מטלת מנחה (ממ"ן) 01

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה המוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{3}\\ 0, & -\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{3}\\ -1, & \frac{\pi}{3}\le x<\pi\end{cases}$$

כאשר מחוץ לקטע זה הפונקציה מוגדרת באופן מחזורי עם מחזור 2π.

א. חשבו את טור פורייה של הפונקציה.

ב. חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 12.16 מספר הלימוד:

12.16 By finding a cosine Fourier series of period 2 for the function $f(t)$ that takes the form $f(t)=\cosh(t-1)$ in the range $0\le t\le 1$, prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{e^2-1}.$$

Deduce values for the sums $\sum(n^2\pi^2+1)^{-1}$ over odd n and even n separately.

שאלה 3 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 12.17 מספר הלימוד:

12.17 Find the (real) Fourier series of period 2 for $f(x)=\cosh x$ and $g(x)=x^2$ in the range $-1\le x\le 1$. By integrating the series for $f(x)$ twice, prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sinh 1}-\frac{5}{6}\right).$$

שאלה 4 (20 נקודות)

א. חשבו את טור הקוסינוסים של הפונקציה $f(x) = x \cdot (\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

ב. השתמשו בסעיף א כדי למצוא את סכומי הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ כאשר a ממשי לא שלם, המוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. מצאו את טור פוריה של הפונקציה.

ב. הראו כי

$$\cot \pi a = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n^2 - a^2}\right]$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 02

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

שאלה 1 (18 נקודות)

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

א. $f_1(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x|<1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

ב. $f_2(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ (השתמשו בתוצאת סעיף א)

ג. $f_3(x) = \cos(ax)\cos(bx)$

ד. $f_4(x) = xe^{-a^2x^2}$

ה. $f_5(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$

ו. $f_6(x) = xe^{-2|x-3|+ix}$

שאלה 2 (12 נקודות)

היעזרו בהתמרת פוריה של $e^{-a|x|}$ כדי לחשב את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx$ $(a,b>0)$.

שאלה 3 (15 נקודות)

פתרו את שאלה 13.5 מספר הלימוד:

13.5 By taking the Fourier transform of the equation

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi = f(x),$$

show that its solution, $\phi(x)$, can be written as

$$\phi(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}\widetilde{f}(k)}{k^2+K^2}\,dk,$$

where $\widetilde{f}(k)$ is the Fourier transform of $f(x)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

פתרו את המשוואה האינטגרלית-דיפרנציאלית הבאה (כלומר מצאו את הפונקציה $f(x)$) באמצעות התמרת פוריה:

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f''(y)e^{-|x-y|}dy = \delta(x)$$

שאלה 5 (12 נקודות)

מצאו את התמרת פורייה התלת מימדית של הפונקציות הבאות ($a > 0$):

א. $f(x,y,z) = xe^{-a(x^2+y^2+z^2)}$

ב. $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$ כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

שאלה 6 (18 נקודות)

מצאו את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

א. $f_1(t) = 3e^{2t} + 2\sin^2 3t$

ב. $f_2(t) = t^{5/2} + t^2 \sin 5t$

ג. $f_3(t) = (1+t)^3$

ד. $f_4(t) = \frac{\sinh at}{t}$

ומצאו את התמרות לפלס ההופכיות של הפונקציות הבאות:

ה. $f_5(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

ו. $f_6(s) = \frac{10s-3}{25-s^2}$

ז. $f_7(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}$

ח. $f_8(s) = tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

שאלה 7 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 13.28 מספר הלימוד, ללא סעיף (b). שימו לב שעליכם להוכיח שתי טענות לפני סעיף (a):

13.28 Show that the Laplace transform of $f(t-a)H(t-a)$, where $a \geq 0$, is $e^{-as}\bar{f}(s)$ and that, if $g(t)$ is a periodic function of period T, $\bar{g}(s)$ can be written as

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} g(t)\, dt.$$

(a) Sketch the periodic function defined in $0 \leq t \leq T$ by

$$g(t) = \begin{cases} 2t/T & 0 \leq t < T/2, \\ 2(1-t/T) & T/2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

and, using the previous result, find its Laplace transform.

מטלת מנחה (ממ"ן) 03

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3+4

שאלה 1 (10 נקודות)

פתרו את המד"רים הבאים (עם תנאי השפה הנתונים) באמצעות שיטת התמרת לפלס:

א. $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0, \quad x(t=0) = 2, \quad \dot{x}(t=0) = -1$

ב. $\ddot{x} + 4x = \sin 3t\,, \quad x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0$

שאלה 2 (10 נקודות)

מצאו את פונקציית גרין $G(x,z)$ של המשוואות הבאות עם תנאי השפה ($f(x)$ היא פונקציה נתונה, אך פונקציית גרין אינה תלויה בה כמובן).

א.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{y}{4} = f(x) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

שאלה 3 (12 נקודות)

א. מצאו את פונקציית גרין $\mathrm{G}(t,t_0)$ עבור המשוואה הבאה עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} = f(t) \\ x(t=0) = \dfrac{dx}{dt}(t=0) = 0 \end{cases}$$

ב. פתרו את המשוואה מסעיף א עבור המקרה

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{-3t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

שאלה 4 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 16.6 מספר הלימוד:

16.6 Verify that $z = 0$ is a regular singular point of the equation

$$z^2y'' - \tfrac{3}{2}zy' + (1+z)y = 0,$$

and that the indicial equation has roots 2 and 1/2. Show that the general solution is given by

$$y(z) = 6a_0z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^{2n}z^n}{(2n+3)!} + b_0\left(z^{1/2} + 2z^{3/2} - \frac{z^{1/2}}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}z^n}{n(n-1)(2n-3)!}\right).$$

שאלה 5 (18 נקודות)

א. מצאו עבור האופרטורים הבאים האם הם הרמיטיים (כאשר תנאי השפה הם התאפסות של הפונקציות בקצוות הקטע הסגור [0,1]):

1. $(1+x^2)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + 2\cos x$
2. $\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2\frac{d}{dx} + 3x$
3. $(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 10$

ב. עבור אופרטורים לא הרמיטיים מסעיף א, השתמשו בגורם אינטגרציה מתאים כדי להביאם לצורה הרמיטית (כלומר, הביאו אותם לצורה של משוואת שטורם-ליוביל).

שאלה 6 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 17.5 מספר הלימוד.

הבהרה: בסעיף הראשון של השאלה יש לתת ביטוי כללי עבור פונקציה $f(x)$ כלשהי.

17.5 Use the properties of Legendre polynomials to carry out the following exercises.

(a) Find the solution of $(1-x^2)y'' - 2xy' + by = f(x)$, valid in the range $-1 \le x \le 1$ and finite at $x = 0$, in terms of Legendre polynomials.

(b) If $b = 14$ and $f(x) = 5x^3$, find the explicit solution and verify it by direct substitution.

שאלה 7 (15 נקודות)

פתרו את שאלה 20.7 מספר הלימוד:

20.7 Solve

$$\sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x$$

subject to (a) $u(\pi/2, y) = 0$ and (b) $u(\pi/2, y) = y(y+1)$.

שאלה 8 (15 נקודות)

פתרו את שאלה 20.19 מספר הלימוד:

20.19 An incompressible fluid of density ρ and negligible viscosity flows with velocity v along a thin, straight, perfectly light and flexible tube, of cross-section A which is held under tension T. Assume that small transverse displacements u of the tube are governed by

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(v^2 - \frac{T}{\rho A}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(a) Show that the general solution consists of a superposition of two waveforms travelling with different speeds.

(b) The tube initially has a small transverse displacement $u = a \cos kx$ and is suddenly released from rest. Find its subsequent motion.

מטלת מנחה (ממ"ן) 04

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

ענו על 5 שאלות מתוך 6 השאלות, לבחירתכם.

שאלה 1 (20 נקודות)

מוט באורך h מחובר בקצה אחד לאמבט קר בטמפרטורה T_L ובקצה השני לאמבט חם בטמפרטורה T_H, כלומר $T(x=0)=T_L,\ T(x=h)=T_H$. המוליכות התרמית של המוט היא κ.

נתונה התפלגות האנרגיה ההתחלתית:

$$T(x,t=0)=T_L+\frac{(T_H-T_L)}{h^2}\cdot x\cdot(2h-x)$$

א. מצאו את הטמפרטורה במוט כעבור זמן רב מאוד, שנסמנה ב-$T_\infty(x)$.

ב. נגדיר את החלק הדינמי של התפלגות החום:

$$T_d(x,t)=T(x,t)-T_\infty(x)$$

מהם תנאי השפה ותנאי ההתחלה שמקיים החלק הדינמי $T_d(x,t)$?

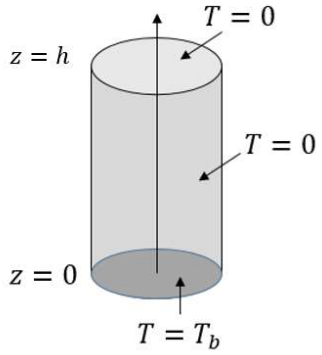
ג. מצאו את הפתרון עבור $T_d(x,t)$.

ד. מצאו את טמפרטורת המוט בכל מיקום וזמן שהוא, $T(x,t)$.

ה. מצאו את צפיפות שטף החום העובר במוט כעבור זמן רב מאוד.

שאלה 2 (20 נקודות)

מוט גלילי בעל רדיוס a וגובה h מוחזק כך שדפנתו התחתונה ב-$z = 0$ מוצמדת לאמבט בטמפרטורה T_b. המעטפת הגלילית והדופן העליונה מוחזקות בטמפרטורה $T = 0$.



א. מצאו את הטמפרטורה במוט כעבור זמן רב מאוד, שנסמנה ב-$T_\infty(\rho, z)$ (בקואורדינטות גליליות).

ב. נגדיר את החלק הדינמי של התפלגות החום:

$$T_d(\rho, z, t) = T(\rho, z, t) - T_\infty(\rho, z)$$

מהם תנאי השפה ותנאי ההתחלה שמקיים החלק הדינמי $T_d(\rho, z, t)$?

ג. מצאו את הפתרון עבור $T_d(\rho, z, t)$. ניתן להשאיר את תשובתכם בצורה של אינטגרל.

ד. מצאו את טמפרטורת המוט בכל מיקום וזמן שהוא, $T(\rho, z, t)$. ניתן להשאיר את תשובתכם בצורה של אינטגרל.

שאלה 3 (20 נקודות)

משוואת הגלים עבור גלי הקול המתפשטים בגז אידיאלי היא

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

כאשר $p(r,\theta,\phi,t)$ הוא הלחץ.

נרצה למצוא את מספרי הגל האפשריים לגלי קול בנפח שבין שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים a, b ($b > a$). תנאי השפה על הקליפות הוא תנאי שפה נוימן

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r=a) = \frac{\partial p}{\partial r}(r=b) = 0$$

א. מצאו פתרון כללי מופרד משתנים עבור גלי קול בעלי סימטריה צירית ביחס לציר z בין הקליפות (כלומר אין תלות בזווית ϕ), ללא התחשבות בתנאי השפה.

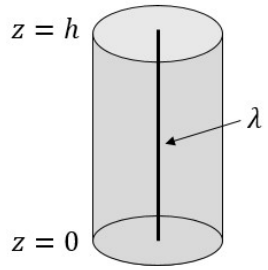
ב. ע"י דרישת תנאי השפה, קבלו משוואה שמגדירה את מספרי הגל k האפשריים (עבור ℓ נתון) עבור גלים אלה.

ג. כעת הניחו שהסימטריה כדורית (כלומר $\ell = 0$). כתבו משוואה עבור מספרי הגל k האפשריים ופשטו אותה ככל האפשר.

ד. הראו שיש אינסוף פתרונות בדידים עבור המשוואה שמצאתם בסעיף ג. לצורך כך העבירו את הפונקציות הטריגונומטריות לצד אחד של המשוואה, את הפונקציות האלגבריות לצד שני, ציירו את שני אגפי המשוואה והראו שקיימות אינסוף נקודות חיתוך.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתון גליל המוארק בשפתו, שרדיוסו a וגובהו h. דרך צירו המרכזי עובר תיל טעון במטען λ ליחידת אורך.



א. מצאו את הצפיפות הנפחית של המטען במערכת, $\rho(\boldsymbol{r})$.

ב. השתמשו בתוצאות שאלה 15 במדריך הלמידה ביחידה 5 (פונקציית גרין עבור גליל) כדי למצוא את הפוטנציאל החשמלי בכל נקודה בתוך הגליל.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. כתבו את משוואת גרין שמגדירה את פונקציית גרין היסודית בשני מימדים, עבור משוואת פואסון. מסימטריה, ניתן להניח שפונקציית גרין $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ היא פונקציה של $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ בלבד.

בספר אמנם מופיעה הנוסחה (21.93) לפונקציית גרין הדו-מימדית, אך בסעיפים ב ו-ג תצטרכו להוכיחה באמצעות התמרת פורייה.

ב. בצעו התמרת פורייה על שני צידי המשוואה שכתבתם בסעיף א, ובודדו את ההתמרה של פונקציית גרין, $\tilde{G}(k_x,k_y)$.

ג. כעת בצעו התמרת פורייה הופכית ומצאו את פונקציית גרין המתאימה, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$.

ד. בעולם דו-מימדי מטען נקודתי q נמצא על ציר ה-y במרחק a מעל תיל אינסופי שנמצא בציר x. הפוטנציאל על הלוח מאולץ להיות

$$u(x,y=0)=V(x)=\frac{V_0}{1+\frac{x^2}{d^2}}$$

מצאו את הפוטנציאל בכל המישור.

שאלה 6 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 21.8 מספר הלימוד:

21.8 The motion of a very viscous fluid in the two-dimensional (wedge) region $-\alpha<\phi<\alpha$ can be described, in (ρ,ϕ) coordinates, by the (biharmonic) equation

$$\nabla^2\nabla^2\psi\equiv\nabla^4\psi=0,$$

together with the boundary conditions $\partial\psi/\partial\phi=0$ at $\phi=\pm\alpha$, which represent the fact that there is no radial fluid velocity close to either of the bounding walls because of the viscosity, and $\partial\psi/\partial\rho=\pm\rho$ at $\phi=\pm\alpha$, which impose the condition that azimuthal flow increases linearly with r along any radial line. Assuming a solution in separated-variable form, show that the full expression for ψ is

$$\psi(\rho,\phi)=\frac{\rho^2}{2}\,\frac{\sin 2\phi-2\phi\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}.$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 05

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6+7

שאלה 1 (8 נקודות)

מצאו באילו נקודות הפונקציות הבאות לא גזירות:

א. $f(z)=\bar{z}-12z^2$

ב. $f(z)=|z|^2-\frac{z^2}{8}$

שאלה 2 (16 נקודות)

פתחו את הפונקציות הבאות בטור לורן:

א. $f(z)=\frac{1}{\cos z}$ סביב $z=i$. מצאו את שלושת האיברים הראשונים

ב. $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^2}$ סביב $z=0$.

ג. $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ סביב:

1. $z=1$ ובתחום $0<|z-1|<2$.
2. $z=3$ ובתחום $0<|z-3|<2$.

שאלה 3 (16 נקודות)

מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציות הבאות:

א. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$

ב. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z-2\pi}$

ג. $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^4}$

ד. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^4+2z^5+z^6}$

שאלה 4 (15 נקודות)

1. עבור הפונקציות הבאות, מצאו את נקודות ההסתעפות, הוכיחו כי אכן הן נקודות הסתעפות, ושרטטו על המישור המרוכב שתי אפשרויות לחתכי הסתעפות שונים עבור הפונקציות.

א. $f_1(z)=z^{2/5}$

ב. $f_2(z)=Ln(z^2+4)$

ג. $f_3(z)=Ln\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$

2. באחד מהמקרים מבין ב או ג ניתן להסתפק בחתך הסתעפות יחיד. ציינו באיזה מהם (ב או ג), והוכיחו זאת.

שאלה 5 (15 נקודות)

העתקת מביוס היא העתקה מהצורה

$$w=g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

כאשר a,b,c,d הם מספרים מרוכבים כך ש-$ad-bc\neq 0$.

א. האם ההעתקה קונפורמית? נמקו, והסבירו מדוע נדרש התנאי $ad-bc\neq 0$.

ב. מצאו את תמונת הרביע הראשון תחת העתקת מביוס הבאה:

$$f(z)=\frac{(2-i)z+1}{1-iz}$$

ג. מצאו את תמונת התחום בתוך מעגל היחידה $|z|<1$ תחת העתקת מביוס הבאה:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}$$

שאלה 6 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרלים הבאים בעזרת משפט השארית:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$

ד. $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos\theta} d\theta$

ה. $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9} dx$

שאלה 7 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 25.20 בספר הלימוד:

25.20 Use the method of steepest descents to show that an approximate value for the integral

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\, iz(\tfrac{1}{5}t^5 + t)\,]\, dt,$$

where z is real and positive, is

$$\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} \exp(-\beta z)\, \cos(\beta z - \tfrac{1}{8}\pi),$$

where $\beta = 4/(5\sqrt{2})$.