

מטלת מנחה (ממ"ל) 05

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלת: פרקים 10.1 ו-10.2 מפרק 10 בלבד)

שאלה 1

א. בדקו בכל שיטה שתבחרו אם הטרנספורמציה הבאה היא קונונית:

$$\begin{cases} Q = \arctan\left(\frac{\alpha q}{p}\right) \\ P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{(\alpha q)^2}\right) \end{cases}$$

כאשר α פרמטר ממשי שרירותי.

ב. מצאו לאיו ערכי β , α הטרנספורמציה הבאה היא קונונית:

$$\begin{cases} Q = q^\alpha \cos(\beta p) \\ P = q^\alpha \sin(\beta p) \end{cases}$$

שאלה 2

נתונים P , q קוואורדינטות במרחב הפaza של מערכת פיזיקלית קלאסית. נתונה הטרנספורמציה הבאה:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q^k p \\ P &= \beta q^m \end{aligned}$$

כאשר m, k, β, α קבועים ממשיים.

א. מצאו תנאי על m, k על מנת שהטרנספורמציה תהיה קונונית (התשובות צריכות להיות מבוטאות כתלות בקבועים α, β).

המשך השאלה בעמוד הבא

נתון הhamiltonיאן הבא:

$$H = \frac{q^4 p^2}{2\mu} + \frac{\lambda}{q^2}$$

כאשר μ, λ קבועים ממשיים וחיביים.

ב. מצאו את הhamiltonיאן החדש לאחר הטרנספורמציה, כך שהיא מהצורה הבאה:

$$\tilde{H} = C(Q^2 + P^2)$$

כאשר C הוא קבוע כלשהו תלוי ב μ, λ (הדרך: בחרו a כך שיתאים לצורת הhamiltonיאן המבוקש). זכרו כי α הוא קבוע שרירותי כך שגם אותו ניתן להגדיר כפונקציה של μ, λ .

ג. השתמשו במשוואות המילטון עבור הhamiltonיאן החדש ומצאו את $(P(t), Q(t))$ וכן את

$$q(t), p(t).$$

שאלה 3

חלקיק בעל מסה m טוען במטען q ונמצא בשדה מגנטי אחד $\hat{z} = B_0 \hat{B}$. הניחו שתנועת החלקיק מתרחשת במישור $y-x$ בלבד.

א. הראו כי השדה המגנטי נובע מהפוטנציאל הווקטורי:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x \hat{y} - y \hat{x})$$

ורשמו את הhamiltonיאן של החלקיק.

ב. נגדיר משתנים חדשים:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} (P_x + \frac{q B_0 y}{2c})$$

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} (P_y - \frac{q B_0 x}{2c})$$

כתבו את הhamiltonיאן בעזרת המשתנים החדשים.

ג. כתבו את משוואות התנועה עבור המשתנים החדש ופתרו אותן.

ד. השתמשו בסעיף הקודם כדי לקבל את x ו- y כפונקציה של הזמן. תארו את מסלול החלקיק.

שאלה 4

נתון המילטוניאן $(t, p, q) \rightarrow H$ ממשי. נגדיר שני פונקציות מרוכבות :

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

ונבטא את המילטוניאן ע"י a ו \tilde{a} .

א. מהן משוואות התנועה של a ו \tilde{a} ?

ב. רשמו ופתרו את משוואות התנועה של a ו \tilde{a} עבור אוסטיטור הרמוני פשוט. (הניחו

$$(m=k=1)$$

שאלה 5

נתון המילטוניאן הבא:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 \right) + \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$$

א. תארו את המאפיינים של הכוח הפועל על החלקיק במערכת זו.

ב. מדוע לא ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות אלה?

ג. הראו כי ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות קוטביות (ϕ, r) . כתבו את משוואת המילטון-יעקובי עבור פונקציית המילטון S בקואורדינטות אלה.

ד. פתרו את המשואה עבור פונקציית המילטון S . בטאו את הפתרון בלי לפתרו במפורש את האינטגרל המופיע בו.

ה. כתבו את שתי משוואות המילטון-יעקובי הנותרות והסבירו כיצד ניתן לקבל מהן את הפתרון המבוקש $(\phi(t), r(t))$ בהנחה שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.

ו. הסבירו כיצד ניתן לקבל מן המשוואות שכתבתם את הצורה הגיאומטרית של המסלולים $(\phi(r))$.
הניחו שוב שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.