Assigment 1 for Combinational Mathmatics

Guo Yuhang
202021080728

2020.9.18

Exercises 1

2. 求在 1000-9999 各位数字都不相同而且由奇数构成的整数的个数。

Soultion: 思路是先取个位数，个位数只能取 $1, 3, 5, 7, 9$，其次再去取千位，由于千位存在不能为 0 的约束同时各位数字不相同，所以千位存在 8 种取法，最后对无约束的百位和十位进行数字选择，分别有 8 种和 7 种选择方式。因此最终的结果表示为：

$$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$$

4. 10 个人坐在一排看戏有多少种就坐方式？如果其中两个人不愿意坐在一起又有多少种就坐方式？

Solution: 第一个问题是一个简单的线排列问题，结果为：$P(10, 10)$. 第二个问题：存在两种思路：第一种直接计算，首先先排 9 个人，最后一个人由于有约束只存在 8 个位置可以安排，因此最终的结果可以表示为：$P(9, 9) \times 8$. 第二种思路可以先不考虑约束排，最后减去不满足条件的解，也就是 $P(10, 10) - 2 \times P(9, 9)$.

5. 10 个人围成圆桌就坐，其中有两个人不愿意坐在一起，请问共有多少种就坐方式？

Solution: 这个问题是圆排列问题，也可以从两个思路出发：第一种直接计算，先对 9 个人进行圆排列，最终的第 10 个人根据约束只存在 7 个位置可以就坐，因此结果表示为：$P(9, 9)/9 \times 7$. 第二种思路：先计算无约束条件的排列情况：$P(10, 10)$, 然后再计算不满足条件的情况：使用绑定的计算方法，$2 \times P(9, 9)/9$. 最终结果为：$P(10, 10) - 2 \times P(9, 9)/9$.

6. 6 男 6 女围圆桌交替就坐存在多少种就坐方式？

Solution: 先排女生，$P(6,6)/6$，再将 6 个男生排入，第一个男生有 6 种安排方案，第二个有 5 种，依次类推可以得到最终结果为：$P(6,6)/6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

7. 由 1,2,3,4,5 这 5 个数字能够组成多少个没有重复的数字？不能被 5 整除同时大于 20000 的五位数？

Soultion: 分情况讨论，首先考虑万位排 2,3,4 的情况下，个位只能 3 个数字可选，剩下的位次随意排，因此这种情况的结果可以写为：$3\times3\times P(3,3)$; 第二种情况，万位排 5，此时剩下的 4 位随意排，结果为：$1 \times P(4,4)$. 因此最终的答案可以写为：$3 \times 3 \times P(3,3) + 1 \times P(4,4) = 78$.

10. 在 1000-9999 的整数，有多少个整数包含数字 3 一次？有多少整数包含数字 3？又有多少个数字包含 3 个 7？

Solution: (1). 4 位数，数字 3 先选，3 如果在千位，那么一共有：1×9^3; 如果 3 在百十个位，那么一共有：$3\times 8\times 9^2$. 合计共有：$9^3+3\times 8\times 9^2 = 2673$ 个数字包含数字 3 一次。(2) 考虑 4 位数存在包含数字 3 的情况一共有 4 种：包含 4 个 3：1 种；包含 3 个 3：$1 \times 8 + 3 \times 9 = 35$ 种；包含 2 个 3：$1 \times 3 \times 9^2 + 8 \times 3 \times 9 = 459$；包含一个 3：1944 种（刚刚已经求解过）。因此包含数字 3 的整数个数位：$1 + 35 + 459 + 2673 = 3168$. 最后一个问题包含 3 个 7 的问题：可以分为第一个位置为 7 或者不为 7 的情况，为 7 的情况就是 $1 \times 3 \times 9 = 27$ 个，第一个位置不为 7 的情况：8 个整数，共计为 $27 + 8 = 35$ 个整数中包含 3 个 7.

11. 单词 MISSISSIPPI 中的字母有多少种不同的排列方式？如果两个 S 不相邻又有多少种排列方法？

Soultion: 这个是一个重排列问题，首先我们可以将重集写出来：$B = \{1\cdot M, 4\cdot I, 4\cdot S, 2\cdot P\}$. 那么这个重集 B 做全排列的结果为：$\frac{11!}{4!\times4!\times2!\times1!} = 34650$ 种不同的排列方式。如果两个 S 不相邻的情况，那么我们可以先对除了 S 之外的其他 7 个字母先做全排列，然后再将 S 字母一一插入其中，最终结果可以表示为：$\frac{7!}{4!\times2!\times1!} \times \binom{8}{4} = 7350$.

13. 求解方程 $x_1 + x_2 + \times + x_n = r$ 的正整数解的个数。

Soultion: 之前解过类似的题目，形如：$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 的非负整数解的个数？这个问题理解为一个重排列问题，现在可以将 13 题改写为上面的形式;$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_n - 1) = r - n$ 的非负整数解的个数，等于重排列：$F(n, r-n) = F(r-1, r-n) = F(r-1, n-1)$.

14. 在 1-10000 中，有多少整数，它的数字之和等于 5？又有多少数字之和小于 5 的整数？

Solution: (1) 考虑数字之和等于 5 的情况一共存在 7 种情况，第一种一个 5 和 4 个 0，共有 4 种；第二种情况一个 4 一个 1 和 3 个 0，共

有 12 种；第三种情况一个 3 一个 2 和 3 个 0，共有：12 种；第四种情况 1 个 3 和 2 个 1 和 2 个 0，共有 12 种，第五种情况 2 个 2 和 1 个 1 以及 2 个 0，共有 12 种；第六种情况 1 个 2，3 个 1 以及 1 个 0，共有 4 种；最后一种情况 5 个 1 不满足条件，共有 0 种，因此根据加法规则共有：$4+12+12+12+12+4=56$ 种。(2) 考虑数字之和小于 5 个情况，则分为和等于 1,2,3,4 进行讨论，计算方式与 (1) 种的方式相似：和为 1 的情况：5 种；和为 2 的情况：10 种；和为 3 的情况：20 种；和为 4 的情况：35 种。综上数字之和小于 5 的整数的个数为：$5+10+20+35=70$ 种。
因此问题 14 的解为 (1) 共有 56 个整数数字之和等于 5；(2) 共有 70 个整数的数字之和小于 5.

16. 从整数 $1,2,\cdots,1000$ 中选取三个数使得他们的和是 4 的倍数，求这样的选法存在多少种？

Solution: 根据余数可以将这 1000 个整数分为四类，分别是除以 4 余数为 0,1,2,3 的情况。我们写为 4 个集合：A_1,A_2,A_3,A_4. 其中：

$$A_1=\{1,5,9,\cdots,997\}A_2=\{2,6,10,\cdots,998\}A_3=\{3,7,11,\cdots,999\}A_4=\{4,8,12,\cdots,1000\}$$

我们不难求解得到：$|A_1|=\lceil\frac{997}{4}\rceil=250,|A_2|=\lceil\frac{998}{4}\rceil=250,|A_3|=\lceil\frac{999}{4}\rceil=250,|A_4|=\lceil\frac{1000}{4}\rceil=250.$
要求取出的 3 个数能够被 4 整除，存在的情况有以下 5 种：三个数余数均为 0；两个数余数为 2 一个数余数为 0；两个数余数为 1 一个数余数为 2；三个数余数分别为 0,1,3；两个余数为 3 一个余数为 2；可以分别计算各类情况下的结果，最终结果表示为：$\binom{250}{3}+250^3+3\times\binom{250}{1}\times\binom{250}{2}$.

19. 使用组合分析的方法证明恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Solution: 首先等式的左边我们可以理解为从 n 个物品取 0 个，1 个，2 个……一直到取 n 个。这也就表示着我们将这 n 个物品取或者不取的情况全部都考虑了一遍，而等式的右边 2^n 我们可以理解为对于这 n 个物品，每一个都存在取或者不取的两种情况，也就可以写为 2^n. 因此等式两边表示的均为 n 个物品中选择任意个物品的所有情况的表示。

24. 证明下面的两个恒等式：

$$(1)\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$$
$$(2)\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\binom{n}{m}2^{n-m}$$

Solution:

对于问题 (1) 等式左边反复使用 Pascal 公式：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\\
=&\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m}{0}\\
=&\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m}{0}+0\\
=&\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m}{0}+\binom{n-m}{-1}\\
=&\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m+1}{0}\\
=&\cdots\\
=&\binom{n+1}{m}
\end{aligned}
$$

等于等式右边 $\binom{n+1}{m}$，由此等式得证。

对于问题 (2) 首先对等式左边进行考虑：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}\\
=&\sum_{k=m}^{n}\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
=&\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}\\
=&\sum_{k=m}^{n}\frac{n!(n-m)!}{(n-k)!m!(k-m)!(n-m)!}\\
=&\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!}\\
=&\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\\
=&\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}\\
=&\binom{n}{m}2^{n-m}
\end{aligned}
$$

等于等式右边：$\binom{n}{m}2^{n-m}$. 由此等式得证。

26. 下图 1表示了一张城市平面图，图中的直线表示街道，直线的交点表示街道的交叉路口。证明从交叉路口 $S(0,0)$ 到交叉路口 $T(m,n)$ 共有

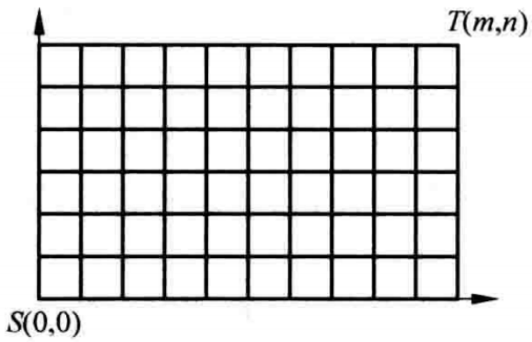

图 1: 城市平面图

$\binom{m+n}{n}$ 条不同的路径可以走。

Solution: 考虑这个问题，首先我们知道这里的所有路径都应该表示的是从 $S(0,0)$ 点出发要么向上要么向右最终到达 $T(m,n)$ 点的路径的所有排列情况。我们将这个问题想象为一个重排列问题，首先定义重集 $B = \{n \times u, m \times r\}$. 其中 u 表示 up, r 表示 right. 那么由这个重集所组成的所有的重排列的结果可以表示为：

$$\frac{m+n!}{m!n!} = \binom{m+n}{n}$$

由此上面给出的结论得证。