Assigment 4 for Combinational Mathmatics

Guo Yuhang
202021080728

2020.10.22

Exercise 4

5. 有无穷多字母 A,B,C. 求从中选出 n 个字母但必须包含偶数个 A 的方式数。

Solution: 假设从无穷个 A,B,C 中选出 n 个字母包含偶数个 A 的方式数为 a_n，则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1+x)} \\
&=
\end{aligned}
$$

而根据：

$$
(1-rx)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} r^k x^k \quad (|rx| < 1)
$$

因此 x^n 的系数为：

6. 求重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10 组合数。

Solution: 假设重集 B 的 $n-$ 组合数为 a_n，则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+\cdots+x^7) \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1-x^6}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x} \\
&= (1-x^4-x^6-x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}-x^{18}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+3}{3} x^i
\end{aligned}
$$

因此可以得到：

$$
a_{10} = \binom{10+3}{3} - \binom{6+3}{3} - \binom{4+3}{3} - \binom{2+3}{3} + \binom{0+3}{3} = 158
$$

因此重集 B 的 10-组合数为 158. 9. 设重集 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \infty \cdot b_3, \infty \cdot b_4, \infty \cdot b_5, \infty \cdot b_6\}$，并设 a_r 是 B 满足以下条件的 r-组合数，求序列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots\}$ 的普通母函数。

- 每个 b_i 出现 3 的倍数次 $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
- b_1, b_2 至多出现一次，b_3, b_4 至少出现两次，b_5, b_6 最多出现 4 次。
- b_1 出现偶数次，b_6 出现奇数次，b_3 出现 3 的倍数次，b_4 出现 5 的倍数次。

- 每个 $b_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 至多出现 8 次。

  Solution:

- 根据题意写出序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数为：

$$f(x)=(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^6=\frac{1}{(1-x^3)^6}$$

- 根据题意写出序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数为：

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x)^2(x^2+x^3+\cdots)^2(1+x+x^2+x^3+x^4)^2\\&=(1+x)^2\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x^5)^2}{(1-x)^2}\\&=\frac{x^4(1+x)^2(1-x^5)^2}{(1-x)^4}\end{aligned}$$

- 根据题意写出序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数为：

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+x^2+x^4+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\\&\quad\times(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2\\&=\frac{1}{(1-x^2)}\cdot\frac{x}{(1-x^2)}\cdot\frac{1}{(1-x^3)}\cdot\frac{1}{(1-x^5)}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\\&=\frac{x}{(1+x)^2(1-x^3)(1-x^5)(1-x)^4}\end{aligned}$$

- 根据题意写出序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数为：

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^8)^6$$

14. 求由数字 $1,2,3,4,5,6$ 组成的 r 位数中，3 和 4 都出现偶数次，2 和 4 至少出现一次的 r 位数的个数。

Solution: 假设序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的指数母函数为：

$$\begin{aligned}f_e(x)&=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^3\\&=\frac{e^{-x}+e^x}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)(e^x-1)(e^x)^3\\&=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2-2e^x-2e^{-x}\right)\left(e^{4x}-e^{3x}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(e^{6x}-3e^{5x}+4e^{4x}-4e^{3x}+3e^{2x}-e^x\right)\\&=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\left(6^r-3\times5^r+4\times4^r-4\times3^r+3\times2^r-1\right)\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

因此：

$$a_r=\frac{1}{4}\left(6^r-3\times5^r+4\times4^r-4\times3^r+3\times2^r-1\right)$$