

# מטלת מנחה (ממ"ן) 01

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1+2

---

## שאלה 1

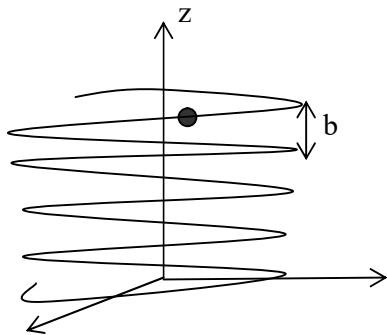
- א. כתבו את הלגרנז'יאן של אוסצילטור הרמוני חד-ממדי וגזרו ממנו את משוואות התנועה שלו.  
ב. קבלו את משוואות התנועה מן הלגרנז'יאן הבא

$$L = \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{K}{2} x^2 \right) e^{\gamma t}$$

מהי המערכת המתוארת על-ידי לגרנז'יאן זה?

## שאלה 2

חרוז בעל מסה  $m$  מחליק תחת השפעת הכבידה על סליל בעל רדיוס  $a$ . המרחק בין הלולאות  $b$  (ראה איור).

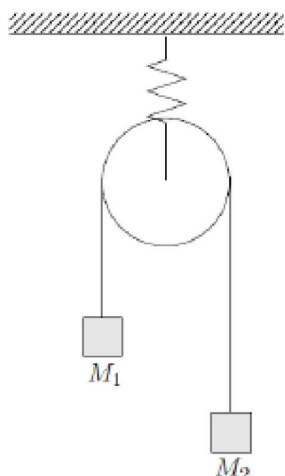


$$z = \frac{\theta b}{2\pi}$$

משוואת הסליל .

- כתבו את הלגרנז'יאן של המערכת בקואורדינטות גליליות.
- כתבו את משוואות התנועה של המערכת (עבור  $\theta$  זא  $\theta$ ) ופתור אותה.
- בדקו את התוצאה של הסעיף הקודם עבור המקרים הבאים:
  - $a \gg b$
  - $a < b$

### שאלה 3



נתונה מערכת בעלת שלושה גופים: מסות  $M_1$  ו-  $M_2$  הקשורות ביניהן בחוט חסר מסה (בעל אורך קבוע  $L$ ) וגלגלת בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$  התלויה בקפיץ בעל קבוע  $k$  ואורך מנוחה  $y_0$ . מומנט האינרציה של הגלגלת  $I$ .

1. הגדירו קואורדינטות מוכללות נוחות לבעיה וכתבו את הלגרנז'יאן כפונקציה של הקואורדינטות שבחרתם ונגזרותיהם.
2. מצאו את שתי משוואות התנועה.
3. פתרו את משוואות התנועה כאשר הקפיץ תקוע והגלגלת אינה יכולה לנוע בכיוון האנכי.

### שאלה 4

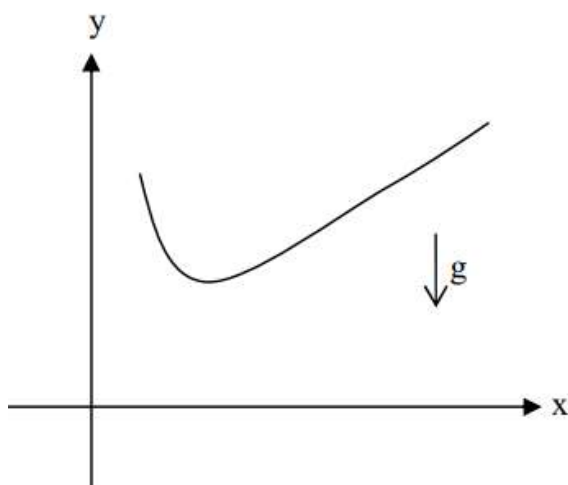
אלקטרון (מסה  $m$  ומטען  $-e$ ) יחסותי נע בשדה חשמלי אחיד וקבוע  $E$ . תנועתו נקבעת על-ידי הלגרנז'יאן היחסותי המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

$c$  היא מהירות האור.

1. גזרו את משוואות התנועה בשדה בעל כוון כללי.
2. קבלו את משוואות התנועה במערכת צירים שנבחרה כך שציר  $z$  הוא בכוון השדה. האם בחירה זו מגבילה את הכלליות?
3. הראו כי שני רכיבי התנע היחסותי הניצבים לכוון השדה החשמלי הם קבועים.
4. פתרו את משוואות התנועה כאשר הגוף מתחיל לנוע מראשית הצירים ממנוחה.

## שאלה 5



שרשרת שאורכה  $l_0$  ומסתה ליחידת אורך  $\mu$ ,

תלויה בקצותיה בנקודות  $(x_1, y_1)$  ו-  $(x_2, y_2)$

. על השרשרת פועל כוח הכובד (ראו ציור).

מצאו את הצורה של השרשרת בעזרת עיקרון

הוריאציה, על פי השלבים הבאים:

1. הראו כי האנרגיה הפוטנציאלית של

השרשרת היא:

$$U = \mu g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

2. מצאו את צורת השרשרת.

הדרכה: השרשרת תשאף להקטין את האנרגיה הפוטנציאלית שלה, תחת האילוץ שאורכה

הכולל נתון.

## מטלת מנחה (ממ"ן) 02

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 (חוץ מתת פרק 3.12)

---

### שאלה 1

- חלקיק שמסתו  $m$  נע במרחב בהשפעת הפוטנציאל  $V(r) = \beta r^3$ .
- א. רשמו את משוואות התנועה עבור תנע זוויתי קבוע  $L$  (שונה מאפס).
- ב. החלקיק נע בתנועה מעגלית. מצאו את רדיוס המסלול של החלקיק  $r_0$ , כפונקציה של התנע הזוויתי  $L$ .

### שאלה 2

- חלקיק שמסתו  $m$  והתנע הזוויתי שלו  $L$  נע בנוכחות פוטנציאל מרכזי:
- $$V(\vec{r}) = -V_0 \exp(-\lambda^2 r^2)$$
- כאשר  $\lambda$  ו-  $V_0$  קבועים חיוביים.
- א. רשמו ביטוי לפוטנציאל האפקטיבי כפונקציה של  $r$  והתנע הזוויתי.
- ב. החלקיק נע במסלול מעגלי שרדיוסו  $R$ . קבלו ביטוי לתנע הזוויתי  $L$  כפונקציה של רדיוס המסלול.
- ג. מהו הרדיוס המקסימלי שעבורו תיתכן תנועה מעגלית יציבה (ש"מ יציב)?
- ד. מהו הערך המקסימלי של התנע הזוויתי שעבורו תיתכן תנועה מעגלית יציבה (ש"מ יציב)?
- ה. האם תתכן תנועה מעגלית כאשר רדיוס המסלול  $R$  מקיים
- I.  $V_{eff}(R) < 0$
- II.  $V_{eff}(R) \geq 0$

נמקו בעזרת חישוב ושרטוט מתאים.

### שאלה 3

חלקיק נע במישור בהשפעת פוטנציאל מרכזי. המסלול מתואר על-ידי הנוסחה  $\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha = \theta$ ,

כאשר  $r$  הוא המרחק ממרכז הכוח,  $\theta$  הזווית שיוצר החלקיק עם כיוון  $\hat{x}$  ו- $r_0$  הוא מרחק החלקיק מהראשית בזווית  $\theta = 0$ . האנרגיה והתנע הזוויתי של המערכת ידועים ושווים ל  $E$  ו-  $L$  בהתאמה.

- חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית ואת הכוח הפועל על החלקיק כפונקציה של  $r$ .
- מצאו את המהירות (כל הרכיבים) כפונקציה של  $r$ .
- האם ייתכנו מסלולים סגורים שאינם מעגלים בפוטנציאל שקיבלתם בסעיף א? נמקו.

### שאלה 4

חשבו את חתך הפעולה **לבליעה** של חלקיק בעל אנרגיה  $E$  ותנע זוויתי  $L$  מפוטנציאל  $U(r) = -\frac{B}{r^2}$

עם  $B > 0$ .

**הדרכה:** חתך הפעולה לבליעה הוא  $\pi b_{\max}^2$  כאשר  $b_{\max}$  הוא פרמטר הפגיעה הגבולי כך שהמסלולים בעלי  $b$  גדול ממנו אינם מסתיימים ב-  $r \rightarrow 0$ .

### שאלה 5

חלקיק נקודתי מפוזר מפניו של גוף סיבוב הנוצר על ידי סיבוב העקומה  $z = \beta y^2$  סביב ציר  $z$ . מהירותו ההתחלתית של החלקיק היא בכיוון  $z$ . הנח שהפיזור אלסטי וכי גוף הסיבוב נשאר במקומו.

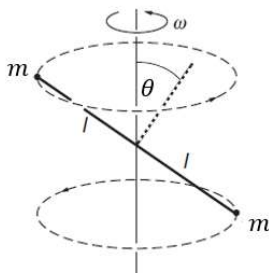
חשבו את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור החלקיק הנקודתי מגוף הסיבוב.

## מטלת מנחה (ממ"ן) 03

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4+5 (חוץ מ-5.8 ו-5.9)

### שאלה 1



נתון מוט חסר מסה שאורכו  $2\ell$  ובכל אחד מקצהו מסה נקודתית  $m$ . המוט מאולץ להסתובב בתדירות זוויתית קבועה  $\omega$  סביב ציר העובר דרך מרכזו ויוצר עם המוט זווית קבועה  $\theta$ .

בחרו 2 מערכות צירים:

1. מערכת אינרציאלית  $S$  שבה ציר הסיבוב הוא ציר  $z$  ומישור  $xy$  ניצב לו. ברגע  $t = 0$  המוט נמצא במישור  $xz$ .

2. מערכת  $\bar{S}$  המסתובבת עם המוט שבה ציר  $\bar{z}$  מתלכד עם ציר  $z$  בכל זמן וצירים  $\bar{x}, \bar{y}$  מתלכדים עם הצירים  $x, y$  בזמן  $t = 0$ .

א. חשבו את רכיבי טנזור ההתמדה  $I$  במערכת  $\bar{S}$ .

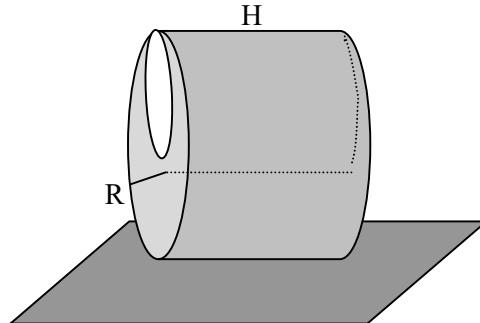
ב. חשבו את הערכים העצמיים של  $I$ . הסבירו מה קיבלתם.

ג. מצאו את וקטור התנע הזוויתי במערכת  $\bar{S}$  המסתובבת עם המוט.

ד. מצאו את וקטור התנע הזוויתי במערכת האינרציאלית  $S$ .

## שאלה 2

בגליל ברדיוס  $R = 2R_0$  ואורך  $H = \sqrt{3}R_0$  העשוי מחומר שצפיפותו (אחידה)  $\rho$  יש חלל בצורת גליל באותו אורך אולם ברדיוס  $R_0$ . הגליל מונח בשיווי משקל על שולחן כמראה באיור.



- א. מצאו את מקומו של מרכז המסה של הגוף.
- בטאו תשובתכם כתלות במרחק ממרכז הגליל הגדול. (אין צורך לחשב אינטגרלים לשם פתרון הבעיה.)
- ב. העזרו במשפט שטיינר, וחשבו את מומנטי ההתמד הראשיים של הגליל ביחס לקו המגע עם השולחן.
- ג. הגליל מתגלגל על השולחן ללא החלקה. כתבו את הלגרז'יאן של הגליל הנע.
- ד. קבלו את משוואות התנועה של הגליל. האם המהירות הזוויתית של הגליל קבועה? הסברו.

## שאלה 3

- א. רשמו את הלגרנז'יאן של סביבון סימטרי חופשי ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) כאשר הקואורדינטות המוכללות הן זוויות אוילר.
- ב. רשמו את התנע הצמוד לכל אחת מהקואורדינטות
- ג. האם ייתכן מצב שבו  $P_\psi = P_\phi$ ? אם לא – נמקו, אם כן – מצאו זוויות אוילר עבורן מתקיים השוויון.

#### שאלה 4

גליל שרדיוסו  $R$ , גובהו  $L$  ומסתו  $M$  מסתובב סביב מרכז המסה שלו. סיבוב הגליל סביב מרכז המסה שלו נתון ע"י

$$\phi(t)=0 ; \theta(t)=\alpha t ; \psi(t)=\beta t^2$$

(הזוויות  $\phi, \theta, \psi$  הן זוויות אוילר והן מוגדרות בעמודים 209-210 בספר הלימוד.)

א. רשמו את טנזור ההתמד של הגליל

ב. קבלו ביטוי לוקטור המהירות הזוויתית  $\vec{\omega}$  כפונקציה של הזמן במערכת הגליל.

ג. העזרו במשוואות אוילר, וחשבו מהו המומנט החיצוני  $\vec{N}$  שיש להפעיל על הגליל כדי

שסיבובו סביב מרכז המסה שלו יתואר לפי סעיף ב.

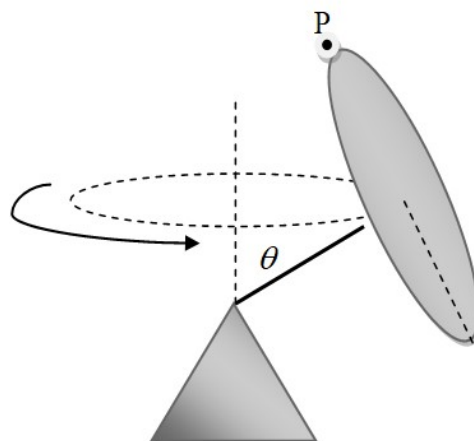
1. במערכת הגוף  $(x_1, x_2, x_3)$

2. במערכת המעבדה  $(x, y, z)$

במערכת המעבדה אין צורך לקבל את הביטויים הסופיים עבור  $\vec{N}$ . מספיק להסביר איך מקבלים אותם.

#### שאלה 5

דיסקה אחידה שמסתה  $M$  ורדיוסה  $R$ , מחוברת במרכזת למוט חסר מסה שאורכו  $l$ . קצה אחד של המוט מחובר למרכז הדיסקה והקצה השני של המוט מחובר לנקודה קבועה (ראו איור). הנקודה  $P$  נמצאת במקום הגבוה ביותר בדיסקה. מסובבים את הדיסקה במהירות זוויתית  $\Omega$ , באופן כזה שהזווית שיוצר המוט עם האנך  $\theta$  הוא קבוע ושהנקודה  $P$  נשארת הנקודה הגבוהה ביותר בדיסקה. (שימו לב- הדיסקה לא יכולה להסתובב סביב המוט.)



רשמו את רכיבי וקטור המהירות הזוויתית במערכת הצירים הראשיים של הדיסקה.

א. מהו התנע הזוויתי של הדיסקה?

ב. השתמשו במשוואות אוילר ומיצאו את המהירות הזוויתית  $\Omega$  המאפשרת תנועה זו.

מה התנאי שצריך לקיים היחס  $R/l$  כדי שהתנועה תתאפשר?



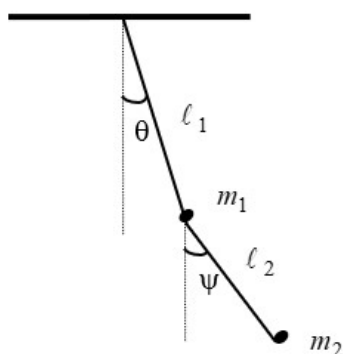
## מטלת מנחה (ממ"ן) 04

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: תנודות פרק 6 (חוץ מ-6.5 ו-6.6) והמילטוניאן פרק 8 (חוץ מ-8.4)

### שאלה 1

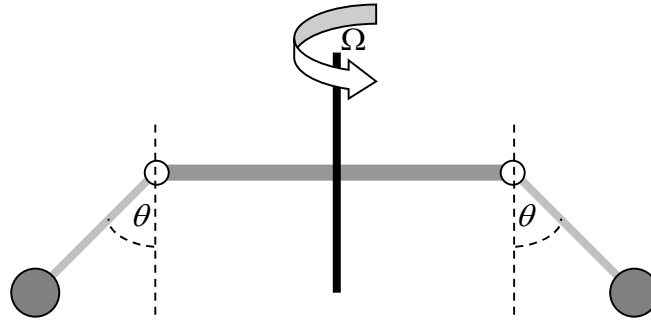
מטוטלת כפולה המבצעת תנודות במישור אנכי מתוארת באיור המצורף.



- רשמו בקואורדינטות קרטזיות את המהירויות של שתי המסות.
- רשמו את הלגרנז'יאן של המערכת. קח כקואורדינטות מוכללות את שתי זוויות הסטייה מן האנך.
- גזרו את משוואות התנועה של המערכת, כאשר  $\ell_1 = \ell_2$  ו-  $m_1 = m_2$ . הניחו תנודות קטנות.
- חשבו את התדירויות העצמיות של המערכת.

## שאלה 2

מוט בעל אורך  $2l$  ומסה  $2m$  מוחזק במרכזו אופקית על ציר. משני צידי המוט מחוברים שני מוטות חסרי מסה אשר אורכם הוא  $l$  ובקצותיהם קשורות מסות  $m$  והם חופשיים להסתובב סביב ציר אופקי.



- א. בהנחה שהציר מסתובב בתדירות זוויתית  $\Omega$  והזווית שהמוטות הצידיים פורשים היא  $\theta$ , כתבו את הלגרנג'אן של המערכת, מובע בעזרת  $(\Omega, \theta, \dot{\theta})$ .
- ב. כתבו את משוואות התנועה.
- בהנחה של תנודות קטנות סביב  $\theta = \theta_0$  מצאו את התדירויות העצמיות של המערכת כפונקציה של  $\theta_0, g, l$ .

## שאלה 3

- במודל לורנץ לאטום** מניחים אלקטרון (קלאסי) בעל מסה  $M$  המחובר לגרעין באמצעות קפיץ חסר מסה בעל קבוע  $k$ . הקפיץ יכול לנוע בחופשיות סביב בגרעין במרחב התלת מימדי (ללא גרביטציה). נתון כי  $d_0$  הוא אורך הקפיץ במצבו הרפוי. הניחו שהקפיץ תמיד ישר במהלך התנועה.
- א. רשמו את הלגרנג'אן המתאים, וקבלו את משוואות התנועה, ואת קבועי התנועה  $L$  ו  $E$ . בטאו את התשובות לסעיפים הבאים כפונקציה של קבועי התנועה  $L$  ו  $E$ .
  - ב. קבלו בעזרת משוואות התנועה את נקודת שיווי המשקל (הוא רדיוס הסיבוב) בציר הרדיאלי כתלות בקבועי התנועה.
  - הניחו כי קיימות תנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל וענו על הסעיפים הבאים:
  - ג. מהו התנאי שעבורו תהיה נקודת שיווי המשקל מסעיף ב יציבה?
  - ד. מהי תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שיווי המשקל?
  - ה. מהי התנועה הרדיאלית כתלות בזמן  $r(t)$ ?
  - ו. מהי המהירות הזוויתית כתלות בזמן  $\dot{\theta}(t)$ ?

#### שאלה 4

א. הוכיחו שאם ההמילטוניאן אינו תלוי במפורש בקואורדינטה  $q$  אזי התנע הקנוני הצמוד שלה הוא קבוע של התנועה.

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + m(\alpha q_1 + \beta q_2) \text{ נקבעת ע"י } m$$

כאשר  $\alpha, \beta$  קבועים חיוביים.

ב. קבלו את משוואות התנועה של החלקיק.

ג. (1) פתרו את משוואות המילטון עבור תנאי ההתחלה:

$$q_1(0) = x_0, q_2(0) = y_0, p_1(0) = p_x, p_2(0) = p_y$$

(2) איזו תנועה מתאר הפתרון שקיבלתם?

ד. הקומבינציה הבאה  $C = \gamma p_1 + p_2$  היא קבוע של התנועה עבור ערך מסויים של הקבוע  $\gamma$ . מצאו את  $\gamma$ .

#### שאלה 5

פרוטון (מסה  $m$  ומטען  $e$ ) יחסותי נע בשדה מגנטי סטטי.

תנועתו נקבעת על-ידי הלגרנז'יאן היחסותי המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

כאשר  $c$  היא מהירות האור ו- $\vec{A}$  הוא הפוטנציאל הווקטורי המקיים  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

הניחו שהפוטנציאל  $\vec{A}$  אינו תלוי בזמן.

א. קבלו ביטויים לשלושת רכיבי התנע הקנוני  $\vec{p}$ .

ב. הראו כי ההמילטוניאן של המערכת נתון על-ידי:  $H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 c^2}$ .

ג. נגדיר את התנע הקינטי  $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ . מה משמעותו של גודל זה?

ד. מצאו בעזרת משוואות המילטון אילו רכיבי  $\vec{p}$  נשמרים כאשר השדה המגנטי אחיד וקבוע בכיוון

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \text{ רמז: הפוטנציאל הווקטורי הוא } \vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x\hat{y} - y\hat{x})$$

ה. רשמו את ההמילטוניאן בקירוב עד סדר שני בתנע הקינטי עבור  $v \ll c$  (התנע הקינטי יהיה

בחזקה ריבועית) ורשמו את משוואת התנועה עבור  $\vec{v}(t)$ .

ו. פתרו את משוואת התנועה שקיבלתם בסעיף הקודם עבור פרוטון הנמצא בזמן  $t=0$  בראשית

ומהירותו באותו רגע  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ . איך נראה מסלול החלקיק?

## מטלת מנחה (ממ"ן) 05

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9+10 (10.1 ו-10.2 מפרק 10 בלבד)

---

### שאלה 1

א. בדקו בכל שיטה שתבחרו אם הטרנספורמציה הבאה היא קנונית:

$$\begin{cases} Q = \arctan\left(\frac{\alpha q}{p}\right) \\ P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{(\alpha q)^2}\right) \end{cases}$$

כאשר  $\alpha$  פרמטר ממשי שרירותי.

ב. מצאו לאילו ערכי  $\alpha, \beta$  הטרנספורמציה הבאה היא קנונית:

$$\begin{cases} Q = q^\alpha \cos(\beta p) \\ P = q^\alpha \sin(\beta p) \end{cases}$$

### שאלה 2

נתונים  $Q, P$  קואורדינטות במרחב הפאזה של מערכת פיזיקאלית קלאסית. נתונה הטרנספורמציה הבאה:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q^k p \\ P &= \beta q^m \end{aligned}$$

כאשר  $\alpha, \beta, k, m$  קבועים ממשיים.

א. מצאו תנאי על  $k, m$  על מנת שהטרנספורמציה תהיה קנונית (התשובות צריכות להיות

מבוטאות כתלות בקבועים  $(\alpha, \beta)$ ).

המשך השאלה בעמוד הבא

נתון ההמלטוניאן הבא:

$$H = \frac{q^4 p^2}{2\mu} + \frac{\lambda}{q^2}$$

כאשר  $\lambda, \mu$  קבועים ממשיים וחיוביים.

ב. מצאו את ההמלטוניאן החדש לאחר הטרנספורמציה, כך שיהיה מהצורה הבאה:

$$\tilde{H} = C(Q^2 + P^2)$$

כאשר  $C$  הוא קבוע כלשהו התלוי ב  $\lambda, \mu$  (הדרכה: בחרו  $k$  כך שיתאים לצורת ההמלטוניאן המבוקשת. זכרו כי  $\alpha$  הוא קבוע שרירותי כך שגם אותו ניתן להגדיר כפונקציה של  $\lambda, \mu$ ).

ג. השתמשו במשוואות המילטון עבור ההמלטוניאן החדש ומצאו את  $Q(t), P(t)$  וכן את  $q(t), p(t)$ .

### שאלה 3

חלקיק בעל מסה  $m$  טעון במטען  $q$  ונמצא בשדה מגנטי אחיד  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .  
הניחו שתנועת החלקיק מתרחשת במישור x-y בלבד.

א. הראו כי השדה המגנטי נובע מהפוטנציאל הווקטורי:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x\hat{y} - y\hat{x})$$

ורשמו את ההמילטוניאן של החלקיק.

ב. נגדיר משתנים חדשים:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} \left( P_x + \frac{q B_0 y}{2c} \right)$$

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} \left( P_y - \frac{q B_0 x}{2c} \right)$$

כתבו את ההמילטוניאן בעזרת המשתנים החדשים.

ג. כתבו את משוואות התנועה עבור המשתנים החדשים ופתרו אותן.

ד. השתמשו בסעיף הקודם כדי לקבל את  $x$  ו- $y$  כפונקציה של הזמן. תארו את מסלול החלקיק.

#### שאלה 4

נתון המילטוניאן  $H(q,p,t)$  ממשי. נגדיר שני פונקציות מרוכבות :

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

ונבטא את ההמילטוניאן ע"י  $a$  ו  $\tilde{a}$ .

א. מהן משוואות התנועה של  $a$  ו  $\tilde{a}$ ?

ב. רשמו ופתרו את משוואות התנועה של  $a$  ו  $\tilde{a}$  עבור אוסטילטור הרמוני פשוט. (הניחו

$$(m=k=1)$$

#### שאלה 5

נתון ההמילטוניאן הבא:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$$

א. תארו את המאפיינים של הכוח הפועל על החלקיק במערכת זו.

ב. מדוע לא ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות אלה?

ג. הראו כי ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות קוטביות

$(r, \phi)$ . כתבו את משוואת המילטון-יעקובי עבור פונקציית המילטון  $S$  בקואורדינטות אלה.

ד. פתרו את המשוואה עבור פונקציית המילטון  $S$ . בטאו את הפתרון בלי לפתור במפורש את

האינטגרל המופיע בו.

ה. כתבו את שתי משוואות המילטון-יעקובי הנותרות והסבירו כיצד ניתן לקבל מהן את הפתרון

המבוקש  $(r(t), \phi(t))$  בהנחה שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.

ו. הסבירו כיצד ניתן לקבל מן המשוואות שכתבתם את הצורה הגיאומטרית של המסלולים  $r(\phi)$ .

הניחו שוב שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.