

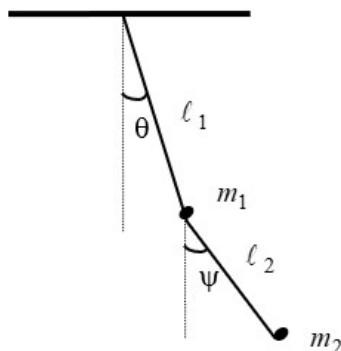
מטלת מנחה (ממ"א) 04

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: תנודות פרק 6 (חוז 6.5 ו- 6.6) והAMILTONIAN פרק 8
(חוז מ-4)

שאלה 1

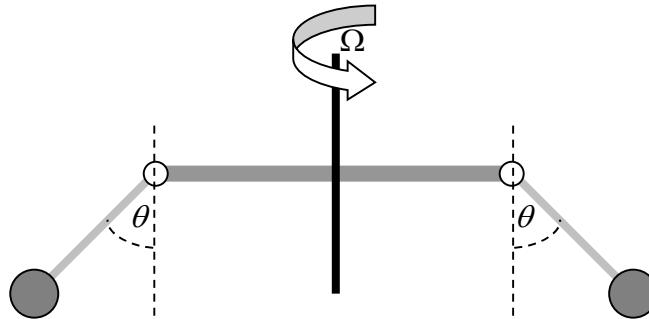
מטוטלת כפולה המבצעת תנודות במישור אנכי מתוארת באור המצורף.



- א. רשמו בקואורדינטות קרטזיות את המהירויות של שתי המסות.
- ב. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת. קח כקואורדינטות מוכללות את שתי זוויות הסטיה מן האנרגיה.
- ג. גזרו את משוואות התנועה של המערכת, כאשר $\ell_1 = \ell_2 = m_1 = m_2$. הניחו תנודות קטנות.
- ד. חשבו את התדריות העצמיות של המערכת.

שאלה 2

מוט בעל אורך l ומסה m מוחזק במרכזו אופקי על ציר. משני צידי המוט מחוברים שני מוטות חסרי מסה אשר אורכם הוא l ובקצוותיהם קשורות מסות w והם חופשיים להסתובב סביב ציר אופקי.



א. בהנחה שהציר מסתובב בתדריות זוויתית Ω והזווית שהמוטות הצדדים פורשים היא θ , כתבו את הלגראנג'אן של המערכת, מובע בעזרת $(\Omega, \theta, \dot{\theta})$.

ב. כתבו את משוואות התנועה.
בהנחה של תנודות קטנות סביב $\theta_0 = \theta$ מצאו את התדריות העצמיות של המערכת כפונקציה של l, θ_0, g .

שאלה 3

במודל לורנץ לאטום מנחים אלקטرون (קלאסי) בעל מסה M המחבר לגרעין באמצעות קפיץ חסר מסה בעל קבוע a . הקפיץ יכול לנوع בחופשיות סביב בגרעין למרחב התלת ממדי (לא גרביטציה). נתון כי c_0 הוא אורך הקפיץ במצבו הרפי. הניחו שהקפיץ תמיד ישר במהלך התנועה.

א. רשמו את הלגראזיאן המתאים, וקבלו את משוואות התנועה, ואת קבועי התנועה E ו T. בטאו את התשובות לשיערים הבאים כפונקציה של קבועי התנועה E ו T.
ב. קבלו בעזרת משוואות התנועה את נקודת שווי המשקל (הוא רדיוס הסיבוב) בציר הרדיאלי כתלות בקבועי התנועה.

הניחו כי קיימות תנודות קטנות סביב נקודת שווי המשקל ועמו על השיערים הבאים:

ג. מהו התנאי שעבורו תהיה נקודת שווי המשקל מסעיף ב יציבה?

ד. מהי תדריות התනודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל?

ה. מהי התנועה הרדיאלית כתלות בזמן (t) ?

ו. מהי המהירות הזוויתית כתלות בזמן (t) ?

שאלה 4

א. הוכחו שאם המילטוניין אינו תלוי במרחב בקואורדינטה φ אז התנועה הקונטי הצמוד שלה הוא קבוע של התנועה.

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + m(\alpha q_1 + \beta q_2) \quad \text{נקבעת ע"י}$$

כאשר β, α קבועים חיוביים.

ב. קיבלו את משוואות התנועה של החלקיק.

ג. (1) פתרו את משוואות המילטון עבור תנאי ההתחלה:

$$q_1(0) = x_0, q_2(0) = y_0, p_1(0) = p_x, p_2(0) = p_y$$

(2) איזו תנועה מתאר הפתרון שקיבלתם?

ד. הקומבינציה הבאה $C = p_2 + \gamma p_1$ היא קבוע של התנועה עבור ערך מסוים של הקבוע γ . מצאו את γ .

שאלה 5

פרוטון (מסה m ומטען e) ייחסוטי נع בשדה מגנטי סטטי.

תנועתו נקבעת על-ידי היגרנד'יאן היחסות המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{r}^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{r} \cdot \vec{A}$$

כאשר c היא מהירות האור ו- \vec{A} הוא הפוטנציאלי הווקטורי המקיים $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ הנិיחו שהפוטנציאלי \vec{A} אינו תלוי בזמן.

א. קיבלו ביטויים לשולושת רכיבי התנועה הקונטי \vec{p} .

ב. הראו כי המילטוניין של המערכת נתון על-ידי:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 c^2}$$

ג. נגידר את התנועה הקינטי $\vec{p} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$. מה משמעותו של גודל זה?

ד. מצאו בעזרת משוואות המילטון אילו רכיבי \vec{p} נשמרים כאשר השדה המגנטי אחיד וקבוע בכוון.

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (\hat{x} \hat{y} - \hat{y} \hat{x}). \quad \text{רמז: הפוטנציאלי הווקטורי הוא}$$

ה. רשמו את המילטוניין בקירוב עד סדר שני בתנועה הקינטי עבור $c \ll |\vec{v}|$ (התנועה הקינטי יהיה בחזקת ריבועית) ורשמו את משוואת התנועה עבור $\vec{v}(t)$.

ו. פתרו את משוואת התנועה שקיבלתם בסעיף הקודם עבור פרוטון הנמצא בזמן $t=0$ בראשית ומהירותו באותו רגע $\hat{x}_0 = \vec{v}_0$. איך נראה מסלול החלקיק?