פתרון:

שאלה 1 א.
צריך לחשב את התנ"ז של טבעת דקה ברדיוס R, שמסתובבת עם זמן מחזור T ושוקלת m.
בפתרון הרשמי הם פותרים את זה בצורה קצת לא אינטואיטיבית, הם לוקחים את התנז של מסה נקודתית, עושים את ההחלפה:

$$v = \omega R = 2\pi f R = \frac{2\pi R}{T}$$

מציבים בנוסחא עבור תנ"ז נקודתי:

$$L = mvR = \frac{2\pi m R^2}{T}$$

וזו התשובה.
אני רוצה להראות דרך קצת יותר מורכבת אבל היא מתאימה למגוון רחב יותר של צורות.
נניח שהתנ"ז של קטע אינטיפיסימלי בטבעת שווה ל $dL = dmvr$.
ניתן לכתוב את dm כ- $dm = \rho dl$, כש- ρ היא הצפיפות של הטבעת- $\rho = \frac{m}{2\pi R}$. dl זה כמובן קטע אינפיטיסימלי בטבעת שניתן לכתוב כ- $dl = Rd\theta$.
מכאן שהתנ"ז עבור קטע קטן בטבעת הוא (עם v שמצאנו מקודם):

$$dL = \tfrac{m}{2\pi R}\tfrac{2\pi R}{T}R^2 d\theta$$

נותר לקחת את האינטרגל על פני כל הטבעת וקיבלנו את התשובה:

$$L = \tfrac{m}{2\pi R}\tfrac{2\pi R}{T}R^2\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{2\pi m R^2}{T}$$

ב. המומנט המגנטי $\mathbf{M}$ מוגדר כ- $\mathbf{M} = I\mathbf{A}$, כש $\mathbf{A}$ הוא השטח פנים שהמעגל שעליו הטבעת נמצאת.

$$I = Qf = \frac{Q}{T}$$

$$M = \frac{Q}{T}\pi R^2$$

ג.

$$\alpha = \frac{M}{L} = \frac{Q}{2m}$$

ד.
α תלוי רק ב- Q ו- m, ולא בתכונות הגיאומטריות שלו. לכן ההיחס פרופורציה של כדור יהיה זהה ליחס שמצאנו בג'.

2.
בסעיפים א'-ג' מדובר על אפקט קומפטון למרות שלא אומרים את זה באופן מפורש. אפקט קומפטון מדבר על השינוי באורך גל של פוטון שפוגע בגוש חומר מוצק. אבל הנוסחאות שבעזרתן מחשבים את השינוי באורך גל מגיעות משימור אנרגיה ושימור תנע שבהן ההנחה היא שהאלקטרון חופשי (לא בתוך חומר) ובמנוחה. אם האנרגיה של הפוטון גבוהה מאוד, כמו בקרני - X , והאנרגיה שקושרת את האלקטרון לאטום זניחות באופן יחסי, ניתן להניח שהאלקטרון במנוחה וחופשי.

א נתון:

$$\lambda(\theta) = 1.1\lambda_0$$

נציב ב:

$$\lambda(\theta) - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1-\cos(\theta))\Big|_{\theta=\pi}$$
$$\lambda_0 = \frac{2h}{0.1 m_e c} = 0.0486 \text{ nm} = 0.4861 \text{ Å}$$

ב. האנרגיה המקסימלית שהאלקטרון "הרוויח" היא האנרגיה שהפוטון איבד:

$$E = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda(\theta)} = \frac{hc}{\lambda_0}\left(1 - \frac{1}{1.1}\right) = 2.32 \text{ KeV}$$

ג.
אורך גל דה ברולי של האלקטרון הוא :

$$\lambda = \frac{h}{p}\ ; \quad E = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m_e E}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = 0.2551 \text{ Å}$$

ד.
הניסוח פה נורא מבלבל, כשאומרים עקיפה חושבים בד"כ על קרן שעברה בתוך חומר מסויים ויצאה מהצד השני שלו (בערך כמו ניסוי יאנג). בעקיפה בגביש הכוונה היא שהקרן חדרה את השכבה הראשונה של האטומים ובין השכבה הראשונה לשנייה יש התאבכות. הקרן מוחזרת משכבה השנייה של האטומים לשכבה הראשונה והחוצה ממנה וזו בעצם ההחזרה בגביש.
עבור החזרה בגביש:

$$2d\sin\phi = n\lambda$$

$$d = \frac{0.486 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 1 \cdot \sin(15^\circ)} = 0.094 \text{ nm}$$

ה.

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{2d}$$

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 15^\circ$$
$$n=2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 31^\circ$$
$$n=3 \quad \Rightarrow \quad \theta = 51^\circ$$

ו. האנרגיה של האלקטרון תלוייה מן הסתם באורך גל שלו. אומרים שמשתמשים באותו גביש כמו בסעיף ד', ומקבלים עקיפה עם החזרה מקסימלית באותה זווית כמו סעיף ד'. כלומר האורך גל חייב להיות זהה לבעיה בסעיף ד', וזה בעצם האורך גל שחישבנו בסעיף א'.

$$\lambda_0 = 0.4861 \text{ Å}$$

את האנרגיה של האלקטרון אפשר למצוא בעזרת :

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} \;\; = 652.9 \text{ ev}$$

נבדוק האם יש צורך לחשב את האנרגיה היחסותית של האלקטרון. האנרגיית מנוחה של אלקטרון יחסותי היא $E_0 = m_e c^2 = 512$ KeV

$$\frac{E}{E_0} = \frac{652.9}{512000} = 0.128\%$$

נמוך בהרבה מ 10% ולכן אין צורך באנרגייה יחסותית.

שאלה 3.
א.

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 3 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

$$\lambda_f = \lambda_0 + A(1-\cos\theta)\Big|_{\theta=\pi} = 1 \cdot 10^{-10} + 2 \cdot 0.00243 \text{ nm} = 1.0491 \text{ Å}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda_f} = 2.86 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

ב. **(i)** לפי שימור תנע, אם כל התנע ההתחלתי של הפוטון בכיוון $\hat{x}$, אז כל התנע הסופי שלו יהיה בכיוון $-\hat{x}$. אם לאלקטרון תנע התחלתי 0, אז לאחר מכן התנע שלו יהיה רק בכיוון $\hat{x}$. **(ii)**

$$h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(iii)

$$\frac{h}{c}\nu_0 + 0 = -\frac{h}{c}\nu + \frac{m_e v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ג. מהמשוואה לשימור אנרגיה:

$$\frac{h(\nu_0-\nu)+m_e c^2}{m_e c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v^2/c^2 = 1 - \frac{m_e^2 c^4}{(h(\nu_0-\nu)+m_e c^2)^2}$$

$$v = 1.42 \cdot 10^7 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.047 \text{ c}$$

ד.

$$-\frac{h}{c}(\nu+\nu_0) + \frac{m_e v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -1.295 \cdot 10^{-23} + 1.295 \cdot 10^{-23} = 0$$

שאלה 4.
א. נחשב את r_n באותה צורה שחישבו בספר:

$$E = \frac{-ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad E = E_p + \frac{1}{2}|E_p|$$
$$E = -\frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

תנאי הקוונטיזציה הוא: $L = mvr = \hbar n$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar b}$$

$$r_n = \frac{\hbar n}{mv} = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{z\pi m_e e^2}$$

ב.

$$E = \frac{-ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{-z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}\Big|_{z=2} = -\frac{1}{n^2}\frac{e^4 m_e}{2\epsilon_0^2 h^2}$$

ג.

$$E_{n_2 \to n_1} = E_{n_2} - E_{n_1} = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{n_2^1} - \frac{1}{n_1^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c}}_{R'_\infty}\left(\frac{1}{n_2^1} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

אפשר לחשב גם כאן את המסה המצומצמת של המערכת, אבל היא שווה ל $m' = 0.9998 m_e$.
קבוע רידברג שווה ל- $R_\infty = \frac{m' e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{0.99945 m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$ כשכאן m' זו המסה המצומצמת של אטום המימן.

$$\frac{R'_\infty}{R_\infty} = Z^2 \quad \Rightarrow \quad R'_\infty\Big|_{z=4} = 4R_\infty = 4.3895 \cdot 10^7$$

ד. עבור אורך הגל הראשון בסדרת לימן:

$$\frac{1}{\lambda} = R'_\infty\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 30.4 \text{ nm}$$

ואורך הגל של הקו הראשון בסדרת פאשן הוא:

$$\frac{1}{\lambda} = R'_\infty\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 468.7 \text{ nm}$$

שאלה 5.

א.+ב. נפתור את השאלה באותה הצורה כמו בשאלה הקודמת, נמצא ביטוי לאנרגיה הכוללת שתלוי רק ב-r, נשווה בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית ונמצא את r_n בעזרת תנאי הקוונטיזציה:

$$E_T = \underbrace{\frac{1}{2}kr^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_k}$$

$$F_r : -kr = ma_r = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad -kr = mv^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}|-kr| = \frac{1}{2}kr = |E_p|$$

$$E_T = 2E_p = kr^2$$

נשתמש בתנאי הקוונטיזציה:

$$L = mvr = n\hbar \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n\hbar}{mv}$$

$$E_p = E_k$$

$$kr^2 = mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2}$$

$$\Rightarrow r_n^4 = \frac{n^2\hbar^2}{mk} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2\omega^2}$$

$$E_n = kr_n^2 = k\frac{n\hbar}{\sqrt{mk}} = \omega n\hbar$$

ג.

אם האור היה נפלט כתוצאה ממערכת עם פוטנציאל הרמוני, אורכי הגל שהיינו מקבלים היו:

$$\frac{hc}{\lambda} = \Delta E = \omega\hbar(n_f - n_i)$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega(n_f - n_i)}$$

אבל אנחנו יודעים שאורכי הגל של האור שנקבל מאטום מימן נתונים ע״י הביטוי שקיבלנו בשאלה 4. ז״א שכן, ניתן להבדיל ע״י בחינה של האור הנפלט.

שאלה 6.

בעבודה :)