微积分

YogMas-Wang

Yogmas-Wang.top.

日期: / 10.23.

第一章：函数 极限与连续.

(一) 函数.

1. 函数的概念.

2. 函数的运算

(1) 复合函数.

(2) 反函数.

定义：设函数 $y=f(x)$，若对 $\forall y\in Z_f$，都有唯一的 $x\in D_f$ 适合 $y=f(x)$，则称由此构成的以 y 为自变量、x 为因变量的函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$

3. 函数的几种简单特性

(1) 奇偶性 (2) 单调性 (3) 周期性 (4) 有界性.

4. 初等函数

(1) 基本初等函数：①常值 ②幂 ③指数 ④对数 ⑤三角 ⑥反三角

(2) 初等函数：由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合得到的，并能用一个解析式表达的.

日期: / 10.23

(二) 极限.

1、极限的概念.

(1) 数列极限

定义: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时恒有

$|x_n - A| < \varepsilon$

(2) 函数极限.

1° 自变量趋于无穷的情况

定义: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0$, 当 $x>X$ 时 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0$, 当 $x<-X$ 时 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

2° 自变量趋有限值的情况

定义: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

单侧极限: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 又记 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 为 $f(x_0+0)$

右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 又记 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 为 $f(x_0-0)$

日期: / 10.23

(3) 数列极限与函数极限的关系

定理(Heine定理): $\lim\limits_{x\to a}f(x)=C \Leftrightarrow \forall x_n\to a\ (n\to\infty)$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=C$. ($a$可以是 x_0, x_0^+, x_0^- 也可以是 $\infty, +\infty, -\infty$)

注: 通常在证明一个函数在无穷或某点的极限不存在时. 证其对应数列的极限不存在。

2. 无穷小量与无穷大量.

(1) 无穷小与无穷大的概念.

定义: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量简称无穷小. $x\to x_0^+, x_0^-$ 与 $x\to\infty, -\infty, +\infty$ 时的无穷小类似定义.

定义: 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 即 $\forall M>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时. 有 $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量, 简称无穷大. $x\to x_0^+, x_0^-$ 与 $x\to\infty, -\infty, +\infty$ 时的无穷大类似定义, 以及 正无穷大 负无穷大

(2) 无穷小与无穷大的关系.

定理 在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x)\neq 0$. 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

日期: / 10.24

(3) 无穷小的运算

定理 有限个无穷小的代数和仍是无穷小;

有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;

推论: 常数与无穷小的乘积为无穷小, 有限个无穷小的乘积为无穷小

(4) 函数、极限与无穷小的关系

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$ 其中 $\alpha(x)\to 0$

函数的极限等于某个常数的充要条件是函数等于该常数与无穷小量的和.

3、极限的性质与运算

(1) 极限的性质

1° 唯一性 2° 局部保号性 3° 有界性

收敛数列必有界

(2) 极限的运算:

1° 四则运算 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

若 $\lim f(x)=A$ $\lim g(x)=B$ $\lim f(x)g(x)=A\cdot B$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

日期:　　/

2° 复合运算

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{\mu\to a} f(\mu) = A$$

若，$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a$　在x_0的某去心邻域内$\mu=\varphi(x)\neq a$

4. 极限存在准则及两个重要极限.

(1) 夹逼准则

(2) 单调有界准则　若$\{x_n\}$单调且有界，则$\{x_n\}$必有极限

↑上有界

↓下有界

(3) 两个重要极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

实质：

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\text{无穷小量}}\Big)^{\overbrace{x}^{\text{无穷大量}}}=e \quad 或 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

5. 无穷小的比较与替换.

定义　设$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$　$(\beta(x)\neq 0)$

1°　$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$　$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小

2°　$\lim\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$　$\alpha(x)$是$\beta(x)$的k阶无穷小

3°　$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$　$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小　记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$

日期:　　/

(2) 12个常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

$a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$　　$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}\ (a>0)(a\neq 1)$

$a=e$时 $e^x-1\sim x$　　$a=e$时 $\ln(1+x)\sim x$.

$(1+x)^a-1\sim ax$　　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$　　$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

(3) 等价无穷小的替换

设 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$　　$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

(三) 函数的连续性

定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续

定义1：设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋近于0时，对应的函数 Δy 也趋近于零，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点

定义2：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

无穷小可以写成一个与其等价的无穷小加上一个高阶无穷小 $o(x)$

日期:　　/

3、左、右连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义，且$f(x_0-0)=f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

则称$f(x)$在点x_0处左连续.

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$ 内有定义，且$f(x_0+0)=f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定义：函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

4、连续函数与连续区间

1° 在(a,b)上每一点都连续的函数，叫做(a,b)上的连续函数，

2° 在(a,b)上连续，并且在$x=a$处右连续，$x=b$处左连续，则称$f(x)$在$[a,b]$上连续

3° $C(a,b)$表示在开区间(a,b)内全体连续函数构成的集合；若$f(x)$在开区间(a,b)内连续，记为$f(x)\in C(a,b)$.

4° $C[a,b]$ 类推3°

日期:　　/

重要数学公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$1-x^n=(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^n\pm b^n=(a\pm b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

日期: /

一、函数的间断点

$f(x)$在点x_0处连续要满足的三个条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

只要改变或补充间断处的定义就可使其变为间断点

三个有一个不满足,则函数在点x_0处间断,并称点x_0为$f(x)$的间断点

二、间断点的分类

(1) 定义:第一类间断点:x_0为$f(x)$的间断点,$f(x)$在点x_0的左右极限均存在

1. 可去型间断点:$f(x)$在x_0处的极限存在,但$f(x)$在点x_0处无定义或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

2. 跳跃型间断点 函数左右极限不等,但是都存在

(2) 第二类间断点:函数左极限和右极限至少有一个不存在

1. 无穷间断点:一侧函数极限为无穷

2. 振荡型间断点:左右两侧的单侧极限均不存在并不断跳跃

证明某点连续:$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (等号全部满足)

日期:　　/

1-6 连续函数的性质

一、连续函数的四则运算

定理1：若 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ 在 x_0 处也连续

定理2：单调连续函数的反函数必单调连续.

三、连续函数的性质

定理3：若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，函数 $f(u)$ 在点 a 连续，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)]$

简：函数符号与极限符号可互换.

定理4：若 $u = \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 也连续

四：初等函数的连续性

定理5：所有基本初等函数在其定义域内均连续

初等函数：基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的，

对比

注：$f(x)$ 在点 x_0 连续，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

定理6：一切初等函数在其定义区间内都是连续的

1、定义域内的区间

例：定义域为孤立点集时，定义域内不连续.

2、仅在定义区间内连续，定义域内不一定连续

日期: / 10.25

一、有界性定理

1° 最大值

2° 最小值

(开区间不一定成立)

定理1：在闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值

1° 开区间不一定成立.

2° 若区间内有间断点，定理不一定成立

定理2(有界性定理)：在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

二、介值定理.

定理3：若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)\neq f(b)$
$f(a)<c<f(b)$ (或 $f(a)>c>f(b)$) 其中 c 为常数，
则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=c$.

推论1：若 $f(x)\in C[a,b]$，M，m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对任意常数 c，$m<c<M$
必 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=c$

日期:　　/

推论2(零点存在性定理):

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$
那么在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点

一、导数的定义:

定义：设$y=f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，当自变量x在x_0处取得增量
Δx时，函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称此极限为$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$不存在，则在此点不可导，特殊：若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty$ 记为$f'(x)=\infty$

如果$f(x)$在(a,b)内每一点都可导，就称$f(x)$在(a,b)可导，记为$f(x)\in D(a,b)$
此时导数值构成的新函数叫做导数.
记作y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$或$\frac{df(x)}{dx}$　　$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$

左、右导数:

(1) 左导数: $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(2) 右导数: $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

(3) $f(x)$在x_0处可导$\Longleftrightarrow f'_+(x_0), f'_-(x_0)$存在并且相等.

日期: /

(4) 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上任意一点都可导，且在 a 上有右导数，b 上有左导数，

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

二、用定义求导数.

① 定义判断一个函数在某点是否可导：求该点 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限是否存在

$[0,+\infty)$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(0,+\infty)$ 综上 $(0,+\infty)$ 上可导.

$(x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$

$(C)' = 0$

四：导数的几何意义.

1. $f'(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处切线斜率.

法线：与切线垂直的直线.

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ [点斜式].

法线方程：$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $[f'(x_0)\neq 0]$.

2. 物理意义

变速直线运动：s(路程)对 t(时间)的导数为瞬时速度

$v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

交流电路：电量对时间的导数为电流强度.

$i(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$.

日期:　　/

非均匀的物体：质量对长度(S,V)的导数为物体的线(面,体)密度

五：可导与连续的关系

定理(可导的必要条件)：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x)$$ [高阶无穷小]

此命题的逆命题不成立(不一定)

可导一定连续，连续不一定可导.

特：当 $\lim_{x\to x_0} f'(x_0)=\infty$ 时 在 $x=x_0$ 上，$f(x)$ 不可导，但是切线存在为 y 轴.

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导的三种情况

1° $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续

2° 左导数或右导数不存在.

3° 左导数 $\neq$ 右导数

§2.2 导数的运算法则.

一、导数的四则运算法则.

定理. 设函数 $u(x), v(x)$ 都在 x 点可导，则它们的和，差，积，商

也在点 x 处可导

日期: /

(1) $[\mu(x)+v(x)]'=\mu'(x)+v'(x)$.

(2) $[\mu(x)\cdot v(x)]'=\mu'(x)v(x)+\mu(x)v'(x)$

(3) $\left[\frac{\mu(x)}{v(x)}\right]'=\frac{\mu'(x)v(x)-\mu(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$. 当$\mu(x)=1$时 $\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$

证明(3)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\mu(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{\mu(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu(x+\Delta x)v(x)-\mu(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu(x+\Delta x)v(x)-\mu(x)v(x)-[\mu(x)v(x+\Delta x)-\mu(x)v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)[\mu(x+\Delta x)-\mu(x)]-[\mu(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\mu'(x)-v'(x)\mu(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$ ∵ $v'(x)$可导, 可导必连续.

∴ $\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$ ∴原式$=\frac{\mu'(x)v(x)-\mu(x)v'(x)}{v^2(x)}$

推论:

(1) $\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right]'=\sum_{i=1}^{n}f_i'(x)$ (2) $[cf(x)]'=cf'(x)$.

(3) $\left[\prod_{i=1}^{n}f_i(x)\right]'=$ ______ $=\sum_{i=1}^{n}\left[f_i'(x)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}f_k(x)\right]$

$f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$

$+f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots+\cdots f_1(x)\cdots\times f_n'(x)$ 第n项只对第n项求导其他照写,最后加起来

日期:　　/

需要背诵导数:

1° $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$　　$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = (\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\csc x \cdot \frac{1}{\tan x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$　　$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

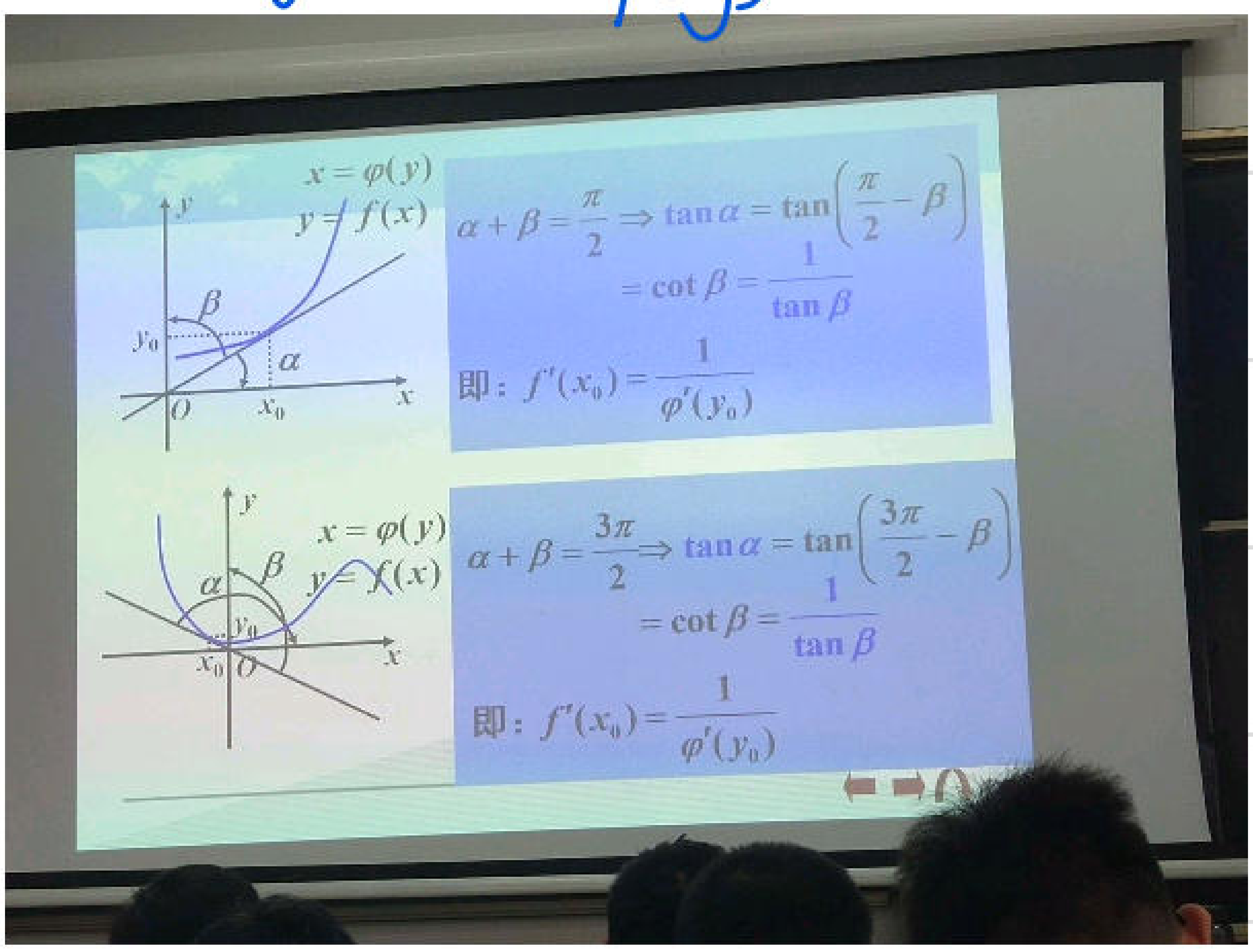
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$　　$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

二、反函数的求导法则

定理: 设函数 $x=f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导, 且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间内也可导, 且有

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$



日期:　　/

三、复合函数的求导法则

定理3(链式法则)：如果$u=\varphi(x)$可导，而$y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处可导，

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

例：$y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$．求其导数.

$$y=\ln\sqrt{x^2+1}-\ln\sqrt[3]{x-2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(x-2)$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot2x\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

2.3 隐函数及参数式函数的导数.

一、隐函数：一个二元方程$F(x,y)=0$可以确定一元函数$y=y(x)$或$x=x(y)$

$xy-e^x+e^y=0$　求y对x的导数

$y+xy'-e^x+e^y y'=0$　$(x+e^y)y'=e^x-y$　$y'=\frac{e^x-y}{x+e^y}$

由原方程知$x=0$时$y=0$　$\therefore y'|_{x=0}=\frac{1-0}{1+0}=1$.

二、对数求导法 (1) $y=\frac{(x+1)^3\sqrt{x-1}}{(x+4)^2e^x}$　(2) $y=x^{\sin x}$

先在方程两边取对数，利用隐函数求导求出函数.

适用：多个函数相乘 和幂指函数$u(x)^{v(x)}$

$\ln y=\ln[(x+1)^3\sqrt{x-1}]-\ln(x+4)^2e^x$

$=3\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$

$y=\sqrt{e^{x}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}=\left\{e^{x}\left[x(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\sin^{\frac{1}{4}}x$

$\ln y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{2\sin x}\cdot\cos x$

$y'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{2\tan x}\right)\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot\sin^{\frac{1}{4}}x\right)$

幂指函数求导法:

(1) $f(x)=\mu(x)^{v(x)}\quad(\mu(x)>0)$　　（隐函数）

$\ln f(x)=v(x)\ln\mu(x)$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\cdot\ln\mu(x)+v(x)\cdot\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$

$f'(x)=\cdots$

(2) $y=\mu(x)^{v(x)}$　　（复合函数）

$y=e^{\ln\mu(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln\mu(x)}$.

$y'=e^{v(x)\ln\mu(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot\ln\mu(x)+v(x)\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right]$.

① $x^y=y^x$

$y\ln x=x\ln y$.

$y'\ln x+y\cdot\frac{1}{x}=\ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'$

$y'=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$

② $x^y=y^x$

$e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$.

$e^{y\ln x}\cdot(y'\ln x+y\cdot\frac{1}{x})=e^{x\ln y}(\ln y+x\cdot\frac{1}{y}y')$

$y'=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$

日期:　　　/

三、由参数方程所确定的函数的导数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t\text{为参数}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

例：求 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 求 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的切线方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$ 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$

$x = a(\frac{\pi}{2}-1)$　$y = a$

$y-a = x-a(\frac{\pi}{2}-1)$

例：设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} xe^t + t\cos x = \pi \\ y = \sin t + \cos^2 t \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

$x(t)e^t + t\cos[x(t)] = \pi$

$x'(t)[e^x - t\sin x] = xe^x + \cos x$

$$\begin{cases} x'(t)e^t + x(t)e^x + \cos[x(t)] + t\cdot[-\sin[x(t)]]\cdot x'(t) = 0 \\ y'(t) = \cos t + 2\cos t\cdot(-\sin t) = \cos t - \sin 2t \end{cases}$$

当 $x=0$ 时，$t=\pi$。 $\therefore x'(t) = \frac{0+1}{1-0} = 1$.　$y'(t) = -1-0 = -1$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -1$

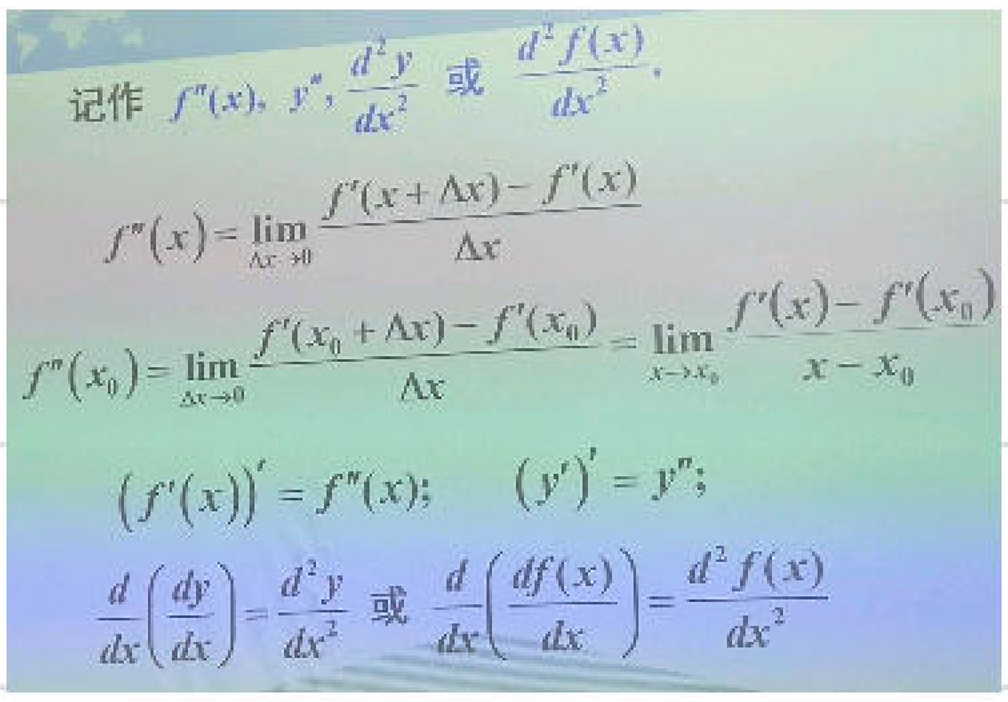
日期:　　/

四、相关变化率

四、高阶导数.

1° 定义：若函数 $y=f(x)$ 在点x的某邻域 $U(x)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$ 存在，则称该极根为函数 $f(x)$ 在点x处的二阶导数

记为 y'', $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{d^2x}$.



三阶导数：y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

四阶导数：$y^{(4)}$, $f^{(4)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$

n-1阶导数的导数为n阶导数.

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

日期:　　/

2° 高阶导数求法

1. 直接法（逐步求导）

例1: $y=\arctan x$　$y'=\frac{1}{1+x^2}$　$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$　$y'''=-\frac{2(1+x^2)^2-2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$

$=-\frac{2(1+x^2)-8x^2}{(1+x^2)^3}=-\frac{-6x^2+2}{(1+x^2)^3}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

例2: 设 $y=x^\alpha$ $(\alpha\in R)$ 求 $y^{(n)}$

$y'=\alpha x^{\alpha-1}$　$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$　综上 $y^{(n)}=[\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha+1-n)\cdot x^{\alpha-n}]$

$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)^{(n)}=a_n\cdot n!$

$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)^{(n+1)}=0$

例3.（先求出前几阶找规律 ⟹ 数学归纳法）

$y=\ln(1+x)$　$y'=\frac{1}{1+x}$　$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$　$y'''=\frac{2}{(1+x)^3}$　$y^{(4)}=-\frac{3\times 2}{(1+x)^4}$

$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n\geq 1,\ 0!=1)$

例4　$y=\sin x$　求 $y^{(n)}$

$y'=\cos x$　$y''=-\sin x$　$y'''=-\cos x$　$y''''=\sin x$

$y^{(n)}=\begin{cases}\cos x & n=4k+1\\ -\sin x & n=4k+2\\ -\cos x & n=4k+3\\ \sin x & n=4k+4\end{cases}$　$k\in N^*$　$\xRightarrow{\text{简化}}$　$y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$　$n\in N^*$.

日期:　　　/

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$　　　　$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

例5: $y = e^{ax}\sin bx$　(a,b)为常数，求$y^{(n)}$

$y' = a\cdot e^{ax}\sin bx + e^{ax}\cdot b\cos bx = e^{ax}(a\cdot\sin bx + b\cdot\cos bx)$

$= e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$

$= e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(bx+\varphi)$　$[\tan\varphi = \frac{b}{a}]$

$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}[a\sin(bx+\varphi) + b\cos(bx+\varphi)]$

$= (\sqrt{a^2+b^2})^2 e^{ax}\cdot\sin(bx+2\varphi)$

$y^{n} = (\sqrt{a^2+b^2})^n e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi)$　$[\tan\varphi = \frac{b}{a}]$

3° 高阶导数的运算法则

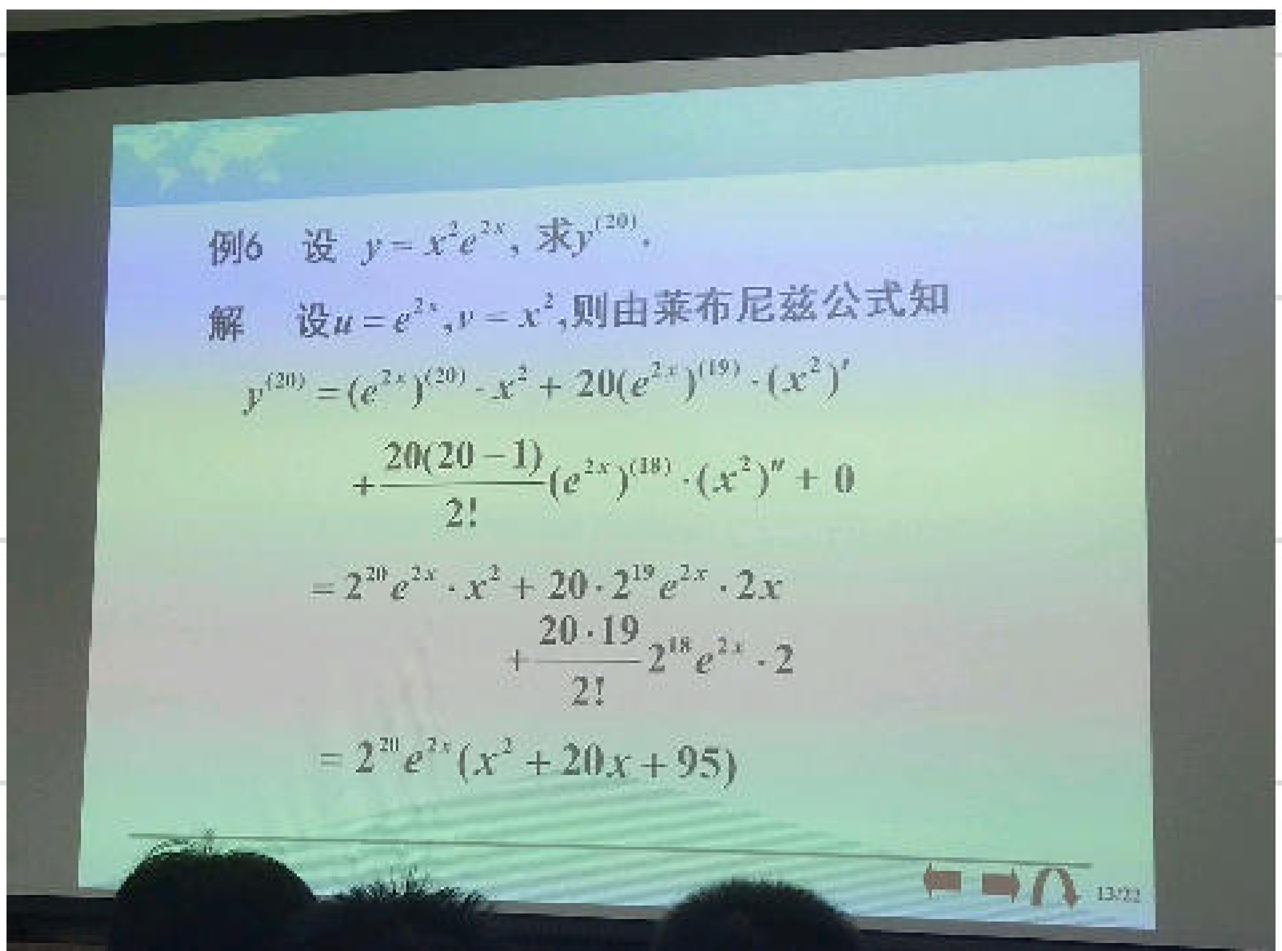
(1) $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.

(2) $(Cu)^{(n)} = C u^{(n)}$

(3) $(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots +$

$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{k} + \cdots + u v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

应用: 例6: 设$y = x^2e^{2x}$　求$y^{(20)}$



3、间接法:(利用已知的高阶导数公式,通过四则运算,变量代换等方法,求出n阶导数)

1° $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \ (a>0)$　　$(e^x)^{(n)} = e^x$

2° $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

3° $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

4° $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)\,x^{a-n}$

5° $(\ln x)^a = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

推广: $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax+b}$.

$[\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n+1}\ \frac{a^n \cdot (n-1)!}{(ax+b)^n}$.

$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

若 $f^{(n)}(x) = \varphi(x)$,则 $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot \varphi(ax+b)$

例7: $y = \frac{1}{x^2-1}$　求 $y^{(5)}$

$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$

$y^{(5)} = \frac{1}{2}(\frac{-1\cdot 5^n}{(x-1)^6} - \frac{-1\cdot 5^n}{(x+1)^6}) = 60[\frac{1}{(x+1)^6} - \frac{1}{(x+1)^5}]$

日期: /

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

例18: 设 $y=\sin^6x+\cos^6x$, 求 $y^{(n)}$

$y=(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3=(\sin^2x+\cos^2x)[\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)$

$=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x-\sin^2x\cos^2x$

$=1-3\sin^2x\cos^2x$

$=1-(3\sin x\cos x)^2$

$=1-(\frac{3}{2}\sin 2x)^2$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2(2x)=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos(4x)}{2}=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos(4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos(4x)$

$y=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos(4x)$ $\quad y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

例19: $f(x)=x^3+2x|x|$ 求 $f^n(x)$

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2, & x\geq 0\\ x^3-2x^2, & x<0\end{cases}$$

$x>0, f'(x)=3x^2+4x$

$x<0, f'(x)=3x^2-4x$

$f'(x)_{x\to 0^-}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^3-2x^2}{x}=x^2-2x=0$

$f'(x)_{x\to 0^+}=0 \quad f'(x)=0$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x & x>0\\ 0 & x=0\\ 3x^2-4x, & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x+4 & x>0\\ \text{不存在} & x=0\\ 6x-4 & x<0\end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ \text{不存在} & x=0\\ 6 & x<0\end{cases}$$

日期:　　/

例10：求方程 $y=1+xe^y$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 y''.

$y'=e^y+x\cdot e^y\cdot y'$ 　 $(1-xe^y)y'=e^y$ 　 $y'=\frac{e^y}{1-x\cdot e^y}=\frac{e^y}{1-(y-1)}$

$=\frac{e^y}{2-y}$

① $y''=\frac{e^y\cdot y'(2-y)-e^y(-1)y'}{(2-y)^2}$ - $\frac{e^y\cdot y'(2-y)+e^y y'}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$

② $y''=e^y\cdot y'+e^y\cdot y'+x[e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y']=$

例11：设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} y=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 确定 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\cdot(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d\cdot(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dt}$、$\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(y'_{t})'}{(x_{t})'}$

日期:　　　/

五、函数的微分

(一)：微分的概念

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若函数在点 x_0 的改变量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

与自变量的改变量 Δx，满足下列关系

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 的高阶无穷小，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，$A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分．记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

$A\Delta x(A\neq 0)$ 称为 Δy 的线性主部.

定理：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是，$f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$

证［必要性］　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，由微分的定义有

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数．上式两边同除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

取极限，得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A$.

［充分性］　如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

由函数及其极限与无穷小之间的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha\ (\text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时}, \alpha\to 0).$$

两边同乘以 Δx，得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

这里 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$，从而 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$，显然 $f'(x_0)$ 是与 Δx 无关的常数，由可微的定义知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，其微分为

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$

即 $dy=f'(x)\Delta x$

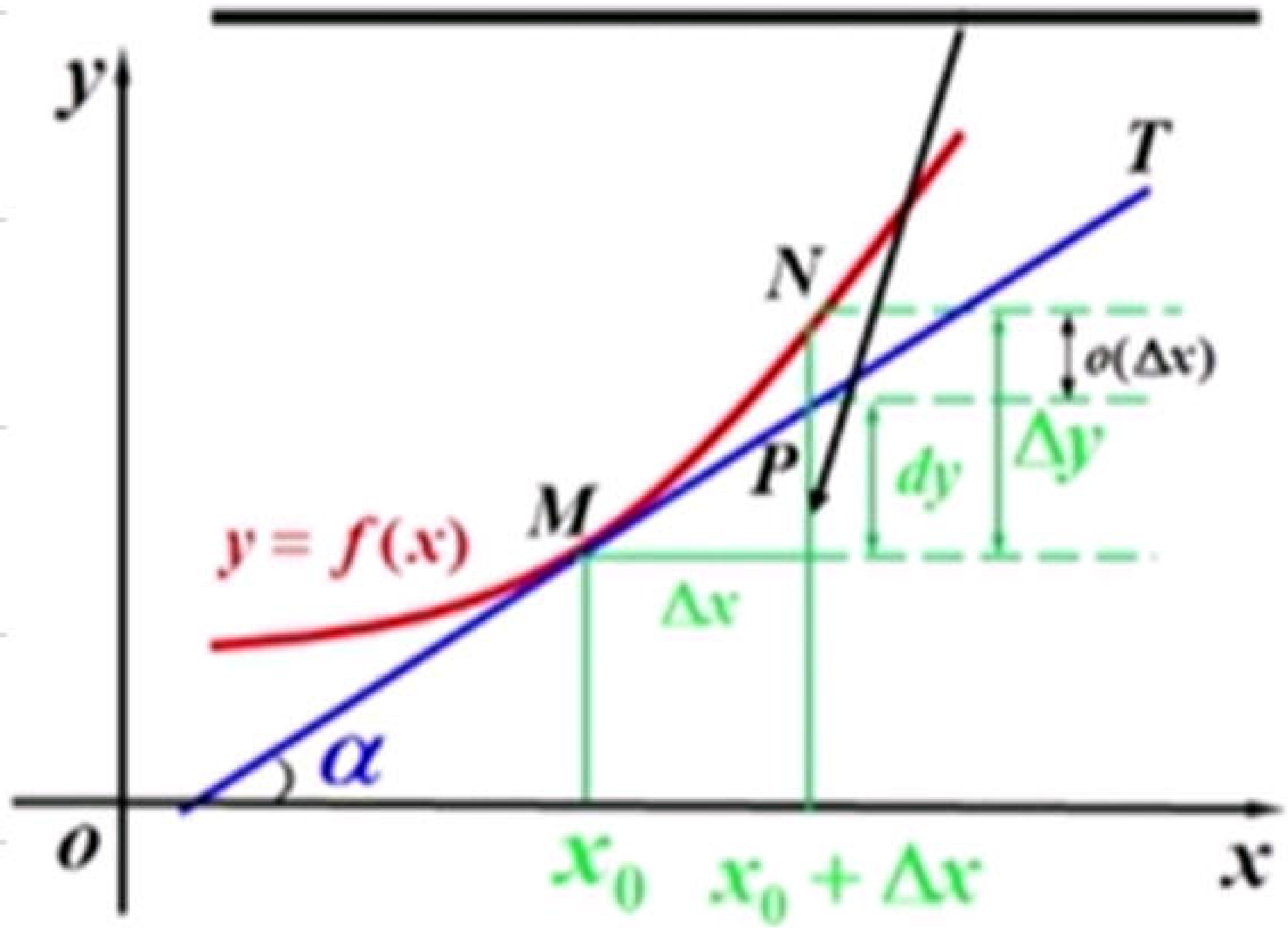
通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx　即 $dx=\Delta x$

例1: $y=x^3$ 当 $x=2$ $\Delta x=0.02$ 时的微分.

$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\cdot\Delta x=3\times4\times0.02=0.24$

三、微分的几何意义

$$\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=dy\Big|_{x=x_0}$$



四、微分的公式与法则

1、基本初等函数的微分公式 $dy=f'(x)\cdot dx$

$$d(C)=0 \qquad d(\sin x)=\cos x\,dx \qquad d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$$

$$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx \qquad d(\cos x)=-\sin x\,dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx \qquad d(\tan x)=\sec^2 x\,dx \qquad d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$$

$$d(e^x)=e^x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x\,dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

日期:　　/

2、函数和、差、积、商的微分法则

设 u、v 均可微.

$d(u\pm v)=du\pm dv$　　　$d(Cu)=Cdu$.

$d(uv)=vdu+udv$.　　　$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq0)$

3、复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$　$u=\varphi(x)$ 均可微　$y=f[\varphi(x)]$.

$dy=\{f[\varphi(x)]\}'dx=f'(u)\boxed{\varphi'(x)dx}=f'(u)du$.　　$\underline{dy=f'(u)du}$

若 u 是自变量，$dy=f'(u)du$　　　微分形式的不变性

例1　设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求 dy.

$dy=\frac{1}{x+e^{x^2}}d(x+e^{x^2})=\frac{1}{x+e^{x^2}}(dx+de^{x^2})$

$=\frac{1}{x+e^{x^2}}[dx+e^{x^2}\cdot d(x^2)]=\frac{1}{x+e^{x^2}}[dx+e^{x^2}\cdot2x\cdot dx]$.

$=\frac{1}{x+e^{x^2}}(1+2x\cdot e^{x^2})dx$

例2 设 $y=e^{-ax}\sin bx$ 求 dy.

$$dy=\sin bx\, d(e^{-ax})+e^{-ax}\cdot d(\sin bx)$$

$$=\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)\cdot dx+e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot b\cdot dx$$

$$=e^{-ax}\cdot(b\cos bx-a\sin bx)dx$$

例3. 设 $\cos(xy)=x^2y^2$，求 dy 和 $\frac{dy}{dx}$

$$d[\cos(xy)]=d(x^2y^2)$$

$$-\sin(xy)d(xy)=y^2\cdot dx^2+x^2\cdot dy^2.$$

$$-\sin(xy)(y\cdot dx+x\cdot dy)=y^2\cdot 2x\cdot dx+x^2\cdot 2y\cdot dy.$$

$$dy(2x^2y+x\sin(xy))=-dx[\sin(xy)y+2y^2x]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin(xy)y+2xy^2}{2x^2y+x\sin(xy)}.$$

例4: (1) $d(\quad)=e^{2x}\cdot dx$　　(2) $d(\quad)=\cos wx\,dx$

$\because d(e^{2x})=e^{2x}\cdot d(2x)=2e^{2x}\cdot dx$　　$d(\sin wx)=w\cos wx\,dx$

$\therefore e^{2x}\cdot dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})=d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)$　　$d\left(\frac{\sin wx}{w}\right)=\cos wx\,dx$

$d\left(\frac{e^{2x}}{2}+C\right)=e^{2x}\cdot dx$　　$d\left(\frac{\sin wx}{w}+C\right)=\cos wx\,dx$

日期:　　/

五：微分在近似计算中的作用

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x$

$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

$\left.\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0) \\ &f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}\right\}$ $f(x)$在点x_0的线性近似

$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$　　$\sin x \approx x$　$\tan x \approx x$　$e^x \approx 1+x$

例1：计算下列各数的近似值：(1) $e^{-0.03}$　(2) $\sqrt[3]{998.5}$

(1) $e^{-0.03} \approx 1-0.03 = 0.97$

例2：求算 $\sin 29°$ 的计算值

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$　$f'(\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\Delta x = x - x_0 = -1° = \frac{-\pi}{180}$

$f(29°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\pi}{180}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$

例3　有一批半径为1cm的球，为提高球面的光洁度，需镀上一层铜，厚度为0.01cm，请估计每个球需用铜多少克?(铜的密度为8.9g/cm^3)

$\Delta V = dV\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$　　$\Delta V = 4\pi R^2\cdot\Delta x = 4\pi\times 0.01 = 0.04\pi$

$M = \rho\Delta V = 0.04\pi\times 8.9 = \cdots$

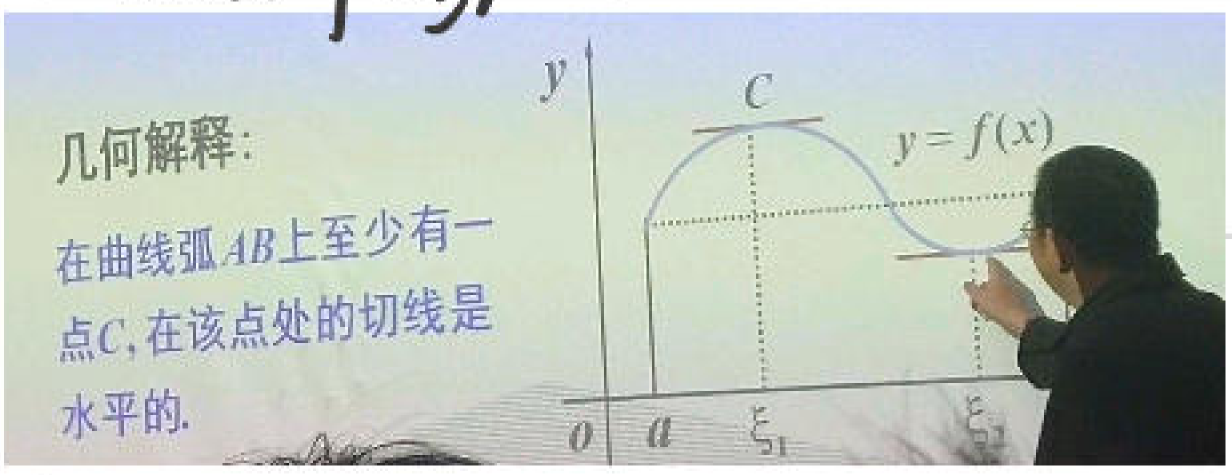
日期:　　/

2.6 微分中值定理

一、罗尔定理（导函数的零点存在定理）

若 (1) $f(x) \in C[a,b]$ (2) $f(x) \in D(a,b)$ (3) $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$

使得 $f'(\xi)=0$.



在 (x_1,x_2) 内有唯一根.

①: 介值定理 $\Longrightarrow$ 有根

② 罗尔定根 $\Longrightarrow$ 根唯一(反证)

例1: 证明 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的$\boxed{正}$实根.

令 $f(x)=x^5-5x+1$ ∵ $f(0)=1$ $f(1)=-3$ ∴介值定理

∴在 $x\in(0,1)$ 之间存在 x_0，使得 $f(x_0)=0$.

假设在 $x\in(0,1)$ 之间还存在 x_1 使得 $f(x_1)=0$ ∵罗尔定理 ∴存在 $\xi \in (x_0,x_1)$

或 (x_1,x_0) 之间，使得 $f'(\xi)=0$ ∵ $f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)$ 当 $x\in(0,1)$

时，$f'(x)$ 恒小于0 ∴矛盾，假设不成立，∴有且仅有一个小于1的正

实根

日期:　　/

例2 设$F(x)=(1-x)^2 f(x)$,其中$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导,又知$f(2)=0$.试证 在$(1,2)$内存在点ξ,使得$F''(\xi)=0$.

$\because F(x)\in C[1,2]\cap D(1,2)$ $F(1)=F(2)=0$ $\therefore$存在$x_0\in(1,2)$使得

$F'(x_0)=0$ $F'(x)=(x-1)f(x)+(1-x)^2\cdot f'(x)$

$\because F'(x)\in C[1,2]\cap D(1,2)$ $F'(x_0)=0$ $F'(1)=0$ $\therefore$存在$\xi\in(1,x_0)$使得

$F''(\xi)=0$ $\therefore$得证.

例3 设$a_1, a_2,\cdots a_n$为满足

$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$的实数,证明:

方程$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$

在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

解:令$f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{a_n\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

显然$f(x)\in C(0,\frac{\pi}{2})\cap D(0,\frac{\pi}{2})$ 且$f(0)=0$.

$f(\frac{\pi}{2})=a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$.

由罗尔定理,存在$x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$使得$f'(x_0)=0$.

即$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$

$\therefore$得证

日期: /

例4 设 $f(x)\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$，求证：$\exists\xi\in(0,\pi)$，

使得 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$.

令 $F(x)=f(x)\cdot\sin x$ 显然 $F(x)\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$

且 $F(0)=F(\pi)=0$ ∵罗尔定理 ∴存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$

例5 函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $0<f(x)<1$，

$\forall x\in(0,1)$ 有 $f'(x)\neq 1$.

证明：存在惟一 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

① 存在根

② 根唯一

令 $F(x)=f(x)-x$ ∵ $F(1)=f(1)-1<0$ $F(0)=f(0)>0$ $F(x)\in C[0,1]$

∴存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$.

$F'(x)=f'(x)-1$

若另有一点 x_0，使得 $F(x_0)=0$ $F(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$ $F(x_0)=F(\xi)=0$

∵罗尔定理 ∴存在一点 $x_1\in(x_0,\xi)$ 使得 $F'(x_1)=0$ 即 $f'(x_1)=1$ 又∵ $f'(x)\neq 1$

∴矛盾，不成立 ∴根唯一

日期: /

二、拉格朗日中值定理

1、定义 若 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f(b)-f(a)=F'(\xi)(b-a)$$

$$\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0}$$

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

$\because F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $F(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b)$

则 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$.

即 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

有限增量公式: $\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

设 $f(x)$在 (a,b)内可导， $x_0, x_0+\Delta x\in(a,b)$，则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$.

增量Δy的精确表达式

推论1：如果$f(x)$在区间I上的导数恒为0，则$f(x)$在区间I上是一个常数.

推论2：如果$f(x), g(x)\in D(a,b)$，且$x\in(a,b)$恒有$f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内$f(x)=g(x)+C$，其中C为唯一常数

证 作辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$，由题设

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0,$$

根据推论1知 $F(x)=C$ （C为一常数），

即 $f(x)-g(x)=C$，故 $f(x)=g(x)+C$.

日期:　　/

推论3 若$f(x)$满足 (1) $f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上连续 (2) $f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上可导

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在或($\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\infty$) 则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

用于解决分段函数分段点的右导数求导

推广: 左导数同理

例6 讨论$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1, \\ 1, & x=1, \\ x^3, & x<1 \end{cases}$ 在点$x=1$处的可导性.

显然 $f(x)$在R上连续

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 3x^2, & x<1 \end{cases}$$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=2.$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=3.$

$\because f'_-(1)\neq f'_+(1)$

$\therefore f(x)$在$x=1$处不可导

证 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, 显然 $f(x)\in C[x_0,x]\cap D(x_0,x)$,

则$\exists\xi\in(x_0,x)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi).$$

因此

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+} f'(\xi),(x_0<\xi<x)$$

$$=\lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

日期:　　/

例7 证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$.

常值函数 ⟷ 导数为0

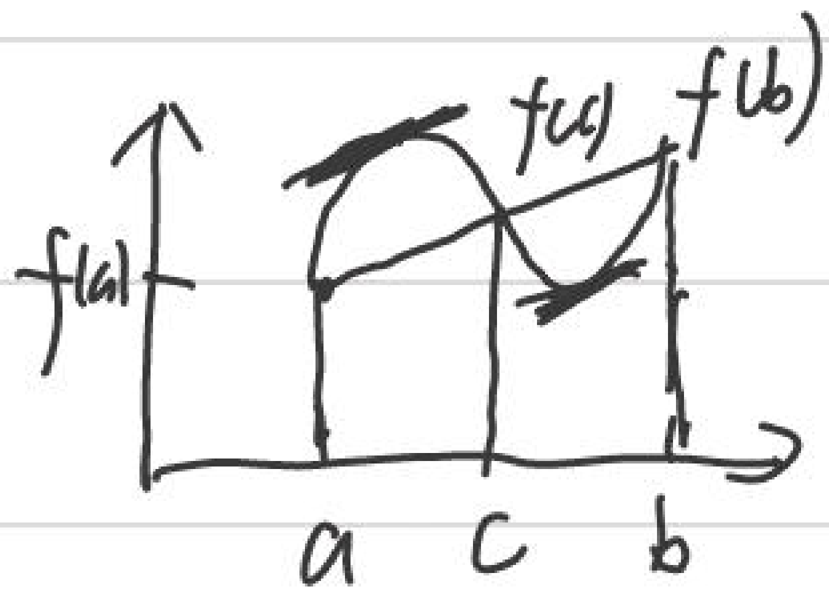
令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}})=0$

$\therefore -1\le x\le 1$ 时 $f(x)=C$.

$f(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ 得证

例3 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在，连接 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $(c,f(c))$, 其中 $a<c<b$.



解: 易知 $f(x)\in C[a,c]\cap D(a,c)$

$f(x)\in C[c,b]\cap D(c,b)$

当 $x\in(a,c)$ 时，存在 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

当 $x\in(c,b)$ 时，存在 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$.

$\because k_{ab}=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

$\therefore f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ 由罗尔定值，存在 $x_0\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f''(x_0)=0$

日期: /

定理4(柯西中值定理): 若$f(x), g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, 且$\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$

则$\exists \xi \in (a,b)$使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例1 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:

至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

令$g(x)=x^2$; 易知$g(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 易当$x \in (0,1)$时 $g'(x) \neq 0$

$\therefore$存在ξ使得 $\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$

例2 若函数$f(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理条件且不恒为常数,

证明: $\exists \xi \in (a,b)$,使得$f'(\xi) > 0$.

$\because f(x)$在$[a,b]$上满······

$\therefore f(x)$概有最大值和最小值

设最大 M 最小m

必有一个 不等于$f(a)$和$f(b)$

设M不等于 且 存在 $x_0 \in [a,b]$ 使$f(x_0)=M$

当$x \in [a,x_0]$,

$f(x)$存在$\therefore f'(\xi)= \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} > 0$

日期: /

例3 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$c\in(a,b)$,且$f(a)=f(c)=f(b)$.试证：$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=0$.

$[a,c]$ $f'(x_1)=0$

$[c,b]$ $f'(x_2)=0$

$f'(x_1)$ ~ $f'(x_2)$ $f'(\xi)=0$

例4 若函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$,试证：至少$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$.

$F(x)=f(x)-x$

$F(\frac{1}{2})>0$ $F(1)<0$ $\exists x_0\in[0,1]$ $F(x_0)=0$

$F(0)=0$ $\xi\in(0,x_0)$ $F'(\xi)=0$

例5 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导,$0<a<b$,证明：$\exists\xi$, $\eta\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

解 令$g(x)=x^2$. $\exists\eta\in(a,b)$使得 $\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$

有$\xi\in(a,b)$使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f'(\xi)}{a+b}$

日期:　　/

第七节：不定型的极限

一、$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$不定型

定义：如果当$x\to a$（或$x\to\infty$）时，两个函数都趋于0或∞，则未极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$不定型.

定理（洛必达法则）：设函数$f(x)$,$g(x)$满足以下条件、

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2)在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内，$f'(x)$及$g'(x)$均存在，且$g'(x)\neq0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为$\infty$）

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

1、$0\cdot\infty$型.

2、$\infty-\infty$型. $\Rightarrow\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\Rightarrow\frac{0-0}{0\cdot0}$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{4}x\right)=0$

日期:　　/

3. 0^0, 1^∞, ∞^0 型.

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$　　则 $\begin{cases} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\cdot\infty \\ \infty\cdot 0 \\ 0\cdot\infty \end{cases} \Rightarrow 0\cdot\infty.$

例9: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$　(0^0)

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to0}-x} = 0$

例10: $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$　(1^∞).

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$

例11: $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$　(∞^0)

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\csc^2 x\cdot\frac{1}{\cot x}}{\frac{1}{x}}} = \frac{x}{-\sin^2 x\cot x} = \frac{x}{-\sin x\cos x} = \frac{-1}{\cos x} = -1$

☆例12: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}$　$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right) = 1.$

若洛: 原式 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$ (极限不存在, 不满足洛必达)

日期:　　　/

例14：求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

原式 $=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x}\right)=\frac{1}{2}$

例15：$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

原式 $e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$

日期:　　　/

1、选择题

(1) 下列命题中正确的命题有几个?

(1)无界变量必为无穷大量

(2)有限多个无穷大量之和仍为无穷大量 (正,负) ×

(3)无穷大量必为无界变量 √.

(4)无穷大量与有界变量之积仍为无穷大量 0.

(A)1个　(B)2个　(C)3个　(D)4个

(2) 设 $x_n \le z_n \le y_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

x_n, y_n 可能极限不存在

(A)存在且等于零

(B)存在但不一定等于零

(C)不一定存在

(D)一定不存在

$x_n = n + \frac{1}{2n}$, $y_n = n + \frac{1}{n}$

0×有界=0

(3)设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 下列断言正确的是

若有界

(A)若$\{x_n\}$发散, 则$\{y_n\}$必发散　$x_n = \sin n, y_n = \frac{1}{n^2}$

(B)若$\{x_n\}$有界, 则$\{y_n\}$必为无穷小　$x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$

(C)若$\{x_n\}$无界, 则$\{y_n\}$必有界　$x_n = \begin{cases} n, & n\text{为奇数} \\ \frac{1}{n^2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$

无界×无界=0 (若x_n, y_n极限存在)

(D)若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小, 则$\{y_n\}$必为无穷小

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}$　$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n\text{为奇数} \\ n, & n\text{为偶数} \end{cases}$

(4)设 $x \to 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

$\frac{1}{2}x^3$.

解: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} e^x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^n}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{n x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{n x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{n x^{n-1}} \Rightarrow n = 3$

(5)若函数$f(x)$与$g(x)$在x_0都不可导, 则函数$f(x)+g(x$

在x_0( )

(A)必不可导　(B)必可导

(C)不一定可导　(D)以上都不对

答案:(C)不一定可导。

可导的例子: $f(x) = \begin{cases} 3x, x \ge 0 \\ 4x, x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -3x, x \ge 0 \\ -4x, x < 0 \end{cases}$

不可导的例子:

(7)设函数$y = f(x)$的一阶、二阶导数均存在且不为零,

其反函数为$x = \varphi(y)$, 由$\varphi''(y) = (\quad)$

(A) $\frac{1}{f''(x)}$　(B) $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$

(C) $\frac{[f'(x)]^2}{f''(x)}$　(D) $-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

解: $\varphi''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \cdot \frac{dx}{dy}$

$= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

日期: /

(6)设函数$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有(　)

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f'(0)+f(0)=0$　　(D) $f(0)-f'(0)=0$

解：$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}f(x)\frac{|\sin x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}f(x)\frac{|\sin x|}{x}$$

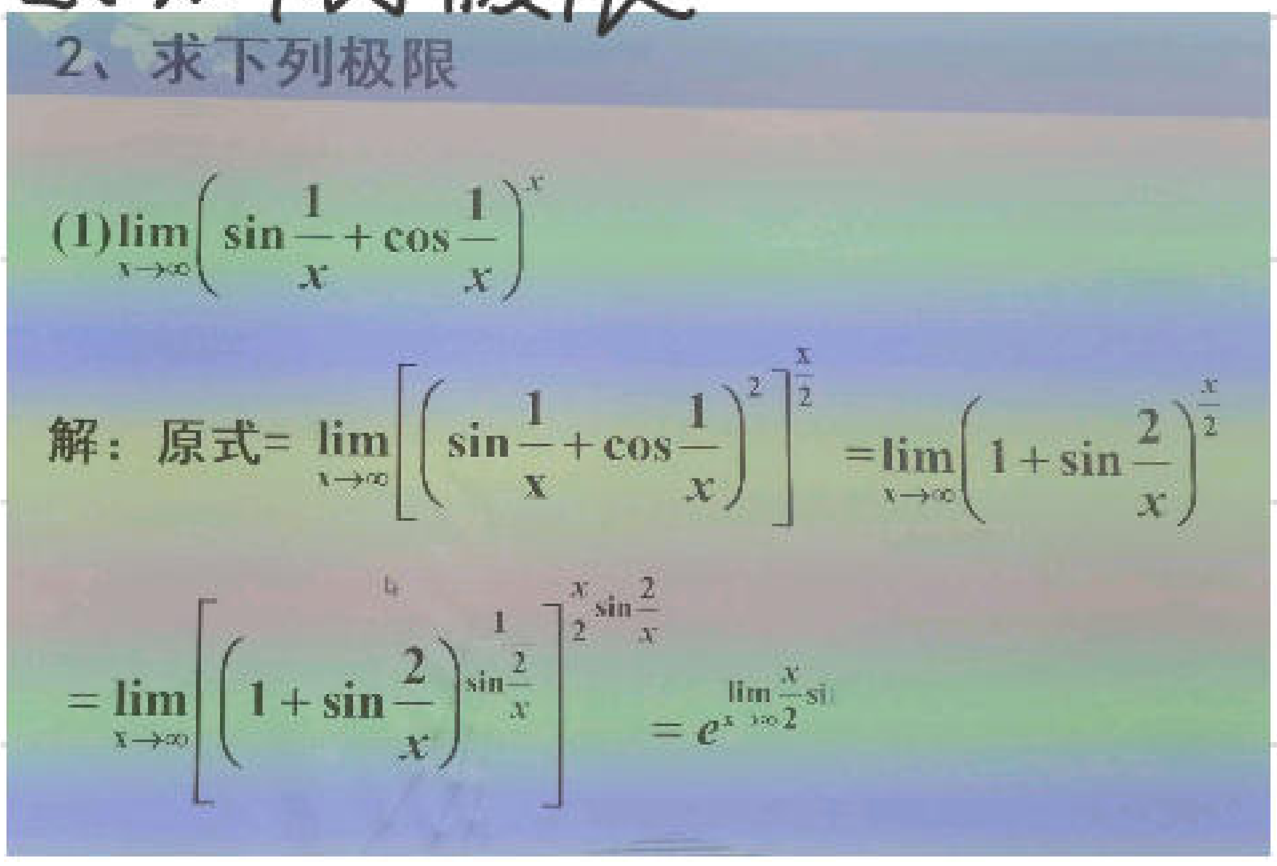
$$=f'(0)+\lim_{x\to0}f(x)\frac{|\sin x|}{x}$$

由于$\dfrac{|\sin x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ -\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\end{cases}$，故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$不存在

所以只有$f(0)=0$, $F'(0)$存在。

日期:　　　/

2、求下列极限



(1)

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x(e^{2x}-1)\ln(1+\tan^2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x\cdot2x\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^4}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}\times2\right.$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos x-x(-\sin x)}{3x^2}=\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

日期: /

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{x+1}}{2x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2(x+1)}} = e^{-\frac{1}{2}}$

求间断点

(1) $y=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

跳跃型

(2) $y=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}}$

① $x>0$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{-tx}-x}{x\cdot e^{-tx}+1}=-x$

② $x<0$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}}=\frac{1}{x}$

③ $x=0$ 时 $y=1$

$\therefore y=\begin{cases}-x & x>0\\ 1 & x=0\\ \frac{1}{x} & x<0\end{cases}$ 无穷型间断点

日期:　　/

(3)函数$f(x)=\frac{x}{\tan x},x\in(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$有可去间断点$x=$____,无穷间断点$x=$____。

$x=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi$.　　可去: $0,\pm\frac{\pi}{2}$, 无穷: $\pm\pi$.

利用条件构造

4、设$f(x)$对任意非零数x_1,x_2有: $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,且$f'(1)=1$,求$f(x)$。

解: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$f(1)=0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x\cdot(1+\frac{\Delta x}{x}))-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$=\frac{1}{x}\cdot f'(1)=\frac{1}{x}$　∴ $f(x)=\ln|x|+C$　又∵ $f(1)=0$

∴ $f(x)=\ln|x|$

5、试确定a,b使函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$,

$x\in(-\infty,+\infty)$在$x=1$可导。

解: 当$x>1$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=x^2$

当$x=1$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=\frac{1+a+b}{2}$

当$x<1$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=ax+b$

可导必连续, 由$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, 知: $a+b=1$

又$f'(x)=\begin{cases}2x,x>1\\a,\quad x<1\end{cases}$, $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f'(x), f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)$

所以$a=2,b=-1$

日期: /

$$y=\frac{x^3-1}{x^2-2x-3}=\frac{x^3-2x^2-3x+2x^2+3x-1}{x^2-2x-3}=x+\frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x-3}=x+\frac{2x^2-4x+7x-6+5}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{7x+5}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{7x+5}{x^2-2x-3}=\frac{7x+5}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1)+B(x-3)=7x+5 \qquad \begin{cases} A+B=7 \\ A-3B=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{13}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y=x+2+\frac{13}{2(x-3)}+\frac{1}{2(x+1)} \quad (\quad) \qquad y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{2}\left[\frac{13}{(x-3)^{n+1}}+\right.$$

第一章

- (※) 函数
  - 概念
  - 运算
    - 复合
    - 反
    - ⋮
  - 特性
    - ⋮
  - 初等函数
    - 基本初等函数
    - ↓
    - 初等函数
- (☆) 极限
  - 概念
    - 数列极限：$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$
    - 函数极限
      - 无穷：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$
        - $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A)$
      - 有限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$
        - $[\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Longleftrightarrow f(x_0-0)\quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \Longleftrightarrow f(x_0+0)]$
    - 数列极限与函数极限的关系：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=C \Longleftrightarrow \forall x_n\to a\ (n\to\infty)\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=C$.
      - (通常以两个不同的 x_n 求出不同的极限 ⟹ 函数极限不存在)
  - 无穷小量与无穷大量.
    - 概念：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Rightarrow f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.（无穷小）
      - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量（无穷大）
      - ($\forall M>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 恒有 $|f(x)|>M$.
    - 关系：无穷大为无穷小的导数，反之亦然.
    - 运算：①有限个无穷小之和仍为无穷小；②有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小；③常数与无穷小的乘积仍为无穷小. ④有限个无穷小的乘积仍为无穷小
    - 函数极限与无穷小的关系：$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$（高阶无穷小）
  - 极限的性质与运算
    - 性质. 1° 2° 3° 收敛数列必有界.
    - 运算：1° 四则运算
      - 2° 复合运算 $u=\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $\varphi(x)\neq u_0$
        - $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A$
  - 极限存在准则及两个重要极限.
    - ①夹逼准则：$f(x)\le g(x)\le F(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$
      - (数列类似同样适用)
    - ②单调有界准则
      - 单增有上界
      - 单减有下界
      - ⟹ 必有极限.
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$.
      - [x可由任何替换本质为无穷小]
  - 无穷小量与无穷大量的比较或替换
    - 比较 高阶无穷小，k阶无穷小，同阶无穷小，等价无穷小.
    - 常见等价无穷小.
    - 等价无穷小的替换.（充分利用 无穷小=等价+高阶）

函数的连续性

- 1. 概念：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$　　$\varepsilon-\delta$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
  - $f(x)\in C(a,b)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，且在 a 处右连续，b 处左连续
  - $f(x)\in C[a,b]$ ……
- 2. 间断点及分类：$f(x)$ 在 x_0 处不连续，称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。
  - 间断点 x_0
    - 一类：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在
      - 可去型　$f(x_0-0)=f(x_0+0)$　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.
        - ① 无定义
        - ② 极限与函数值不…
      - 跳跃型. $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$
    - 二类（非第一类）
      - 无穷型：$f(x_0-0)$ 或 $f(x_0+0)=\infty$
      - 振荡型：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在（$\neq\infty$）.
- 3. 连续函数的性质与运算
  - (1) 性质
  - (2) 运算：
    - 1° 四则运算：若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 …… 也连续
    - 2° 复合运算：…… 类比求极限
    - 3° 反函数运算 …
    - 4° 初等函数在定义区间内连续.
- 4. 闭区间上连续函数的性质：（使用时先说明函数连续）
  - (1) 最值定理　$[a,b]$ 上有最大值与最小值
  - (2) 有界性定理　连续必有界
  - (3) 介值定理
  - 推论：
    - 1° 存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=M$，$M\in(m,M)$ （m: min，M: max）
    - 2° 零点定理
    - 3° 单调 → 唯一

一元函数微分学

- (一) 函数的导数.
  - 1. 定义 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则在 x_0 处可导
    $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$　　$y'|_{x=x_0}$　$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$
  - (1) 单侧导数. 左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
    右导数：……
    可导 $\Longrightarrow$ 左右极限均存在.
  - (2) 导函数：$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都可导　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
  - 2. 导数的意义
  - 3. 可导必连续.
- (2) 导数的运算
  - 1. 运算
    $(\tan x)'=\sec^2x$　　$(\cot x)'=-\csc^2x$
    $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　　$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$.
    $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
    $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(\operatorname{arccot} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$
    $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$
  - 2. 四则运算
  - 3. 反函数的导数
  - 4. 复合函数的导数.
  - 5. 隐函数的导数.
  - 6. 参数式函数导数　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
  - 7. 高阶导数.
  - 常用n阶导数公式：
    - (1) $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.
    - (2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$
      $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$
    - (3) $(x^a)^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$
    - (4) $(x^n)^{(n)}=n!$　$(x^n)^{(n+1)}=0$
      $(\frac{1}{x})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
    - (5) $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
  - 莱布尼茨公式：$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}$
- (三) 函数的微分
  - 1° $\Delta y=\underbrace{A\Delta x}_{dy}+o(\Delta x)$　　A是 $f'(x)$
  - 2° $f(x)$ 在点x可导 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在点x可微
  - 3. 微分的四则运算.
  - 4. 一阶微分不变性
  - 5. 函数的线性近似.　　$(1+x)^a-1\approx a x$
- (四) 微分中值定理.
  - 1° 罗尔：$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)$　$\exists\xi\in(a,b)$　$f'(\xi)=0$
  - 2° 拉格朗日：$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$　$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
    推论：1°. $f'(x)=0$　$f(x)=C$.
    2°. $f'(x)=g'(x)\Longrightarrow f(x)=g(x)+C$
    3°. $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$
    $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$.
  - 3. 柯西中值定理.　$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$　(少写了大量条件！)

日期:　　　　/

日期:　　　/