פתרון:

שאלה 1. א.

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0\,, \qquad x_0 = 2 \quad \dot{x}_0 = -1 \tag{1}$$

נבצע התמרת לפלס על המשוואה ונקבל:

$$s^2\bar{x} - sx_0 - \dot{x}_0 - s\bar{x} + x_0 - 6\bar{x} = 0 \tag{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{7/5}{s+2} + \frac{3/5}{s-3} \tag{3}$$

המעבר האחרון בוצע בעזרת פירוק לשברים חלקיים מניחים שמתקיים:

$$\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{A+Bs}{s+2} + \frac{C+Dt}{s-3} \tag{4}$$

מכפילים את כל המשוואה ב$(s-3)(s+2)$ ובעזרת השוואת מקדמים מוצאים את הנעלמים A,B,C,D .
נסדר את הביטוי ונבצע התמרת לפלס הפוכה:

$$\bar{x} = \frac{7}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{s-3} \tag{5}$$

$$x(t) = \frac{7}{5}e^{-2t} + \frac{3}{5}e^{3t} \tag{6}$$

ב.

$$\ddot{x} + 4x = \sin(3x)\,, \quad x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0 \tag{7}$$

נבצע התמרת לפלס:

$$s^2\bar{x} - sx_0 - \dot{x}_0 + 4\bar{x} = \frac{3}{s^2+9} \qquad \Big/ \quad x_0 = 0 \quad \dot{x}_0 = 0 \tag{8}$$

$$\bar{x}(s^2+4) = \frac{3}{s^2+9} \tag{9}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{s^2+4}\frac{3}{s^2+9} = \frac{-3/5}{s^2+9} + \frac{3/5}{s^2+4} \tag{10}$$

כששוב המעבר האחרון בוצע בעזרת פירוק לשברים חלקיים.
נסדר ונבצע התמרה הפוכה:

$$\bar{x} = -\frac{1}{5}\frac{3}{s^2+9} + \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} \tag{11}$$

$$x(t) = -\frac{1}{5}\sin(3t) + \frac{3}{10}\sin(2t) \tag{12}$$

שאלה 2.

א. צריך למצוא את פונקציית גרין של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - y = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

כידוע אם $\mathcal{L}$ הוא האופרטור $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ אז פונקציית גרין מקיימת:

$$\mathcal{L}G(x,z) = \frac{d^2G(x,z)}{dx^2} - G(x,z) = \delta(x-z) \tag{14}$$

ניתן למצוא את פונקציית גרין ע"י מציאת פיתרון לאזורים שבהם פונקציית דלתא שווה ל-0.
שזה אומר שיש שתי פתרונות עבור התחומים: $0 \le x < z$ ו- $z \le x \le 1$.

פתרון עבור המשוואה הדיפרנציאלית הכללית

$$\frac{d^2G(x,z)}{dx^2} - G(x,z) = 0 \tag{15}$$

הוא :

$$G(x,z) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \tag{16}$$

בינתיים אנחנו יודעים שהצורה של פונקציית גרין היא:

$$G(x,z) = \begin{cases} A(z)e^x + B(z)e^{-x}, & 0 \le x < z \\ C(z)e^x + D(z)e^{-x} & z \le x \le 1 \end{cases} \tag{17}$$

A,B,C,D הן פונקציות של z לפי ההגדרה של פונקציית גרין, ומעתה ארשום אותן בלי לציין שהן פונקציות של z .
כלומר: A במקום $A(z)$.

$$G(x,z) = \begin{cases} Ae^x + Be^{-x}, & 0 \le x < z \\ Ce^x + De^{-x}, & z \le x \le 1 \end{cases} \tag{18}$$

נשתמש בנתון $y(0) = y(1) = 0$:

$$G(0,z) = 0 = A + B, \tag{19}$$
$$G(1,z) = 0 = Ce + De^{-1} \tag{20}$$

$$G(x,z) = \begin{cases} A(e^x - e^{-x}), & 0 \le x < z \\ C(e^x - e^{2-x}), & z \le x \le 1 \end{cases} = \begin{cases} A\sinh x, & 0 \le x < z \\ C\sinh(x-1), & z \le x \le 1 \end{cases} \tag{21}$$

$e^x + e^{2-x} = e(e^{x-1} - e^{1-x}) = e\sinh(x-1)$.
ניתן "לבלוע" את ה- e שהוצאנו מחוץ לסוגריים לתוך הקבוע C ע"מ להשאיר את החישובים נקיים.
נותר כעת להשתמש בתנאי הרציפות ב $G(x,z)$ והקפיצה בנגזרת.
תנאי הרציפות אומר:

$$G(z_-,z) = G(z_+,z) \tag{22}$$

נציב :

$$A\sinh(z) = C\sinh(z-1) \tag{23}$$

תנאי הקפיצה אומר:

$$\left.\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}\right|_{x=z^+} - \left.\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}\right|_{x=z^-} = \frac{1}{a_n(z)} \tag{24}$$

כש- $a_n(z)$ הוא המקדם של הנגזרת הגבוהה ביותר.

$$\frac{d}{dx}G(x,z) = \begin{cases} A\cosh x, & 0 \le x < z \\ C\cosh(x-1), & z \le x \le 1 \end{cases} \tag{25}$$

נציב:

$$C\cosh(z-1) - A\cosh(z) = 1 \tag{26}$$

נמצא את A ו- C:

$$A = C\frac{\sinh(z-1)}{\sinh(z)} \tag{27}$$

נציב בתנאי הקפיצה בנגזרת:

$$C\left(\cosh(z-1) - \cosh(z)\frac{\sinh(z-1)}{\sinh(z)}\right) = 1 \tag{28}$$

$$C\left(\frac{\cosh(z-1)\sinh(z) - \cosh(z)\sinh(z-1)}{\sinh(z)}\right) = 1 \tag{29}$$

$$C = \frac{\sinh(z)}{\sinh(1)} \tag{30}$$

בין המעבר האחרון ללפני האחרון השתמשתי בזהויות היפרבוליות ע"מ לפשט את הביטוי.
מכאן נוכל למצוא את A :

$$A = A = C\frac{\sinh(z-1)}{\sinh(z)} = \frac{\sinh(z-1)}{\sinh(1)} \tag{31}$$

פונקצית גרין המבוקשת היא:

$$G(x,z) = \frac{1}{\sinh(1)}\begin{cases} \sinh(z-1)\sinh(x), & 0 \le x < z \\ \sinh(z)\sinh(x-1), & z \le x \le 1 \end{cases} \tag{32}$$

ב.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{4}=f(x) \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases} \tag{33}$$

נתחיל באותה צורה כמו בסעיף הקודם, נמצא פתרון ככלי למד"ר ההומוגנית, נקבע שפונקציית גרין צריכה לקיים את אותו פתרון למד"ר ההומוגנית, כפונקציה בהרכבה על שני קטעים:

$$\frac{d^2G}{dx^2}+\frac{1}{4}G=0 \tag{34}$$

$$G=\alpha e^{i\frac{x}{2}}+\beta e^{-i\frac{x}{2}} \tag{35}$$

$$G(x,z)=\begin{cases} Ae^{ix/2}+Be^{-ix/2}, & 0\le x<z \\ Ce^{ix/2}+De^{-ix/2}, & z\le x\le\pi \end{cases} \tag{36}$$

נשתמש בנתון $y(0)=y(\pi)=0$:

$$G(0,z)=0=A+B \tag{37}$$

$$G(\pi,z)=0=C\left(\cos(\tfrac{\pi}{2})+i\sin(\tfrac{\pi}{2})\right)+D\left(\cos(\tfrac{\pi}{2})-i\sin(\tfrac{\pi}{2})\right)=C-D \tag{38}$$

$$G(x,z)=\begin{cases} A(e^{ix/2}-e^{-ix/2}), & 0\le x<z \\ C(e^{ix/2}+e^{-ix/2}), & z\le x\le\pi \end{cases} = \begin{cases} A\sin(\frac{x}{2}), & 0\le x<z \\ C\cos(\frac{x}{2}), & z\le x\le\pi \end{cases} \tag{39}$$

שוב, במעבר בין שני הביטויים A ו-C הוגדרו מחדש ע"מ לבלוע קבועים שעלו במעבר בין הביטוי האקספוננציאלי לטריגונומטרי.
נשתמש בתנאי הרציפות של פונקציית גרין :

$$A\sin(\frac{z}{2})=C\cos(\frac{z}{2}) \quad\Rightarrow\quad C=A\tan(\frac{z}{2}) \tag{40}$$

$$\frac{d}{dx}G(x,z)=\begin{cases} \frac{A}{2}\cos(\frac{x}{2}), & 0\le x<z \\ -\frac{C}{2}\sin(\frac{x}{2}), & z\le x\le\pi \end{cases} \tag{41}$$

ובתנאי הקפיצה בנגזרת:

$$-\frac{C}{2}\sin(\frac{x}{2})-\frac{A}{2}\cos(\frac{x}{2})=1 \quad \Big/\cdot -2 \tag{42}$$

$$C\sin(\frac{x}{2})+A\cos(\frac{x}{2})=-2 \tag{43}$$

נציב את הביטוי ל-C שקיבלנו מתנאי הרציפות:

$$A\left(\tan\left(\tfrac{z}{2}\right)\sin\left(\tfrac{z}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{z}{2}\right)\right)=-2 \tag{44}$$

$$A=-2\cos\left(\tfrac{z}{2}\right) \tag{45}$$

מכאן אפשר לקבל את C:

$$C=A\tan(\frac{z}{2})=-2\sin(\frac{z}{2}) \tag{46}$$

פונקציית גרין היא:

$$G(x,z)=-2\begin{cases} \cos(\frac{z}{2})\sin(\frac{x}{2}), & 0\le x<z \\ \sin(\frac{z}{2})\cos(\frac{x}{2}), & z\le x\le\pi \end{cases} \tag{47}$$

שאלה 3. א. צריך למצוא את פונקציית גרין עבור :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = f(t) \\ x_0 = \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \tag{48}$$

נתחיל באותה צורה כמו בתרגיל הקודם, נמצא פתרון כללי למד"ר ההומוגנית, נקבע שפונקציית גרין צריכה לקיים את אותו פתרון למד"ר ההומוגנית, כפונקציה בהרכבה על שני קטעים:

$$G(t, t_0) = \alpha + \beta e^{-2t} \tag{49}$$

$$G(t, t_0) = \begin{cases} A + Be^{-2t} & t \leq t_0 \\ C + De^{-2t} & t_0 < t \end{cases} \tag{50}$$

אין לנו מידע על t_0, אבל בפיזיקה מתייחסים לקבועי זמן כחיוביים, בנוסף אם t_0 היה שלילי, אז המערכת (בגלל תנאי ההתחלה) היתה בהכרח מתאפסת עבור כל זמן גדול מ-0.
לכן נתייחס לקבוע t_0 כחיובי.

$$G(0, t_0) = A + B = 0 \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}G(t, t_0) = \begin{cases} -2Be^{-2t} & t \leq t_0 \\ -2De^{-2t} & t_0 < t \end{cases} \tag{52}$$

$$\frac{d}{dt}G(0, t_0) = 0 = -2B \quad \Rightarrow B = A = 0 \tag{53}$$

$$G(t, t_0) = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ C + De^{-2t} & t_0 < t \end{cases} \tag{54}$$

נשתמש בתנאי הרציפות ב $G(t, t_0)$:

$$C + De^{-2t_0} = 0 \quad \Rightarrow D = -Ce^{2t_0} \tag{55}$$

ובתנאי הקפיצה:

$$-2De^{-}2t_0 = 1 \quad \Rightarrow D = -\frac{1}{2}e^{2t_0} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \tag{56}$$

$$G(t, t_0) = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2(t_0 - t)} & t_0 < t \end{cases} \tag{57}$$

ב.

צריך למצוא את הפתרון למד"ר עבור המקרה :

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{-3t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{58}$$

הפתרון ינתן ע"י:

$$x(t) = \int_0^t G(t, t_0) f(t_0) dt_0 \tag{59}$$

$$x(t) = \frac{5}{2}\int_0^t (1 - e^{-2(t-t_0)})e^{-3t_0} dt_0 = \frac{5}{2}\int_0^t \left(e^{-3t_0} - e^{-t_0}e^{-2t}\right) dt_0 \tag{60}$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{e^{-3t_0}}{3} + e_{-t_0}e^{-2t}\right]\Big|_0^t = \frac{5}{6}\left[2e^{-3t} - 3e^{-2t} + 1\right] \tag{61}$$

שאלה 4.

במד"ר מהסוג $y''+p(z)y'+q(z)y=0$, ע"מ להראות שנקודה היא סינגולרית צריך להראות שהביטוי $\lim_{z\longrightarrow z_0} q(z),p(z)=\infty$ מתבדר.
ושהביטויים $\lim_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)p(z)$, $\lim_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)^2q(z)$ סופיים.
נבדוק את זה עבור המד"ר בשאלה

$$z^2y''-\frac{3}{2}zy'+(1+z)y=0 \tag{62}$$

צריך קודם לסדר את המד"ר ככה שהמקדם של הנגזרת השנייה של y הוא 1.

$$y''-\frac{3}{2z}y'+\frac{1+z}{z^2}y=0 \tag{63}$$

$$q(z)=\frac{1+z}{z^2} \qquad p(z)=-\frac{3}{2z} \tag{64}$$

התנאי $\lim_{z\longrightarrow 0} q(z),p(z)=\infty$ מתקיים.

$$\lim_{z\longrightarrow 0} zp(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} \tag{65}$$

$$\lim_{z\longrightarrow 0} z^2q(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}(1+z)=1 \tag{66}$$

מש"ל.
נמשיך להראות שהפתרון של המד"ר הוא מה שנתון בשאלה.
נניח שקיים פתרון מהצורה:

$$y=\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma} \tag{67}$$

המטרה היא למצוא את a_n.
נגזור את הביטוי פעמיים:

$$y'=\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)z^{n+\sigma-1} \tag{68}$$

$$y''=\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)z^{n+\sigma-2} \tag{69}$$

$$\tag{70}$$

נציב במד"ר

$$z^2\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)z^{n+\sigma-2}-\frac{3}{2}z\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)z^{n+\sigma-1}+(1+z)\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma}=0 \tag{71}$$

$$\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1)z^{n+\sigma}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}a_n(n+\sigma)z^{n+\sigma}+\underbrace{(1+z)\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma}}_{=S_3}=0 \tag{72}$$

$$\tag{73}$$

צריך לסדר את הסכום S_3 ככה שהמערכים של z יהיו זהים למערכים של שאר הסכומים במשוואה.

$$S_3=(1+z)\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma}=\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma}+\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma+1} \tag{74}$$

$$\sum_{n=0}a_nz^{n+\sigma+1}\underbrace{=}_{k=n+1}\sum_{k=1}a_{k-1}z^{k+\sigma}=\sum_{k=0}a_{k-1}z^{k+\sigma}-a_{-1}z^{\sigma} \tag{75}$$

מכיוון ש a_{-1} מוגדר להיות 0, ומכיוון ש- k ו- n הם אינדקסים אילמים ("Dummy index") ניתן להחליף בינהם.

נקבל ביטוי חדש עבור S_3 :

$$S_3 = \sum_{n=0} a_n z^{n+\sigma} + \sum_{n=0} a_n z^{n+\sigma+1} = \sum_{n=0} a_n z^{n+\sigma} + \sum_{n=0} a_{n-1} z^{n+\sigma} = \sum_{n=0} (a_n + a_{n-1}) z^{n+\sigma} \tag{76}$$

נציב במד"ר מחדש:

$$\sum_{n=0} \left\{ a_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) - \frac{3}{2}a_n(n+\sigma) + (a_n + a_{n-1}) \right\} z^{n+\sigma} = 0 \tag{77}$$

אנחנו מחפשים את ערכי ה - σ האפשריים, מן הסתם הם צריכים להיות תקפים עבור כל n ובפרט עבור $n = 0$, נציב את זה במשוואה ונקבל:

$$a_0\sigma(\sigma-1) - \frac{3}{2}a_0\sigma + a_0 + a_{-1} = \Big|_{a_{-1}=0} = a_0 \left(\sigma(\sigma-1) - \frac{3}{2}\sigma + 1 \right) = 0 \tag{78}$$

$$\sigma^2 - \frac{5}{2}\sigma + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \tag{79}$$

בין שני ערכי ה- σ אין הבדל של מספר שלם, לכן קיימים שני פתרונות למערכת. $y = \sum_{n=0} a_n z^{n+2}$ ו- $y = \sum_{n=0} b_n z^{n+\frac{1}{2}}$
נשאר למצוא את a_n ו- b_n .
נציב ב: 77 $z = 0$ נוכל להיפטר מסימון הסכום ונפתור את המשוואה עבור a_n :

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{(n+\sigma)(n+\sigma-1) - \frac{3}{2}(n+\sigma) + 1} \tag{80}$$

נחליף משתנים $n \to n+1$

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+\sigma+1)(n+\sigma) - \frac{3}{2}(n+1+\sigma) + 1} \tag{81}$$

נציב $\sigma = 2$ ונסדר:

$$a_{n+1} = \frac{-2a_n}{(n+1)(2n+5)} \tag{82}$$

ע"מ להגיע לביטוי סגור על n, אנחנו צריכים לכתוב כמה איברים ראשונים בסדרה ולראות אם אפשר למצוא קשר בינהם.

$$a_1 = \frac{-2a_0}{5} \tag{83}$$

$$a_2 = \frac{-2a_1}{2\cdot 9} = \frac{2^2 a_0}{2\cdot 5\cdot 7} \tag{84}$$

$$a_3 = \frac{-2a_2}{3\cdot 11} = \frac{-2^3 a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \tag{85}$$

$$a_n = \frac{(-2)^n a_0}{n!(5\cdot 7\cdot 9\cdot \ldots \cdot (2n+3))} \tag{86}$$

ננסה לפשט את הביטוי שבמכנה:

$$(5\cdot 7\cdot 9\cdot \ldots \cdot (2n+3)) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot \ldots \cdot (2n+3)}{3\cdot (2\cdot 4\cdot 8\cdot 10\cdot \ldots \cdot (2n+2))} = \frac{(2n+3)!}{3\cdot 2^{n+1}\cdot (n+1)!} \tag{87}$$

$$a_n = \frac{6(-1)^n 2^{2n}(n+1)}{(2n+3)!} a_0 \tag{88}$$

נעבור לערך σ השני, $\sigma = \frac{1}{2}$ ונציב בביטוי הכללי הרקורסיבי ל a_n שמצאנו שמעכשיו נקרא לו b_n :

$$b_{n+1} = \frac{-2b_n}{(n+1)(2n-1)} \tag{89}$$

שוב נראה מה נקבל עבור כמה ערכי n ראשונים:

$$b_1 = \frac{-2b_0}{-1} = 2b_0 \tag{90}$$

$$b_2 = \frac{-2b_1}{1\cdot 2} = \frac{-2^2 b_0}{2} \tag{91}$$

$$b_3 = \frac{2b_2}{3\cdot 3} = \frac{2^3 b_0}{2\cdot 3\cdot 3} \tag{92}$$

$$b_4 = \frac{-2b_3}{4\cdot 5} = \frac{-2^4 b_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 5} \tag{93}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}2^n b_0}{n!(3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-3))} \tag{94}$$

$$(3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-3)) = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...(2n-3)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot (2n-4)} = \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \tag{95}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-2}}{n(n-1)(2n-3)!}b_0 \tag{96}$$

שימו לב שהביטוי עבור b_n שמצאנו תקף רק עבור $n \geq 2$.
מכאן הפתרון למד"ר הוא:

$$y = \sum_{n=0} 6a_0 \frac{(-1)^n 2^{2n}(n+1)}{(2n+3)!} z^{n+2} + b_0 \left\{ z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=2} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{4n(n-1)(2n-3)!} z^{\frac{1}{2}+n} \right\} \tag{97}$$

שאלה 5

התנאי עבור אופרטור הרמיטי מהסוג

$$\mathcal{L} = P_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_2(x) \tag{98}$$

כשהפונקציות P_0 , P_1 ו- P_2 ממשיות הוא:

$$P_1(x) = \frac{d}{dx}P_0(x) \tag{99}$$

א. (1)

$$\mathcal{L} = (1+x^2))\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + 2\cos x \tag{100}$$

$$P_1 = 2x = \frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{d}{dx}P_0(x) \tag{101}$$

אופרטור הרמיטי.

(2)

$$\mathcal{L} = 1\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2\frac{d}{dx} + 3x \tag{102}$$

$$P_1 = 2x^2 \neq 0 = \frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}P_0(x) \tag{103}$$

לא אופרטור הרמיטי.

(3)

$$\mathcal{L} = (1-x^2))\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 10 \tag{104}$$

$$P_1(x) = -2x = \frac{d}{dx}(1-x^2) = \frac{d}{dx}P_0(x) \tag{105}$$

ב. ע"מ להפוך אופרטור לא הרמיטי להרמיטי צריך למצוא את הפונקציה $F(x)$ ולהכפיל אותה באופרטור המקורי.

$$F(x) = \frac{1}{P_0(x)}\exp\left(\int^x \frac{P_1(x')}{P_0(x')}dx'\right) \tag{106}$$

נמצא את הפונקציה עבור האופרטור השני מהסעיף הקודם :

$$\int^x 2x'^2 dx' = \frac{2}{3}x^3 \qquad F(x) = \exp\left(\frac{2}{3}x^3\right) \tag{107}$$

האופרטור ההרמיטי הוא:

$$\mathcal{L}' = \exp\left(\frac{2}{3}x^3\right)\frac{d^2}{dx^2} + \exp\left(\frac{2}{3}x^3\right)2x^2\frac{d}{dx} + \exp\left(\frac{2}{3}x^3\right)3x \tag{108}$$

שאלה 6. א. צריך למצוא את הפתרון למד"ר עבור פונקציה $f(x)$ כללית בטווח הנתון:

$$(1-x^2)y''-2xy'+by=f(x) \tag{109}$$

קודם כל, אנחנו יודעים שפונקציות לג'נדר מהוות בסיס וניתן לכתוב איתן כל פונקציה בצורה של סכום ובפרט את הפתרון למד"ר הנתון ניתן גם כן לרשום כסכום של פונקציות לג'נדר בצורה הבאה:

$$y=\sum_{l=0}a_lP_l(x) \tag{110}$$

נשתמש במשוואת לג'נדר

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0 \tag{111}$$

$$(1-x^2)y''-2xy'=-l(l+1)y \tag{112}$$

ע"מ להיפטר מהגורמים עם הנגזרות במד"ר שלנו.

$$(1-x^2)y''-2xy'+by=[-l(l+1)+b]y=\sum_{l=0}[b-l(l+1)]a_lP_l(x) \tag{113}$$

$$\sum_{l=0}[b-l(l+1)]a_lP_l(x)=f(x) \tag{114}$$

נשתמש בהטלה:

$$\int_{-1}^{1}\sum_{l=0}[b-l(l+1)]a_lP_l(x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx \tag{115}$$

$$\int_{-1}^{1}\sum_{l=0}[b-l(l+1)]a_lP_l(x)P_n(x)dx=\sum_{l=0}a_l[b-l(l+1)]\frac{2}{2l+1}\delta_{ln}=a_n[b-l(l+1)]\frac{2}{2n+1} \tag{116}$$

$$a_n[b-l(l+1)]\frac{2}{2n+1}=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx \tag{117}$$

$$a_l=\frac{2l+1}{2(b-l(l+1))}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx \tag{118}$$

$$y=\sum_{l=0}a_lP_l(x) \tag{119}$$

ב.

הפונקציה הנתונה היא $f(x)=5x^3$, צריך למצוא את הקומבינציה לינארית שלה של פונקציות לג'נדר.

$$5x^3=\frac{A}{2}(5x^3-3x)+Bx \qquad \Rightarrow \quad A=2 \quad B=3 \tag{120}$$

$$5x^3=2P_3(x)+3P_1(x) \tag{121}$$

כזכור $y(x)$ היא סכום של פונקציות לג'נדר, עם מקדמים מתאימים.
נמצא את המקדמים עבור $l=1,3$

$$a_1=\frac{5}{8}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{4} \tag{122}$$

$$a_3=\frac{35}{4}\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{2}(5x^3-3x)dx=1 \tag{123}$$

הפתרון למד"ר הוא:

$$y(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) = \frac{5}{2}\left(x^3 - \frac{1}{2}x\right) \tag{124}$$

שאלה 7.

$$\sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \tag{125}$$

נתחיל מהפתרון של המד"ח ההומוגנית ונמשיך משם למד"ח הלא הומוגני:

$$\sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{126}$$

למשוואה מהצורה

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{127}$$

קיים פתרון,
$u(x,y) = f(p)$ כש- p היא פונקציה של x ו- y .
הפיתרון ניתן ע"י

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)} \tag{128}$$

נפתור:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\cos x} \tag{129}$$

$$\cot x dx = dy \tag{130}$$

$$\ln(\sin x) = y + C \tag{131}$$

$$C = \ln(\sin x) - y = p \tag{132}$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא:

$$u_h(x,y) = f_h(p) = f_h(\ln(\sin x) - y) \tag{133}$$

הפתרון למד"ח הלא הומוגנית הוא מהצורה :

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y) = f_h(\ln(\sin x) - y) + u_p(x,y) \tag{134}$$

נפתור את המד"ח הלא הומגנית ע"י ניחוש פיתרון. ע"מ שפונקציה תהיה פתרון למד"ח צריך שהנגזרת החלקית של x תתאפס , ושהנגזרת החלקית של y תהיה שווה ל-1.
הפונקציה שמקיימת את זה היא $u_p(x,y) = u_p(y) = y$.

$$\sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \qquad \frac{\partial u_p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u_p}{\partial y} = 1 \tag{135}$$

$$\sin x \cdot (0) + \cos x \cdot (1) = \cos x \tag{136}$$

הפתרון הכללי הוא:

$$u(x,y) = f_h(\ln(\sin x) - y) + y \tag{137}$$

א.
נתון התנאי שפה:

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \tag{138}$$

נציב אותו פתרון הכללי שלנו

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 = f_h(\ln(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) - y) + y = f_h(-y) + y \quad (139)$$

$$f_h(-y) = -y \quad (140)$$

נחליף משתנים למשתנה כללי כלשהו, נקרא למשתנה הזה מראש p כי אנחנו מצאנו כבר תנאי מסויים על הפונקציה f_h ונציב את הביטוי המפורש של p.

$$f_h(p) = p \quad (141)$$

$$f_h(\ln(\sin x) - y) = \ln(\sin x) - y \quad (142)$$

כך שהפתרון הפרטי הוא :

$$u(x, y) = f_h(\ln(\sin x) - y) + y = \ln(\sin x) - y + y = \ln(\sin x) \quad (143)$$

ב. אנחנו חוזרים לפתרון הכללי למד"ח הלא הומוגנית שמצאנו :

$$u(x, y) = f_h(\ln(\sin x) - y) + u_p(x, y) \quad (144)$$

עם תנאי השפה:

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = y(y + 1) \quad (145)$$

באותה דרך כמו מקודם, נציב את התנאי שפה בפתרון הכללי ונראה איזה קשר נקבל.

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = y(y + 1) = f_h(-y) + y \quad (146)$$

$$f_h(-y) = y^2 \quad (147)$$

כמו מקודם נחליף משתנים בפונקציה f_h
ונקבל:

$$f_h(p) = p^2 = (\ln(\sin x) - y)^2 \quad (148)$$

הפתרון הפרטי הוא:

$$u(x, y) = (\ln(\sin x) - y)^2 + y \quad (149)$$

שאלה 8. א.

צריך להוכיח שהפתרון הכללי של המשוואה הבאה הוא מהצורה של שני גלים נעים במהירויות שונות.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v^2-v_0^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad \text{with} : v_0=\sqrt{\frac{T}{\rho A}} \tag{150}$$

ראשית, הפתרון של משוואה מהסוג: $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$
הוא מהצורה :

$$u(x,y)=f(x+\lambda_1 y)+g(x+\lambda_2 y) \qquad \text{with} \quad A+B\lambda+C\lambda^2=0 \tag{151}$$

במקרה שלנו זה מוביל ל:

$$u(x,t)=f(x+(-v+v_0)t)+g(x+(-v-v_0)t) \tag{152}$$

נבצע החלפת משתנים עם

$$\eta_\pm=x+(-v\pm v_0)t \tag{153}$$

$$u(x,t)=f(\eta_+)+g(\eta_-) \tag{154}$$

צריך לחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה, נחשב לפי η כללי, ללא אינדקס, וכשנצטרך נציב את ה- $\eta_\pm$ הנחוץ לנו.
בנוסף, כל עוד אין צורך לסמן נגזרת כשבר אני אסמן אותה לפי הקונבציה $\partial_x^n=\frac{\partial^n}{\partial x^2}$.

$$\partial_t u=\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{155}$$

$$\partial_t^2 u=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}+\cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}}+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}+\cancelto{0}{\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}} \tag{156}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\Big|_{\eta=\eta_+}+\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial g}\right)^2\Big|_{\eta=\eta_-}=(-v+v_0)^2\partial_\eta^2 f+(v+v_0)^2\partial_\eta^2 g \tag{157}$$

$$\partial_x\partial_t u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial g}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial t}=(-v+v_0)\partial_\eta^2 f+(-v-v_0)\partial_\eta^2 g \tag{158}$$

$$\partial_x^2 u=\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\Big|_{\eta=\eta_+}+\frac{\partial^2 g}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\Big|_{\eta=\eta_-}=\partial_\eta^2 f\Big|_{\eta=\eta_+}+\partial_\eta^2 g\Big|_{\eta=\eta_-} \tag{159}$$

החישוב של $\partial_x^2 u$ זהה לחישוב של $\partial_t^2 u$.
נשאר להציב במד"ח:

$$(v_0-v)^2\partial_\eta^2 f+(v+v_0)^2\partial_\eta^2 g+2v\left((v_0-v)\partial_\eta^2 f+(-v-v_0)\partial_\eta^2 g\right)+\left(v^2-v_0^2\right)\left(\partial_\eta^2 f+\partial_\eta^2 g\right) \tag{160}$$

$$\partial_\eta^2 f\left[v_0^2-2vv_0+v^2+2vv_0-2v^2+v^2-v_0^2\right]+\partial_\eta^2 g\left[v^2+2vv_0-2v^2-2vv_0+v^2-v_0^2\right]=0 \tag{161}$$

מש"ל.

ב. נתונה לנו צורת הגל עבור $t=0$ ואנחנו צריכים למצוא את משוואת הגל עבור כל t .
בספר בעמוד 693 קיים הסבר על הבעיה הזו בדיוק.
אם הפתרון של משוואת הגל הוא מהצורה

$$u(x,t) = \tilde{f}(x-ct)\tilde{g}(x+ct) \tag{162}$$

וצורת הגל ב $t=0$ היא:

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{163}$$

והמהירות היא:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{164}$$

אז משוואת הגל עבור כל $t>0$ היא:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct)+\phi(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(q)dq \tag{165}$$

הפתרון שלנו $u(x,t) = f(x+(-v+v_0)t)+g(x+(-v-v_0)t)$ קרוב לצורת פתרון שמציגים בספר, צריך לבצע החלפת משתנים פשוטה כדי שיהיו בדיוק באותה צורה, בעזרת $\chi = x - vt$

$$u(x,t) = f(x+(-v+v_0)t)+g(x+(-v-v_0)t) = f(\chi+v_0t)+g(\chi-v_0t) \tag{166}$$

$$u(x,0) = a\cos(kx) = a\cos(k\chi)\Big|_{t=0} \tag{167}$$

$$\phi = a\cos(k\chi) \tag{168}$$

$$\psi = \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}a\cos(k(x+vt))\Big|_{t=0} = -akv\sin(k\chi)\Big|_{t=0} \tag{169}$$

$$\frac{1}{2v_0}\int_{\chi-v_0t}^{\chi+v_0t}\psi(q)dq = -\frac{akv}{2v_0}\int_{\chi-v_0t}^{\chi+v_0t}\sin(kq)dq = \frac{av}{2v_0}\left[\cos(k(\chi+v_0t))-\cos(k(\chi-v_0t))\right] = -\frac{av}{v_0}\sin(k(x-vt))\sin(kv_0t) \tag{170}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[a\cos(k(\chi-v_0t))+a\cos(k(\chi+v_0t))\right] - \frac{av}{v_0}\sin(k(x-vt))\sin(kv_0t) \tag{171}$$

$$= a\cos(k(x-vt))\cos(kv_0t) - \frac{av}{v_0}\sin(k(x-vt))\sin(kv_0t) \tag{172}$$