

פתרונות:

## שאלה 1 א.

מדובר באוֹסְצִילָטוֹר הרמוני חד- ממדני כמו משה על קפיז. האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית הן:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

ע"מ למצוא את משוואת התנועה נשמש בשימוש אויילר לגראנג:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad ; \quad L = T - V \quad (1)$$

נציג ונפתרו:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow kx + m\ddot{x} = 0$$

ב.

$$L = \left( \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \right) e^{\gamma t}$$

נחשב את הנגזרות עבור משווה 1 :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kxe^{\gamma t}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}e^{\gamma t} + m\dot{x}\gamma e^{\gamma t}$$

נציג בשימוש אויילר לגראנג:

$$m\ddot{x}e^{\gamma t} + m\gamma\dot{x}e^{\gamma t} + kxe^{\gamma t} = 0 \quad / : e^{\gamma t}$$

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx = 0$$

קיבלנו משווה של מתנד הרמוני עם כוח גרא.

## שאלה 2

1. נשמש במערכת קורדינטות פולריות ע"מ לתאר את מיקום החרו:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta & \dot{x} &= -a\dot{\theta} \sin \theta \\ y &= a \sin \theta & \dot{y} &= a\dot{\theta} \cos \theta \\ z &= \frac{\theta b}{2\pi} & \dot{z} &= \frac{\dot{\theta}b}{2\pi} \end{aligned}$$

האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של החרו היא:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left[ (a\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (a\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \left( \frac{\dot{\theta}b}{2\pi} \right)^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2}m \left( a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} \right) \dot{\theta}^2$$

$$V = mgz = mg \frac{\theta b}{2\pi}$$

הלגראנג הוא:

$$L = \frac{1}{2}m \left( a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} \right) \dot{\theta}^2 - mg \frac{\theta b}{2\pi}$$

2. נגזר עבור משוואות אויילר לגראנג:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg \frac{b}{2\pi} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2})\ddot{\theta}$$

ונציב במשוואת 1

$$\frac{gb}{2\pi} + (a^2 + \frac{b^2}{4\pi^2})\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\pi gb}{b^2 + 4\pi^2 a^2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\ddot{\theta}b}{2\pi} = -\frac{b^2}{b^2 + 4\pi^2 a^2} g$$

.3

a : כש  $a$  גדול מאוד מ  $b$  המכנה שווה לאין סוף והביטוי עבור  $\ddot{z}$  שווה לאפס.  
זה מתרחש שבו הסליל כל כך רחב שהתאוצה של החزو מתחפסת.

$$\ddot{z}_{a>>b} = 0$$

b : כש  $b$  גדול מאוד מ  $a$  מוחקי גבולות אנחנו יודעים שהביטוי בשבר שווה לאחד והביטוי עבור  $\ddot{z}$  שווה ל  $-g$ .  
זה מתרחש שבו הסליל נורא צר, ככלומר הרדיוס שלו שווה כביכול 0 והתאוצה שלו זהה לתאוצה באנטנה חופשית.

$$\ddot{z} = -g$$

**שאלה 3**

א. עקרונית, הבחירה קורדייניות בשאלת זו לא משנה את הפתרון, אבל חשוב לבחור קורדייניות חדשה לתאר את המיקום של המסות והגלאת בשאלת. ע"מ להקל על הסימונים, גדים שקשורים לגלאת יסומנו עם אינדקס 3. נסמן את המיקום של הגלאת מהתקarra ב  $y_3$ .  $y_1$  ו-  $y_2$  הם המיקום של מסה 1 ומסה 2 מהתקarra בהתאם.  $\theta$  היא זוויות הפעילה של הגלאת.

$$\begin{aligned}y_3 &= y \\y_1 &= y_3 + R\theta = y + R\theta \\y_2 &= y_3 - R\theta = y - R\theta\end{aligned}$$

נגזר לפ' הזמן:

$$\begin{aligned}\dot{y}_3 &= \dot{y} \\\dot{y}_1 &= \dot{y}_3 + R\dot{\theta} = \dot{y} + R\dot{\theta} \\\dot{y}_2 &= \dot{y}_3 - R\dot{\theta} = \dot{y} - R\dot{\theta}\end{aligned}$$

עבור כל מערכת ללא קשר לכמות המסות שבה, יש לנו אחד שckill בתוכו את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של כל הגוף במערכת:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left( m_1(\dot{y} + R\dot{\theta})^2 + m_2(\dot{y} - R\dot{\theta})^2 + m_3\dot{y}^2 \right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_1 - m_2)R\dot{y}\dot{\theta} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 + m_3gy_3 = m_1g(y + R\theta) + m_2g(y - R\theta) + m_3gy \\&= (m_1 + m_2 + m_3)gy + (m_1 - m_2)gR\theta\end{aligned}$$

והלגראנ'  $L = T - V$  הינו:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{y}^2 + (m_1 - m_2)R\dot{y}\dot{\theta} + \frac{1}{2}((m_1 + m_2)R^2 + I)\dot{\theta}^2 - (m_1 + m_2 + m_3)gy - (m_1 - m_2)gR\theta$$

ב. ע"מ למצוא את משוואות התנועה צריך לנזור את הלגראנ', נשים לב שיש לנו שתי קורדייניות מוכילות,  $y$  ו-  $\theta$ . נגזר לפ' משווהה 1 פעם אחת לפ'  $y$  ופעם אחת לפ'  $\theta$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -gR(m_1 - m_2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = R\ddot{y}(m_1 - m_2) + R^2\ddot{\theta}(m_1 + m_2) + I\ddot{\theta}$$

נציב במשוואת אוילר לגראנ'

$$\Rightarrow gR(m_1 - m_2) + R\ddot{y}(m_1 - m_2) + \ddot{\theta}(R^2(m_1 + m_2) + I) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -g(m_1 + m_2 + m_3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \ddot{y}(m_1 + m_2 + m_3) + R\ddot{\theta}(m_1 - m_2)$$

$$\Rightarrow g(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{y}(m_1 + m_2 + m_3) + R\ddot{\theta}(m_1 - m_2) = 0$$

ג. במקרה שבו הקפץ לא זע לא מספיק להציג במשוואות התנועה שקיבלו  $0 = \ddot{y}$ , אלא צריך לשם לב ש  $y$  כבר לא קורדיינטה, אלא קבוע כלשהו.

צריך א' להתייחס אליו כקבוע בביטויים لأنרגיה הפוטנציאלית והקינטית וב' לנזור את הלגראנ' שמתקובל רק לפ'  $\theta$ . המשוואת תנועה שתתקבל הינה אותה משווהת תנועה שקיבלו עבור  $\theta$  בלי הנזרת השנייה לפ'  $y$ .

$$\Rightarrow gR(m_1 - m_2) + \ddot{\theta}(R^2(m_1 + m_2) + I) = 0$$

נפתר עבור  $\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = -g \frac{R(m_1 - m_2)}{R^2(m_1 + m_2) + I}$$

אחרי אינטגרציה נקבל:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t - \frac{1}{2} g \frac{R(m_1 - m_2)}{R^2(m_1 + m_2) + I} t^2$$

## שאלה 4

$$L = -mc^2\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2/c^2} - e \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

ניסי לב ש

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

ובמוקם לסמן את הנגזרות לפי  $x, y$  ו-  $z$  נשתמש ב  $r_i$  ו-  $\dot{r}_i$ .

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\dot{r}_i}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

בנוסח:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \mathbf{r} = \hat{r}_i$$

כש-  $\hat{r}_i$  הוא וקטור היחידה בכיוון  $r_i$ .  
א. נגור בכיוון כללי  $r_i$ .

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -e \mathbf{E} \hat{r}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = mc^2 \frac{|\dot{\mathbf{r}}| \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} |\dot{\mathbf{r}}| c^{-2}}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}} = \frac{m \dot{r}_i}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}_i}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}} = m \frac{d}{dt} \dot{r}_i (1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}} = m \ddot{r}_i (1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}} + m \dot{r}_i \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} c^{-2}}{(1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2})^{\frac{3}{2}}}$$

שימוש לב ש:

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2 \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\gamma \ddot{r}_i + m \frac{\gamma^3}{c^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2/c^2}}$$

עבור שדה בעל כיוון כללי  $\mathbf{r}$  נקבל:

$$m\gamma \ddot{r}_i + m \frac{\gamma^3}{c^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \dot{r}_i = -e \mathbf{E} \hat{r}_i$$

ב.

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad \mathbf{E} = (0, 0, E)$$

$$\begin{aligned} m\gamma\ddot{x} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{x} &= 0 \\ m\gamma\ddot{y} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{y} &= 0 \\ m\gamma\ddot{z} + m\frac{\gamma^3}{c^2}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\dot{z} &= -eE \end{aligned}$$

לא, הבחירה לא מגבילה את הכלליות.  
כל שדה חשמלי אחיד אפשר תמיד ליישר עם אחד הצירים בעזרת סיבוב מערכת הצירים.

ג.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}}} &= -e\mathbf{E}\hat{r}_i \\ m\dot{r}_i &= (-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c'_i) \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}|^2 c^{-2}} \\ \dot{r}_i &= \frac{-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c'_i}{\sqrt{m^2 + c^{-2}(-e\mathbf{E}\hat{r}_i t + c'_i)}} \end{aligned}$$

כאשר  $c'_i$  הוא קבוע אינטגרציה בציר ה- $i$ .

התנוע ב  $x$  יהיה:

$$P_x = \gamma m\dot{x} \Big|_{E_x=0} = \frac{c'_x}{\sqrt{m^2 + c^{-2}c_x'^2}}$$

התנוע בציר  $x$  קבוע. אנלוגית מתקבלת אותה התוצאה עבור התנוע בציר ה- $y$ .

ד. נתון שהאלקטרון מתחילה לנوع מראשית הצירים ממצב של מנוחה. ככלומר עברו  $t = 0$  מתקיים

$$m\gamma(0)\dot{x}(0) = m\gamma(0)\dot{y}(0) = 0$$

בסעיף הקודם הוכחנו שיש שימור תנע בציר  $x$  ו-  $y$ . ככלומר המהירות עברו כל  $t \geq 0$  בצירים האלה שווה ל-0 ומכאן ש:

$$x(t) = y(t) = 0$$

ע"מ לפטור את המשוואות התנועה בציר  $z$ , נחזור למשוואות אוילר לגראנג' שמצאנו בסעיף א':

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2 c^{-2}}} = -eE \Rightarrow \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \dot{z}^2 c^{-2}}} = -eEt + \dot{z}_0$$

$\dot{z}_0$  הוא קבוע אינטגרציה. ידוע אבל שהמהירות ההתחלתית היא 0, لكن 0  
נשאר לפטור את המשוואת התנועה עברו  $\dot{z}$ :

$$\dot{z} = \frac{-eEt}{\sqrt{m^2 + (eEt/c)^2}}$$

בעזרת sub-s פשטוט ו שימוש ב  $z(0) = 0$  אפשר לפטור את האינטגרל ולמצוא את המשוואת התנועה עברו  $z$ .  
מכאן ש  $\mathbf{r}(t)$  הוא:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c^2}{eE} \sqrt{m^2 + (eEt/c)^2} - \frac{c^2 m}{eE} \end{pmatrix}$$

## שאלה 5

א. אנחנו צריכים להוכיח בחלק הזה של השאלה שהאנרגיה הפוטנציאלית של השרשראת היא:  $U = \mu g \int_{x1}^{x2} y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ . אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה האנרגיה הפוטנציאלית של קטע קטן מושרשראת ששוקל  $dm$ . התשובה להיא היא  $dm = dmgy$ . אפשר לרשום את המשנה בתור  $dm = \mu dl$  כאשר  $\mu$  זו צפיפות השרשראת ו-  $dl$  הוא אורך אינפיטיסימלי של השרשראת. בספר הוכיחו את הקשר  $dl = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx$ . לכן ניתן לשכתב את האנרגיה הפוטנציאלית של קטע אינפיטיסימלי כ:

$$dU = \mu g y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

מה שנשאר לעשות זה לקחת את האינטגרל של הביטוי הזה על פני כל אורך השרשראת:

$$U = \mu g \int_{x1}^{x2} y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$$

ב. שמו לב להדרכה, יש כאן רמז גדול שקיים אילוץ במערכת. האילוץ הוא שהאורך הכלול של החבל הוא  $l$  שנייתן לכתוב כ:

$$\begin{aligned} l &= \int_{x1}^{x2} ds = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &\int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + y'^2} dx - l = 0 \end{aligned}$$

מדובר באילוץ הולonomic אינטגרלי, כלומר ניתן לכתוב את האילוץ כ:

$$f(q, \dot{q}, t) = 0$$

הפונקציונאל אנרגיה שמננו "נוציא" את הלגראנג' הוא :

$$U = \int_{x1}^{x2} \left[ \mu g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right] dx$$

שםו לב שלא הוספה את הקבוע  $l$  – (שאלgebraית צריך להוסיף אחרי האינטגרל), מכיוון שפונקציית האנרגיה אי-ווריאנטית להוספה של קבועים, (כמו במכנית קלאסית) וזהו שرك הכוחות הפיזיקליים והפרשי האנרגיה (שקבועים את התנועה) תלויים בשיפוע שלו (הגרדיינט), והוספה קבועה לא משנה את השיפוע. במקרה,  $\lambda$  הוא קבוע ולא פונקציה של  $x$  (כלומר  $\lambda(x)$ ). באילוץ אינטגרלי הלא נלקח קבוע ובאיילוץ הולonomic לא אינטגרלי (לדוגמא  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ )  $\lambda$  הינו פונקציה של  $x$ .

הלגראנג' שלנו הוא האינטגרט באינטגרל

$$L = \mu g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

לא נגזר את הלגראנג' לפי הנזירות החלקיות במשוואת אוילר לגראנג' (משוואת 1), כי יצא ביטוי שנורא קשה לעבד אותו  $\lambda(\mu g \dot{y} + \lambda - \lambda \dot{y}^2) = \mu g$

מכיוון ש-  $L$  אינו תלוי ב-  $x$ , פונקציית האנרגיה של הלגראנג' היא גודל משמר:

$$h = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad (2)$$

נותר לנגזר ולפתור את המשוואת הדיפרנציאלית שתתקבל:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} (\mu g y + \lambda)$$

נציב בפונקציית האנרגיה:

$$h = \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} (\mu g y + \lambda) - (\mu g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1}{h^2} (\mu g y + \lambda) - 1}$$

נפתרו בהפרדמת משתנים:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{h^2} (\mu g y + \lambda) - 1}} = \frac{h^2 dy}{\sqrt{(\mu g y + \lambda) - h^2}}$$

$$y = \frac{h}{\mu g} \cosh \left( \frac{\mu g}{h} (x + A) \right) - \frac{\lambda}{\mu g}$$