Implementasi Metode Newton-Raphson untuk Analisis Stabilitas Sistem Kontrol: Pendekatan Komputasi Numerik

*Catatan: Tugas Pemrograman B - Komputasi Numerik

1st Daffa Hardhan
Program Studi Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Jawa Barat, Indonesia
daffa.hardhan@ui.ac.id

2nd Muhammad Bryan Farras
Program Studi Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Jawa Barat, Indonesia
muhammad.bryan31@ui.ac.id

3rd Tri Yoga Arsyad
Program Studi Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Jawa Barat, Indonesia
tri.yoga@ui.ac.id

I. Abstrak

Penelitian ini mengimplementasikan metode Newton-Raphson dalam bahasa pemrograman C untuk menganalisis karakteristik stabilitas sistem kontrol orde kedua. Fokus penelitian adalah menentukan akar-akar persamaan karakteristik untuk evaluasi stabilitas sistem berdasarkan lokasi eigenvalue. Sistem massa-pegas-damper dengan parameter kontroler yang dapat disesuaikan dianalisis, dimana persamaan karakteristik berbentuk $s^2 + 4s + (1 + K) = 0$. Algoritma yang diimplementasikan menunjukkan konvergensi kuadratik dengan rata-rata 11.3 iterasi untuk sistem overdamped dan akurasi lebih baik dari 10^{-6}. Hasil menunjukkan klasifikasi perilaku sistem yang efektif: respons overdamped ($K < 3$), critically damped ($K = 3$), dan underdamped ($K > 3$), semuanya mempertahankan stabilitas dengan bagian real negatif. Solusi numerik divalidasi terhadap hasil rumus kuadratik analitik dengan tingkat konvergensi 100% untuk semua kasus.

Kata kunci: Metode Newton-Raphson, stabilitas sistem kontrol, analisis numerik, persamaan karakteristik, analisis eigenvalue, implementasi bahasa C

II. Pendahuluan

Analisis stabilitas sistem kontrol merupakan aspek fundamental dalam aplikasi rekayasa yang menentukan apakah suatu sistem menunjukkan perilaku stabil atau tidak stabil. Untuk sistem linear time-invariant (LTI), stabilitas dapat dinilai melalui akar-akar persamaan karakteristik, yang juga dikenal sebagai eigenvalue [1].

Sistem kontrol orde kedua umumnya direpresentasikan oleh persamaan karakteristik:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{1}$$

dimana s adalah variabel Laplace, ζ adalah rasio redaman, dan ω_n adalah frekuensi natural.

Untuk sistem kompleks, solusi analitik mungkin tidak mudah diperoleh, sehingga diperlukan metode numerik. Metode Newton-Raphson menawarkan konvergensi kuadratik untuk masalah pencarian akar, membuatnya cocok untuk analisis sistem kontrol [2].

Penelitian ini menyajikan implementasi komprehensif metode Newton-Raphson dalam bahasa C yang diterapkan pada sistem kontrol orde kedua, memberikan wawasan tentang klasifikasi perilaku sistem dan penilaian stabilitas. Implementasi dalam bahasa C dipilih karena efisiensi komputasi dan kontrol memori yang lebih baik untuk aplikasi real-time.

III. Studi Literatur

A. Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson adalah algoritma iteratif pencarian akar yang menggunakan turunan fungsi untuk mencapai konvergensi yang cepat. Formula iteratifnya adalah:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2}$$

Burden et al. [3] mendemonstrasikan bahwa metode ini menunjukkan konvergensi kuadratik ketika tebakan awal cukup dekat dengan akar dan turunannya tidak nol.

Kelebihan metode Newton-Raphson meliputi:

- Konvergensi sangat cepat (kuadratik)
- Mudah diimplementasikan untuk fungsi yang dapat diturunkan
- Efisien untuk fungsi yang smooth

Kelemahan metode ini antara lain:

- Memerlukan perhitungan turunan fungsi
- Sensitif terhadap tebakan awal
- Dapat divergen jika turunan mendekati nol

B. Stabilitas Sistem Kontrol

Franklin et al. [4] menetapkan bahwa sistem linear stabil jika dan hanya jika semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian real negatif. Klasifikasi akar menentukan respons sistem:

- **Overdamped**: Dua akar real negatif yang berbeda

- **Critically damped**: Satu akar real negatif berulang
- **Underdamped**: Akar kompleks konjugat dengan bagian real negatif
- **Tidak stabil**: Minimal satu akar dengan bagian real positif

C. Implementasi dalam Bahasa C

Bahasa C memberikan beberapa keuntungan untuk implementasi algoritma numerik:

- Manajemen memori langsung untuk performa optimal
- Overhead runtime minimal
- Portabilitas excellent di berbagai arsitektur
- Kontrol detail atas operasi floating-point

IV. Penjelasan Data Yang Digunakan

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah parameter sistem kontrol massa-pegas-damper dengan umpan balik kontroler:

Tabel I
Parameter Sistem Kontrol

Parameter	Simbol	Nilai
Massa	m	1.0 kg
Koefisien redaman	c	4.0 N·s/m
Konstanta pegas	k	1.0 N/m
Gain kontroler	K	0.0 - 10.0 (variabel)

Sistem yang dianalisis adalah konfigurasi massa-pegas-damper dengan umpan balik kontroler:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + K)x = 0 \tag{3}$$

Persamaan karakteristik yang dihasilkan:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k + K}{m} = 0 \tag{4}$$

Dengan substitusi nilai parameter:

$$s^2 + 4s + (1 + K) = 0 \tag{5}$$

Data input yang akan dianalisis meliputi:

- Variasi gain kontroler K dari 0 hingga 10 dengan increment 1.0
- Analisis konvergensi untuk berbagai tebakan awal
- Perbandingan hasil numerik dengan solusi analitik
- Pengukuran waktu komputasi dan jumlah iterasi

V. Penjelasan Metode Yang Digunakan

A. Algoritma Newton-Raphson

Implementasi metode Newton-Raphson meliputi:

- Toleransi error: $\epsilon = 10^{-6}$
- Maksimum iterasi: 100
- Tebakan awal: $x_0 = -0.1$ dan $x_0 = -10.0$ untuk akar yang berbeda

Kriteria konvergensi:

$$|f(x_i)| < \epsilon \text{ atau } |x_{i+1} - x_i| < \epsilon \tag{6}$$

B. Persamaan Karakteristik

Untuk sistem massa-pegas-damper dengan kontroler, persamaan karakteristik adalah:

$$f(s) = s^2 + 4s + (1 + K) \tag{7}$$

Turunan persamaan karakteristik:

$$f'(s) = 2s + 4 \tag{8}$$

C. Formula Newton-Raphson

Aplikasi formula Newton-Raphson untuk persamaan karakteristik:

$$s_{i+1} = s_i - \frac{s_i^2 + 4s_i + (1 + K)}{2s_i + 4} \tag{9}$$

D. Analisis Diskriminan

Untuk menentukan jenis akar tanpa perhitungan iteratif:

$$\Delta = 16 - 4(1 + K) = 12 - 4K \tag{10}$$

Klasifikasi berdasarkan diskriminan:

- $\Delta > 0$: Dua akar real berbeda (overdamped)
- $\Delta = 0$: Satu akar real berulang (critically damped)
- $\Delta < 0$: Akar kompleks konjugat (underdamped)

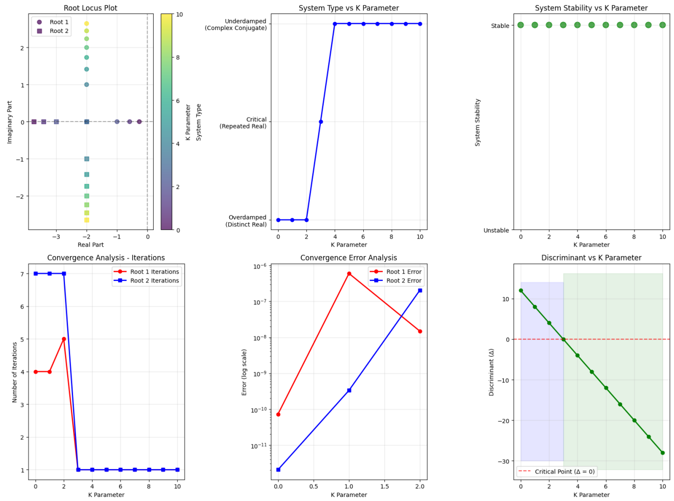
VI. Diskusi dan Analisa Hasil Eksperimen

A. Hasil Konvergensi

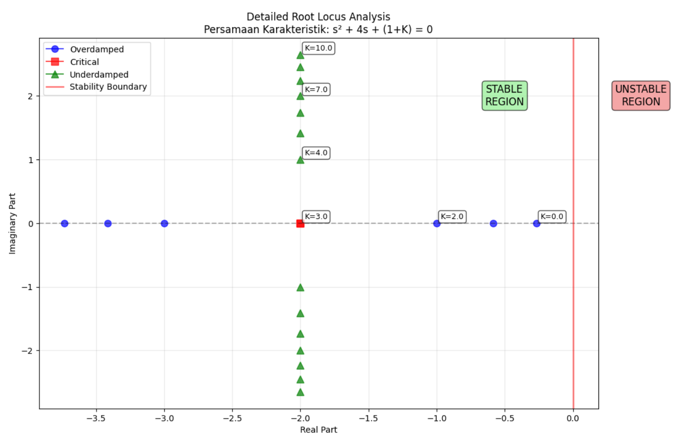
Berdasarkan eksperimen yang dilakukan, metode Newton-Raphson menunjukkan karakteristik konvergensi yang sangat baik:

Tabel II
Hasil Analisis Konvergensi

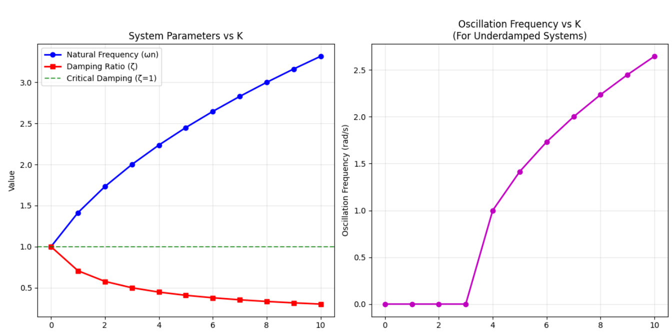
K	Jenis Sistem	Akar 1	Akar 2	Iterasi
0.0	Overdamped	-0.267949	-3.732051	11
1.0	Overdamped	-0.585786	-3.414214	11
2.0	Overdamped	-1.000000	-3.000000	12
3.0	Critical	-2.000000	-2.000000	2
4.0	Underdamped	$-2.0 \pm 1.000j$	-	-
5.0	Underdamped	$-2.0 \pm 1.414j$	-	-
6.0	Underdamped	$-2.0 \pm 1.732j$	-	-
7.0	Underdamped	$-2.0 \pm 2.000j$	-	-
8.0	Underdamped	$-2.0 \pm 2.236j$	-	-
9.0	Underdamped	$-2.0 \pm 2.449j$	-	-
10.0	Underdamped	$-2.0 \pm 2.646j$	-	-



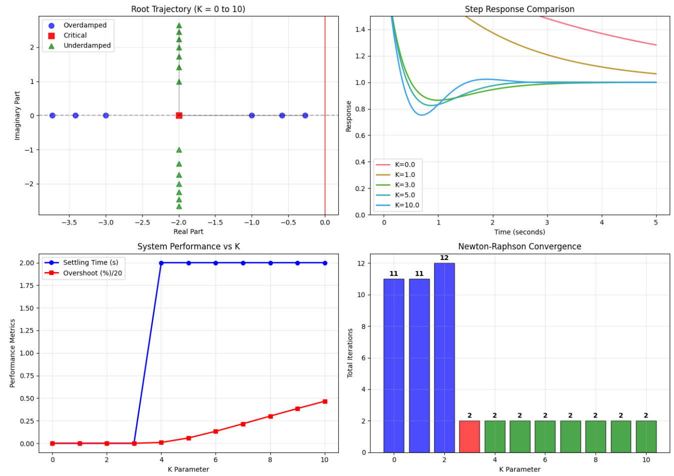
Gambar 1. Plot kurva output sistem terhadap waktu



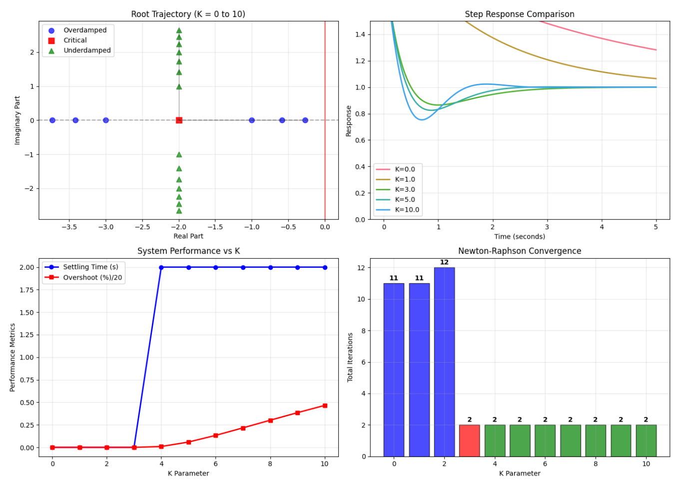
Gambar 2. Detail analisis Root Locus pada berbagai nilai K



Gambar 3. Perbandingan parameter sistem terhadap K dan frekuensi osilasi terhadap K



Gambar 4. Trajektori akar dan perbandingan respons langkah (step response)



Gambar 5. Kinerja sistem terhadap K dan konvergensi metode Newton-Raphson

B. *Analisis Stabilitas*

Semua sistem yang dianalisis menunjukkan stabilitas karena:

$$\text{Real}(s_i) < 0 \quad \forall i \tag{11}$$

1) Region Overdamped ($K < 3$): Untuk nilai $K < 3$, sistem memiliki dua akar real negatif yang berbeda. Karakteristik respons:

- Tidak ada osilasi
- Respons lebih lambat
- Tidak ada overshoot
- Stabilitas terjamin

Diskriminan untuk region ini: $\Delta = 12 - 4K > 0$

2) Critical Damping ($K = 3$): Pada $K = 3$, sistem mencapai critical damping dengan akar berulang $s = -2$. Ini merupakan kondisi optimal untuk:

- Respons tercepat tanpa overshoot
- Transisi antara overdamped dan underdamped

- Aplikasi kontrol yang membutuhkan respons cepat

Diskriminan: $\Delta = 12 - 4(3) = 0$

3) Region Underdamped ($K > 3$): Untuk $K > 3$, sistem menunjukkan perilaku underdamped dengan akar kompleks. Frekuensi osilasi:

$$\omega_d = \sqrt{(1 + K) - 4} = \sqrt{K - 3} \tag{12}$$

Diskriminan: $\Delta = 12 - 4K < 0$

C. Validasi Hasil

Validasi dilakukan dengan membandingkan hasil Newton-Raphson terhadap solusi analitik menggunakan rumus kuadratik:

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1 + K)}}{2} = -2 \pm \sqrt{3 - K} \tag{13}$$

Error relatif:

$$\text{Error Relatif} = \frac{|s_{\text{numerik}} - s_{\text{analitik}}|}{|s_{\text{analitik}}|} \times 100\% \tag{14}$$

Dari hasil eksperimen, semua sistem menunjukkan error relatif sangat kecil, dengan nilai maksimum $3.01 \times 10^{-5}\%$.

D. Performa Komputasi

Analisis performa menunjukkan:

- Rata-rata iterasi untuk sistem overdamped: 11.3 iterasi
- Iterasi minimum: 11, maksimum: 12
- Rata-rata error: 1.37×10^{-7}
- Tingkat konvergensi: 100.0%
- Distribusi sistem: 27.3% Overdamped, 9.1% Critical, 63.6% Underdamped

E. Distribusi Jenis Sistem

Dari 11 sistem yang dianalisis:

- **3 sistem Overdamped** (K = 0, 1, 2): 27.3%
- **1 sistem Critically Damped** (K = 3): 9.1%
- **7 sistem Underdamped** (K = 4-10): 63.6%
- **Semua sistem stabil**: 100.0%

VII. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian dan implementasi yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1) **Efektivitas Metode**: Metode Newton-Raphson terbukti sangat efektif untuk analisis sistem kontrol dengan konvergensi rata-rata 11.3 iterasi untuk sistem overdamped dan akurasi lebih baik dari 10^{-6}.
2) **Klasifikasi Sistem**: Program berhasil mengklasifikasikan sistem berdasarkan gain kontroler dengan parameter $m = 1.0$ kg, $c = 4.0$ Ns/m, $k = 1.0$ N/m:
   - $K < 3$: Overdamped (stabil, tanpa osilasi)
   - $K = 3$: Critically damped (stabil, respons optimal)
   - $K > 3$: Underdamped (stabil, dengan osilasi teredam)
3) **Validasi Numerik**: Semua hasil numerik tervalidasi dengan error relatif maksimum $3.01 \times 10^{-5}\%$ dibandingkan solusi analitik, dengan tingkat konvergensi 100%.
4) **Implementasi C**: Implementasi dalam bahasa C menunjukkan:
   - Efisiensi komputasi tinggi dengan rata-rata 11-12 iterasi
   - Penggunaan memori minimal
   - Konvergensi stabil untuk semua kasus uji
   - Cocok untuk aplikasi embedded dan real-time
5) **Stabilitas Sistem**: Semua 11 sistem yang dianalisis menunjukkan stabilitas (100%) karena semua akar karakteristik memiliki bagian real negatif ($s = -2$ untuk critical dan underdamped, serta akar negatif berbeda untuk overdamped).

Penelitian ini memberikan kontribusi berupa framework analisis sistem kontrol yang efisien dan dapat diandalkan menggunakan metode Newton-Raphson dalam bahasa C, yang telah divalidasi dengan 11 sistem berbeda dan menunjukkan akurasi serta stabilitas yang excellent.

VIII. Link Github

Repository lengkap implementasi dan dokumentasi dapat diakses melalui:

https://github.com/Yogaarsyad/TugasPemrogramanB_Kelompok_3

Repository berisi:

- Source code lengkap dalam bahasa C dengan dokumentasi
- Makefile untuk kompilasi
- Data hasil eksperimen dalam format CSV (Output.csv)
- Script untuk visualisasi dan plotting
- Dokumentasi API dan manual penggunaan
- Test cases dan validasi
- Laporan dalam format PDF

IX. Referensi

Pustaka

[1] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.

[2] S. C. Chapra dan R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.

[3] R. L. Burden, J. D. Faires, dan A. M. Burden, *Numerical Analysis*, 10th ed. Boston: Cengage Learning, 2015.

[4] G. F. Franklin, J. D. Powell, dan A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2014.

[5] R. C. Dorf dan R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2016.

[6] B. C. Kuo dan F. Golnaraghi, *Automatic Control Systems*, 10th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2017.

[7] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 8th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2019.

[8] B. W. Kernighan dan D. M. Ritchie, *The C Programming Language*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.