

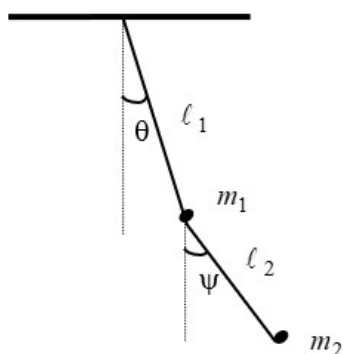
מטלת מנחה (ממ"ן) 04

קורס: מכניקה אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: תנודות פרק 6 (חוץ מ-6.5 ו-6.6) והמילטוניאן פרק 8 (חוץ מ-8.4)

שאלה 1

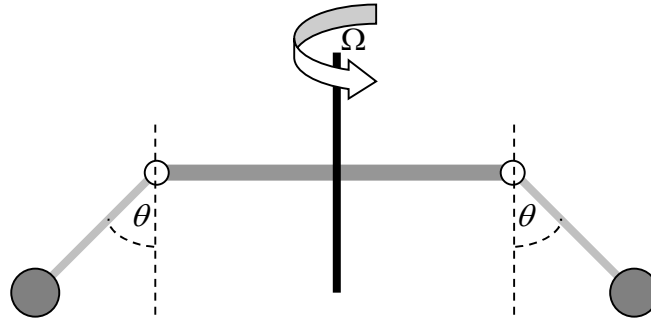
מטוטלת כפולה המבצעת תנודות במישור אנכי מתוארת באיור המצורף.



- רשמו בקואורדינטות קרטזיות את המהירויות של שתי המסות.
- רשמו את הלגרנז'יאן של המערכת. קח כקואורדינטות מוכללות את שתי זוויות הסטייה מן האנך.
- גזרו את משוואות התנועה של המערכת, כאשר $\ell_1 = \ell_2$ ו- $m_1 = m_2$. הניחו תנודות קטנות.
- חשבו את התדירויות העצמיות של המערכת.

שאלה 2

מוט בעל אורך $2l$ ומסה $2m$ מוחזק במרכזו אופקית על ציר. משני צידי המוט מחוברים שני מוטות חסרי מסה אשר אורכם הוא l ובקצותיהם קשורות מסות m והם חופשיים להסתובב סביב ציר אופקי.



- א. בהנחה שהציר מסתובב בתדירות זוויתית Ω והזווית שהמוטות הצידיים פורשים היא θ , כתבו את הלגרנג'אן של המערכת, מובע בעזרת $(\Omega, \theta, \dot{\theta})$.
 - ב. כתבו את משוואות התנועה.
- בהנחה של תנודות קטנות סביב $\theta = \theta_0$ מצאו את התדירויות העצמיות של המערכת כפונקציה של θ_0, g, l .

שאלה 3

- במודל לורנץ לאטום** מניחים אלקטרון (קלאסי) בעל מסה M המחובר לגרעין באמצעות קפיץ חסר מסה בעל קבוע k . הקפיץ יכול לנוע בחופשיות סביב בגרעין במרחב התלת מימדי (ללא גרביטציה). נתון כי d_0 הוא אורך הקפיץ במצבו הרפוי. הניחו שהקפיץ תמיד ישר במהלך התנועה.
- א. רשמו את הלגרנג'יאן המתאים, וקבלו את משוואות התנועה, ואת קבועי התנועה L ו E . בטאו את התשובות לסעיפים הבאים כפונקציה של קבועי התנועה L ו E .
 - ב. קבלו בעזרת משוואות התנועה את נקודת שיווי המשקל (הוא רדיוס הסיבוב) בציר הרדיאלי כתלות בקבועי התנועה.
- הניחו כי קיימות תנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל וענו על הסעיפים הבאים:
- ג. מהו התנאי שעבורו תהיה נקודת שיווי המשקל מסעיף ב יציבה?
 - ד. מהי תדירות התנודות הקטנות סביב נקודת שיווי המשקל?
 - ה. מהי התנועה הרדיאלית כתלות בזמן $r(t)$?
 - ו. מהי המהירות הזוויתית כתלות בזמן $\dot{\theta}(t)$?

שאלה 4

א. הוכיחו שאם ההמילטוניאן אינו תלוי במפורש בקואורדינטה q אזי התנע הקנוני הצמוד שלה הוא קבוע של התנועה.

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + m(\alpha q_1 + \beta q_2) \text{ ע"י נקבעת מסה } m$$

כאשר α, β קבועים חיוביים.

ב. קבלו את משוואות התנועה של החלקיק.

ג. (1) פתרו את משוואות המילטון עבור תנאי ההתחלה:

$$q_1(0) = x_0, q_2(0) = y_0, p_1(0) = p_x, p_2(0) = p_y$$

(2) איזו תנועה מתאר הפתרון שקיבלתם?

ד. הקומבינציה הבאה $C = \gamma p_1 + p_2$ היא קבוע של התנועה עבור ערך מסויים של הקבוע γ . מצאו את γ .

שאלה 5

פרוטון (מסה m ומטען e) יחסותי נע בשדה מגנטי סטטי.

תנועתו נקבעת על-ידי הלגרנז'יאן היחסותי המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\vec{r}}^2/c^2} + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

כאשר c היא מהירות האור ו- \vec{A} הוא הפוטנציאל הווקטורי המקיים $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

הניחו שהפוטנציאל \vec{A} אינו תלוי בזמן.

א. קבלו ביטויים לשלושת רכיבי התנע הקנוני \vec{p} .

ב. הראו כי ההמילטוניאן של המערכת נתון על-ידי: $H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}\right)^2 c^2}$.

ג. נגדיר את התנע הקינטי $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$. מה משמעותו של גודל זה?

ד. מצאו בעזרת משוואות המילטון אילו רכיבי \vec{p} נשמרים כאשר השדה המגנטי אחיד וקבוע בכיוון

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \text{ : רמז: הפוטנציאל הווקטורי הוא } \vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x\hat{y} - y\hat{x})$$

ה. רשמו את ההמילטוניאן בקירוב עד סדר שני בתנע הקינטי עבור $v \ll c$ (התנע הקינטי יהיה

בחזקה ריבועית) ורשמו את משוואת התנועה עבור $\vec{v}(t)$.

ו. פתרו את משוואת התנועה שקיבלתם בסעיף הקודם עבור פרוטון הנמצא בזמן $t=0$ בראשית

ומהירותו באותו רגע $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$. איך נראה מסלול החלקיק?