修士論文

２領域成長界面の実現と界面ゆらぎの解析

竹内研究室　伊藤 康文

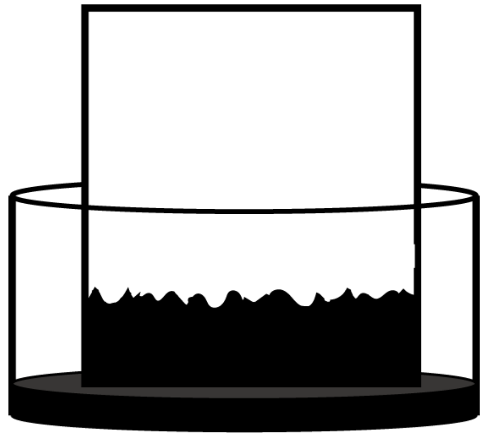
Takeuchi Lab

2018年2月15日

目次

研究背景

界面成長



インクの染み込み

紙の燃焼

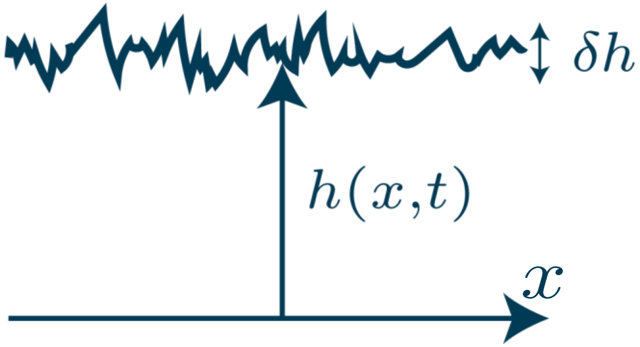
身近にありふれた非平衡現象である

なぜ重要なのか

➡ スケーリング則

➡ 普遍性・普遍クラス

スケーリング則と普遍クラス



スケール変換

$$t \to bt$$

$$x \to b^{1/z}x$$

$$\delta h \to b^{\beta}\delta h$$

の下で統計的に不変

スケーリング指数β, zの値によって普遍クラスに分類される

研究背景

Kardar-Parisi-Zhang 普遍クラス

Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x,t) = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \sqrt{D}\eta(x,t)$$

→ $\beta = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{3}{2}$ 1+1 次元

実験系

バクテリアコロニー
遅い紙の燃焼
液晶乱流

理論モデル

非対称単純排他過程
多核成長モデル

研究背景

Kardar-Parisi-Zhang 普遍クラス

$$h \simeq v_\infty t + \underbrace{(\Gamma t)^{1/3}\chi}_{\text{ゆらぎ}}$$

$v_\infty,\ \Gamma$：系依存パラメータ

χ：確率変数

空間相関関数

$$C_\mathrm{s} := \langle h(x_0+x,t)h(x_0,t)\rangle - \langle h(x_0+x,t)\rangle \langle h(x_0,t)\rangle$$

理論結果

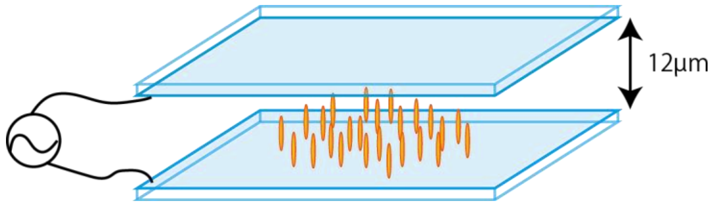
	ゆらぎの分布	空間相関関数
平面界面	GOE Tracy-Widom 分布	Airy_1 相関
円形界面	GUE Tracy-Widom 分布	Airy_2 相関

Tracy-Widom分布：
ガウス型ランダム行列の最大固有値分布

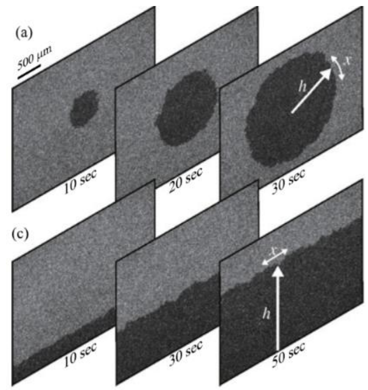
研究背景

液晶乱流とKPZ普遍クラス

液晶電気対流系

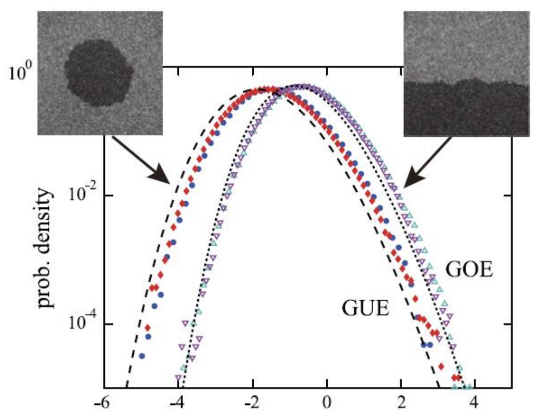


乱流状態



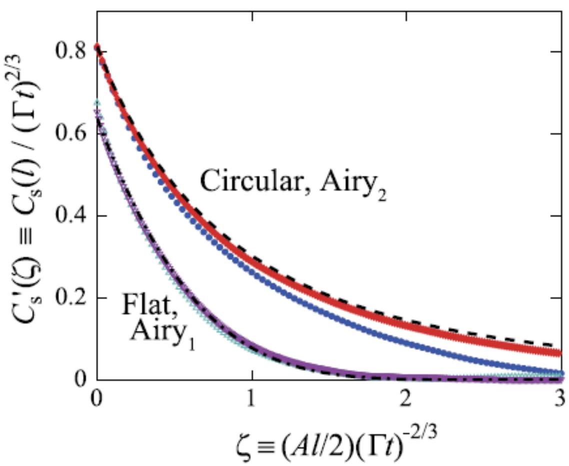
実験的証拠

ゆらぎの分布



χ に相当

空間相関関数



界面形状に応じた普遍サブクラス構造

研究背景

KPZ半空間問題

ガウス型ランダム行列の基本タイプ

GOE

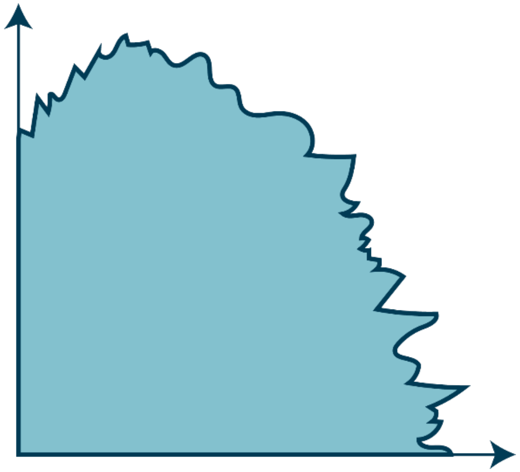
平面界面

GUE

円形界面

GSE

先行理論研究



半円界面

＋

境界で正の傾き

⇩

境界でGSE

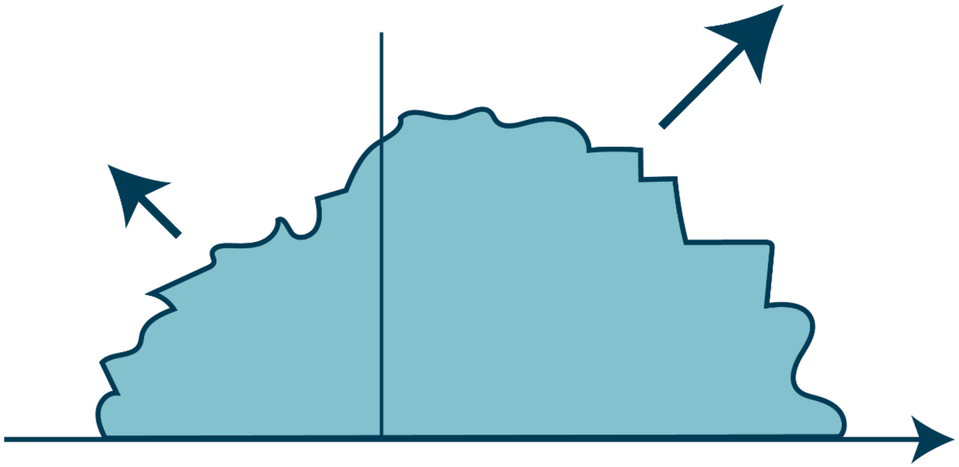
しかし、

実験系で境界条件を

制御するのは困難

研究目的

２領域界面成長



- 系を２領域に分割
- 成長速度の異なる界面を生成

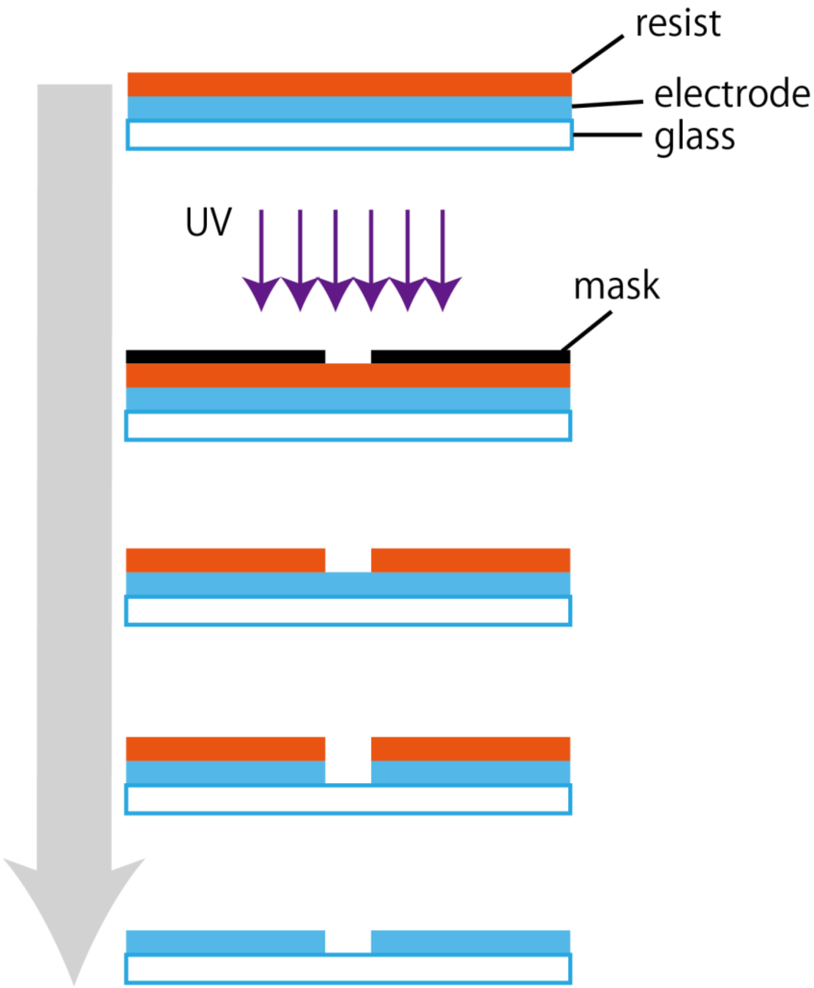
半空間 $\stackrel{?}{=}$ ２領域

２領域界面成長を実現し、半空間問題との関係を調べる

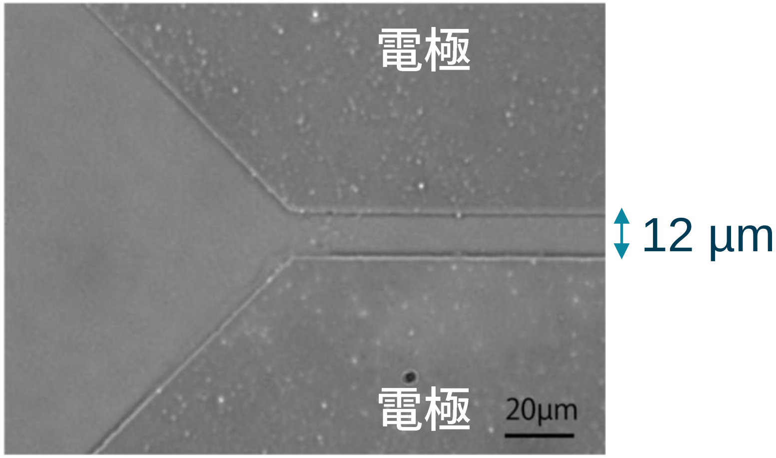
実験

フォトリソグラフィ

液晶電気対流系を２分割する方法

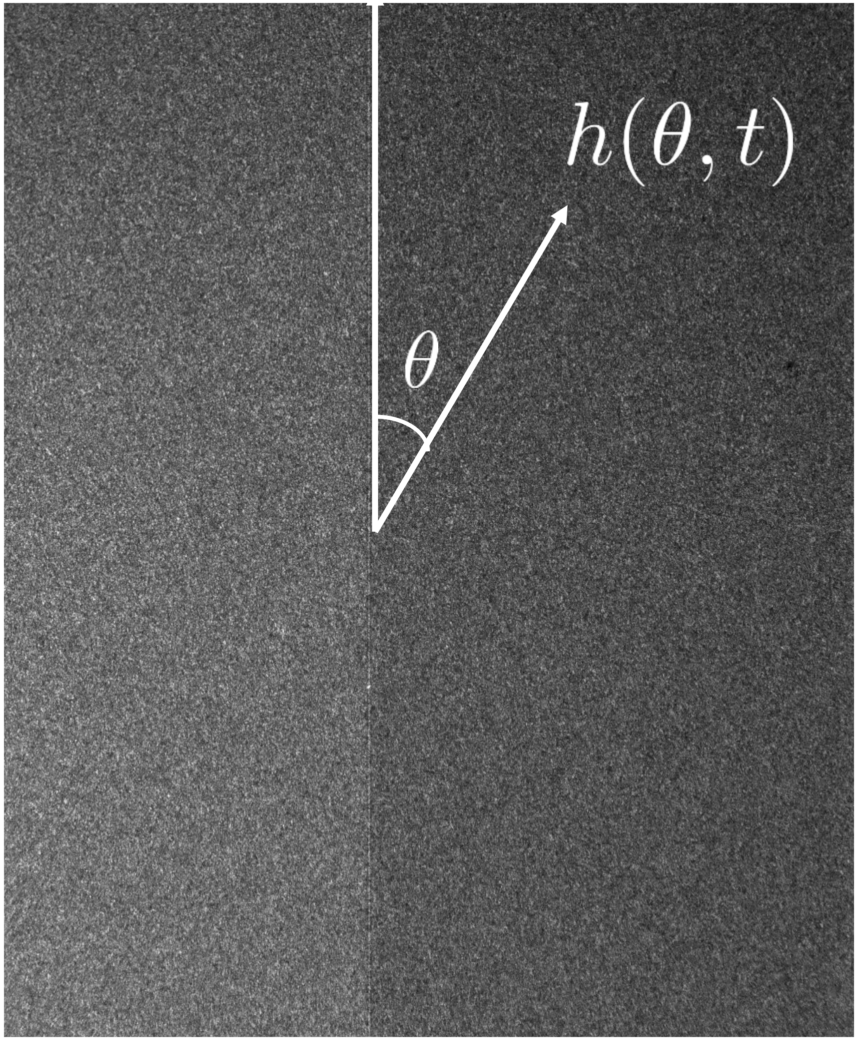


紫外線に感光する
化学物質を用いて
膜電極を加工



実験

２領域界面の実現

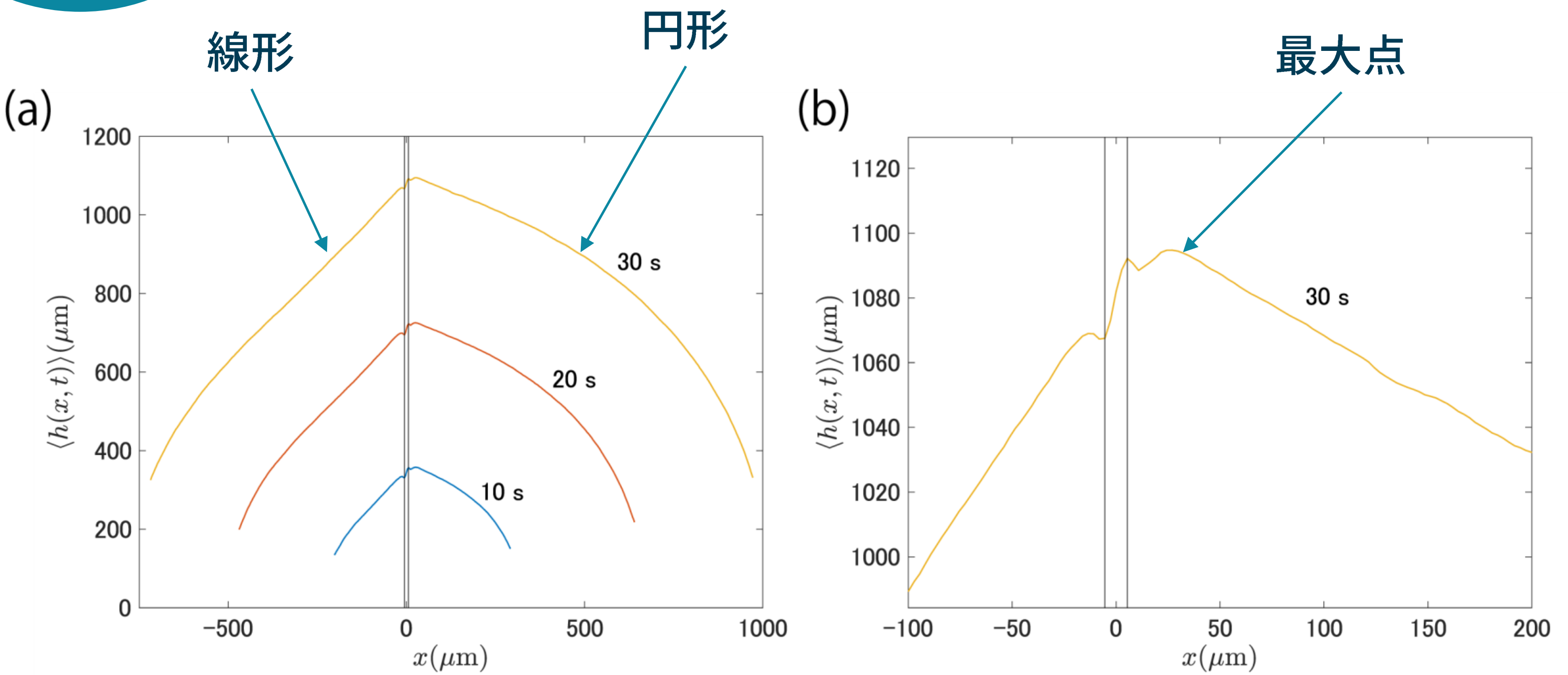


300Hz
x3 speed

1 mm

22 V　　24 V

界面の平均形状

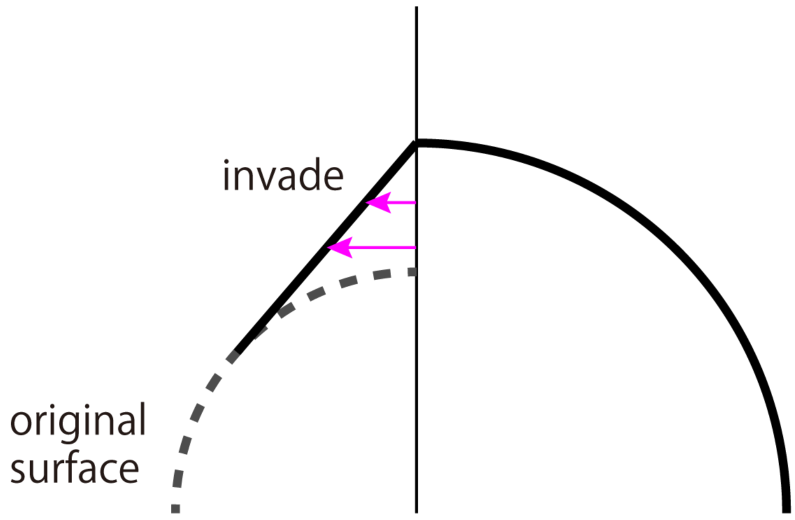


(1165サンプル)

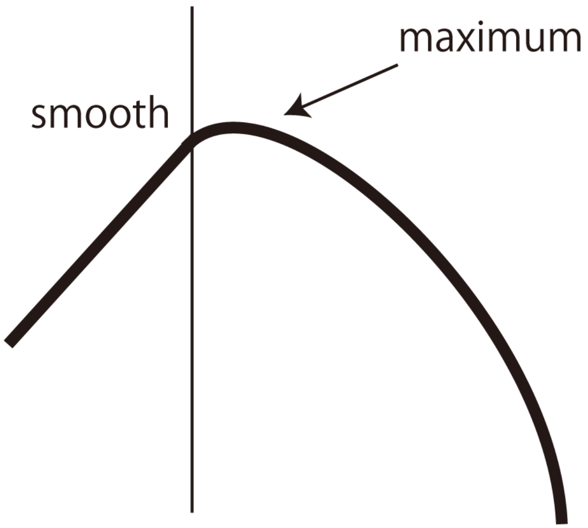
境界で正の傾きをもつ

実験

界面の平均形状



クラスターの侵入



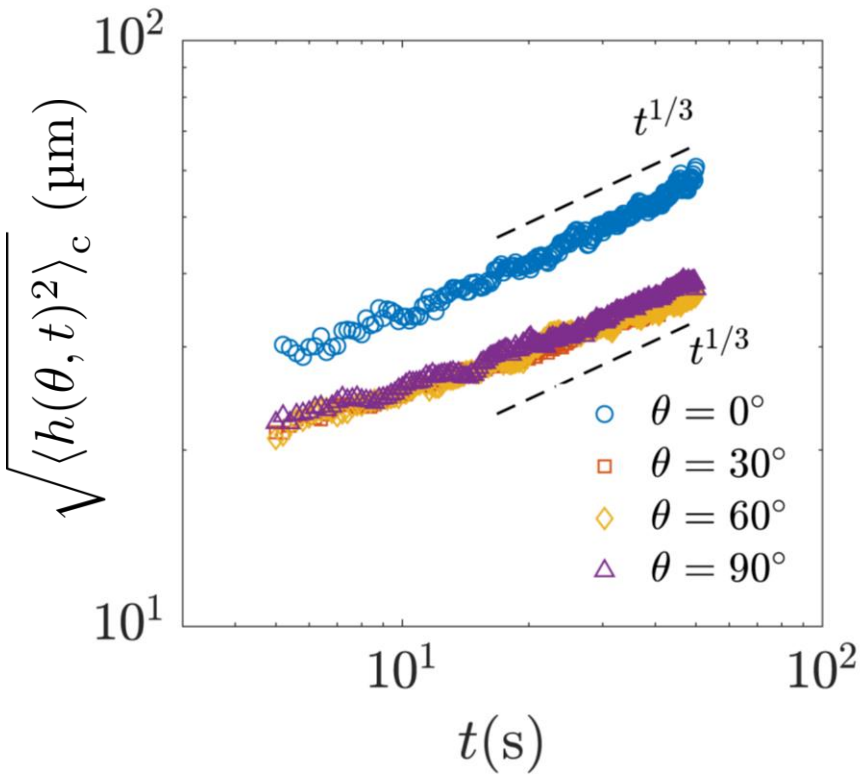
なめらかにする効果

実験

スケーリング指数

$$\delta h \sim \sqrt{\langle h(\theta,t)^2\rangle_c} \sim t^{\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$ (KPZ)



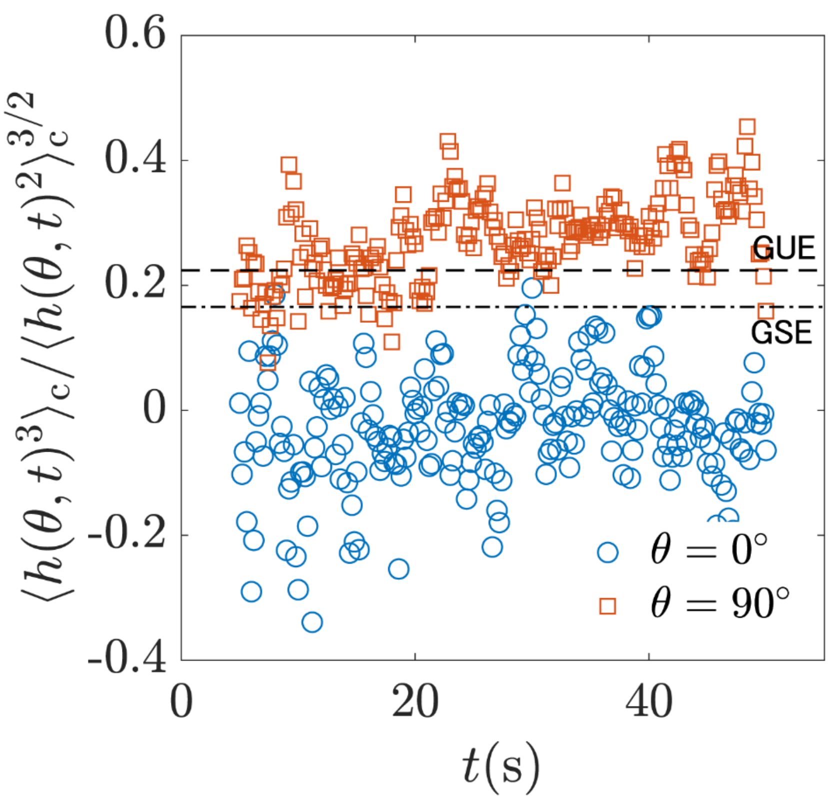
$$\beta = 0.37(5)$$

境界でもKPZクラスの成長

実験

ゆらぎの分布

歪度 $$\frac{\langle h^3 \rangle_c}{\langle h^2 \rangle_c^{3/2}} \simeq \frac{\langle \chi^3 \rangle_c}{\langle \chi^2 \rangle_c^{3/2}}$$



誤差が大きく、分布が決定できない

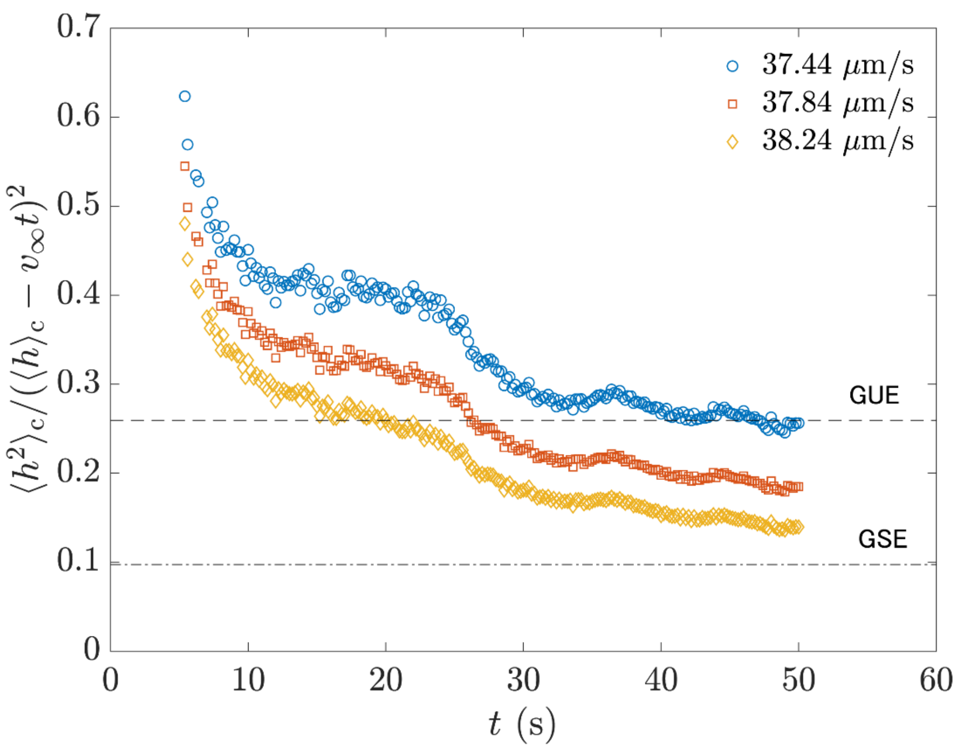
実験

ゆらぎの分布

低次のキュムラントの比

$$\frac{\langle h^2\rangle_c}{(\langle h\rangle_c - \underline{v_\infty} t)^2} \simeq \frac{\langle \chi^2\rangle_c}{\langle \chi\rangle_c^2}$$

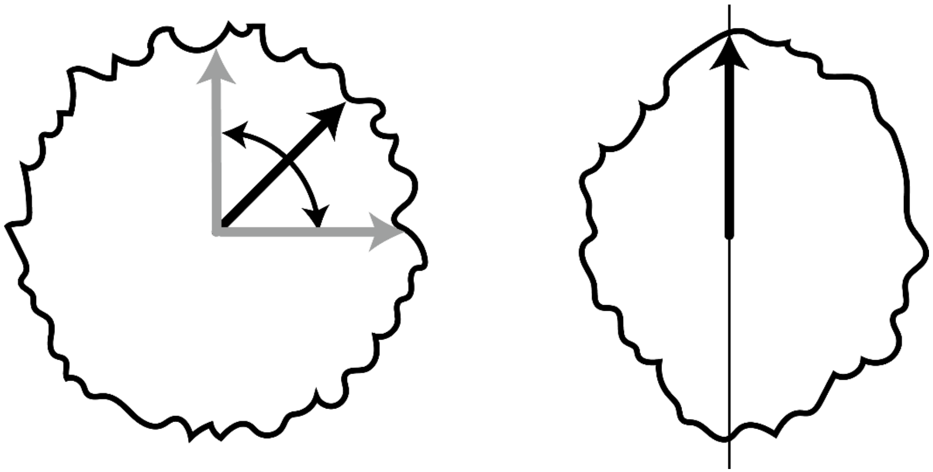
実験データから見積もる
$v_\infty = 37.84(40)\ \mu\mathrm{m/s}$



(2295サンプル)

分布を決定するには高い精度で v_∞ を見積もる必要

本研究の課題点



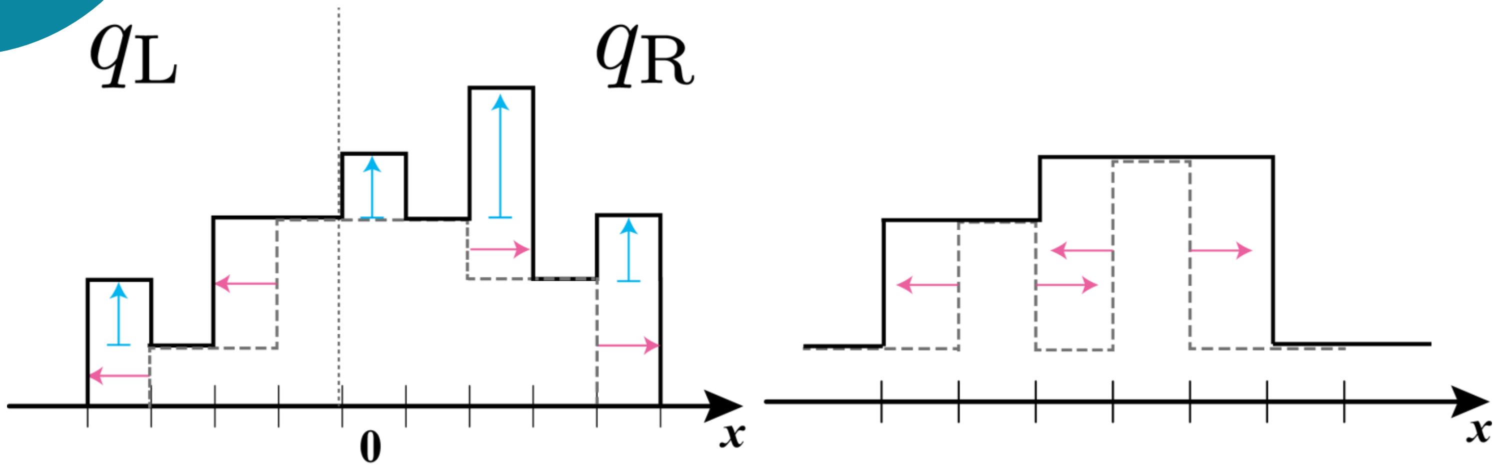
サンプル数が少ない

v_∞ を高い精度で見積もる必要

等方性の高い界面の生成

モデルの定義

離散多核成長モデル (Polynuclear growth: PNG)



水平方向への
広がり

核生成

$$h(x,t+1) = \max\{h(x-1,t), h(x,t), h(x+1,t)\} + \omega(x,t+1)$$

$$\mathrm{Prob}[\omega(x,t)=k] = \begin{cases} (1-q_{\mathrm{L}})q_{\mathrm{L}}^k & x<0 \\ (1-q_{\mathrm{R}})q_{\mathrm{R}}^k & x \geq 0 \end{cases}$$

数値
シミュレーション

リスケール

このモデルのメリット

・・・系に依存するパラメータが厳密にわかっている

$$h \simeq v_\infty t + (\Gamma t)^{1/3}\chi$$

$$v_\infty = \frac{\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}, \quad \Gamma = \frac{\sqrt{q}(1+\sqrt{q})}{2(1-\sqrt{q})^3}$$

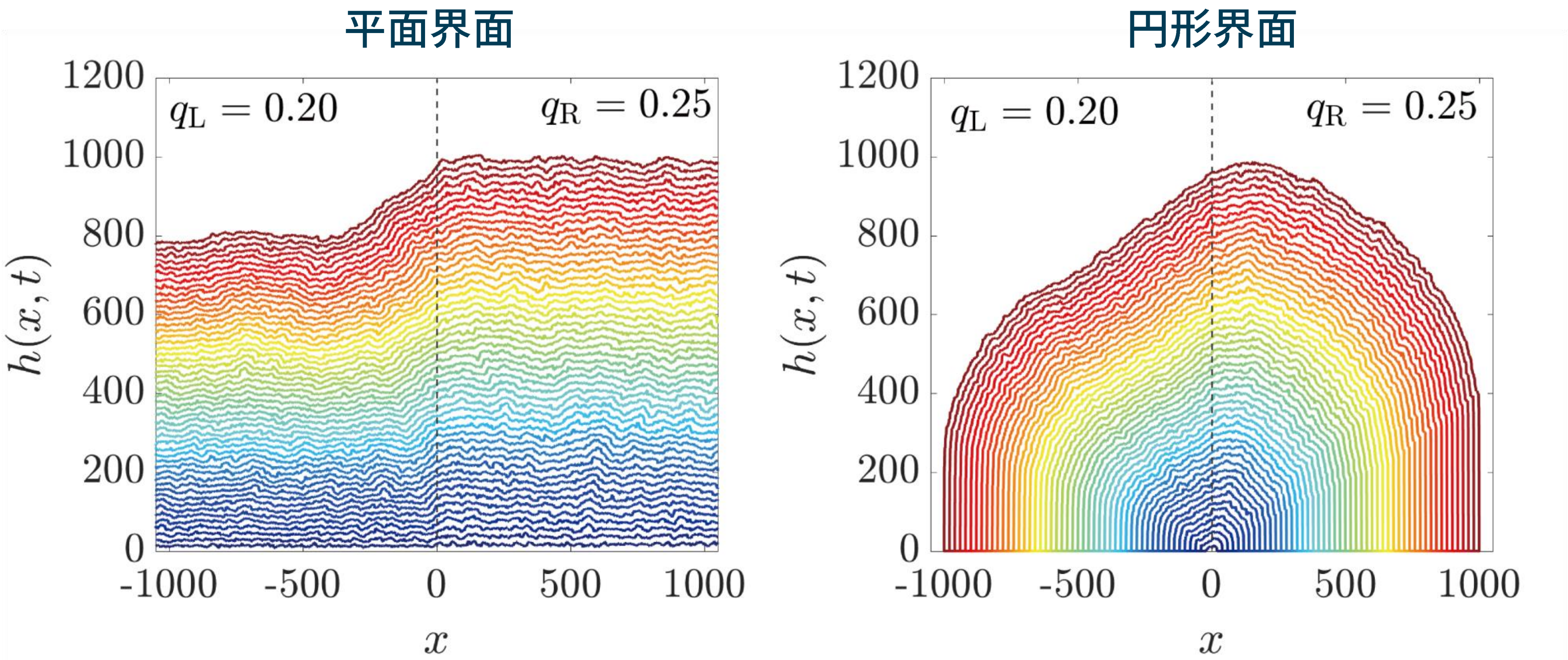
リスケールした界面高さ

$$H(X,t) := \frac{h(x=AX,t) - v_\infty t}{(\Gamma t)^{1/3}} \simeq \chi$$

本研究では
$q = q_{\mathrm{R}}$

数値
シミュレーション

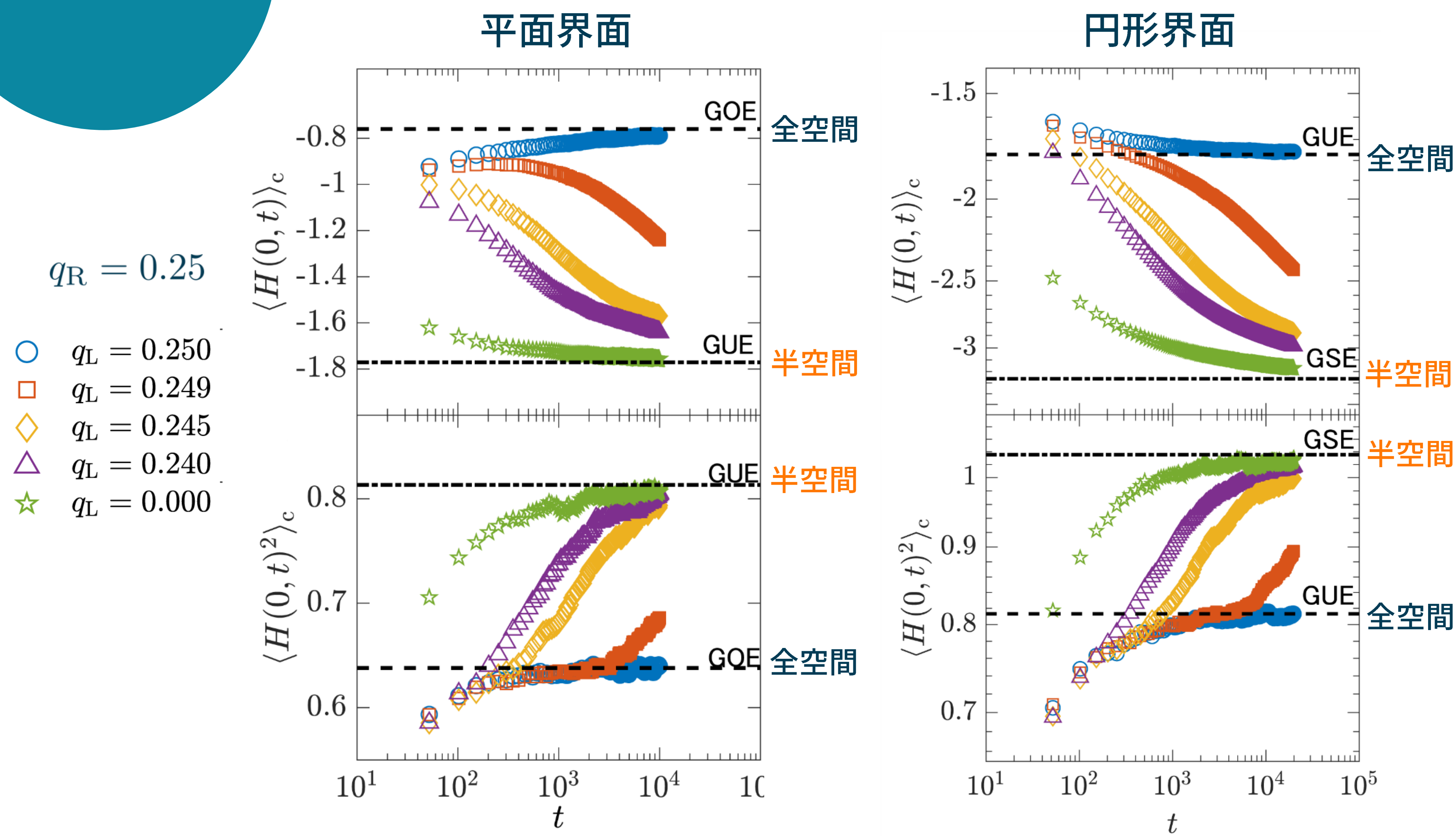
２領域界面の実現



実験と同様の界面形状が実現！

数値
シミュレーション

ゆらぎの分布



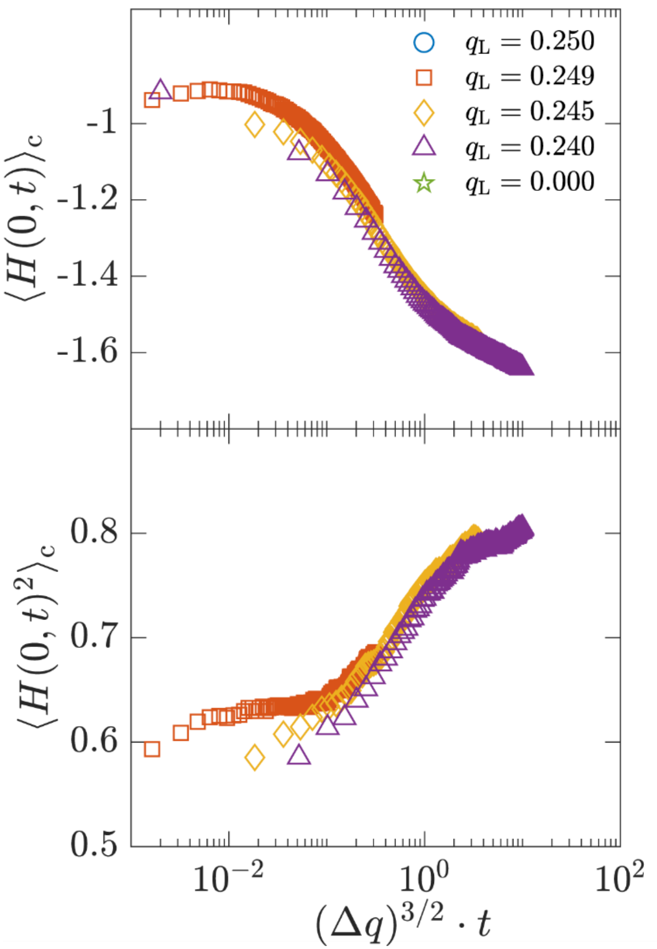
2領域界面では半空間のゆらぎが出現！

数値
シミュレーション

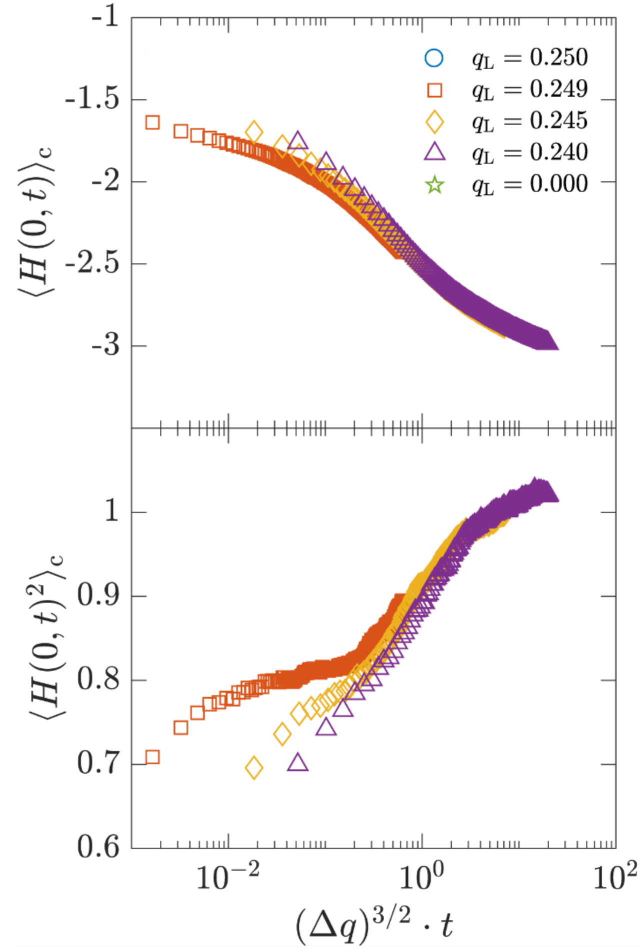
クロスオーバー

リスケール時間 $(\Delta q)^{\mu} \cdot t$ でプロット　$\Delta q := q_{\mathrm{R}} - q_{\mathrm{L}}$

平面界面



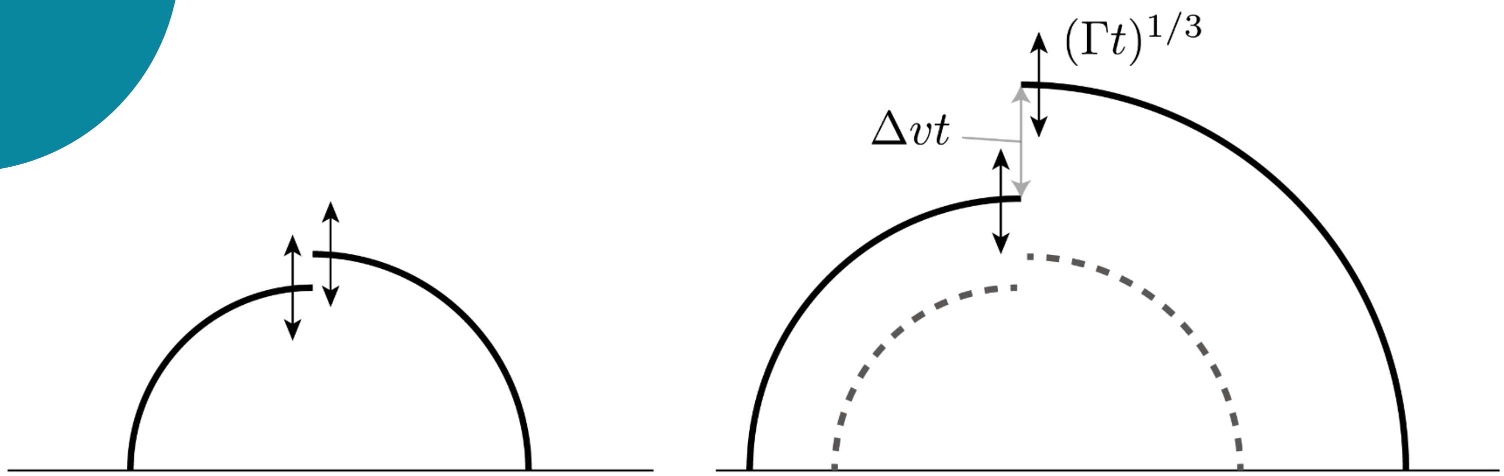
円形界面



$\mu = 1.4 \pm 0.1$ でプロットしたときに１本に乗る

数値
シミュレーション

クロスオーバー



$t \ll t_{\mathrm{c}}$

ほぼ全空間

$t \gg t_{\mathrm{c}}$

ほぼ半空間

本源的な高さの差

$$\Delta vt \sim \Delta qt$$

ゆらぎの振幅の大きさ

$$(\Gamma t)^{1/3}$$

$$\Delta qt \sim (\Gamma t)^{1/3} \Rightarrow (\Delta q)^{3/2} \cdot t \sim 1$$

まとめ

**実験とシミュレーションを用いて、
２領域問題と半空間問題の関係を調べた**

実験

- 液晶電気対流系を２分割し、２領域界面成長を実現
- 界面の平均形状から、境界で傾きをもつ
- 境界でKPZスケーリング則が見えた

シミュレーション

- ２領域離散多核成長モデルを調べた
- 境界でのゆらぎは漸近的に半空間の結果に
- 全空間→半空間のクロスオーバーはKPZの指数から説明
- 実験でどこまで見えるか