

## מטלת מנחה (ממ"ן) 03

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידות 3+4

### שאלה 1 (10 נקודות)

פתרו את המד"רים הבאים (עם תנאי השפה הנתונים) באמצעות שיטת התמרת לפלס:

א.  $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0, \quad x(t=0) = 2, \quad \dot{x}(t=0) = -1$

ב.  $\ddot{x} + 4x = \sin 3t, \quad x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0$

### שאלה 2 (10 נקודות)

מצאו את פונקציית גרין  $G(x, z)$  של המשוואות הבאות עם תנאי השפה  $f(x)$  היא פונקציה נתונה, אך פונקציית גרין אינה תלויה בה כמובן).

א.

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} - y = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{y}{4} = f(x) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

### שאלה 3 (12 נקודות)

א. מצאו את פונקציית גרין  $G(t, t_0)$  עבור המשוואה הבאה עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = f(t) \\ x(t=0) = \frac{dx}{dt}(t=0) = 0 \end{cases}$$

ב. פתרו את המשוואה מסעיף א עבור המקרה

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{-3t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

#### שאלה 4 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 16.6 מספר הלימוד:

16.6 Verify that  $z = 0$  is a regular singular point of the equation

$$z^2 y'' - \frac{3}{2} z y' + (1 + z) y = 0,$$

and that the indicial equation has roots 2 and  $1/2$ . Show that the general solution is given by

$$y(z) = 6a_0 z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^{2n} z^n}{(2n+3)!} + b_0 \left( z^{1/2} + 2z^{3/2} - \frac{z^{1/2}}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^n}{n(n-1)(2n-3)!} \right).$$

#### שאלה 5 (18 נקודות)

א. מצאו עבור האופרטורים הבאים האם הם הרמיטיים (כאשר תנאי השפה הם התאפסות של הפונקציות בקצוות הקטע הסגור  $[0,1]$ ):

$$1. (1+x^2) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + 2 \cos x$$

$$2. \frac{d^2}{dx^2} + 2x^2 \frac{d}{dx} + 3x$$

$$3. (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 10$$

ב. עבור אופרטורים לא הרמיטיים מסעיף א, השתמשו בגורם אינטגרציה מתאים כדי להביאם לצורה הרמיטית (כלומר, הביאו אותם לצורה של משוואת שטורם-ליוביל).

#### שאלה 6 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 17.5 מספר הלימוד.

הבהרה: בסעיף הראשון של השאלה יש לתת ביטוי כללי עבור פונקציה  $f(x)$  כלשהי.

17.5 Use the properties of Legendre polynomials to carry out the following exercises.

- Find the solution of  $(1-x^2)y'' - 2xy' + by = f(x)$ , valid in the range  $-1 \leq x \leq 1$  and finite at  $x = 0$ , in terms of Legendre polynomials.
- If  $b = 14$  and  $f(x) = 5x^3$ , find the explicit solution and verify it by direct substitution.

**שאלה 7 (15 נקודות)**

פתרו את שאלה 20.7 מספר הלימוד:

20.7 Solve

$$\sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x$$

subject to (a)  $u(\pi/2, y) = 0$  and (b)  $u(\pi/2, y) = y(y + 1)$ .

**שאלה 8 (15 נקודות)**

פתרו את שאלה 20.19 מספר הלימוד:

- 20.19 An incompressible fluid of density  $\rho$  and negligible viscosity flows with velocity  $v$  along a thin, straight, perfectly light and flexible tube, of cross-section  $A$  which is held under tension  $T$ . Assume that small transverse displacements  $u$  of the tube are governed by

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left( v^2 - \frac{T}{\rho A} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

- (a) Show that the general solution consists of a superposition of two waveforms travelling with different speeds.
- (b) The tube initially has a small transverse displacement  $u = a \cos kx$  and is suddenly released from rest. Find its subsequent motion.