מטלת מנחה (ממ"ן) 04

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

ענו על 5 שאלות מתוך 6 השאלות, לבחירתכם.

שאלה 1 (20 נקודות)

מוט באורך h מחובר בקצה אחד לאמבט קר בטמפרטורה T_L ובקצה השני לאמבט חם בטמפרטורה T_H, כלומר $T(x=0)=T_L,\ T(x=h)=T_H$. המוליכות התרמית של המוט היא κ.

נתונה התפלגות האנרגיה ההתחלתית:

$$T(x,t=0)=T_L+\frac{(T_H-T_L)}{h^2}\cdot x\cdot(2h-x)$$

א. מצאו את הטמפרטורה במוט כעבור זמן רב מאוד, שנסמנה ב-$T_\infty(x)$.

ב. נגדיר את החלק הדינמי של התפלגות החום:

$$T_d(x,t)=T(x,t)-T_\infty(x)$$

מהם תנאי השפה ותנאי ההתחלה שמקיים החלק הדינמי $T_d(x,t)$?

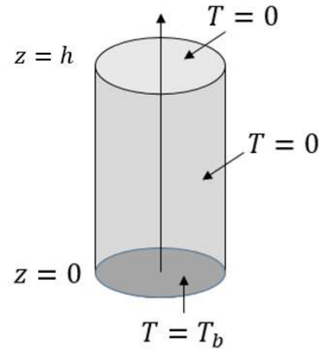
ג. מצאו את הפתרון עבור $T_d(x,t)$.

ד. מצאו את טמפרטורת המוט בכל מיקום וזמן שהוא, $T(x,t)$.

ה. מצאו את צפיפות שטף החום העובר במוט כעבור זמן רב מאוד.

שאלה 2 (20 נקודות)

מוט גלילי בעל רדיוס a וגובה h מוחזק כך שדפנתו התחתונה ב-$z=0$ מוצמדת לאמבט בטמפרטורה T_b. המעטפת הגלילית והדופן העליונה מוחזקות בטמפרטורה $T=0$.



א. מצאו את הטמפרטורה במוט כעבור זמן רב מאוד, שנסמנה ב-$T_\infty(\rho,z)$ (בקואורדינטות גליליות).

ב. נגדיר את החלק הדינמי של התפלגות החום:

$$T_d(\rho,z,t)=T(\rho,z,t)-T_\infty(\rho,z)$$

מהם תנאי השפה ותנאי ההתחלה שמקיים החלק הדינמי $T_d(\rho,z,t)$?

ג. מצאו את הפתרון עבור $T_d(\rho,z,t)$. ניתן להשאיר את תשובתכם בצורה של אינטגרל.

ד. מצאו את טמפרטורת המוט בכל מיקום וזמן שהוא, $T(\rho,z,t)$. ניתן להשאיר את תשובתכם בצורה של אינטגרל.

שאלה 3 (20 נקודות)

משוואת הגלים עבור גלי הקול המתפשטים בגז אידיאלי היא

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

כאשר $p(r,\theta,\phi,t)$ הוא הלחץ.

נרצה למצוא את מספרי הגל האפשריים לגלי קול בנפח שבין שתי קליפות כדוריות בעלות רדיוסים a,b ($b>a$). תנאי השפה על הקליפות הוא תנאי שפה נוימן

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r=a) = \frac{\partial p}{\partial r}(r=b) = 0$$

א. מצאו פתרון כללי מופרד משתנים עבור גלי קול בעלי סימטריה צירית ביחס לציר z בין הקליפות (כלומר אין תלות בזווית ϕ), ללא התחשבות בתנאי השפה.

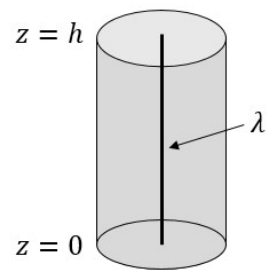
ב. ע"י דרישת תנאי השפה, קבלו משוואה שמגדירה את מספרי הגל k האפשריים (עבור ℓ נתון) עבור גלים אלה.

ג. כעת הניחו שהסימטריה כדורית (כלומר $\ell = 0$). כתבו משוואה עבור מספרי הגל k האפשריים ופשטו אותה ככל האפשר.

ד. הראו שיש אינסוף פתרונות בדידים עבור המשוואה שמצאתם בסעיף ג. לצורך כך העבירו את הפונקציות הטריגונומטריות לצד אחד של המשוואה, את הפונקציות האלגבריות לצד שני, ציירו את שני אגפי המשוואה והראו שקיימות אינסוף נקודות חיתוך.

שאלה 4 (20 נקודות)

נתון גליל המוארק בשפתו, שרדיוסו a וגובהו h. דרך צירו המרכזי עובר תיל טעון במטען λ ליחידת אורך.



א. מצאו את הצפיפות הנפחית של המטען במערכת, $\rho(\boldsymbol{r})$.

ב. השתמשו בתוצאות שאלה 15 במדריך הלמידה ביחידה 5 (פונקציית גרין עבור גליל) כדי למצוא את הפוטנציאל החשמלי בכל נקודה בתוך הגליל.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. כתבו את משוואת גרין שמגדירה את פונקציית גרין היסודית בשני מימדים, עבור משוואת פואסון. מסימטריה, ניתן להניח שפונקציית גרין $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ היא פונקציה של $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ בלבד.

בספר אמנם מופיעה הנוסחה (21.93) לפונקציית גרין הדו-מימדית, אך בסעיפים ב ו-ג תצטרכו להוכיחה באמצעות התמרת פורייה.

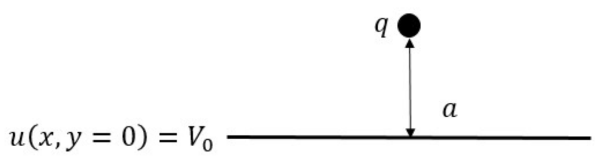
ב. בצעו התמרת פורייה על שני צידי המשוואה שכתבתם בסעיף א, ובודדו את ההתמרה של פונקציית גרין, $\tilde{G}(k_x,k_y)$.

ג. כעת בצעו התמרת פורייה הופכית ומצאו את פונקציית גרין המתאימה, $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$.

ד. בעולם דו-מימדי מטען נקודתי q נמצא על ציר ה-y במרחק a מעל תיל אינסופי שנמצא בציר x. הפוטנציאל על הלוח מאולץ להיות

$$u(x,y=0)=V(x)=\frac{V_0}{1+\frac{x^2}{d^2}}$$

מצאו את הפוטנציאל בכל המישור.



שאלה 6 (20 נקודות)

פתרו את שאלה 21.8 מספר הלימוד:

21.8 The motion of a very viscous fluid in the two-dimensional (wedge) region $-\alpha<\phi<\alpha$ can be described, in (ρ,ϕ) coordinates, by the (biharmonic) equation

$$\nabla^2\nabla^2\psi\equiv\nabla^4\psi=0,$$

together with the boundary conditions $\partial\psi/\partial\phi=0$ at $\phi=\pm\alpha$, which represent the fact that there is no radial fluid velocity close to either of the bounding walls because of the viscosity, and $\partial\psi/\partial\rho=\pm\rho$ at $\phi=\pm\alpha$, which impose the condition that azimuthal flow increases linearly with r along any radial line. Assuming a solution in separated-variable form, show that the full expression for ψ is

$$\psi(\rho,\phi)=\frac{\rho^2}{2}\,\frac{\sin 2\phi-2\phi\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}.$$