

## מטלת מנחה (ממ"ן) 05

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9+10 (10.1 ו-10.2 מפרק 10 בלבד)

---

### שאלה 1

א. בדקו בכל שיטה שתבחרו אם הטרנספורמציה הבאה היא קנונית:

$$\begin{cases} Q = \arctan\left(\frac{\alpha q}{p}\right) \\ P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{(\alpha q)^2}\right) \end{cases}$$

כאשר  $\alpha$  פרמטר ממשי שרירותי.

ב. מצאו לאילו ערכי  $\alpha, \beta$  הטרנספורמציה הבאה היא קנונית:

$$\begin{cases} Q = q^\alpha \cos(\beta p) \\ P = q^\alpha \sin(\beta p) \end{cases}$$

### שאלה 2

נתונים  $Q, P$  קואורדינטות במרחב הפאזה של מערכת פיזיקאלית קלאסית. נתונה הטרנספורמציה הבאה:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q^k p \\ P &= \beta q^m \end{aligned}$$

כאשר  $\alpha, \beta, k, m$  קבועים ממשיים.

א. מצאו תנאי על  $k, m$  על מנת שהטרנספורמציה תהיה קנונית (התשובות צריכות להיות

מבוטאות כתלות בקבועים  $(\alpha, \beta)$ ).

המשך השאלה בעמוד הבא

נתון ההמילטוניאן הבא:

$$H = \frac{q^4 p^2}{2\mu} + \frac{\lambda}{q^2}$$

כאשר  $\lambda, \mu$  קבועים ממשיים וחיוביים.

ב. מצאו את ההמילטוניאן החדש לאחר הטרנספורמציה, כך שיהיה מהצורה הבאה:

$$\tilde{H} = C(Q^2 + P^2)$$

כאשר  $C$  הוא קבוע כלשהו התלוי ב  $\lambda, \mu$  (הדרכה: בחרו  $k$  כך שיתאים לצורת ההמילטוניאן המבוקשת. זכרו כי  $\alpha$  הוא קבוע שרירותי כך שגם אותו ניתן להגדיר כפונקציה של  $\lambda, \mu$ ).

ג. השתמשו במשוואות המילטון עבור ההמילטוניאן החדש ומצאו את  $Q(t), P(t)$  וכן את  $q(t), p(t)$ .

### שאלה 3

חלקיק בעל מסה  $m$  טעון במטען  $q$  ונמצא בשדה מגנטי אחיד  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .  
הניחו שתנועת החלקיק מתרחשת במישור x-y בלבד.

א. הראו כי השדה המגנטי נובע מהפוטנציאל הווקטורי:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x\hat{y} - y\hat{x})$$

ורשמו את ההמילטוניאן של החלקיק.

ב. נגדיר משתנים חדשים:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} \left( P_x + \frac{q B_0 y}{2c} \right)$$

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} \left( P_y - \frac{q B_0 x}{2c} \right)$$

כתבו את ההמילטוניאן בעזרת המשתנים החדשים.

ג. כתבו את משוואות התנועה עבור המשתנים החדשים ופתרו אותן.

ד. השתמשו בסעיף הקודם כדי לקבל את  $x$  ו- $y$  כפונקציה של הזמן. תארו את מסלול החלקיק.

#### שאלה 4

נתון המילטוניאן  $H(q,p,t)$  ממשי. נגדיר שני פונקציות מרוכבות :

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

ונבטא את ההמילטוניאן ע"י  $a$  ו  $\tilde{a}$ .

א. מהן משוואות התנועה של  $a$  ו  $\tilde{a}$ ?

ב. רשמו ופתרו את משוואות התנועה של  $a$  ו  $\tilde{a}$  עבור אוסטילטור הרמוני פשוט. (הניחו

$$(m=k=1)$$

#### שאלה 5

נתון ההמילטוניאן הבא:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$$

א. תארו את המאפיינים של הכוח הפועל על החלקיק במערכת זו.

ב. מדוע לא ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות אלה?

ג. הראו כי ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות קוטביות

$(r, \phi)$ . כתבו את משוואת המילטון-יעקובי עבור פונקציית המילטון  $S$  בקואורדינטות אלה.

ד. פתרו את המשוואה עבור פונקציית המילטון  $S$ . בטאו את הפתרון בלי לפתור במפורש את

האינטגרל המופיע בו.

ה. כתבו את שתי משוואות המילטון-יעקובי הנותרות והסבירו כיצד ניתן לקבל מהן את הפתרון

המבוקש  $(r(t), \phi(t))$  בהנחה שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.

ו. הסבירו כיצד ניתן לקבל מן המשוואות שכתבתם את הצורה הגיאומטרית של המסלולים  $r(\phi)$ .

הניחו שוב שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.