

מטלת מנחה (ממ"ל) 01

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלת: פרקים 1+2

שאלה 1

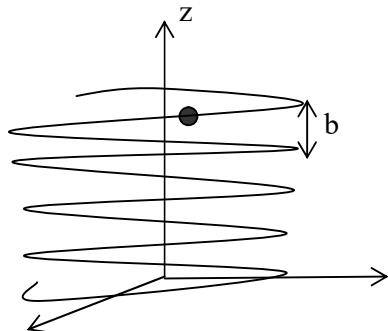
- a. כתבו את הלגראנז'יאן של אונסיצילטור הרמוני חד-ממדי וցור ממנו את משוואות התנועה שלו.
b. קבלו את משוואות התנועה מן הלגראנז'יאן הבא

$$L = \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{K}{2} x^2 \right) e^{\gamma t}$$

מהי המערכת המתוארת על-ידי לגראנז'יאן זה?

שאלה 2

חרוז בעל מסה m מחליק תחת השפעת הכבידה על סליל בעל רדיוס a . המרחק בין הלוואות b (ראה איור).



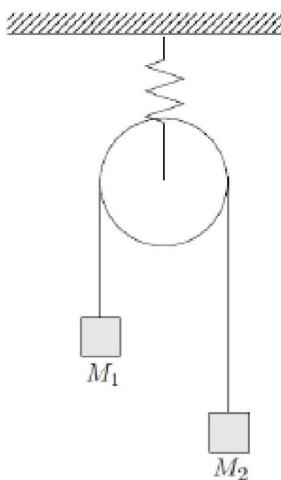
$$z = \frac{\theta b}{2\pi}$$

1. כתבו את הלגראנז'יאן של המערכת בקואורדינטות גליליות.
2. כתבו את משוואת התנועה של המערכת (עבור זווית θ)
ופתרו אותה.
3. בדקי את התוצאה של הסעיף הקודם עבור המקרים הבאים:

$$a > b \quad .1$$

$$a < b \quad .2$$

שאלה 3



נתונה מערכת בעלת שלושה גופים: מסות M_1 ו- M_2 הקשורות בינהן בחוט חסר מסה (בעל אורך קבוע L) וגלגלת בעלת מסה M ורדיוס R התלויה בקפיץ בעל קבוע K ואורך מנוחה l_0 . מומנט האינרגזיה של הגלגלת J .

1. הגדרו קואורדינטות מוכללות נוחות לבעה וכתבו את הלגראנז'יאן כפונקציה של הקואורדינטות שבחורתם ונגזרותיהם.
2. מצאו את שתי משוואות התנועה.
3. פתרו את משוואות התנועה כאשר הקפיץ תקין והגלגלת אינה יכולה לנוע בכיוון האנכי.

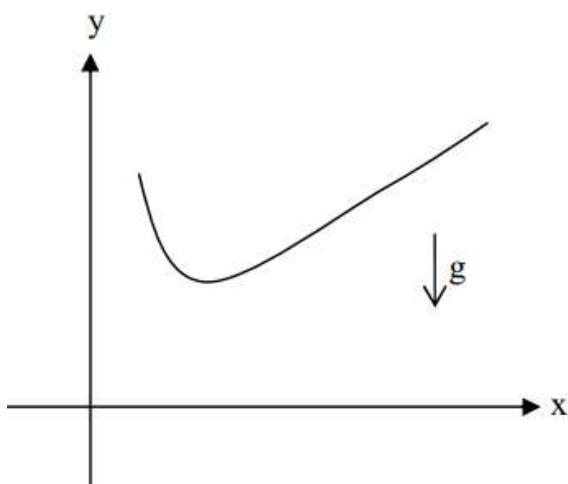
שאלה 4

אלקטرون (מסה m ומטען (e) -יחסותי נع בשדה חשמלי אחיד וקבוע \mathbf{E}). תנועתו נקבעת על-ידי הלגראנז'יאן היחסותי המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

1. גזרו את משוואות התנועה בשדה בעל כוון כללי.
2. קבלו את משוואות התנועה במערכת צירים שנבחרה כך שציר Z הוא בכוון השדה. האם בחירה זו מגבילה את הכלליות?
3. הראו כי שני רכיבי התנועה היחסותי הניצבים לכיוון השדה החשמלי הם קבועים.
4. פתרו את משוואות התנועה כאשר הגוף מתחילה לנוע מראשית הצירים מנוחה.

שאלה 5



שרשרת שאורכה l ומסתה ליחידת אורך μ ,

תלויה בקצוותיה בנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2)

. על השרשרת פועל כוח הכבידה (ראו ציור).

מצאו את הצורה של השרשרת בעזרת עיקנון הוריינטי, על פי השלבים הבאים:

1. הראו כי האנרגיה הפוטנציאלית של

השרשרת היא:

$$U = \mu g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

2. מצאו את צורת השרשרת.

הדרכה: השרשרת תשאף להקטין את האנרגיה הפוטנציאלית שלה, תחת האילוץ שאורכה

הcoil נקבע.

מטלת מנחה (مم"א) 02

קורס: מכנית אונליינית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרק 3 (חוץ מתת פרק 12)

שאלה 1

חקיק שמסתו m נע במרחב בהשפעת הפוטנציאלי $V(r) = \beta r^3$.

א. רשמו את משוואות התנועה עבור תנועה זוויתית קבועה - L (שונה מאפס).

ב. החלקיק נע בתנועה מעגלית. מצאו את רדיוס המסלול של החלקיק - r_0 , כפונקציה של התנועה הזוויתית L .

שאלה 2

חקיק שמסתו m והתנע הזוויתי שלו L נع בנסיבות פוטנציאלי מרכזי:

$$V(\vec{r}) = -V_0 \exp(-\lambda^2 r^2)$$

כאשר λ ו- V_0 קבועים חיוביים.

- א. רשמו ביטוי לפוטנציאלי האפקטיבי כפונקציה של r והתנע הזוויתי.
- ב. החלקיק נע במסלול מעגלי שרדיוויס R . קבלו ביטוי לתנע הזוויתי L כפונקציה של רדיוס המסלול.
- ג. מהו הרדיוס המקסימלי שעבורו תיתכן תנועה מעגלית יציבה (ש"מ יציב)?
- ד. מהו הערך המקסימלי של התנע הזוויתי שעבורו תיתכן תנועה מעגלית יציבה (ש"מ יציב)?
- ה. האם תיתכן תנועה מעגלית כאשר רדיוס המסלול R מקיים

I. $V_{eff}(R) < 0$

II. $V_{eff}(R) \geq 0$

נמקו בעזרת חישוב וشرطוט מתאים.

שאלה 3

חלקיק נע במשור בהשפעת פוטנציאלי מרכזי. המסלול מתואר על-ידי הנוסחה $\theta = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha$,

כאשר r הוא המרחק ממרכז הכוח, θ הزاوية שיוצר החלקיק עם ציון \hat{x} ו- \hat{r}_0 הוא מרחק החלקיק מהראשית בזווית $0 = \theta$. האנרגיה והתנע הזוויתי של המערכת ידועים ושווים ל-E ו-L בהתאם.

- חשבו את האנרגיה הפוטנציאלית ואת הכוח הפועל על החלקיק כפונקציה של r .
- מצאו את המהירות (כל הרכיבים) כפונקציה של r .
- האם ניתן מסוולים סגורים שאינם מעגליים בפוטנציאלי שקיבלתם בסעיף א? נמקו.

שאלה 4

חשבו את חתך הפעולה **לבליעה** של חלקיק בעלי אנרגיה E ותנע זוויתי L מפוטנציאלי $U(r) = -\frac{B}{r^2}$ עם $B > 0$.

הדרך: חתך הפעולה לבליעה הוא $b_{\max}^2 \pi b_{\max}^2$ כאשר b_{\max} הוא פרמטר הפגיעה הגבולי כך שהמסלולים בעלי b גדולים ממנו אינם מסתויים ב- $0 \rightarrow r$.

שאלה 5

חלקיק נקודתי מפוזר מפניו של גוף סיבוב הנוצר על ידי סיבוב העקומה $y^2 + z^2 = R$ סביב ציר z . מהירותו ההתחלתית של החלקיק היא בכיוון z . הנח שהפיזור אלסטי וכי גוף הסיבוב נשאר במקומו.

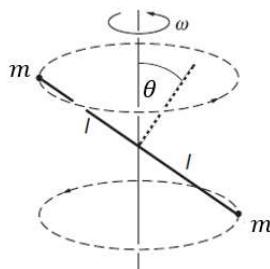
חשבו את חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור החלקיק הנקודתי מגוף הסיבוב.

מטלה מנחה (ממ"א) 03

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: פרקים 4+5 (חוץ מ-5.8 ו-5.9)

שאלה 1



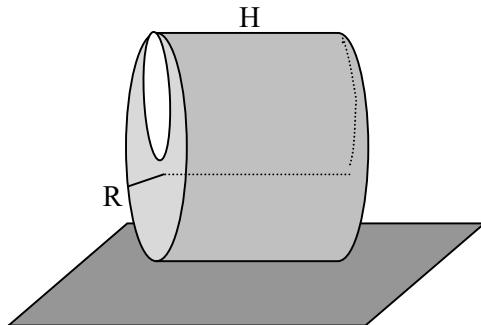
נתון מוט חסר מסה שאורכו ℓ ובכל אחד מקצתו מסה נקודתית m . המוט מאולץ להסתובב בתדרות זוויתית קבועה ω סיבוב ציר העובר דרך מרכזו ויוצר עם המוט זווית קבועה θ .

בחרו 2 מערכות ציריים:

1. מערכת אינרציאלית S שבה ציר הסיבוב הוא ציר z ומישור yx ניצב לו. ברגע $t = 0$ המוט נמצא במישור zx .
2. מערכת \bar{S} המסתובבת עם המוט שבה ציר \bar{z} מתלכד עם ציר z בכל זמן וציריים \bar{x}, \bar{y} מתלכדים עם הציריים yx בזמן $t = 0$.
 - א. חשבו את רכיבי טנזור ההתמדה I במערכת \bar{S} .
 - ב. חשבו את הערכיים העצמיים של I . הסבירו מה קיבלתם.
 - ג. מצאו את וקטור התנוע הזוויתי במערכת \bar{S} המסתובבת עם המוט.
 - ד. מצאו את וקטור התנוע הזוויתי במערכת האינרציאלית S .

שאלה 2

בגליל ברדיוס $R = 2R_0$ ואורך $H = \sqrt{3}R_0$ העשו מחרומר שצפיפותו (אחדה) ρ יש חלל בצורת גליל באותו אורך אולם ברדיוס R_0 . הגליל מונח בשיווי משקל על שולחן כמוראה באיזה.



- א. מצאו את מקומו של מרכז המסה של הגוף.
בטאו תשובותכם כתלות במרחק ממרכז הגליל הגדל. (אין צורך לחשב אינטגרלים לשם פתרון הבעיה.).
- ב. העזרו במשפט שטיינר, וחשבו את מומנטי ההתמד הראשיים של הגליל ביחס לקו המגע עם השולחן.
- ג. הגiley מתגלגל על השולחן ללא החלקה. כתבו את הלגראנזיאן של הגiley הנע.
- ד. קבלו את משוואות התנועה של הגiley. האם מהירות הזרויתית של הגiley קבועה? הסבו.

שאלה 3

- א. רשמו את הלגראנזיאן של סיבון סימטרי חופשי ($I_1 = I_2 \neq I_3$) כאשר הקואורדינטות המוכללות הן זויות אוילר.
- ב. רשמו את התנע הצמוד לכל אחת מהקואורדינטות.
- ג. האם יתכן מצב שבו $P_\phi = P_\psi$? אם לא – נמקו, אם כן – מצאו זויות אוילר עבורן מתקיים השוויון.

שאלה 4

גליל שרדיוסו R , גובהו L ומסתו M מסתובב סביב מרכז המסה שלו.

סיבוב הגליל סביב מרכז המסה שלו נתון ע"י

$$\phi(t) = \alpha t ; \quad \theta(t) = \beta t^2$$

(ה转弯ות ψ, θ, ϕ הן זוויות אוילר והן מוגדרות בעמודים 209-210 בספר הלימוד.)

א. רשמו את תנועת התumed של הגליל

ב. קובלו ביטוי לקטור מהירות ה转弯ות $\dot{\phi}$ כפונקציה של הזמן במערכת הגליל.

ג. העזרו במשוואות אוילר, וחשבו מהו המומנט החיצוני \vec{N} שיש להפעיל על הגליל כדי

שסיבובו סביב מרכז המסה שלו יתואר לפי סעיף ב.

1. במערכת הגוף (x_1, x_2, x_3)

2. במערכת המעבדה (x, y, z)

במערכת המעבדה אין צורך לקבל את הביטויים הסופיים עבור \vec{N} . מספיק להסביר

איך מתקבלים אותם.

שאלה 5

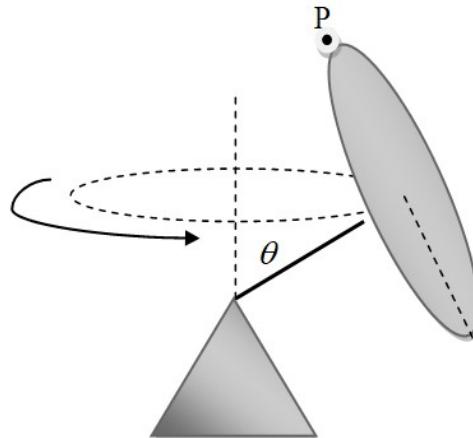
דיסקה איחידה שמסתה M ורדיוסה R , מחוברת במרכזו למוט חסר מסה שאורכו l . קצה אחד

של המוט מחובר למרכז הדיסקה והקצה השני של המוט מחובר לנקודה קבועה (ראו איור).

הנקודה P נמצאת במקום הגבוה ביותר בדיסקה. מסובבים את הדיסקה ב מהירות זוויתית Ω ,

באופן כך שה转弯ות שיוצר המוט עם האxis θ הוא קבוע ושהנקודה P נשארת הנקודה הגבוהה

ביותר בדיסקה. (שים לב - הדיסקה לא יכולה להסתובב סביב המוט.)



רשמו את רכיבי וקטור מהירות ה转弯ות במערכת הצירים הראשיים של הדיסקה.

א. מהו התנע הזוויתי של הדיסקה?

ב. השתמשו במשוואת אוילר ומיצאו את מהירות ה转弯ות Ω המאפשרת תנועה זו.

מה התנאי שציר לקיים היחס l/R כדי שהתנעזה תתאפשר?

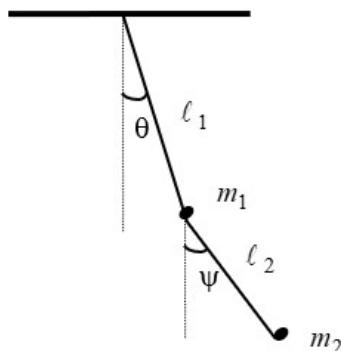
מטלת מנחה (ממ"א) 04

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלה: תנודות פרק 6 (חוז 6.5 ו- 6.6) והAMILTONIAN פרק 8
(חוז מ-4)

שאלה 1

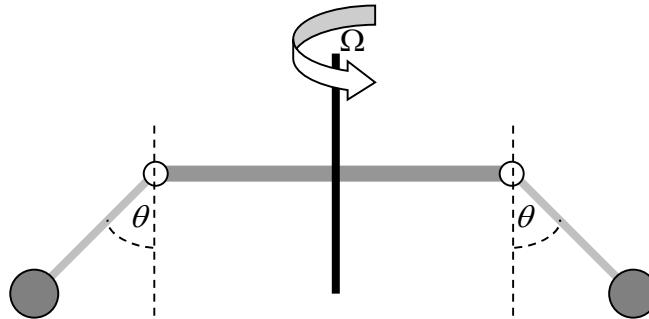
מטוטלת כפולה המבצעת תנודות במישור אנכי מתוארת באור המצורף.



- א. רשמו בקואורדינטות קרטזיות את המהירויות של שתי המסות.
- ב. רשמו את הלגראנז'יאן של המערכת. קח כקואורדינטות מוכללות את שתי זוויות הסטיה מן האנרגיה.
- ג. גזרו את משוואות התנועה של המערכת, כאשר $\ell_1 = \ell_2 = m_1 = m_2$. הניחו תנודות קטנות.
- ד. חשבו את התדריות העצמיות של המערכת.

שאלה 2

מוט בעל אורך l ומסה m מוחזק במרכזו אופקי על ציר. משני צידי המוט מחוברים שני מוטות חסרי מסה אשר אורכם הוא l ובקצוותיהם קשורות מסות w והם חופשיים להסתובב סביב ציר אופקי.



א. בהנחה שהציר מסתובב בתדריות זוויתית Ω והזווית שהמוטות הצדדים פורשים היא θ , כתבו את הלגראנג'אן של המערכת, מובע בעזרת $(\Omega, \theta, \dot{\theta})$.

ב. כתבו את משוואות התנועה.
בהנחה של תנודות קטנות סביב $\theta_0 = \theta$ מצאו את התדריות העצמיות של המערכת כפונקציה של l, θ_0, g .

שאלה 3

במודל לורנץ לאטום מנחים אלקטرون (קלאסי) בעל מסה M המחבר לגרעין באמצעות קפיץ חסר מסה בעל קבוע a . הקפיץ יכול לנوع בחופשיות סביב בגרעין למרחב התלת ממדי (לא גרביטציה). נתון כי c_0 הוא אורך הקפיץ במצבו הרפי. הניחו שהקפיץ תמיד ישר במהלך התנועה.

א. רשמו את הלגראזיאן המתאים, וקבלו את משוואות התנועה, ואת קבועי התנועה E ו T. בטאו את התשובות לשיערים הבאים כפונקציה של קבועי התנועה E ו T.
ב. קבלו בעזרת משוואות התנועה את נקודת שווי המשקל (הוא רדיוס הסיבוב) בציר הרדיאלי כתלות בקבועי התנועה.

הניחו כי קיימות תנודות קטנות סביב נקודת שווי המשקל וענו על השיערים הבאים:

ג. מהו התנאי שעבורו תהיה נקודת שווי המשקל מסעיף ב' יציבה?

ד. מהי תדריות התනודות הקטנות סביב נקודת שווי המשקל?

ה. מהי התנועה הרדיאלית כתלות בזמן (t) ?

ו. מהי המהירות הזוויתית כתלות בזמן (t) ?

שאלה 4

א. הוכחו שאם המילטוניין אינו תלוי במרחב בקואורדינטה φ אז התנועה הקונטי הצמוד שלה הוא קבוע של התנועה.

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + m(\alpha q_1 + \beta q_2) \quad \text{נקבעת ע"י}$$

כאשר β, α קבועים חיוביים.

ב. קיבלו את משוואות התנועה של החלקיק.

ג. (1) פתרו את משוואות המילטון עבור תנאי ההתחלה:

$$q_1(0) = x_0, q_2(0) = y_0, p_1(0) = p_x, p_2(0) = p_y$$

(2) איזו תנועה מתאר הפתרון שקיבלתם?

ד. הקומבינציה הבאה $C = p_2 + \gamma p_1$ היא קבוע של התנועה עבור ערך מסוים של הקבוע γ . מצאו את γ .

שאלה 5

פרוטון (מסה m ומטען e) ייחסוטי נع בשדה מגנטי סטטי.

תנועתו נקבעת על-ידי היגרנד'יאן היחסות המתאים:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{r}^2/c^2} + \frac{e}{c} \vec{r} \cdot \vec{A}$$

כאשר c היא מהירות האור ו- \vec{A} הוא הפוטנציאלי הווקטורי המקיים $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ הנិיחו שהפוטנציאלי \vec{A} אינו תלוי בזמן.

א. קיבלו ביטויים לשולושת רכיבי התנועה הקונטי \vec{p} .

ב. הראו כי המילטוניין של המערכת נתון על-ידי:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 c^2}$$

ג. נגידר את התנועה הקינטי $\vec{p} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$. מה משמעותו של גודל זה?

ד. מצאו בעזרת משוואות המילטון אילו רכיבי \vec{p} נשמרים כאשר השדה המגנטי אחיד וקבוע בכוון.

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (\hat{x} \hat{y} - \hat{y} \hat{x}). \quad \text{רמז: הפוטנציאלי הווקטורי הוא}$$

ה. רשמו את המילטוניין בקירוב עד סדר שני בתנועה הקינטי עבור $c \ll |\vec{v}|$ (התנועה הקינטי יהיה בחזקת ריבועית) ורשמו את משוואת התנועה עבור $\vec{v}(t)$.

ו. פתרו את משוואת התנועה שקיבלתם בסעיף הקודם עבור פרוטון הנמצא בזמן $t=0$ בראשית ומהירותו באותו רגע $\hat{x}_0 = \vec{v}_0$. איך נראה מסלול החלקיק?

מטלת מנחה (ממ"ל) 05

קורס: מכנית אנליטית 20422

חומר הלימוד למטלת: פרקים 10.1 ו-10.2 מפרק 10 בלבד)

שאלה 1

א. בדקו בכל שיטה שתבחרו אם הטרנספורמציה הבאה היא קונונית:

$$\begin{cases} Q = \arctan\left(\frac{\alpha q}{p}\right) \\ P = \frac{\alpha q^2}{2} \left(1 + \frac{p^2}{(\alpha q)^2}\right) \end{cases}$$

כאשר α פרמטר ממשי שרירותי.

ב. מצאו לאיו ערכי β , α הטרנספורמציה הבאה היא קונונית:

$$\begin{cases} Q = q^\alpha \cos(\beta p) \\ P = q^\alpha \sin(\beta p) \end{cases}$$

שאלה 2

נתונים P , q קוואורדינטות במרחב הפaza של מערכת פיזיקלית קלאסית. נתונה הטרנספורמציה הבאה:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q^k p \\ P &= \beta q^m \end{aligned}$$

כאשר m, k, β, α קבועים ממשיים.

א. מצאו תנאי על m, k על מנת שהטרנספורמציה תהיה קונונית (התשובות צריכות להיות מבוטאות כתלות בקבועים α, β).

המשך השאלה בעמוד הבא

נתון הhamiltonיאן הבא:

$$H = \frac{q^4 p^2}{2\mu} + \frac{\lambda}{q^2}$$

כאשר μ, λ קבועים ממשיים וחיביים.

ב. מצאו את הhamiltonיאן החדש לאחר הטרנספורמציה, כך שהיא מהצורה הבאה:

$$\tilde{H} = C(Q^2 + P^2)$$

כאשר C הוא קבוע כלשהו תלוי ב μ, λ (הדרך: בחרו a כך שיתאים לצורת הhamiltonיאן המבוקש). זכרו כי α הוא קבוע שרירותי כך שגם אותו ניתן להגדיר כפונקציה של μ, λ .

ג. השתמשו במשוואות המילטון עבור הhamiltonיאן החדש ומצאו את $(P(t), Q(t))$ וכן את

$$q(t), p(t).$$

שאלה 3

חלקיק בעל מסה m טוען במטען q ונמצא בשדה מגנטי אחד $\hat{z} = B_0 \hat{B}$. הניחו שתנועת החלקיק מתרחשת במישור $y-x$ בלבד.

א. הראו כי השדה המגנטי נובע מהפוטנציאל הווקטורי:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (x \hat{y} - y \hat{x})$$

ורשמו את הhamiltonיאן של החלקיק.

ב. נגדיר משתנים חדשים:

$$\pi_1 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} (P_x + \frac{q B_0 y}{2c})$$

$$\pi_2 = \sqrt{\frac{c}{B_0 q}} (P_y - \frac{q B_0 x}{2c})$$

כתבו את הhamiltonיאן בעזרת המשתנים החדשים.

ג. כתבו את משוואות התנועה עבור המשתנים החדש ופתרו אותן.

ד. השתמשו בסעיף הקודם כדי לקבל את x ו- y כפונקציה של הזמן. תארו את מסלול החלקיק.

שאלה 4

נתון המילטוניאן $(t, p, q) \rightarrow H$ ממשי. נגדיר שני פונקציות מרוכבות :

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

ונבטא את המילטוניאן ע"י a ו \tilde{a} .

א. מהן משוואות התנועה של a ו \tilde{a} ?

ב. רשמו ופתרו את משוואות התנועה של a ו \tilde{a} עבור אוסטיטור הרמוני פשוט. (הניחו

$$(m=k=1)$$

שאלה 5

נתון המילטוניאן הבא:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 \right) + \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$$

א. תארו את המאפיינים של הכוח הפועל על החלקיק במערכת זו.

ב. מדוע לא ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות אלה?

ג. הראו כי ניתן לבצע הפרדת משתנים מלאה במשוואות המילטון-יעקובי בקואורדינטות קוטביות (ϕ, r) . כתבו את משוואת המילטון-יעקובי עבור פונקציית המילטון S בקואורדינטות אלה.

ד. פתרו את המשואה עבור פונקציית המילטון S . בטאו את הפתרון בלי לפתרו במפורש את האינטגרל המופיע בו.

ה. כתבו את שתי משוואות המילטון-יעקובי הנותרות והסבירו כיצד ניתן לקבל מהן את הפתרון המבוקש $(\phi(t), r(t))$ בהנחה שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.

ו. הסבירו כיצד ניתן לקבל מן המשוואות שכתבתם את הצורה הגיאומטרית של המסלולים $(\phi(r))$. הניחו שוב שניתן לחשב במפורש את האינטגרל שנשאר בפתרון של סעיף ד.