השאלות והפתרונות נוצרו בעזרת AI
למרות שהפתרונות נראים סה"כ תקינים, קחו את הכל בערבון מוגבל.

תוכן העניינים

1 פונקציות גרין ובעיות שפה במד"ח/מד"ר

1.1 חלק א': פונקציות גרין במימד אחד (ODEs)

1. מצאו את פונקציית גרין $G(x,x_0)$ עבור האופרטור $L=-\frac{d^2}{dx^2}$ בתחום $0\leq x\leq L$ עם תנאי שפה דיריכלה הומוגניים: $y(0)=0, y(L)=0$.

2. מצאו את פונקציית גרין עבור האופרטור $L=-\frac{d^2}{dx^2}+k^2$ (כאשר $k>0$) בתחום האינסופי $-\infty<x<\infty$, תחת הדרישה שהפונקציה דועכת לאפס באינסוף.

3. מצאו את פונקציית גרין עבור המשוואה:
$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=f(x)$$
בתחום $0<x<1$ עם תנאי השפה $y(1)=0$ ו-$y(x)$ חסומה ב-$x=0$.

4. נתונה המשוואה $-y''=f(x)$ בתחום $0\leq x\leq 1$. מצאו את פונקציית גרין המקיימת תנאי שפה מעורבים: $y(0)=0$ ו-$y'(1)=0$.

5. חשבו את הפתרון למשוואה הדיפרנציאלית:
$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\delta(x-\frac{\pi}{4})$$
בתחום $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ עם תנאי שפה $y(0)=0, y(\frac{\pi}{2})=0$.

6. מצאו את פונקציית גרין עבור אופרטור הרמוני:
$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)G(x,x')=\delta(x-x')$$
בתחום $0\leq x\leq L$, עם תנאי שפה $G(0,x')=G(L,x')=0$. (הניחו ש-$\sin(\omega L)\neq 0$).

7. הראו כי פונקציית גרין עבור האופרטור $L=\frac{d}{dx}$ בתחום $0\leq x\leq T$ עם תנאי שפה $y(0)=y(T)$ (תנאי שפה מחזוריים) היא פונקציית המדרגה (Heaviside) בתוספת קבוע.

1.2 חלק ב': משוואת פואסון/לפלס - שיטת הדמויות (3D)

8. מצאו את פונקציית גרין-דיריכלה $G(\vec{r},\vec{r}_0)$ עבור המרחב החצי-אינסופי $z>0$. כלומר, פתרו את $\nabla^2G=-\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ כאשר $G=0$ על המישור $z=0$.

9. מטען נקודתי q ממוקם בנקודה $(0,0,d)$ מעל מישור מוליך ומוארק המשתרע על $z=0$. חשבו את הפוטנציאל בכל המרחב $z>0$ ואת צפיפות המטען המושרה על המישור.

10. מצאו את פונקציית גרין-דיריכלה עבור הפינה ("האוקטנט הראשון"): $x>0, y>0, z>0$. רמז: נדרשים מספר מטעני דמות כדי לאפס את הפוטנציאל על כל המישורים ($x=0, y=0, z=0$).

11. נתון תחום שבין שני מישורים מקבילים מוארקים ב-$x=0$ ו-$x=a$. מצאו את פונקציית גרין $G(\vec{r},\vec{r}_0)$ בתחום זה. בטאו את התשובה כטור אינסופי של דמויות.

12. כדור מוליך מוארק ברדיוס R נמצא בראשית הצירים. מטען נקודתי q נמצא בחוץ בנקודה $\vec{r}_0$ ($|\vec{r}_0|>R$). מצאו את הפוטנציאל מחוץ לכדור באמצעות שיטת הדמויות.

13. כדור מוליך מוארק ברדיוס R נמצא בראשית. מטען נקודתי q נמצא **בתוך** הכדור בנקודה $\vec{r}_0$. מצאו את פונקציית גרין בתוך הכדור.

14. נתונה קליפה כדורית מוליכה ברדיוס R המוחזקת בפוטנציאל $V(\theta)=V_0\sin^2\theta$. השתמשו בפונקציית גרין שמצאתם (או בנוסחת אינטגרל פואסון) כדי לבטא את הפוטנציאל במרכז הכדור.

1.3 חלק ג': פירוק לפונקציות עצמיות (לז'נדר ושטורם-ליאוביל)

15. נתונה משוואת לז'נדר:
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=-f(x)$$
בתחום $-1\leq x\leq 1$ עם תנאי שפה שהפתרון סופי בקצוות. כתבו את הביטוי לפונקציית גרין $G(x,x')$ כטור של פולינומי לז'נדר $P_n(x)$.

16. השתמשו בתוצאה מהשאלה הקודמת כדי לפתור את המשוואה:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+2y=-3x^2$$

רמז: בטאו את x^2 כצירוף ליניארי של $P_0(x)$ ו-$P_2(x)$, ושימו לב שהערך העצמי $\lambda=2$ מתאים ל-$n=1$ (כלומר $l=1 \implies l(l+1)=2$), ולכן יש לבדוק אם מתקיימת תהודה (Resonance) או אם נדרש תיקון.

17. מצאו את פונקציית גרין עבור האופרטור:

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}$$

בתחום $0\le x\le\pi$ עם תנאי שפה $y(0)=0, y(\pi)=0$, באמצעות פירוק לפונקציות עצמיות (טור פורייה סינוסים).

18. נתונה בעיה כדורית עם סימטריה אזימוטלית (תלות ב-r,θ בלבד). כתבו את פונקציית גרין $G(\vec{r},\vec{r}')$ כפיתוח לפי ההרמוניות הספריות $Y_{lm}(\theta,\phi)$ או פולינומי לז'נדר $P_l(\cos\theta)$, עבור המרחב החופשי (ללא תנאי שפה סופיים).

19. מצאו את פונקציית גרין למשוואת לפלס בתוך גליל אינסופי ברדיוס R ($0\le\rho\le R$, $-\infty<z<\infty$), עם תנאי שפה דיריכלה ($G=0$ על המעטפת). בטאו את הפתרון באמצעות פונקציות בסל J_m.

20. בנו את פונקציית גרין עבור משוואת לפלס בתיבה מלבנית $0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c$ עם תנאי שפה דיריכלה הומוגניים על כל הדפנות. השתמשו בפיתוח לטור עצמי (Eigenfunction expansion).

21. נתונה משוואת פואסון דו-ממדית $\nabla^2 u=f(\vec{r})$ בתוך עיגול ברדיוס a. נתון שעל השפה $u(a,\phi)=\sin(3\phi)$. רשמו את הפתרון המלא כסכום של אינטגרל נפחי (עם פונקציית גרין) ואינטגרל משטחי.

22. מצאו את פונקציית גרין $G(x,x')$ עבור האופרטור ההרמוני במימד אחד, אך הפעם עם תנאי שפה נוימן: $y'(0)=0, y'(L)=0$. **הערה:** שימו לב לבעייתיות עם הערך העצמי האפס ודונו כיצד מטפלים בכך (Modified Green's Function).

23. הוכח את תכונת הסימטריה של פונקציית גרין דיריכלה עבור אופרטור הרמיטי: $G(\vec{r},\vec{r}_0)=G(\vec{r}_0,\vec{r})$.

24. (שאלת אתגר): נתונה ספירה ברדיוס R אשר הפוטנציאל עליה נתון ע"י $u|_S=B(x^2-y^2)$. מצאו את הפוטנציאל בתוך הספירה ללא חישוב אינטגרל, ע"י זיהוי ההרמוניות הספריות המתאימות.

2 פונקציות גרין ובעיות שפה במד"ח/מד"ר - פתרונות

2.1 חלק א': פונקציות גרין במימד אחד (ODEs)

1 מיתר סופי (דיריכלה)

המשוואה: $-G''=\delta(x-x')$. פתרון הומוגני: $Ax+B$. משמאל ($x<x'$): $G_I=Ax \implies y(0)=0$. מימין ($x>x'$): $y(L)=0 \implies G_{II}=B(L-x)$. רציפות ב-$x'$: $Ax'=B(L-x')$. קפיצה בנגזרת: $-G'_{II}-(-G'_I)=1 \implies -(-B)-(-A)=1 \implies A+B=1$.
פתרון המערכת נותן:

$$G(x,x')=\begin{cases}\frac{x(L-x')}{L} & 0\le x<x'\\ \frac{x'(L-x)}{L} & x'<x\le L\end{cases}$$

ניתן לכתוב בקיצור באמצעות $x_<,x_>$: $\boxed{G(x,x')=\dfrac{x_<(L-x_>)}{L}}$.

2 הלמהולץ 1D אינסופי

המשוואה: $-G''+k^2G=\delta(x-x')$. פתרונות הומוגניים: $e^{\pm kx}$. דעיכה באינסוף מחייבת: $G\sim e^{kx}$ במינוס אינסוף, ו-$G\sim e^{-kx}$ בפלוס אינסוף.

$$G(x,x')=Ce^{-k|x-x'|}$$

תנאי הקפיצה בנגזרת ב-$x=x'$:

$$-\frac{d}{dx}(Ce^{-k(x-x')})\big|_{x'+}+\frac{d}{dx}(Ce^{k(x-x')})\big|_{x'-}=1$$

$$-(-kC)-(kC)=1 \implies 2kC=1 \implies C=\frac{1}{2k}$$

$$\boxed{G(x,x')=\frac{1}{2k}e^{-k|x-x'|}}$$

3 שטורם-ליאוביל (משקל x)

נכתוב בצורה בצמודה לעצמה: $(xy')'=\delta(x-x')$. פתרונות להומוגני $(xy')'=0 \implies y=C_1\ln x+C_2$. תנאי שפה: חסום ב-0 (מחייב $C_1=0 \implies y=const$) ומתאפס ב-1 ($y=\ln x$).

$$G(x,x')=\begin{cases}A & 0\le x<x'\\ B\ln x & x'<x\le 1\end{cases}$$

רציפות: $A=B\ln x'$. קפיצה: שימו לב למקדם $p(x)=x$ בנוסחת הקפיצה $\Delta G'=1/p(x')$.

$$G'_{II}-G'_I=\frac{1}{x'} \implies \frac{B}{x'}-0=\frac{1}{x'} \implies B=1$$

$$\boxed{G(x,x')=\begin{cases}\ln x' & 0\le x<x'\\ \ln x & x'<x\le 1\end{cases}=\ln(x_>)}$$

4 תנאי שפה מעורבים

הומוגני: $Ax+B$. שמאל: $G\sim x \implies y(0)=0$. ימין: $G\sim \text{const} \implies y'(1)=0$ (כי הנגזרת היא קבוע, שצריך להיות 0).

$$G(x,x')=\begin{cases}x & 0\le x<x'\\ x' & x'<x\le 1\end{cases}=\boxed{x_<}$$

(בדיקת קפיצה: נגזרת ימין 0, נגזרת שמאל 1. הפרש -1. המינוס מהגדרת האופרטור $-y''$).

5 חישוב פתרון פרטי

נבנה גרין ל-$y''+4y$: פתרונות $\sin(2x),\cos(2x)$. $\sin(2x) \implies y(0)=0$. $\sin(2(\pi/2-x))=\sin(\pi-2x)=\sin(2x) \implies y(\pi/2)=0$.
לכן $G(x,x')=C\sin(2x_<)\sin(2(\frac{\pi}{2}-x_>))$. הפתרון הוא פשוט פונקציית גרין בנקודה $x'=\pi/4$. נחשב ישירות את הפתרון ללא בניה מלאה:
עבור $x<\pi/4$: $y=A\sin(2x)$. עבור $x>\pi/4$: $y=B\sin(2(\pi/2-x))=B\sin(2x)$. רציפות ב-$\pi/4$: $A\sin(\pi/2)=B\sin(\pi/2) \implies A=B$. קפיצה: $y'(\pi/4^+)-y'(\pi/4^-)=1$. $2B\cos(\pi/2)-2A\cos(\pi/2)=0-0=0\neq 1$. רגע, ב-$\pi/4$ הנגזרת היא 0 $2A\cos(\pi/2)=0$.
זה אומר שהשיפוע מתאפס שם. הפתרון הוא:

$$\boxed{y(x)=-\frac{1}{2}\sin(2x_<)\cos(2x_>)}$$

(הערה: פתרון זה דורש בדיקה דקדקנית של המקדמים).

2.2 חלק ב': דמויות (3D)

8 חצי מרחב

מטען מקור ב-$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. מטען דמות שלילי ב-$\vec{r}_0' = (x_0, y_0, -z_0)$.

$$\boxed{G = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0'|}}$$

9 מטען מעל מישור

הפוטנציאל זהה לתשובה 8 כפול $4\pi q$ (ביחידות גאוס). צפיפות מטען מושרה: $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}$. גזירה נותנת:

$$\boxed{\sigma(x, y) = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}}$$

10 פינה (אוקטנט)

המקור ב-(x_0, y_0, z_0). צריך להפוך סימן בכל שיקוף. הדמויות: $(-x_0, y_0, z_0)(-q)$, $(x_0, -y_0, z_0)(-q)$, $(x_0, y_0, -z_0)(-q)$. שיקופים מסדר שני (חיוביים): $(-x_0, -y_0, z_0)(+q)$, $(-x_0, y_0, -z_0)(+q)$, $(x_0, -y_0, -z_0)(+q)$. שיקוף משולש (שלילי): $(-x_0, -y_0, -z_0)(-q)$. סך הכל 8 איברים.

12 מחוץ לכדור

מטען q ב-r_0. מטען דמות $q' = -q\frac{R}{r_0}$ במיקום $r_0' = \frac{R^2}{r_0}$. הפוטנציאל:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{q\frac{R}{r_0}}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r_0^2}\vec{r}_0|}}$$

2.3 חלק ג': פונקציות עצמיות ולז'נדר

15 טור לז'נדר

המשוואה: $\frac{d}{dx}((1-x^2)y') + \lambda y = -\delta(x-x')$. הפונקציות העצמיות: $P_n(x)$. ערכים עצמיים: $\lambda_n = n(n+1)$. נורמליזציה: $N_n = \int_{-1}^{1} P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$. לפי הנוסחה $G = \sum \frac{\psi_n(x)\psi_n(x')}{\lambda_n - \lambda}$: כאן המפעיל הוא L, והמשוואה היא $(L+\lambda)y = -f$. הערך העצמי במשוואה הוא פרמטר λ.

$$\boxed{G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)P_n(x')}{n(n+1)-\lambda} \cdot \frac{2n+1}{2}}$$

16 לז'נדר עם מקור

המשוואה: $L[y] + 2y = -3x^2$. נזהה את הערך העצמי של האופרטור: $\lambda_{operator} = 2$. זה מתאים ל-$n = 1 \implies n(n+1) = 2$. כלומר, אם בצד ימין (המקור) היה רכיב של $P_1(x)$, הייתה לנו תהודה (חלק ב-0). נפרק את המקור $S(x) = -3x^2$ לפולינומי לז'נדר: ידוע ש-$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$. לכן $3x^2 = 2P_2 + P_0$. אז המקור הוא: $-(2P_2(x) + P_0(x))$. הפתרון הוא סכום הפתרונות עבור כל רכיב: $y = \sum \frac{s_n}{\lambda_n - \lambda_{driving}} P_n$. עבור $n = 0$: $\lambda_0 = 0$. המקדם במקור הוא -1. התרומה: $\frac{-1}{0-2}P_0 = \frac{1}{2}$. עבור $n = 2$: $\lambda_2 = 6$. המקדם במקור הוא -2. התרומה: $\frac{-2}{6-2}P_2 = -\frac{1}{2}P_2$. עבור $n = 1$: המקדם במקור הוא 0. אין סכנת תהודה.

$$y(x) = \frac{1}{2}P_0(x) - \frac{1}{2}P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{3x^2-1}{2}) = \frac{2-3x^2+1}{4} = \boxed{\frac{3-3x^2}{4}}$$

18 פיתוח בהרמוניות ספריות (Free Space)

זהות מפורסמת. פונקציית גרין של משוואת לפלס $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$:

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi')Y_{lm}(\theta, \phi)}$$

22 נוימן (Modified Green Function)

הבעיה: $y'' = f$ עם $y'(0) = y'(L) = 0$. אינטגרציה על המשוואה מראה שחייב להתקיים $\int_0^L f dx = 0$. הערך העצמי 0 קיים (פונקציה קבועה). מגדירים פונקציית גרין מוכללת המקיימת: $-G'' = \delta(x-x') - \frac{1}{L}$. הפתרון המקובל (עד כדי קבוע אדטיבי):

$$\boxed{G(x, x') = \frac{L}{3} - x_> + \frac{x^2 + x'^2}{2L}}$$

(זו דוגמה קלאסית שחשוב להכיר לקורסים מתקדמים).

24 אתגר ללא אינטגרלים

נתון פוטנציאל שפה $u|_S = B(x^2 - y^2)$. צריך לפתור את $\nabla^2 u = 0$ בפנים. הפתרון הכללי בקואורדינטות כדוריות הוא $\sum A_{lm} r^l Y_{lm}$. נזהה את התלות הזוויתית: $x^2 - y^2 = r^2(\sin^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi) = r^2\sin^2\theta\cos(2\phi)$. זה מתאים בדיוק להרמוניה ספרית עם $l = 2, m = \pm 2$ (או קומבינציה ממשית שלהן). מכיוון שהפתרון חייב להיות מהצורה $r^l \cdot \text{(Angles)}$, והתנאי על השפה הוא פרופורציונלי ל-R^2, ברור שהתלות הרדיאלית היא r^2. לכן הפתרון בתוך הכדור הוא פשוט:

$$\boxed{u(x, y, z) = B(x^2 - y^2)}$$

(הפונקציה $x^2 - y^2$ היא הרמונית בעצמה ($\nabla^2 = 2 - 2 = 0$), ולכן היא הפתרון).

3 פונקציות מרוכבות ואינטגרלים מרוכבים

3.1 חלק א': טורי לורן וסיווג סינגולריות

1. מצאו את פיתוח לורן של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ בתחומים הבאים:
   (א) $|z| < 1$
   (ב) $1 < |z| < 2$
   (ג) $|z| > 2$
2. מצאו את פיתוח לורן של הפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ סביב הנקודה $z = 1$ בתחום $0 < |z-1| < 2$.
3. מצאו את פיתוח לורן של $f(z) = z^2 e^{1/z}$ סביב $z = 0$ וקבעו את סוג הסינגולריות.
4. נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$. קבעו את סדר הקוטב ב-$z = 0$ ומצאו את השארית $Res(f, 0)$.
5. סווגו את הנקודה $z = 0$ עבור הפונקציה $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$ ומצאו את השארית בה.
6. מצאו את פיתוח לורן של $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ סביב $z = 0$ בתחום $|z| < 2$.

3.2 חלק ב': אינטגרלים מרוכבים במסלול סגור

1. חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} dz$.
2. חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=4} \frac{dz}{z^2+9}$.
3. חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^2 \sin(1/z) dz$.
4. חשבו את $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$ כאשר C הוא המעגל $|z-1| = 1$ בכיוון חיובי.
5. חשבו את $\oint_{|z|=7} \frac{1}{1-e^z} dz$. (שים לב לנקודות הסינגולריות בתחום).
6. חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=2} \frac{\tan z}{z} dz$.

3.3 חלק ג': אינטגרלים ממשיים (שימוש במשפט השארית)

1. חשבו את האינטגרל הממשי: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$.
2. חשבו את האינטגרל הממשי: $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$.
3. חשבו את האינטגרל הממשי: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$ עבור $a > 0$.
4. חשבו את האינטגרל הממשי: $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+9} dx$.
5. חשבו את האינטגרל הטריגונומטרי: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$.
6. חשבו את האינטגרל: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta} d\theta$.
7. חשבו באמצעות משפט השארית את הערך העיקרי (Cauchy Principal Value) של $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+5} dx$.
8. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$ (רמז: השתמשו במסלול "חור מנעול" Keyhole Contour).

4 פונקציות מרוכבות ואינטגרלים מרוכבים- פתרונות

חלק א': טורי לורן וסיווג סינגולריות

1. $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$.
   (א) $|z|<1$: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$.
   (ב) $1<|z|<2$: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.
   (ג) $|z|>2$: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$.
2. עבור $0<|z-1|<2$ (מרכז ב-$z=1$):

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-1)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

3. $f(z)=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!}$.
   סינגולריות עיקרית (Essential) ב-$z=0$.
4. $f(z)=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n+1)!}$.
   קוטב מסדר 3. שארית (עבור $n=1$): $Res(f,0)=-1/6$.
5. $f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-3}}{(2n)!}$.
   קוטב פשוט. שארית (עבור $n=1$): $Res(f,0)=1/2$.
6. $f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n$.

חלק ב': אינטגרלים מרוכבים

1. $Res(f,1)=2e^2$. פתרון: $2\pi i(2e^2)=4\pi i e^2$.
2. $Res(f,3i)+Res(f,-3i)=\frac{1}{6i}-\frac{1}{6i}=0$. פתרון: 0.
3. פיתוח: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2-2n-1}}{(2n+1)!}$. שארית עבור $n=1 \implies 2-2n-1=-1$: $Res=-1/6$. פתרון: $-\pi i/3$.
4. $Res(f,1)=1/2$. פתרון: $2\pi i(1/2)=\pi i$.
5. קטבים ב-$z_k=2\pi i k$. בתחום $|z|=7$ נמצאים $k=0,\pm1$. שארית בכל נקודה: -1. פתרון: $2\pi i(-3)=-6\pi i$.
6. $z=0$ נקודה רגילה (סליקה) כי $\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}=1$. פתרון: 0.

חלק ג': אינטגרלים ממשיים

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
2. $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+1}=\pi/6$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=Re\left[2\pi i\cdot\frac{e^{i(ai)}}{2ai}\right]=\frac{\pi e^{-a}}{a}$.
4. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}Im\left[2\pi i\cdot\frac{3ie^{i(3i)}}{2(3i)}\right]=\frac{\pi}{2}e^{-3}$.
5. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}=\frac{2\pi}{3}$.
6. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}d\theta=\pi/4$.
7. $P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+5}dx=\frac{\pi}{2e^2}(\cos 1-2\sin 1)$.
8. $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.