IFT 6521 PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Enseignant : EMMA FREJINGER

Darmon Yocheved

DEVOIR 3

1) Modèle

Soit un modèle de gestion de portefeuille où

$$x_0 \text{ est le capital à investir}$$

$$s_k = 8\% \text{ le taux de rendement sans risque à la période } k$$

$e_{k,i}$ une variable aléatoire définie par le tableau suivant qui modélisent le taux de rendement de l'actif i à la période k.

états	Etat1	Etat2
$r_{k,1}$	15%	5%
$r_{k,2}$	20%	1%
$\pi_{k,i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On cherche les $u_{k,i}$($montant\ investi\ dans\ l'actif\ i$ à $la\ période\ k$) qui maximisent l'espérance de l'utilité u(x)

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} e_{k,i}u_{k,i} + s_k(x_k - u_{k,1} - \ldots - u_{k,n}) = s_k x_k + \sum_{i=1}^{n}(e_{k,i} - s_k)u_{k,i}$$

Les équations de la programmation dynamique sont données par

$$J_N(x_N) = U(x_N)$$

$$J_k(x_k) = \max_{(u_{k,1},\ldots,u_{k,n})} E[J_{k+1}(s_k x_k + \sum_{i=1}^{n}(e_{k,i} - s_k)u_{k,i})]$$

La politique optimale du problème est

$$\mu_k^*(x_k) = \left(\frac{a}{(\frac{8}{100})^{N-k-1}} + \frac{8\,x_k}{100}\right)\alpha_k$$

Cela correspond à trouver $\max_{(u_{k,1},\ldots,u_{k,n})} E[\mathrm{u}(s_k \ldots s_{\text{N-1}}(s_k x_k + \sum_{i=1}^{n}(e_{k,i} - s_k)u_{k,i}))]$

C'est-à-dire pour mon modèle $\max_{(u_{k,1},\ldots,u_{k,n})} E[\mathrm{u}((\frac{8}{100})^{N-k-1}(\frac{8}{100}x_k + \sum_{i=1}^{n}(e_{k,i} - \frac{8}{100})u_{k,i}))]$

2) Instances 1 et 2

Pour la première instance :

Notons $x_0 = 100$ le capital initial à investir

Soit N=1 et n= 2 actifs risqués, nous allons maximiser l'espérance de l'utilité avec u(x)=ln(a+x) où a=1

$$s_0 = \frac{8}{100}$$

$$e_{0,i} \text{ une variable alétoire définie par le tableau suivant}$$

États	Etat1	Etat2
$r_{0,1}$	15%	5%
$r_{0,2}$	20%	1%
$\pi_{0,i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Pour la deuxième instance :

Notons $x_0 = 100$ le capital initial à investir

Soit N=5 et n= 2 actifs risqués, nous allons maximiser l'espérance de l'utilité avec u(x)=ln(a+x) où a=1

$$s_0 = \frac{8}{100}$$

$$e_{k,i} \text{ une variable alétoire définie par le tableau suivant}$$

K prend les valeurs de 0 à 2

États	Etat1	Etat2
$r_{k,1}$	15%	5%
$r_{k,2}$	20%	1%
$\pi_{k,i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) Résultats des 2 instances
Résultat de la première instance sous le chainage arrière
Les parts à mettre dans le actif1, l'actif2 et l'actif sans risque sont respectivement :

```
[0.82685272 0.16801827] le reste va dans l'actif sans risque
```

Résultat de la première instance sous le la politique optimale
Les parts à mettre dans le actif1, l'actif2 et l'actif sans risque sont respectivement :

```
[0.69230145 0.26008942] ce qui reste va dans l'actif sans risque
```

Résultat de la deuxième instance sous le chainage arrière
Les parts à mettre dans le actif1, l'actif2 et l'actif sans risque sont respectivement :

```
[Part dans l'actif1,part dans l'actif2]=
[[0.74142937 0.19906088]
 [0.75054936 0.20583466]
 [0.80049515 0.14328621]
 [0.7502316  0.22097844]
 [0.81725722 0.17167603]] ce qui reste va dans l'actif sans risque
```

Résultat de la deuxième instance sous le la politique optimale
Les parts à mettre dans le actif1, l'actif2 et l'actif sans risque sont respectivement :

```
[Part dans l'actif1,part dans l'actif2]=
[[0.61307163 0.27481497]
 [0.73725173 0.11501037]
 [0.95965813 0.03794439]
 [0.93982414 0.04885244]
 [0.73911844 0.17871071]] ce qui reste va dans l'actif sans risque
```

Mais les valeurs peuvent changer car ces nombres sont obtenus à partir d'une estimation avec trop peu d'échantillon mais mon ordinateur et mon temps disponible ne me permettent pas d'obtenir des résultats plus précis.

4) Résultats avec un modèle ou instances modifiés et calcul d'erreur
J'obtiens

```
[[0.83585756 0.16386007]
 [0.769555   0.10446388]
 [0.33352595 0.12874776]
 [0.67003591 0.28012359]
 [0.72717875 0.09850372]]

[[0.88257353 0.08790242]
 [0.09883462 0.20061515]
 [0.02067525 0.40797438]
 [0.290284   0.27396433]
 [0.93660702 0.0438075 ]]
```

On détermine le pourcentage de la moyenne des écarts aux carrés des parts d'actifs pour les 5 périodes.
On obtient : 0.08340

5) Instructions pour exécuter le code
Ouvrir le fichier python et exécuter les cellules une à une, les commentaires sont directement sur ce fichier.