מטלת מנחה (ממ"ן) 02

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

שאלה 1 (18 נקודות)

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

א. $f_1(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

ב. $f_2(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ (השתמשו בתוצאת סעיף א)

ג. $f_3(x) = \cos(ax)\cos(bx)$

ד. $f_4(x) = xe^{-a^2x^2}$

ה. $f_5(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$

ו. $f_6(x) = xe^{-2|x-3|+ix}$

שאלה 2 (12 נקודות)

היעזרו בהתמרת פוריה של $e^{-a|x|}$ כדי לחשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx$ ($a,b>0$).

שאלה 3 (15 נקודות)

פתרו את שאלה 13.5 מספר הלימוד:

13.5 By taking the Fourier transform of the equation

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi = f(x),$$

show that its solution, $\phi(x)$, can be written as

$$\phi(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}\widetilde{f}(k)}{k^2+K^2}\,dk,$$

where $\widetilde{f}(k)$ is the Fourier transform of $f(x)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

פתרו את המשוואה האינטגרלית-דיפרנציאלית הבאה (כלומר מצאו את הפונקציה $f(x)$) באמצעות התמרת פוריה:

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f''(y)e^{-|x-y|}dy = \delta(x)$$

שאלה 5 (12 נקודות)

מצאו את התמרת פורייה התלת מימדית של הפונקציות הבאות ($a > 0$):

א. $f(x,y,z) = xe^{-a\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

ב. $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$ כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

שאלה 6 (18 נקודות)

מצאו את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

א. $f_1(t) = 3e^{2t} + 2\sin^2 3t$

ב. $f_2(t) = t^{5/2} + t^2 \sin 5t$

ג. $f_3(t) = (1+t)^3$

ד. $f_4(t) = \frac{\sinh at}{t}$

ומצאו את התמרות לפלס ההופכיות של הפונקציות הבאות:

ה. $f_5(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

ו. $f_6(s) = \frac{10s-3}{25-s^2}$

ז. $f_7(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}$

ח. $f_8(s) = tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

שאלה 7 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 13.28 מספר הלימוד, ללא סעיף (b). שימו לב שעליכם להוכיח שתי טענות לפני סעיף (a):

13.28 Show that the Laplace transform of $f(t-a)H(t-a)$, where $a \geq 0$, is $e^{-as}\bar{f}(s)$ and that, if $g(t)$ is a periodic function of period T, $\bar{g}(s)$ can be written as

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} g(t)\, dt.$$

(a) Sketch the periodic function defined in $0 \leq t \leq T$ by

$$g(t) = \begin{cases} 2t/T & 0 \leq t < T/2, \\ 2(1-t/T) & T/2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

and, using the previous result, find its Laplace transform.