מד"ר סדר I

$y' = f(x)g(y)$

פרידה

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

* חשוב שנבדוק פ. סינגולרי $g(y)=0$.
* אחרי מציאת פ. כללי, אם קיים $c\in\mathbb{R}$ שמתר" שנציבו בפ. כללי יתן $g(y)=0$ אזי הוא "קרוא פ. פרט". אחרת ← סינגולרי

פ. פרט: $c\in\mathbb{R}$, $y(x)=\dots$

פ. סינגולרי: $c\in\mathbb{R}$, $y(x)=\dots$

או

$y=\dots$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

משוואה מטיפוס הומוגני

הצבה: $z(x)=\frac{y}{x}$

נציב במשוואה המקורית $\begin{cases} y = z\cdot x \\ y' = z'x + z \end{cases}$

$z'x + z = f(z)$

* מרגע נורמל להגיע לכל סוג של מד"ר סדר 1 (לרוב פרידה)

$y' + p(x)y = f(x)$

שיטת מכפיל אינטגרציה

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

מכפילים את כל המשוואה ב- $\mu(x)$ ונקבל:

$$(\mu(x)\cdot y)' = f(x)$$

נבדוק אינטגרל על שני האגפים ונחלץ את $y(x)$.

* באינטגרל שלם c לא מוסיפים קבוע c, לעומת זאת באינטגרל בשלב האחרון כן נוסיף.
* אם יש ת.ה - נורמל למצוא את הקבוע c.

$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$

ברנולי

הצבה: $z(x)=y^{1-\alpha}$

$$z'(x)=(1-\alpha)y'y^{-\alpha}$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} = y'y^{-\alpha}$$

נחלק את המשוואה ב- y^{α}

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z(1-\alpha) = f(x)$$

$0<\alpha \rightarrow y\equiv 0$ פ. סינגולרי

* עבור $\alpha=0,1$ אין צורך להשתמש בברנולי ואפשר בדרכים שלמדנו.

$M(x,y)dx + N(x,y) = 0$

האם $M_y = N_x$?

כן (מדויקת)

מתקיים פ. כללי מהצורה $u(x,y)=c$ כאשר:

$$u_x = M,\quad u_y = N$$

$$u(x,y)=\int M dx + c(y)$$

$$u_y' = \left(\int M dx\right)'_y + c'(y) = N$$

רק מוצאים את c

* באותו אופן אפשר גם הפוך

$$u(x,y)=\int N dy + c(x)$$

לא (לא מדויקת)

מציאים את המד"ר ע"י הכפלה בגורם שתלוי רק ב- x או רק ב- y:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

או

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{M_y - N_x}{-M}$$

מוצאים את $\frac{\mu'}{\mu}$ (פרידה)

ולאחר מכן פותרים את המד"ר המדויקת.

משפחות אורתוגונליות

$$y'\cdot y'_{\perp} = -1$$

1. שנגזרים את המשוואה
2. מחלצים את c מהמשוואה הנתונה.
3. מציבים (2) ב- (1).
4. מציבים $y'\cdot y'_{\perp} = -1$
5. פותרים את המד"ר.

משפט קי"ו (קיום ויחידות)

נתון: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ אם $f(x,y)$ וגם $f'_y(x,y)$ רציפות בנק' (x_0,y_0), אזי קי"מ פ. יחיד $y(x)$ אשר מוגדר סב"ב x_0.

הערות:

* התנאים במשפט מספיקים ולא הכרחיים!
* רציפות של $f(x,y)$ "אחראית" על קיום פתרון!
* רציפות של $f_y(x,y)$ "אחראית" על יחידות הפתרון!

מד"ר סדר II

האם נתון פתרון y_1?

לא

מקדמים קבועים?

כן

שיטת השוואת מקדמים

פותרים הומו' מתאימה.

מוצאים y_p לפי הטבלה הבאה:

$g(x)$	נגיע פתרון מהצורה
$P_n(x)$	$x^s \cdot a_n(x)$ s- רבוי של 0 כשורש של פו"א
$e^{ax}P_n(x)$	$x^s e^{ax} \cdot a_n(x)$ s- רבוי של a כשורש של פו"א
$e^{ax}P_n(x)\cdot\sin(\beta x)$ או $e^{ax}P_n(x)\cdot\cos(\beta x)$	$x^s e^{ax}[a_n(x)\cdot\cos(\beta x)+b_n(x)\sin(\beta x)]$ s-רבוי של $\alpha+i\beta$ כשורש על פו"א

במקרים פולינום שמים דרגה כללית (למשל עבור פולינום ממעלה 2 נכתוב:
Ax^2+Bx+C
אוצרים את y_p כמה פעמים שצריך מדביבים רגרה במד"ר, משווים את המקדמים ומוצאים את הקבועים A,B...

לא

מקדמים קבועים?

לא בהכרח

וריאציית פרמטר

סדור המד"ר

ניתן להשתמש בפו' המקדמים ו- $f(x)$ רלוונטית בקטע רלשהו

וכשנתון: $y_h=c_1y_1+c_2y_2+\dots$

מחפשים את y_p בצורה:

$y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$

פותרים מע' משוואות:

$c_1'y_1+c_2'y_2=0$

$c_1'y_1'+c_2'y_2'=f(x)$

כמובן שאם יש סדר גדול יותר אני משווים את כולם לאפס למעט המשוואה האחרונה (אותה נשווה ל-f)

פותרים לפי כלל קרמר:

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f(x) & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f(x) & y_2'\end{vmatrix}}{W}$$

עבור $c_2'(x)$ מחליפים עמודה 2.

משוואת אוילר

סדר 2

$x^2y''+a_1xy'+a_0y=f(x)$

$x>0\ ,\ a_1,a_0\in\mathbb{R}$

נציב $x=e^t$ ונקבל:

$y''+y'(a_1-1)+a_0y=f(t)$

מקדמים קבועים.

לא נשכוח לתצור ל- x ע"י:

$t=\ln x$

"y, y' : הן פו' שתלויות ב-t.

סדר n

$x^ny^{(n)}+a_{(n-1)}\cdot x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0y=f(x)$

הפו' מתקבלת ע"י הפיכת הביטוי $x^k\cdot y^k$:

$r(r-1)(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)$

אם r- שורש ממשי אני הפתרון המתאים לו $|x|^r$

אם r- שורש מרוכב $\alpha\pm i\beta$ אני הפתרון המתאים לו: $|x|^\alpha\cos(\beta\cdot\ln|x|)$
$|x|^\alpha\sin(\beta\cdot\ln(x))$

אם השורשים הם ברבוי s אני מכפילים את הפתרון שקיבלנו ב- $|x|\ln$ עד $(\ln|x|)^{s-1}$.

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ נוסחת אבל Abel

$$y_2(x)=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

רק המוגנית

כן

גם וגם

הורדת סדר $y_2(x)=y_1(x)\cdot z(x)$

אוצרים פעמיים (או כמה שצריך) ומגדירים במשוואה.
מגדירים: $z'(x)=v(x)$
ומתקבלת מד"ר מסדר 1.

לאורך הדרך בכל האינטגרלים אין צורך להוסיף קבוע c, באמת שהם נכנסים בקבועים של הפתרון ההומוגני.

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{F(x)}{(x+a)(x+b)}=\frac{A}{(x+a)}+\frac{B}{(x+b)}$$

$$\frac{F(x)}{x^2(x+a)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+a}$$

$$\frac{F(x)}{(x^2+a)(x^2+b)}=\frac{Ax+B}{(x^2+a)}+\frac{Cx+D}{(x^2+b)}$$

$$\frac{F(x)}{(x+a)^2(x+b)}=\frac{A}{(x+a)}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+b)}$$