פתרון:

שאלה 1. א.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < -\frac{\pi}{3} \\ 0 & -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{3} \\ 1 & \frac{\pi}{3} \le x < \pi \end{cases}$$

הפונקציה $f(x)$ א"ז לכן ניתן לתאר אותה כטור פורייה רק עם סינוסים, מכאן ש- $a_n = a_0 = 0$ ו-

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_n^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right] \Big|_{L=2\pi} = \sum_n^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

b_n נתון ע"י:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

נציב את הפונקציה ונשתמש בזהות עבור אינטגרל זוגי על טווח סימטרי:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\right)$$

מכאן שניתן לכתוב את $f(x)$ כ-

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\right)\sin(nx)$$

ב. מבקשים מאיתנו לחשב את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}$$

נשים לב שזו התשובה שקיבלנו בסעיף א' עבור $x = \frac{\pi}{3}$ (בלי הקבוע שלפני הטור).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\right)\sin(nx)$$

$$x = \tfrac{\pi}{3} \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}f(\tfrac{\pi}{3}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^n - \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\right)\sin(\tfrac{\pi}{3}n)$$

נותר למצוא את הערך של $f(\frac{\pi}{3})$ נשים לב שזו נקודת אי רציפות של הפונקציה והיא ניתנת ע"י המשוואה:

$$f(x_0) = \tfrac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}[f(x_0+\epsilon) + f(x_0-\epsilon)]$$

נקבל:

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

נציב הכל ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^n - \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\right)\sin(\tfrac{\pi}{3}n) = \frac{\pi}{2}f(\tfrac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{4}$$

שאלה 2. צריך למצוא טור קוסינוס עבור הפונקציה $f(t)=\cosh(t-1)$ בטווח $0\le t\le 1$ עם מחזור $L=2$. הכוונה בטור קוסינוסים היא שהפונקציה שנקבל בפיתוח תהיה זוגית.

יש שתי דרכים לעשות את זה:

1. לכתוב את הפונקציה $f(t)$ בהרכבה: $$f(t)=\begin{cases} cosh(1-t) & -1\le t<0 \\ cosh(t-1) & 0\le t\le 1\end{cases}$$
ולמצוא את a_n ו- b_n כרגיל.
2. להניח מראש שהפונקציה שנקבל היא זוגית, כלומר לקבוע ש- $b_n=0$ (כל האיברים הא"ז בטור שווים ל0), עם מחזור $L=2$ בטווח $-1\le t\le 1$.

נפתור את התרגיל בדרך השנייה.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1} a_n\cos(\frac{\pi nt}{L})$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_{-1}^{1}\cosh(t-1)\cos(\frac{\pi nt}{L})dt \underset{\cosh(x)=\cos(ix)}{=} 2\int_0^1 \cos(i(t-1))\cos(\pi nt)dt \\ &= \int_0^1[\cos(i(t-1)+\pi nt)+\cos(i(t-1)-\pi nt)]dt = [\frac{\sin(t(i+\pi nt)-i)}{i+\pi nt}+\frac{\sin(t(i-\pi nt)-i)}{i-\pi nt}]\Big|_0^1 \\ &= \{[\cancelto{0}{\frac{\sin\pi n}{i+\pi n}}+\cancelto{0}{\frac{\sin\pi n}{i-\pi n}}]-[\frac{\sin(-i)}{i+\pi n}+\frac{\sin(-i)}{i-\pi n}]\} = \sin(i)(\frac{1}{i+\pi n}+\frac{1}{i-\pi n}) \\ a_n &= \frac{2\sinh(1)}{\pi^2n^2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\int_0^1\cos(i(t-1))\cos(\pi nt)dt = \Big|_{n=0} 2\int_0^1\cos(i(t-1))dt = 2\frac{\sin(i(t-1))}{i}\Big|_0^1 = -2i(\cancelto{0}{\sin(0)}-\sin(-i)) \\ a_0 &= 2\sinh(1)\end{aligned}$$

קיבלנו שהטור קוסינוסים הוא:

$$f(t)=\sinh(1)+\sum_{n=1}\frac{2\sinh(1)}{\pi^2n^2+1}\cos(\pi nt)$$

צריך להוכיח ש:

$$\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2n^2+1}=\frac{1}{e^2+1}$$

נשים לב שאם נציב $t=0$ בביטוי שקיבלנו ונעביר אגפים נקבל את הביטוי שביקשו להוכיח.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2n^2+1} &= \frac{f(0)-\sinh(1)}{2\sinh(1)} = \frac{1}{2}\frac{\cosh(-1)-\sinh(1)}{\sinh(1)} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{e}+e^{-1}-\cancel{e}+e^{-1}}{e-e^{-1}} \\ \sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2n^2+1} &= \frac{1}{e^2-1}\end{aligned}$$

מש"ל.

בחלק הבא צריך למצוא את הערכים של $\sum_{n=1}(\pi^2n^2+1)^{-1}$ עבור n זוגי ואי-זוגי.
נפרק קודם כל את הטור שמצאנו ל n זוגי וא"ז:

$$\underbrace{\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2(2n)^2+1}}_{=S_{\text{even}}}+\underbrace{\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2+1}}_{=S_{\text{odd}}}=\frac{1}{e^2-1}=\frac{1}{2}\frac{\cosh(1)-\sinh(1)}{\sinh(1)}$$

נשים לב שאם נציב $t=1$ בטור קוסינוסים שמצאנו עבור $f(t)$ נקבל טור מתחלף:

$$f(t)\Big|_{t=0}=\cosh(0)=\sinh(1)+\sum_{n=1}\frac{2\sinh(1)}{\pi^2n^2+1}(-1)^n \tag{1}$$

נעביר אגפים, נסדר את הטור לאותה הצורה כמו מקודם, ונפצל לטור זוגי ואי-זוגי:

$$\underbrace{\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2(2n)^2+1}}_{=S_{\text{even}}}-\underbrace{\sum_{n=1}\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2+1}}_{=S_{\text{odd}}}=\frac{\cosh(0)-\sinh(1)}{2\sinh(1)} \tag{2}$$

נחבר את משוואה 1 עם 2 ונקבל:

$$S_{\text{even}}=\frac{\cosh(1)+\cosh(0)-2\sinh(1)}{4\sinh(1)}$$

באותה צורה נחסר בין שתי המשוואות ונקבל את הביטוי עבור S_{odd} :

$$S_{\text{odd}}=\frac{\cosh(1)-\cosh(0)}{4\sinh(1)}$$

שאלה 3.

$$f(x) = \cosh(x) \ , \qquad -1 \leq x \leq 1$$

נמצא את טור הקוסינוסים כמו שביקשו עם מחזור 2.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(\pi n x)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} \cosh(x)\cos(\pi n x)dx = 2\int_0^1 \cos(ix)\cos(\pi n x)dx = \int_0^1 [\cos(x(i+\pi n)) + \cos(x(i-\pi n))] \\ &= \left[\frac{\sin(x(i+\pi n))}{i+\pi n} + \frac{\sin(x(i-\pi n))}{i-\pi n}\right]\Big|_0^1 = \frac{\sin((i+\pi n))}{i+\pi n} + \frac{\sin((i-\pi n))}{i-\pi n} \underset{\sin(a+b)=\sin a\cos b + \cos a \sin b}{=} -\frac{2sin(i)\cos(\pi n)}{1+\pi^2 n^2} \\ &= \frac{2\sinh 1}{1+\pi^2 n^2}(-1)^n \end{aligned}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 \cos(ix)dx = 2\sinh(1)$$

מצאנו את $f(x)$:

$$f(x) = \sinh(1) + \sum_{n=1} \frac{2\sinh 1(-1)^n}{1+\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)$$

נמצא את טור הקוסינוסים עבור

$$g(x) = x^2 \ , \qquad -1 \leq x \leq 1$$

באותה הצורה.

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x^2\cos(\pi n x)dx = 2\left[\frac{x^2\sin(\pi n x)}{\pi n} + \frac{2x\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2} - \frac{2\sin(\pi n x)}{\pi^3 n^3}\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

מצאנו את $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1} \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)$$

מבקשים מאיתנו להוכיח את הקשר הבא בעזרת שתי אינטגרציות של $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sinh(1)} - \frac{5}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos(\pi n x) \qquad \Big/ \int dx \\ \Rightarrow \sinh(x) &= \frac{a_0}{2}x + \sum \frac{a_n}{\pi n}\sin(\pi n x) + A \\ x = 0 \Rightarrow \sinh(0) &= 0 = A \end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה נוספת:

$$\cosh(x) = \frac{a_0}{4}x^2 - \sum \frac{a_n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x) + B$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\sinh(1)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sinh(1)(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2+1)}\cos(\pi n x) + B$$

צריך למצוא את B, נציב $x=0$, אחרי העברת אגפים נקבל:

$$B = 1 - 2\sinh(1)\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2(\pi^2 n^2+1)} = 1 + 2\sinh(1)\sum_{n=1}\left(\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}}_{=-\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2+1}}_{=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sinh(1)}}\right)$$

את הסכום הראשון ניתן למצוא בעזרת הטור שמצאנו עבור $g(x)$ ואת הסכום השני באמצעות הטור הראשון שמצאנו עבור $f(x)$.

$$B = \frac{5}{6}\sinh(1)$$

נציב ב $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sinh(1)x^2 + 2\sinh(1)\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2+1)}\cos(\pi n x) + \frac{5}{6}\sinh(1)$$

נציב $x=0$ ונעביר אגפים:

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2+1)} = \frac{1}{2\sinh(1)}\left(1 - \frac{5}{6}\sinh(1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sinh(1)} - \frac{5}{6}\right)$$

מש"ל.

שאלה 4.

א. צריך לחשב את טור הקוסינוסים של הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בתחום $[0,\pi]$. נעשה את זה באותה צורה כמו בתרגילים הקודמים באמצעות:

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n}^{\infty} \left[a_n \cos(\frac{2\pi nx}{L}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{L}) \right]$$

ו-

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos(\tfrac{2\pi nx}{L}) dx \ , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin(\tfrac{2\pi nx}{L}) dx$$

b_n שווה ל-0.

נציב ב- a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x(\pi - x) \frac{\sin(2nx)}{2n} + (\pi - 2x) \frac{\cos(2nx)}{4n^2} + 2 \frac{\sin(2nx)}{8n^3} \right] \Big|_0^{\pi}$$
$$a_n = -\frac{1}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} \pi^2$$

נציב הכל בטור פורייה:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \cos(2nx)$$

ב. 1.

צריך למצוא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. נציב בטור $x = 0$:

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2n0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. צריך למצוא את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

נשתמש בזהות פרסבל :

$$\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x(\pi - x))^2 dx = \frac{\pi^4}{30}$$

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

נפתור את המשוואה עבור הסכום:

$$\frac{\pi^4}{30} = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

שאלה 5.

א. צריך למצוא את טור פורייה עבור הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ בתחום $[-\pi, \pi]$, a הוא מספר ממשי אך לא שלם.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ax)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\cos((a+n)x)+\cos((a-n)x)\right]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n}+\frac{\sin((a-n)x)}{a-n}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{2a\sin(a\pi)(-1)^n}{a^2-n^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ax)dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(ax)}{a}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\sin(a\pi)}{a\pi}$$

$$f(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}\frac{2a\sin(a\pi)(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nx)$$

ב.

נציב בטור שקיבלנו $x = \pi$:

$$f(\pi) = \cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}\frac{2a\sin(a\pi)(-1)^{2n}}{a^2-n^2} = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}\frac{2a\sin(a\pi)}{a^2-n^2} \quad \Big/ : \sin(a\pi)$$

$$\cot(a\pi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a} - \sum_{n=1}\frac{2a}{n^2-a^2}\right]$$

שימו לב שבוצעה ההחלפה $a^2 - n^2 = -(n^2 - a^2)$.