

מטלת מנחה (ממ"ן) 05

קורס: שיטות מתמטיות בפיסיקה 20602

חומר הלימוד למטלה: יחידות 6+7

שאלה 1 (8 נקודות)

מצאו באילו נקודות הפונקציות הבאות לא גזירות:

א. $f(z) = \bar{z} - 12z^2$

ב. $f(z) = |z|^2 - \frac{z^2}{8}$

שאלה 2 (16 נקודות)

פתחו את הפונקציות הבאות בטור לורן:

א. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ סביב $z = i$. מצאו את שלושת האיברים הראשונים

ב. $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2}$ סביב $z = 0$.

ג. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ סביב:

1. $0 < |z-1| < 2$ ובתחום $z=1$

2. $0 < |z-3| < 2$ ובתחום $z=3$

שאלה 3 (16 נקודות)

מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציות הבאות:

א. $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$

ב. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z - 2\pi}$

ג. $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^4}$

ד. $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^4 + 2z^5 + z^6}$

שאלה 4 (15 נקודות)

1. עבור הפונקציות הבאות, מצאו את נקודות ההסתעפות, הוכיחו כי אכן הן נקודות הסתעפות, ושרטטו על המישור המרוכב שתי אפשרויות לחתכי הסתעפות שונים עבור הפונקציות.

א. $f_1(z) = z^{2/5}$

ב. $f_2(z) = \ln(z^2 + 4)$

ג. $f_3(z) = \ln\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$

2. באחד מהמקרים מבין ב או ג ניתן להסתפק בחתך הסתעפות יחיד. ציינו באיזה מהם (ב או ג), והוכיחו זאת.

שאלה 5 (15 נקודות)

העתקת מביוס היא העתקה מהצורה

$$w = g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

כאשר a, b, c, d הם מספרים מרוכבים כך ש- $ad - bc \neq 0$.

א. האם ההעתקה קונפורמית? נמקו, והסבירו מדוע נדרש התנאי $ad - bc \neq 0$.

ב. מצאו את תמונת הרביע הראשון תחת העתקת מביוס הבאה:

$$f(z) = \frac{(2-i)z + 1}{1-iz}$$

ג. מצאו את תמונת התחום בתוך מעגל היחידה $|z| < 1$ תחת העתקת מביוס הבאה:

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

שאלה 6 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרלים הבאים בעזרת משפט השארית:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$

ד. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4\cos\theta} d\theta$

ה. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 9} dx$

שאלה 7 (10 נקודות)

פתרו את שאלה 25.20 בספר הלימוד:

- 25.20 Use the method of steepest descents to show that an approximate value for the integral

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iz(\frac{1}{5}t^5 + t)] dt,$$

where z is real and positive, is

$$\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} \exp(-\beta z) \cos(\beta z - \frac{1}{8}\pi),$$

where $\beta = 4/(5\sqrt{2})$.