פתרון:
שימו לב, לאורך כל הפתרונות אני משתמש רק בקונבנציה יחידתית/פיזיקלית (unitary convention) , שזה מה שלמדנו בהרצאה:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{2}$$

פרט לשאלה 2 שצריך לחשב בה ערך של אינטגרל, שם צריך להשתמש בהתמרה "המתמטית" (non-unitary convention)

$$\tilde{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{4}$$

אני בכל זאת מחשב שם עם הקונבנציה הפיזיקלית אבל ממיר את התוצאות במהלך התרגיל.

שאלה 1. א.

קודם כל צריך לרשום את הפונקציה בלי הערך המוחלט:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \textbf{else} \end{cases} \tag{5}$$

נמצא את ההתמרה של הפונקציה:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} (1+x) e^{-i\omega x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-x) e^{-i\omega x} dx \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[(1+x)\frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega x} \right] \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2\pi} \left[(1-x)\frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} - \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega x} \right] \Big|_{0}^{1} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \cos\omega \right) = \frac{2}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - \cos(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \tag{8}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \tag{9}$$

ב. נשים לב שהפונקציה בסעיף הזה היא אותה פונקציה מסעיף א' רק שהסיטו אותה בכיוון x חיובי עם- $x' = x+1$:

$$f_2(x) = f_1(x+1) \tag{10}$$

$$\mathcal{F}\{f_2(x)\} = \mathcal{F}\{f_1(x+1)\} = e^{i\omega} \tilde{f}_1(\omega) = \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 \tag{11}$$

ג.
נתחיל מלהבין מה ההתמרה של $e^{-i\omega_0 t}$ ואז נפתור את התרגיל.
היה נתון בהרצאה ש:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0} \tag{12}$$

שימו לב שמדובר בהתמרה של פונקציה ממרחב הזמן, אל פונקציה במרחב התדרים ולכן נותר הקבוע t_0 והמשתנה הופך ל - ω.
נפעיל התמרה על כל המשוואה:

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega t_0}\right\} \tag{13}$$

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}\right\} \underset{\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\}=f(-x)}{=} \delta(-(\omega-\omega_0)) = \delta(\omega-\omega_0) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega t_0}\right\} \tag{14}$$

נעביר את הקבוע אגף וקיבלנו את ההתמרה:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-i\omega_0 t}\right\} = \sqrt{2\pi}\delta(\omega-\omega_0) \tag{15}$$

נמצא כעת את ההתמרה של הפונקציה:

$$f_3(x) = \cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)\right) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)x)} + e^{-i(a+b)x)} + e^{i(a-b)x)} + e^{-i(a-b)x)}\right) \tag{17}$$

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i(a+b)x)} + e^{-i(a+b)x)} + e^{i(a-b)x)} + e^{-i(a-b)x)}\right)e^{-i\omega x}dx \tag{18}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i(a+b-\omega)x)} + e^{i(-a-b-\omega)x)} + e^{i(a-b-\omega)x)} + e^{i(b-a-\omega)x)}\right)dx \tag{19}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\delta(\omega-(a+b)) + \delta(\omega+a+b) + \delta(\omega-(a-b)) + \delta(\omega-(b-a))\right) \tag{20}$$

ד.

צריך לחשב את ההתמרה של

$$f_4 = x\exp(-a^2x^2) \tag{21}$$

. קודם כל צריך להכיר את ההתמרה הבאה שנתונה בספר:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right) \tag{22}$$

ואת הקשר הבא:

$$\mathcal{F}\{xf(x)\} = i\partial_\omega\tilde{f}(\omega) \tag{23}$$

כעת ניתן למצוא את ההתמרה:

$$\mathcal{F}\left\{x\exp(-a^2x^2)\right\} = i\partial_\omega\mathcal{F}\{\exp\left(-a^2x^2\right)\} \tag{24}$$

נמצא את ההתמרה הבאה:

$$\mathcal{F}\{\exp\left(-a^2x^2\right)\} = \sqrt{2\pi}\sigma\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right\} \underset{\sigma=1/\sqrt{2}a}{=} \sqrt{2\pi}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}a}\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a^2}\right) \tag{25}$$

הנגזרת היא:

$$\partial_\omega\mathcal{F}\{\exp\left(-a^2x^2\right)\} = \frac{-\omega}{2\sqrt{2}a^3}\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a^2}\right) \tag{26}$$

נציב ב- 24 :

$$\mathcal{F}\left\{x\exp(-a^2x^2)\right\} = i\partial_\omega\mathcal{F}\{\exp\left(-a^2x^2\right)\} = \frac{-i\omega}{2\sqrt{2}a^3}\exp\left(\frac{-\omega^2}{4a^2}\right) \tag{27}$$

ה. השאלה מתבססת על שאלה מהמדריך ביחידה 2. הטריק הוא למצוא את ההתמרה של $f(x) = e^{-a|x|}$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(a-i\omega)x}}{a-i\omega}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{(a+i\omega)}\Big|_{0}^{\infty} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2} \tag{29}$$

מצאנו ש:

$$\mathcal{F}\left\{ e^{-a|x|} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2} \tag{30}$$

נבצע התמרה על שני צידי המשוואה:

$$\mathcal{F}\left\{ \left\{ e^{-a|x|} \right\} \right\} \underset{\mathcal{F}\{\{f(t)\}\}=f(-t)}{=} e^{-a|x|} \quad = \quad \mathcal{F}\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2} \right\} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{a^2+\omega^2} \right\} \tag{31}$$

אחרי החלפה של $x \longleftrightarrow \omega$ נקבל :

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{a^2+x^2} \right\} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\omega|} \tag{32}$$

ו.

$$f_6(x) = xe^{-2|x-3|+ix} \tag{33}$$

$$\mathcal{F}\left\{xe^{-2|x-3|+ix}\right\} = i\partial_\omega \mathcal{F}\left\{e^{-2|x-3|+ix}\right\} \tag{34}$$

כדי להמשיך צריך למצוא קודם את ההתמרה $\mathcal{F}\left\{e^{-2|x-3|+ix}\right\}$. נשים לב שזו התמרה מהצורה $\mathcal{F}\left\{e^{ax}f(x)\right\} = \tilde{f}(\omega + ia)$.
נסמן $g(x) = e^{-2|x-3|}$

$$\mathcal{F}\left\{e^{ix}g(x)\right\} = \tilde{g}(\omega - 1) \tag{35}$$

צריך עכשיו להבין מה ההתמרה של $g(x) = e^{-2|x-3|}$.

למזלנו בסעיף הקודם מצאנו ש: $\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$.

נסמן $h(x) = e^{-a|x|}$ אזי אנחנו צריכים את ההתמרה עבור: $h(x-3)$:

$$\mathcal{F}\left\{h(x+3)\right\} = e^{-i3\omega}\tilde{h}(\omega)\Big|_{a=2} = e^{-i3\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\omega^2} = \tilde{g}(\omega) \tag{36}$$

עכשיו כשמצאנו את ההתמרה צריך לעשות החלפת משתנים:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-2|x-3|+ix}\right\} = \tilde{g}(\omega-1) = e^{-i3(\omega-1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+(\omega-1)^2} \tag{37}$$

$$\mathcal{F}\left\{xe^{-2|x-3|+ix}\right\} = i\partial_\omega \mathcal{F}\left\{e^{-2|x-3|+ix}\right\} = i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{e^{-i3(\omega-1)}}{(4+(\omega-1)^2)^2}\left[-3i(4+(\omega-1)^2) - 2(\omega-1)\right] \tag{38}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{e^{-i3(\omega-1)}}{(4+(\omega-1)^2)^2}\left[3(4+(\omega-1)^2) - 2i(\omega-1)\right] \tag{39}$$

שאלה 2.

אנחנו צריכים בשביל השאלה הזו להכיר שתי התמרות:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\ , \qquad \mathcal{F}\left\{e^{ikx}\right\} = \sqrt{2\pi}\delta(k) \tag{40}$$

בגלל שאנחנו פותרים אינטגרלים אנחנו צריכים להשתמש בקונבנציה המתמטית עבור התמרות פוריה. ז"א צריך להכפיל את ההתמרות שקיבלנו בפקטור $\sqrt{2\pi}$:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|x|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\ , \qquad \mathcal{F}\left\{e^{ikx}\right\} = 2\pi\delta(k) \tag{41}$$

נתחיל:

$$\int_0^\infty e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{a|x|}\cos(bx)dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty e^{a|x|}(e^{ib|x|}+e^{-ib|x|})dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty (e^{-(a-ib)|x|}+e^{-(a+ib)|x|})dx \tag{42}$$

שימו לב ש- $\cos(bx)$ כן שווה ל- $\frac{1}{2}(e^{ib|x|}+e^{-ib|x|})$. עבור ערכי x חיוביים מקבלים $\cos(bx) = \frac{1}{2}(e^{ibx}+e^{-ibx})$ ועבור ערכי x שליליים מקבלים $\cos(bx) = \frac{1}{2}(e^{-ibx}+e^{ibx})$.

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty (e^{-(a-ib)|x|}+e^{-(a+ib)|x|})dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_1(\omega)e^{i\omega x}d\omega + \tilde{f}_2(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right\}dx \tag{43}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{2(a-ib)}{(a-ib)^2+\omega^2}e^{i\omega x} + \frac{2(a+ib)}{(a+ib)^2+\omega^2}e^{i\omega x}\right\}dxd\omega \tag{44}$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{2(a-ib)}{(a-ib)^2+\omega^2}\delta(\omega) + \frac{2(a+ib)}{(a+ib)^2+\omega^2}\delta(\omega)\right)d\omega \tag{45}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-ib}+\frac{1}{a+ib}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} \tag{46}$$

שאלה 3.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - K^2\phi = f(x) \tag{47}$$

נבצע התמרה על שני צידי המשוואה. שימו לב ש- $\mathcal{F}\left\{\frac{d^2\phi}{dx^2}\right\} = -\omega^2\tilde{\phi}(\omega)$ נציב:

$$-\omega^2\tilde{\phi}(\omega) - K^2\tilde{\phi} = \tilde{f}(\omega) \tag{48}$$

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{-\tilde{f}(\omega)}{\omega^2 + K^2} \tag{49}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\tilde{f}(\omega)e^{i\omega x}}{\omega^2 + K^2}d\omega \tag{50}$$

שאלה 4. צריך למצוא את הפונקציה $f(x)$ שפותרת את המשוואה:

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f''(y) e^{-|x-y|} dy = \delta(x) \tag{51}$$

ניקח את ההתמרה של המשוואה:

$$\tilde{f}(\omega) - \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f''(y) e^{-|x-y|} dy\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{52}$$

האתגר הוא מן הסתם למצוא את הערך של ההתמרה עם האינטגרל. נשים לב שהאינטגרל הוא מהצורה של קונבולוציה:

$$h(x) = \int f(y) g(x-y) dy = f(y) * g(y) \tag{53}$$

במקרה שלנו $f(y) \Rightarrow f''(y)$ ו- $g(x-y) = e^{-|x-y|}$.
כך שהקונבולוציה בתרגיל שלנו נראית ככה:

$$h(x) = \int f''(y) e^{-|x-y|} dy = f''(y) * g(y) \tag{54}$$

ההתמרה של קונבולוציה היא:

$$\mathcal{F}\{h(x)\} = \mathcal{F}\left\{\int f''(y) e^{-|x-y|} dy\right\} = \mathcal{F}\{f''(y) * g(y)\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f''(y)\}\mathcal{F}\{g(y)\} \tag{55}$$

נחשב את ההתמרות הבודדות:

$$\mathcal{F}\{f''(y)\} = -\omega^2 \tilde{f}(\omega) \tag{56}$$

שימו לב שצריך לחשב את ההתמרה של $g(y)$ ולא $g(x-y)$.
ז"א $g(y) = e^{-|y|}$.
מצאנו את ההתמרה הזו בתרגיל 1 עבור a=1.

$$\mathcal{F}\{g(y)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} \tag{57}$$

ההתמרה של האינטגרל היא:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f''(y) e^{-|x-y|} dy\right\} = -\sqrt{2\pi}\omega^2 \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega) \tag{58}$$

נציב במשוואה 52 ונפתור עבור $\tilde{f}(\omega)$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\sqrt{2\pi}\omega^2\tilde{g}(\omega))} = \frac{1+\omega^2}{\sqrt{2\pi}(1+3\omega^2)} \tag{59}$$

מצאנו את $\tilde{f}(\omega)$ עכשיו צריך לעשות את ההתמרה ולהגיע ל- $f(x)$.
הטריק הוא לפרק את השבר הזה לשני שברים ובעצם להגיע לביטוי שדומה לאותה התמרה שמצאנו בתרגיל 1 ה'. נוציא את ה-3 מהמכנה בשבר (אני בכוונה משמיט את ה-$\sqrt{2\pi}$):

$$\frac{1+\omega^2}{(1+3\omega^2)} \Rightarrow \frac{1+\omega^2}{3(1/3+\omega^2)} = \frac{A}{3} + \frac{B}{1/3+\omega^2} \tag{60}$$

תכפילו את המשוואה ב $3(1/3+\omega^2)$ ובעזרת השוואת מקדמים תמצאו את A ו- B

$$\frac{1+\omega^2}{\sqrt{2\pi}(1+3\omega^2)} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{2/9}{\sqrt{2\pi}(1/3+\omega^2)} \tag{61}$$

אחרי שמביאים את המשוואה הזו לצורה של ההתמרה ב-1ה, נקבל את הביטוי:

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1/\sqrt{3}}{(1/3+\omega^2)} \tag{62}$$

ההתמרה ההפוכה היא:

$$f(x)=\frac{1}{3}\delta(x)+\frac{1}{\sqrt{3^3}}e^{-\frac{|x|}{\sqrt{3}}} \tag{63}$$

שאלה 5. א.

$$\mathcal{F}\left\{xe^{-a(x^2+y^2+z^2)}\right\}=\mathcal{F}\left\{xe^{-ar^2}\right\}=i\frac{\partial}{\partial\omega_x}\mathcal{F}\left\{e^{-ar^2}\right\} \tag{64}$$

נשים לב ש:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-ar^2}\right\}=\mathcal{F}\left\{e^{-ax^2}\right\}\mathcal{F}\left\{e^{-ay^2}\right\}\mathcal{F}\left\{e^{-az^2}\right\} \tag{65}$$

מצאנו כבר את הביטוי עבור ההתמרה הזו עבור x לכן :

$$\mathcal{F}\left\{e^{-ax^2}\right\}\mathcal{F}\left\{e^{-ay^2}\right\}\mathcal{F}\left\{e^{-az^2}\right\}=\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^3\exp\left(\frac{-(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)}{4a^2}\right) \tag{66}$$

$$\mathcal{F}\left\{xe^{-ar^2}\right\}=i\frac{\partial}{\partial\omega_x}\mathcal{F}\left\{e^{-ar^2}\right\}=\frac{-i\omega_x}{4\sqrt{2}a^5}\exp\left(\frac{\omega^2}{4a^2}\right) \tag{67}$$

ב.

$f(r)=\frac{e^{-ar}}{r}$

בגלל שלפונקציה אין תלות בזוויות ניתן להגדיר כמו בספר ש-K בכיוון הציר הפולארי:

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ar}}{r}e^{-ikr\cos\phi}r^2\sin\phi drd\phi d\theta=\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}re^{-ar}e^{-ikr\cos\phi}\sin\phi drd\phi d\theta \tag{68}$$

שימו לב ש- $\frac{\partial}{\partial\phi}(e^{-ikr\cos\phi})=ikr\sin\phi e^{-ikr\cos\phi}$

$$\frac{1}{2i\pi k}\int_0^{\infty}\left(e^{(ik-a)r}-e^{-(a+ik)r}\right)dr=\frac{1}{2i\pi k}\left(\frac{1}{ik-a}+\frac{1}{ik+a}\right)=\frac{1}{\pi(k^2+a^2)} \tag{69}$$

שאלה 6. א.

$$f_1(t) = 3e^{2t} + 2\sin^2(3t) = 3e^{2t} + 1 - \cos(6t) \tag{70}$$

בעזרת הזהויות מהטבלה בספר:

$$\bar{f}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36} \tag{71}$$

ב.

$$f_2(t) = t^{\frac{5}{2}} + t^2\sin(5t) \tag{72}$$

עבור $t^{\frac{5}{2}}$ נשתמש בזהות:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{\bar{f}(s)}{s} \tag{73}$$

$$\mathcal{L}(t^{\frac{5}{2}}) = \mathcal{L}\left(\int_0^t u^{\frac{3}{2}}du\right) \tag{74}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t u^{\frac{3}{2}}du\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t u^{\frac{1}{2}}du\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{s} \tag{75}$$

$$\mathcal{L}(t^{\frac{5}{2}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{s^2} \tag{76}$$

עבור $t^2\sin(5t)$ נשתמש בזהות:

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s) \tag{77}$$

$$\mathcal{L}\left(t^2\sin(5t)\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(\sin(5t)) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{5}{s^2+25}\right) = \frac{30s^2-250}{(s^2+25)^3} \tag{78}$$

$$\bar{f}_2(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{s^2} + \frac{30s^2-250}{(s^2+25)^3} \tag{79}$$

ג.

$$f_3(t) = (1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3 \tag{80}$$

נשתמש ב:

$$ct^n \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{cn!}{s^{n+1}} \tag{81}$$

$$\bar{f}_3(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^4} \tag{82}$$

ד.

$$f_4(t) = \frac{\sinh(at)}{t} \tag{83}$$

נשתמש בזהות

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \bar{f}(u)du \tag{84}$$

$$\bar{f}(u) = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad \int_s^\infty \frac{a}{s^2-a^2}du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\Big|_s^\infty = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-a}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) \tag{85}$$

יש את הפתרון של האינטגרל הזה בחוברת אינטגרלים.

ה.

$$f_5(s) = \frac{2}{s}e^{-3s} \tag{86}$$

לפי ההגדרה של פונקצית הביסייד:

$$\mathcal{L}\left(2H(t-3)\right) = \frac{2}{s}e^{-3s} \tag{87}$$

$$f(t) = 2H(t-3) \tag{88}$$

ו.

$$\bar{f}_6(s) = \frac{10s-3}{25-s^2} = \frac{10s}{25-s^2} - \frac{3}{25-s^2} \tag{89}$$

נשים לב שיש להתמרה הזו צורה מאוד דומה להתמרות של cosh ו- sinh .

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad \mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2-a^2} \tag{90}$$

ננסה להביא את הביטויים של ההתמרה ע"מ למצוא את ההתמרה ההפוכה :

$$\frac{10s}{25-s^2} = -10\frac{s}{s^2-5^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(-10\frac{s}{s^2-5^2}\right) = -10\cosh(5t) \tag{91}$$

$$\frac{-3}{25-s^2} = \frac{3}{5}\frac{5}{s^2-5^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3}{5}\frac{5}{s^2-5^2}\right) = \frac{3}{5}\sinh(5t) \tag{92}$$

$$f_6(t) = -10\cosh(5t) + \frac{3}{5}\sinh(5t) \tag{93}$$

ז.

$$\bar{f}_7(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{(s^2+4)} \tag{94}$$

צריך להכפיל את כל המשוואה ב $(s+1)(s^2+4)$ ועם השוואת מקדמים למצוא את הנעלמים.

$$\bar{f}_7(s) = -\frac{2}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{5}\frac{2}{s^2+4} \tag{95}$$

$$f(t) = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{4}{5}\sin(2t) \tag{96}$$

ח. צריך למצוא את ההתמרה ההופכית של :

$$\bar{f}(s) = \arctan(\tfrac{1}{s}) \tag{97}$$

נגזור את הפונקציה:

$$\frac{d}{ds}\bar{f}(s) = \frac{-1}{s^2+1} \tag{98}$$

נשים לב שזו ההתמרה ההפוכה של $-\sin(t)$.
אזי יש לנו התמרה מהסוג:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \bar{f}(u)du \tag{99}$$

משמע:

$$\mathcal{L}\left(\frac{-\sin(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{-1}{u^2+1}du = -\arctan(u)\Big|_s^\infty = -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = -\arctan(\tfrac{1}{s}) \tag{100}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{-\sin(t)}{t}\right) = -\arctan(\tfrac{1}{s}) \tag{101}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \arctan(\tfrac{1}{s}) \tag{102}$$

כלומר:

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \tag{103}$$

שאלה 7

הוכחה 1.

צריך להוכיח

$$\mathcal{L}\left(f(t-a)H(t-a)\right) = e^{-sa}\bar{f}(s) \tag{104}$$

$$\mathcal{L}\left(f(t-a)H(t-a)\right) = \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-st}dt \tag{105}$$

$$= \int_0^a 0\cdot dt + \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \underset{t'=t-a}{=} e^{-as}\int_0^\infty f(t')e^{-st'}dt' \tag{106}$$

$$= e^{-as}\bar{f}(s) \tag{107}$$

מש"ל.

הוכחה 2. צריך להראות שאם $g(t)$ היא פונקציה מחזורית, אז ניתן לכתוב את ההתמרה שלה כ:

$$\bar{g}(s) = \frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T g(t)e^{-st}dt \tag{108}$$

נתחיל מלכתוב את ההגדרה של ההתמרה עבור $g(t)$ כללית ונשים לב שבגלל שהפונקציה מחזורית ניתן לעבור מאינטגרל בטווח 0 עד אינסוף, לסכימה על אינטגרל מ-0 עד T :

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T g(t-nT)e^{-st}dt \tag{109}$$

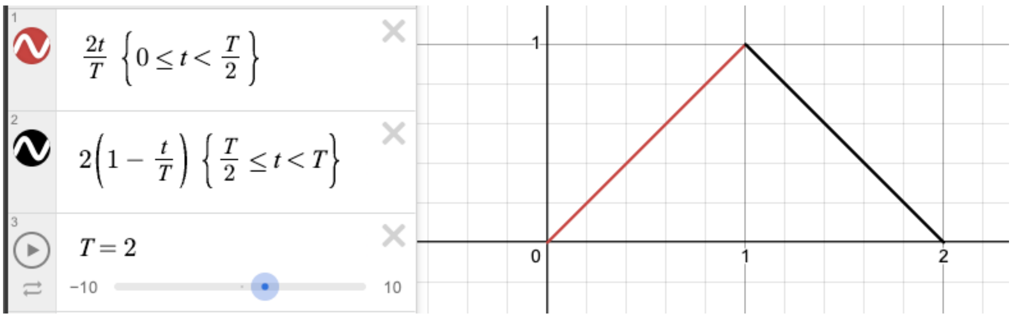
נשתמש בכלל:

$$\mathcal{L}\left(f(at+b)\right) = \frac{1}{a}e^{\frac{bs}{a}}\bar{f}(\tfrac{s}{a}) \quad \Rightarrow \mathcal{L}\left(f(t-nT)\right) = e^{-nsT}\bar{f}(s) \tag{110}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^T g(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-nsT}\int_0^T g(t)e^{-st}dt = \frac{e^{st}}{e^{sT}-1}\int_0^T g(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T g(t)e^{-st}dt \tag{111}$$

מש"ל.

(a)



כמובן שהפונקציה ממשיכה בצורה מחזורית בכיוון $\pm x$.

$$\bar{g}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T g(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T/2}\frac{2t}{T}e^{-st}dt + \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{T/2}^T 2(1-t/T)e^{-st}dt \tag{112}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\frac{2}{Ts}(1-2e^{-\frac{sT}{2}}+e^{-sT}) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\frac{2}{Ts}(1-e^{\frac{sT}{2}})^2 = \frac{2}{Ts}\frac{1-e^{\frac{sT}{2}}}{1+e^{\frac{sT}{2}}} = \frac{2}{Ts}\tanh\left(\frac{sT}{4}\right) \tag{113}$$