

Das Rechnen mit Potenzen(Potenzieren)

Ioannis Christodoulakis

20. September 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Ressourcen gemäss KoRe	4
2	Einleitung und Übersicht	4
3	Potenzbegriff	5
3.1	Definition	5
3.2	Übungen	6
4	Rechnen mit Potenzen	7
4.1	Potenzen mit gleichen Basen multiplizieren	7
4.2	Potenzen mit gleichen Basen dividieren	8
4.3	Ein Produkt potenzieren	10
4.4	Ein Bruch potenzieren	10
4.5	Eine Potenz potenzieren	11
4.6	Zusammenfassung der Potenzgesetze	12
4.7	Übungen	13
4.8	Übungen aus: [KG,259/15.1] Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten	15
5	Rechen mit Zehnerpotenzen und SI-Vorsätzen	16
5.1	Darstellungsregeln	16
5.2	Verwendung des Taschenrechners(TR)	17
5.3	Übungen	18
5.4	Vertiefungsaufgabe	19
5.5	Streckenmasse umrechnen	20
5.6	Flächenmasse umrechnen	20
5.7	Volumenmasse umrechnen	20
5.8	Übungen	21
5.9	Vertiefungsaufgabe	21
6	Potenzieren von Summen und Differenzen	22
6.1	Binomische Formeln	22
6.2	Übungen	22
7	Faktorzerlegung an Termen mit Potenzen	23
7.1	Vorgehen	23
7.2	Übungen	23
7.3	Übungen aus: [KG, 262/15.2] Faktorzerlegung an Termen mit Potenzen	28
8	Potenzfunktionen	29
8.1	Potenzfunktionen mit positiv-ganzzahligen Exponenten	29
8.2	Potenzfunktionen mit negativ-ganzzahligen Exponenten	30
8.3	Übungen	31
8.4	Übungen aus: [KG, 266/ 15.3] Potenzfunktionen der Form $y(x) = a \cdot x^n$	31
9	Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten	32
9.1	Formeln	32
9.2	Übungen	32
9.3	Übungen aus: [KG, 270 /15.4] Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten . .	36

10 Gleichungen mit Potenzen	37
10.1 Definition	37
10.2 Übungen	37
10.3 Übungen aus: [Kusch Bd1, 229/12.8] Zahlengleichungen mit Potenzen	38

1 Ressourcen gemäss KoRe

Todo...

2 Einleitung und Übersicht

In einem ersten Schritt werden wir uns den **Begriff der „Potenz** annähern und erkennen, dass die Potenzschreibweise eine Kurzform eines mathematischen Terms ist. Und wenn man schon eine Kurzform einführt, so muss man auch mit dieser Kurzform rechnen können. Dies lernen wir in einem zweiten Schritt, nämlich das **Rechen mit Potenzen**. Eine besondere Stellung nimmt darin das **Rechnen mit 10er-Potenzen ein, denn mit 10 er-Potenzen** stellen wir in der Elektrotechnik und Elektronik die Werte von Strömen, Spannungen, Widerständen, Kapazitäten, Zeiten und vieles mehr dar. Wir lernen aber auch, wie man die Schreibweise mit 10er-Potenzen noch eleganter durch die **Schreibweise mit SI-Vorsätzen** darstellen kann. Mit der Einführung der SI-Vorsätze können wir nämlich den Zahlenbereich von Grössen mit Buchstaben wie "m" für Mili (ein Tausendstel) oder "k" für Kilo (Tausend) übersichtlich darstellen.

Und natürlich darf auch die **Handhabung des Taschenrechners** nicht fehlen, denn wenn man schon eine verkürzte Schreibweise einführt, so soll man den Taschenrechner zu Rechenzwecken auch dafür vorteilhaft einsetzen können.

3 Potenzbegriff

Den Potenzbegriff erörtern wir am besten an einem konkretem Beispiel, nämlich der Volumenberechnung eines Würfels, dessen Kanten eine Länge $a=4\text{ cm}$ haben. Das Volumen berechnen wir nun wie folgt:

$$V = a \cdot a \cdot a = 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 64\text{cm}^3$$

Hierfür kennen wir aber auch die folgende Kurzschreibweise:

$$V = a^3 = (4\text{cm})^3 = 64\text{cm}^3$$

Sie sehen also, dass die Potenzschreibweise nur eine Kurzform eines mathematischen Terms ist. Somit können wir folgendes definieren:

3.1 Definition

Todo...

Besteht ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, so drückt man es verkürzt als Potenz aus. Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor gesetzt werden muss.

Besonderheiten:

$a^1 = a$ (der Exponent wird nicht geschrieben)

$a^0 = 1$ (jede Zahl hoch Null ergibt eins)

Beispiele

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = (-1)^4 \cdot (3)^4 = +(3^4) = 81$

c) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^3 = (-1)^3 \cdot (3)^3 = -(3^3) = -27$

d) $(a-b) \cdot (a-b) \cdot (-b) = (a-b)^3$

Merke:

- $(+a)^n = a^n$
- $(-a)^{2n} = a^{2n}$ aber $-(a)^{2n} = -a^{2n}$
- $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

3.2 Übungen

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

1. $(-2)^4$

2. $-(3)^2$

3. $(-b)^2$

4. $(3 - 5)^3$

5. $(5 - 3)^3$

6. $-(2)^5$

7. $-(2)^{5-4}$



4 Rechnen mit Potenzen

4.1 Potenzen mit gleichen Basen multiplizieren

xxx

Beispiele

$$\text{a) } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 \text{ denn : } 2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$\text{b) } 7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7 \text{ denn : } 7^3 \cdot 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7$$

Merke:

Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

4.2 Potenzen mit gleichen Basen dividieren

xxx

Beispiele

$$\text{a) } \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2 \text{ denn, } \frac{x^5}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = x \cdot x = x^2$$

Merke:

Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$\text{b) } \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \text{ oder: } \frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \text{ deshalb gilt: } \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

xxx

Beispiele

$$\text{a) } x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{b) } (a+b)^2 + c^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{c^2} \quad \text{c) } a^7 \cdot a^{-7} = \frac{a^7}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = 1 \text{ oder: } a^7 \cdot a^{-7} = a^{7-7} = a^0 \text{ deshalb gilt: } a^0 = 1$$

Merke:

Eine beliebige Basis (ungleich null) potenziert mit dem Exponenten Null ergibt eins.

xxx

Beispiele: Das Darstellen von Einheiten

XXX

$$\text{a) } \frac{1}{s} = \frac{1}{s^1} = s^{-1}$$

$$\text{b) } \frac{1}{s^2} = s^{-2}$$

c) $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

d) $\frac{mV}{K} = mV \cdot K^{-1}$

Eigene Beispiele aus der Praxis

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines that intersect to form small squares across the entire surface. There are no margins, text, or other markings on the paper.

4.3 Ein Produkt potenzieren

xxx

Beispiele

$$\text{a) } (-3cy)^4 = (-3)^4 \cdot c^4 \cdot y^4 = 81c^4y^4$$

$$\text{b) } (a+b)^2 \neq a^2 + b^2 \text{ sondern: } (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Merke:

Ein Produkt wird potenziert, indem jeder Faktor potenziert wird.

Oder umgekehrt: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird.

4.4 Ein Bruch potenzieren

xxx

Beispiele

$$\text{a) } \left(\frac{2c}{a}\right)^3 = \frac{(2c)^3}{a^3} = \frac{2^3c^3}{a^3} = \frac{8c^3}{a^3}$$

Merke:

Ein Bruch wird potenziert, indem der Zähler und der Nenner potenziert werden.

Oder umgekehrt: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem der Quotient der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird.

4.5 Eine Potenz potenzieren

xxx

Beispiele

a) $(u^2)^3 = (u^3)^2 = u^{2 \cdot 3} = u^6$ denn: $(u^2)^3 = u^2 \cdot u^2 \cdot u^2 = u^{2+2+2} = u^6$

Merke:

Eine Potenz wird potenziert, indem die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert wird. Die Exponenten dürfen vertauscht werden.

Beispiele

b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$ aber:

c) was ist (ist das gleich 2^9 oder 2^{27} ?)

Wichtig:

Beim Potenzieren setzt man vorsichtigerweise immer Klammern.

4.6 Zusammenfassung der Potenzgesetze

Wenn n und ganze Zahlen sind, dann gelten die folgenden Gesetze:

xxx

4.7 Übungen

Vereinfachen Sie folgende Terme so weit als möglich.

1. $6a^4 + 2a^2 + 8a^4 - a^2$

[illegible]

$$2. \quad \underline{\quad} a^4 \cdot \underline{\quad} 2a^3 \cdot \underline{\quad} 3a^2$$

[illegible]

3. $(2nx)^3$

[illegible]

5. $(-2^4)^3$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

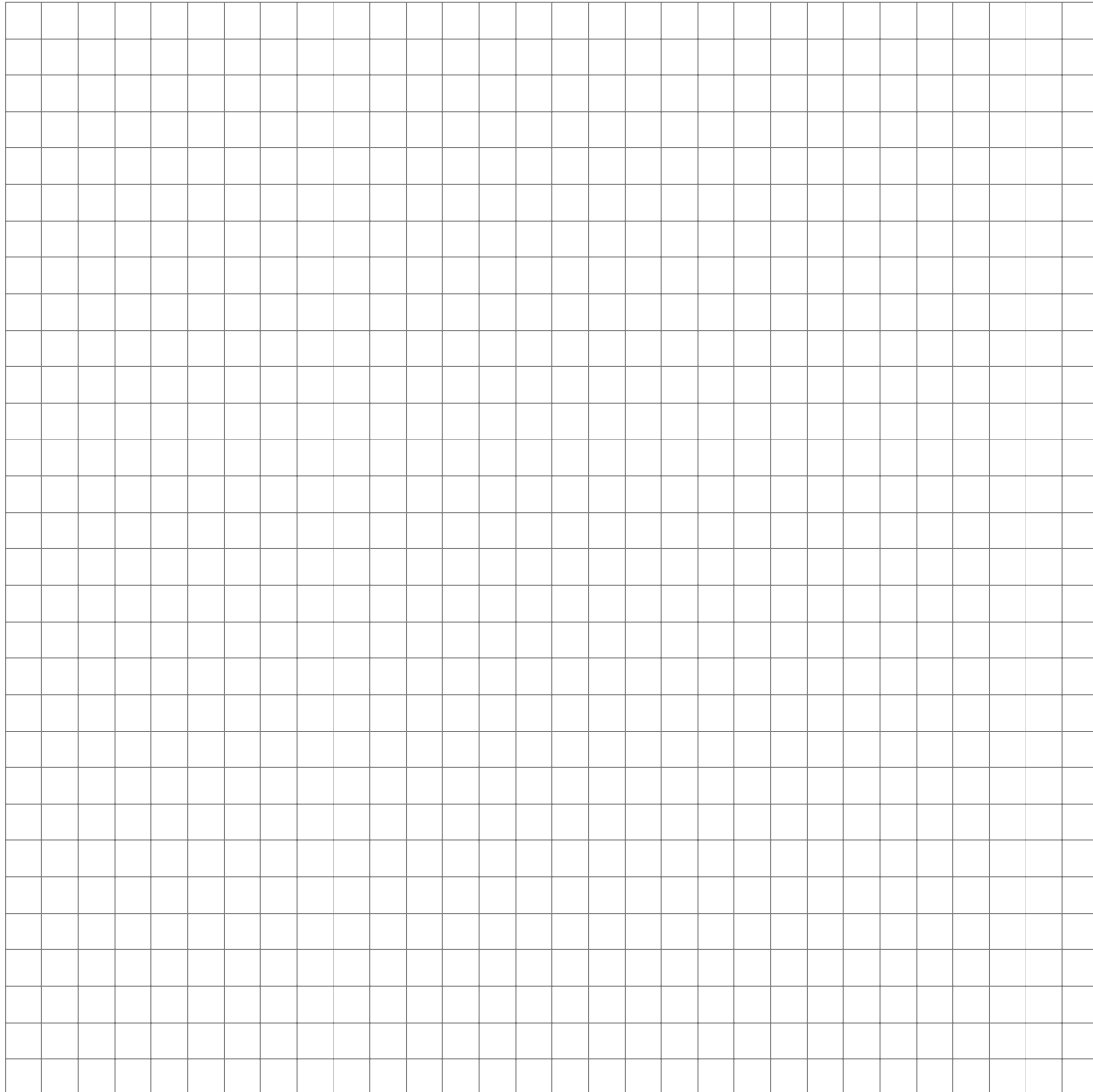
[illegible]

[illegible]

[illegible]

4.8 Übungen aus: [KG,259/15.1] Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

5, 14, 15, 19, 23, 27, 31, 34, 40, 44, 51, 58, 59, 68, 70



5 Rechnen mit Zehnerpotenzen und SI-Vorsätzen

Zehnerpotenzen werden verwendet um grosse und kleine Zahlen übersichtlich darzustellen. In der Praxis wird an ihren Stelle jedoch oft die Schreibweise mit SI-Vorsätzen bevorzugt. Die nachfolgende Tabelle zeigt die wichtigsten Zehnerpotenzen mit ihrem Namen und dem entsprechenden SI-Vorsatz.

xxx

5.1 Darstellungsregeln

Für die Anwendung der SI-Vorsätze gelten einige Regeln. Die Wichtigsten sind:

- Keine Einheit darf gleichzeitig mehr als einen Vorsatz erhalten. (falsch: mkm, MkΩ)
- Die Kombination der SI-Vorsatzes und der Einheit gilt als ein Symbol (z.B. $cm^2 = c^2m^2$)
- Vorsätze, die einer ganzzahligen Potenz von 10^{3n} entsprechen, sind zu bevorzugen (z.B. $(10^3, 10^{-6})$). → **Technisches Format** beim Taschenrechner → **ENG**
- Die Vorsätze Hekto ($h = 10^2$), Dezi ($d = 10^{-1}$) und Zenti ($c = 10^{-2}$) sollen nur bei Einheiten verwendet werden, bei denen sie bereits üblich sind.
- Die Einheiten von Ergebnissen sollen mit dem Vorsatz versehen werden, der den Zahlenwert möglichst in den Bereich **0,1...1000** bringt.
- Bei zusammengesetzten Einheiten kann jeder der Einheiten einen dezimalen Vorsatz haben. Angestrebt werden soll jedoch, möglichst nur einen Vorsatz, und diesen Zähler, zu verwenden.)z.B. km/h)

5.2 Verwendung des Taschenrechners(TR)

xxx

5.3 Übungen

- 1) Ergänzen Sie untenstehende Tabelle zuerst noch ohne Taschenrechner.
- 2) Geben Sie die Werte vorteilhaft in den Taschenrechner ein. Werden sie auch im Technischen Format angezeigt?

XXX

- 3) Geben Sie die Lichtgeschwindigkeit ($c = 300'000'000\text{m/s}$) in der Schreibweise mit Zehnerpotenzen und in der Schreibweise mit SI-Vorsätzen an.

[illegible]

- 4) Geben Sie die Distanz Erde - Sonne ($d = 149'600'000'000m$) in der Schreibweise mit Zehnerpotenzen und in der Schreibweise mit SI-Vortätzen an.

[illegible]

- 5) Geben Sie a) 1cm^3 und b) $(1\mu\text{s})^{-1}$ gemäss den obigen Darstellungsregeln an.

[illegible]

[illegible]

Erstellen Sie auf einer halben A4-Seite ein eigenes Beispiel aus den Fachbereichen Elektrotechnik oder Elektronik inkl. Musterlösung (auf der Rückseite). Beachten Sie bitte, dass die Zahlenwerte so wählen sind, dass sie auch ohne Taschenrechner gelöst werden können.

5.5 Streckenmasse umrechnen

Beispiele 1: mm in km umrechnen

$$5\text{mm} = 5 \cdot (10^{-3})\text{m} = 5 \cdot 10^{-3}\text{m}$$
$$\mapsto 1\text{m} = \frac{1}{1000}\text{km} = \frac{1}{10^3}\text{km} = 10^{-3}\text{km}$$

$$5\text{mm} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\text{km} = 5 \cdot 10^{-6}\text{km}$$

Beispiele 2: km in dm umrechnen

$$5\text{km} = 5 \cdot (10^3)\text{m}$$
$$\mapsto 1\text{m} = 10\text{dm} = 10^1\text{dm}$$
$$5\text{km} = 5 \cdot (10^3) \cdot 10^1\text{dm} = 5 \cdot 10^{3+1}\text{dm} = 5 \cdot 10^4\text{dm} = 50 \cdot 10^3\text{dm}$$

5.6 Flächenmasse umrechnen

Beispiel 1: mm² in m² umrechnen

$$445\text{mm}^2 = 445 \cdot [(10^{-3})\text{m}]^2 = 445 \cdot (10^{-3})^2\text{m}^2 = 445 \cdot 10^{-6}\text{m}^2$$

Beispiel 2: km² in dm² umrechnen

$$0,5 \cdot 10^{-2}\text{km}^2 = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot [(10^3)\text{m}]^2$$
$$\mapsto 1\text{m} = 10\text{dm} = 10^1\text{dm}$$
$$0,5 \cdot 10^{-2}\text{km}^2 = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot [(10^3) \cdot 10^1\text{dm}]^2 = 0,5 \cdot 10^{-2} [10^4\text{dm}]^2 = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8\text{dm}^2 = 0,5 \cdot 10^6\text{dm}^2$$

5.7 Volumenmasse umrechnen

Beispiel 1: cm³ in dm³ umrechnen

$$1,25 \cdot 10^3\text{cm}^3 = 1,25 \cdot 10^3 \cdot [(10^{-2})\text{m}]^3$$
$$\mapsto 1\text{m} = 10\text{dm} = 10^1\text{dm}$$
$$1,25 \cdot 10^3\text{cm}^3 = 1,25 \cdot 10^3 \cdot [(10^{-2}) \cdot 10^1\text{dm}]^3 = 1,25 \cdot 10^3 \cdot [10^{-1}\text{dm}]^3 = 1,25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}\text{dm}^3 = 1,25\text{dm}^3$$

Beispiel 2: m^3 in mm^3 umrechnen

$$0,5 \cdot 10^{-2} m^3 = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot [1m]^3$$

$$\mapsto 1m = 1000mm = 10^3mm$$

$$0,5 \cdot 10^{-2} m^3 = 0,5 \cdot 10^{-2} [10^3mm]^3 = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^9 mm^3 = 0,5 \cdot 10^7 mm^3 = 5 \cdot 10^6 mm^3$$

5.8 Übungen

1) Rechnen Sie die Streckenmasse ineinander um.

xxx

2) Rechnen Sie die Flächenmasse ineinander um.

xxx

3) Rechnen Sie die Volumenmasse ineinander um.

xxx

5.9 Vertiefungsaufgabe

Erstellen Sie mit EXCEL einen Strecken-, Flächen- und Volumenmassumrechner gemäss untenstehendem Beispiel. Damit können sie anschliessend die Aufgaben aus der obigen Serie selbstständig überprüfen.

xxx

6 Potenzieren von Summen und Differenzen

Beispiel: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Merke:

Eine zweigliedrige Summe oder Differenz nennt man **Binom**.

6.1 Binomische Formeln

XXX

6.2 Übungen

- 1) Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln die Potenz $(2x - 3y)^3$ vorteilhaft durch Substitution.
- 2) Erstellen Sie anschliessend eine eigene Aufgabe inkl. Lösung und tauschen Sie diese mit einem Mitlernenden aus. Wählen Sie hierfür nicht zu grosse Zahlenwerte.

[illegible]

9) $32a^2 + 16a + 2$

[illegible]

Merke:

In vielen Fällen kann die Formel

XXX

angewendet werden. Beispiel: $x^2 + 10x + 21 = (x + 7) \cdot (x + 3)$

Gesucht sind also zwei Zahlen a und b , deren Produkt 21 und deren Summe 10 ergibt; also:

$$7 \cdot 3 = 21 \text{ und } 7 + 3 = 10$$

Zerlegen Sie folgende Terme in möglichst viele Faktoren.

10) $b^2 - 11b - 60$

[illegible]

11) $2a^2y^2 + 8a^2y - 42a^2$

[illegible]

Eine Summe aus drei Summanden lässt sich in ein Produkt verwandeln, wenn man den ersten und den letzten Summanden so in Faktoren zerlegt, dass die Summe der Produkte entsprechender Faktoren das mittlere Glied ergibt. Beispiel:

XXX

$$\underline{12) \ 21a^2 - 2ab - 8b^2}$$
[illegible]

Bruchterme mit Potenzen werden vereinfacht, indem man die Terme im Zähler und Nenner in möglichst viele Faktoren zerlegt und anschliessend kürzt.

13) $\frac{63a - 49b}{81a^2 - 49b^2}$

[illegible]

$$14) \frac{3bc^2 - cd + 15bc - 5d}{6bc^2 - 2cd - 3bc + d}$$

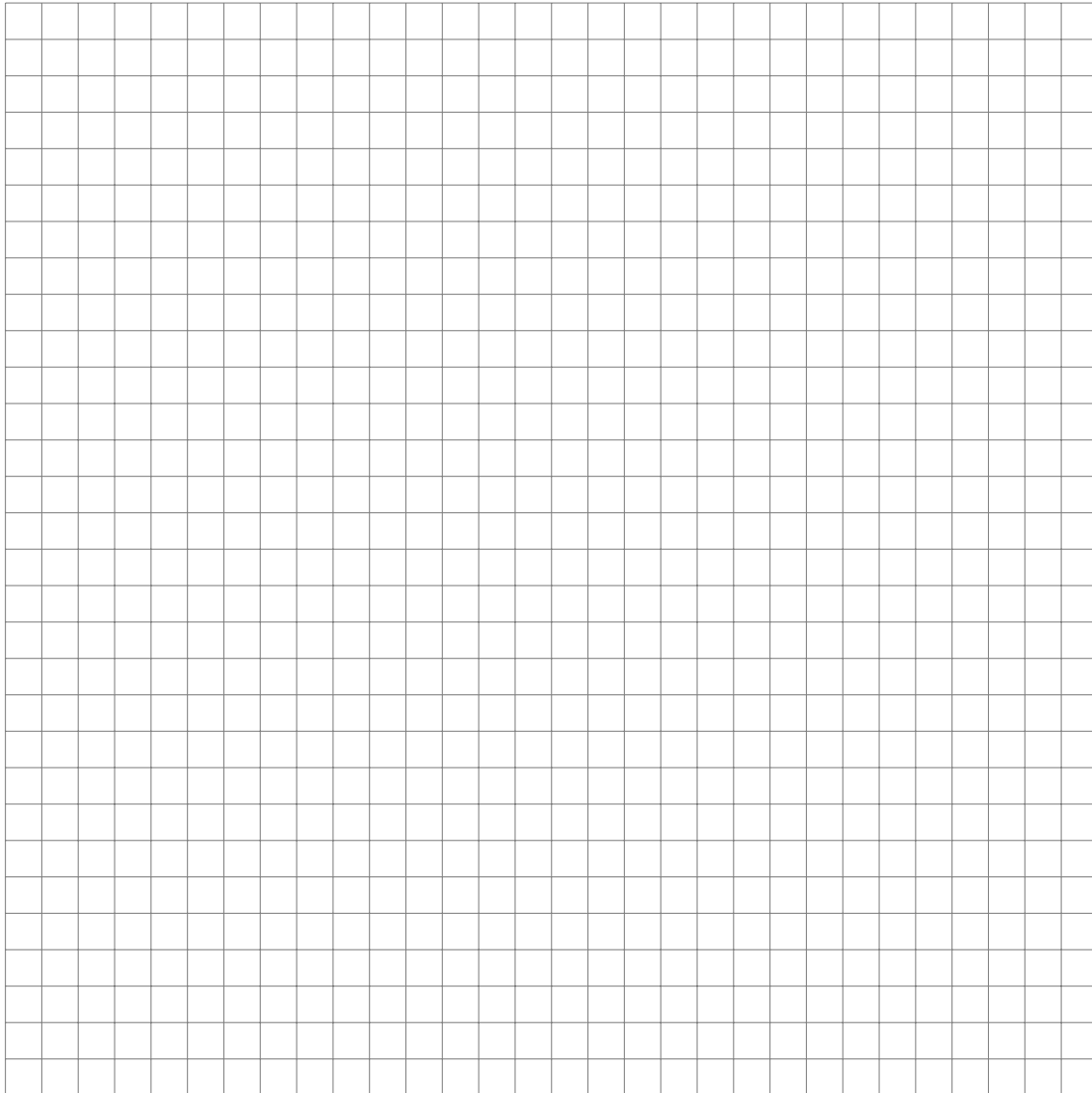
[illegible]

[illegible]

[illegible]

7.3 Übungen aus: [KG, 262/15.2] Faktorzerlegung an Termen mit Potenzen

8, 12, 23, 36, 45, 53, 54



8 Potenzfunktionen

8.1 Potenzfunktionen mit positiv-ganzzahligen Exponenten

Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ nennt man Potenzfunktionen mit positiv-ganzzahligen Exponenten.

Beispiel mit $n = 1$: $y(x) = k \cdot x^1$

xxx

Feststellung: Die Funktion $y(x) = k \cdot x^1$ ist eine **lineare Funktion**. Ihr Graf ist eine **Gerade**.

Beispiel mit $n = 2$: $y(x) = k \cdot x^2$

xxx

Feststellung: Die Funktion $y(x) = k \cdot x^2$ ist eine **quadratische Funktion**. Ihr Graf ist eine **Parabel**.

Weitere Beispiel

$n = 3$: $y(x) = x^3$ ist eine **kubische Funktion**. Ihr Graf ist eine **Wendeparabel** (Parabel 3. Ordnung)

8.2 Potenzfunktionen mit negativ-ganzzahligen Exponenten

Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ nennt man Potenzfunktionen mit negativ-ganzzahligen Exponenten.

Beispiel mit $n = -1$: $y(x) = k \cdot x^{-1} = k \cdot \frac{1}{x}$

xxx

Feststellung: Der Graf der Funktion $y(x) = k \cdot x^{-1} = k \cdot \frac{1}{x}$ ist eine **Hyperbel**. Der Graf nähert sich den Koordinatenachsen, ohne sie zu erreichen

Beispiel mit $n = -2$: $y(x) = k \cdot x^{-2} = k \cdot \frac{1}{x^2}$

xxx

8.3 Übungen

Benennen Sie die Grafen folgender Funktionsgleichungen.

xxx

8.4 Übungen aus: [KG, 266/ 15.3] Potenzfunktionen der Form $y(x) = a \cdot x^n$

1, 2, 3,

Hinweis: Lösen Sie die Aufgaben mit EXCEL. Bereiten Sie das Worksheet in EXCEL so vor, dass a und n frei wählbare Parameter sind, die dann der Aufgabe entsprechend angepasst werden können.

xxx

9 Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten

Beispiel: $2^{\frac{1}{2}} =^2 \sqrt{2}^1 = \sqrt{2}$

Merke:

Alle Gesetze der Potenzrechnung gelten auch für Potenzen mit Zahlen als Exponenten

9.1 Formeln

XXX

9.2 Übungen

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

$$1) \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4$$

[illegible]

$$2) \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

[illegible]

$$3) \ 4^{\frac{3}{2}}$$

[illegible]

$$4) \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

[illegible]

5) $16^{\frac{3}{4}}$

[illegible]

6) $32^{-0.2}$

[illegible]

7) $(\sqrt{b})^{2x}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible][illegible]

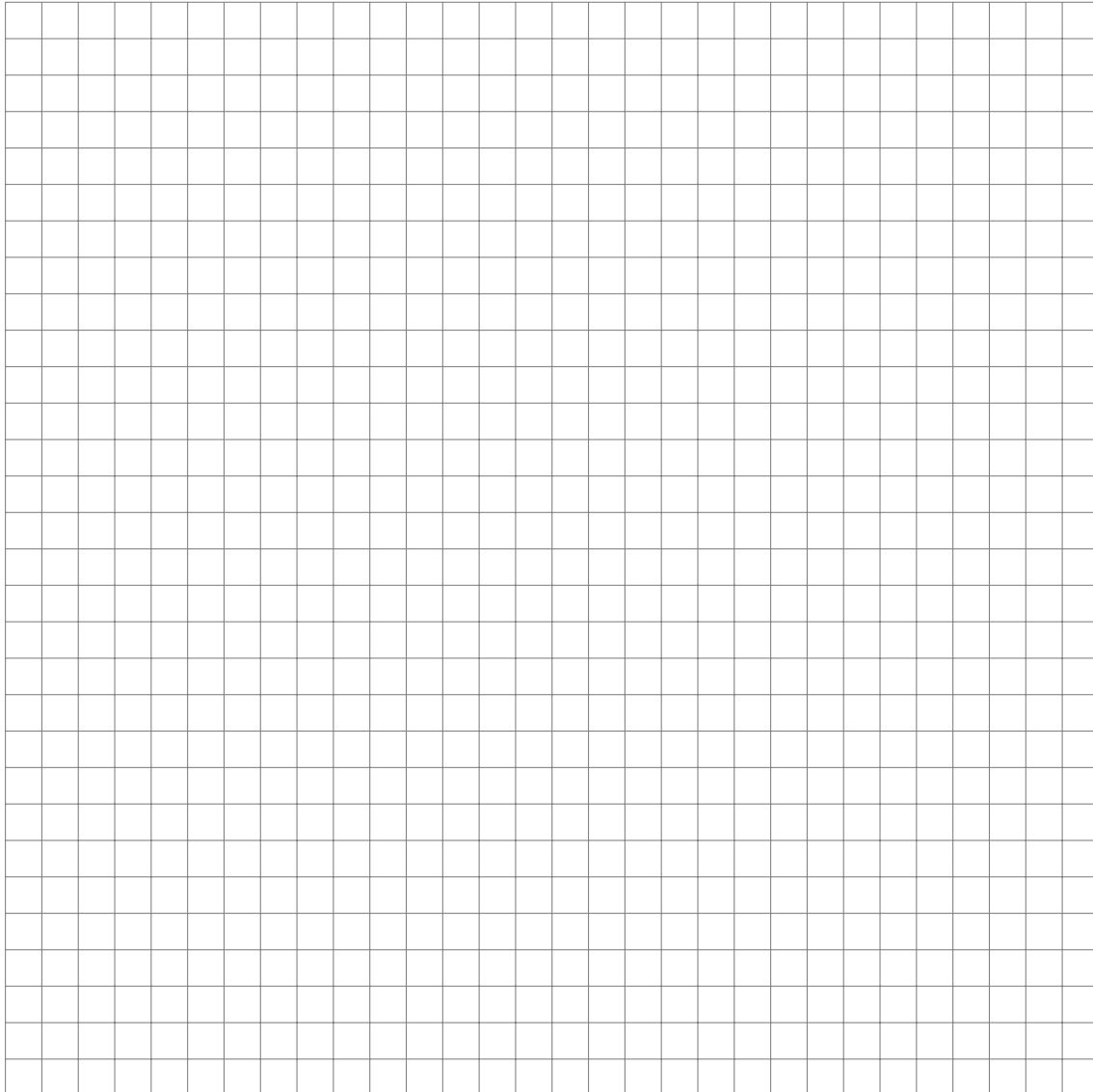
[illegible]

[illegible]

[illegible]

9.3 Übungen aus: [KG, 270 /15.4] Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten

1, 2, 3, 4



10 Gleichungen mit Potenzen

10.1 Definition

Bei Potenzgleichungen ist die Basis einer Potenz die gesuchte Grösse.

10.2 Übungen

Bestimmen Sie x .

$$\underline{1) \ x^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}}$$

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

2) $(x - 4)^{-3} = 8$

[illegible]

10.3 Übungen aus: [Kusch Bd1, 229/12.8] Zahlengleichungen mit Potenzen

