{21}$$

שאלה 2. א.

ממשוואה (3.47) בעמ' 37 יחידה 7 נקבל את הביטוי לרמות האנרגיה בבור פוטנציאל :

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2md^2} \tag{22}$$

$\omega_n = \frac{n\pi}{d}$
היא המהירות הזוויתית שבפונקציית הגל וכפי שניתן לראות בביטוי שנתון , $n = 1$.
אז:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2} \tag{23}$$

ב.

-

$$< x >= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi^* x\psi \; dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi x\psi \; dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x|\psi|^2 \; dx = \frac{2}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x\sin^2\left(\tfrac{2\pi x}{d}\right) \; dx = 0 \tag{24}$$

מדובר בפונקציה אי זוגית בטווח סימטרי ולכן האינטגרל שווה ל-0.

$$< p >= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi \; dx = 0 \tag{25}$$

שוב מאותה הסיבה, ψ פונקציה אי זוגית, הנגזרת שלה היא פונקציה זוגית, ומכפלתן היא פונקציה אי זוגית, לכן שוב האיטנגרל שווה ל-0 .

ג.

$$< x^2 >= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi^*(x^2)\psi \; dx = \frac{2}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2\sin^2\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \; dx = \frac{d^2}{4\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\sin^2(u) \; du = \frac{d^2}{24\pi^2}(2\pi^2 - 3) \tag{26}$$

$$\Delta x = d\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}} \tag{27}$$

ד.

$$< p^2 >= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi \; dx = \frac{4\pi^2\hbar^2}{d^2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi^*\psi \; dx = \frac{4\pi^2\hbar^2}{d^2} \tag{28}$$

$$\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{d} \tag{29}$$

ה.

$$\Delta x\Delta p = \frac{d}{2\sqrt{6}\pi}\sqrt{2\pi - 3}\frac{2\pi\hbar}{d} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{30}$$

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \tag{31}$$

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \tag{32}$$

$$\frac{\pi^2}{3} \approx 3 \geq \frac{3}{4} \tag{33}$$

מש"ל.

שאלה 3. א.

$$\psi = \psi_1 + i\psi \tag{34}$$

באופן כללי אם מחפשים את הפונקציה הצמודה המרוכבת לפונקציה ψ, שבשאלה צריך לדאוג לרשום אותה בצורה הבאה: $\psi^* = \psi_1^* - i\psi_2^*$. אבל אנחנו יודעים באיזה פונקציה מדובר ושהיא ממשית לכן אין סיבה לכתוב אותה בצורה הזו.

$$\psi^* = \psi_1 - i\psi_2 \tag{35}$$

$$\frac{1}{A^2} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \psi * \psi \; dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi) \; dx = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \; dx = 2 \tag{36}$$

השיוויון האחרון מתבקל אם זוכרים ששתי הפונקציות מנורמלות בנפרד ושוות כל אחת ל-1 .

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{37}$$

ב.

$$< x >= A^2 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi) \; dx = A^2 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (x|\psi_1|^2 + x|\psi_2|^2) \; dx = 0 \tag{38}$$

שימו לב, שקיבלו את תוחלת המיקום כבר בשאלה שעבר עבור פונקציה זהה (עד כדי קבוע).

ג.

$$< p >= A^2 \int (\psi_1 - i\psi_2)\hat{p}(\psi_1 + i\psi_2) \; dx = A^2 \int \left[\cancelto{0}{\psi_1\hat{p}\psi_1} + \psi_1\hat{p}i\psi_2 - i\psi_2\hat{p}\psi_1 + \cancelto{0}{\psi_2\hat{p}\psi_2} \right] \; dx = 0 \tag{39}$$

האינטגרל על $\psi_1\hat{p}i\psi_2 - i\psi_2\hat{p}\psi_1$ גם כן מתאפס, מאותה סיבה כמו בתרגיל הקודם; אינטגרל על פונקציה א"ז בטווח סימטרי.

ד.

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right) e^{-iE_1 t/\hbar} + i \sin\left(\frac{4\pi x}{d}\right) e^{-iE_2 t/\hbar} \right) \tag{40}$$

עם $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2md^2}$

שאלה 4. א. לפי מודל בוהר התנע הזוויתי נתון ע"י

$$L = n\hbar \quad \Rightarrow \quad n = 4 \tag{41}$$

והאנרגיה לפי:

$$E_n = \frac{-m_e e^4}{n^2 8\epsilon_0 \hbar^2} = -\frac{13.6}{16} = -3.4\text{eV} \tag{42}$$

ב. לפי מודל שרדינגר:

$$L_z = m\hbar \quad \Rightarrow \quad m = 4 \tag{43}$$

$$|m| \leq l \qquad \Rightarrow \quad l_{min} = 4 \tag{44}$$

$$l_{min} = n_{min} - 1 \quad \Rightarrow \quad n_{min} = 5 \tag{45}$$

$$E_{min} = -\frac{13.6}{25} = -0.544\text{eV} \tag{46}$$

שאלה 5. א. המשקל האטומי של סודיום (Na) הוא: $m_1 = 23u$, ושל מימן (H) הוא: $m_2 = 1u$.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{23}{24}\text{u} \ = 1.59 \cdot 10^{-27}\text{Kg} \tag{47}$$

ב. נתונה לנו כבר המשוואה שאיתה נמצא את R_e :

$$\mu R_e^2 = I \tag{48}$$

וגם תדירות הפוטון שנבלע - $f = 2.94 \cdot 10^{11}\text{Hz}$ צריך למצוא את מומנט ההתמד I של המערכת .
נשים לב ש:

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{I} J = hf \tag{49}$$

$$I\Big|_{J=1} = \frac{\hbar}{2\pi f} = 5.7 \cdot 10^{-47}\text{Kg m}^2 \tag{50}$$

$$R_e = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{5.7 \cdot 10^{-47}}{1.59 \cdot 10^{-27}}} = 1.89 \cdot 10^{-10}\text{m} \tag{51}$$

ג.
נחזור למשוואה $\Delta E = \frac{\hbar^2}{I} J = hf$. עבור $J = 1$ נקבל - $\Delta E_1 = hf = 1.95 \cdot 10^{-22}\text{J}$
לכן אפשר למצוא את התדירויות הבאות בעזרת:

$$\Delta E_J = \Delta E_1 \cdot J \tag{52}$$

$$hf_J = \Delta E_1 \cdot J \tag{53}$$

$$f_J = \frac{\Delta E_1}{h} \cdot J \tag{54}$$

$$f_2 = 5.89 \cdot 10^{11}\text{Hz} \tag{55}$$

$$f_3 = 8.83 \cdot 10^{11}\text{Hz} \tag{56}$$