随机过程及应用 Assignment-3

选课序号: 26
郭宇航
202021080728

Exercise 1 设$\{X(t)=A+B\cos t, t\in \mathrm{R}\}$，其中$A$ 和B 为相互独立的均服从$N(0,1)$ 的随机变量。

- 求其一维，二维概率密度和一维，二维特征函数；
- 讨论$\{X(t)=A+B\cos t, t\in \mathrm{R}\}$ 是否为正态过程；

Solution. (1). 根据题意可知：$E(X(t))=E(A)+E(B)\cos t=0$，$D(X(t))=R(t,t)=E[(A+\cos t)(A+\cos t)]=E(A^2)+E(B^2)\cos^2 t=1+\cos^2 t$. 因此$X(t)$ 一维概率密度函数可以写为：

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\cos^2 t)}}\exp\{-\frac{x^2}{2(1+\cos^2 t)}\}$$

假设$s\neq t$ 时根据$C(s,t)=R(s,t)-E(X(t))E(X(s))$ 可以计算：

$$\begin{aligned}C(s,t)=R(s,t)=0\\&=E[(A+B\cos^2 s)(A+B\cos^2 t)]\\&=E(A^2)+E(B^2)\cos s\cos t+0\\&=1+\cos s\cos t\end{aligned}$$

同时还能得到：$C(s,s)=1+\cos^2 s, C(t,t)=1+\cos^2 t$. 假设$\mathbb{X}=[X(s),X(t)]^T$, $\mu=[0,0]^T$，协方差矩阵表示为$\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}C(s,s)&C(s,t)\\C(t,s)&C(t,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\cos^2 s&1+\cos s\cos t\\1+\cos t\cos s&1+\cos^2 t\end{bmatrix}$$

从而二维概率密度函数表示为：

$$f(X(s),X(t))=\frac{1}{2\pi|\mathbb{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbb{X}-\mu)^T\mathbb{B}^{-1}(\mathbb{X}-\mu)\}$$

根据$X(t)\sim(0,1+\cos^2 t)$ 以及$(X(s),X(t))\sim(0,1+\cos^2 s,0,1+\cos^2 t;\frac{1+\cos s\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 s}\sqrt{1+\cos^2 t}})$ 可以分别写出一维和二维特征函数为：

$$\begin{aligned}\varphi(t,u)&=\exp\{-\frac{1}{2}(1+\cos^2 t)u^2\}\\\varphi(s,t;u,v)&=\exp\{-\frac{1}{2}\left[(1+\cos^2 s)u^2+2(1+\cos s\cos t)uv+(1+\cos^2 t)v^2\right]\}\end{aligned}$$

(2). 讨论$\{X(t)=A+B\cos t, t\in\mathrm{R}\}$ 是否是正态过程的问题。根据正态过程的定义必须满足它的任意维有限分布都是联合正态分布。假设$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 是任意的n 维有限分布，根据正态随机向量的线性变换不变性以及$X(t)=A+B\cos t$ 我们可以知道这个任意的n 维随机向量一定可以表示为正态随机变量A 和B 的线性组合，因此任意维的有限分布都应该是一个联合正态分布，从而这个随机过程是一个正态过程（可能是退化的正态过程）。

Exercise 2 设$\{X(t) = A\cos\omega_0 t + B\cos\omega_0 t, t \in \mathrm{R}\}$. 其中$A$ 和B 是相互独立均服从$N(0,\sigma^2)$ 的随机变量。

- 写出一维，二维概率密度和一维，二维特征函数；
- 讨论能否写出任意的n 维概率密度和n 维特征函数；

Solution. (1). 类似 Exercise 1 的思路可以先求解：$E(X(t)) = 0, D(X(t)) = R(t,t) = \sigma^2$，因此$X(t) \sim (0,\sigma^2)$，一维概率密度函数表示为：

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}, x \in \mathrm{R}$$

当$s \neq t$ 时,$(X(s),X(t))$ 表示二维正态分布,同时$C(s,t) = R(s,t) - E(X(t))E(X(s)) = E(A^2)\cos\omega_0 s\sin\omega_0 t + E(B^2)\cos\omega_0 t\sin\omega_0 s = \sigma^2\cos\omega_0\tau, (\tau = s-t)$，$C(s,s) = C(t,t) = \sigma^2$. 假设$\mathbb{X} = [X(s),X(t)]^T$，$\mu = [0,0]^T$，协方差矩阵表示为$\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} C(s,s) & C(s,t) \\ C(t,s) & C(t,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega_0\tau \\ \sigma^2\cos\omega_0\tau & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

从而$(X(s),X(t))$ 服从联合分布$(0,\sigma^2,0,\sigma^2;\cos\tau)$，因此二维概率密度函数可以写为：

$$f(X(s),X(t)) = \frac{1}{2\pi|\mathbb{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbb{X}-\mu)^T\mathbb{B}^{-1}(\mathbb{X}-\mu)\}$$

一维特征函数和二维特征函数分别表示为：

$$\varphi(t,u) = \exp\{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\}$$
$$\varphi(s,t;u,v) = \exp\{-\frac{1}{2}\left[u^2\sigma^2 + 2\cos\omega_0\tau uv\sigma^2 + v^2\sigma^2\right]\}$$

(2). 讨论能否写出任意的n 维概率密度函数和n 维特征函数的问题就在于判断这个正态过程是否是非退化的正态过程。考虑三维分布，假设$s \neq t \neq r$ 不难写出三维随机向量$(X(s,)X(t),X(r))$ 的协方差矩阵$\mathbb{B}$：

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \cos\omega_0(s-t)\sigma^2 & \cos\omega_0(s-r)\sigma^2 \\ \cos\omega_0(s-t)\sigma^2 & \sigma^2 & \cos\omega_0(t-r)\sigma^2 \\ \cos\omega_0(s-r)\sigma^2 & \cos\omega_0(t-r)\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

不难计算得到协方差矩阵$\mathbb{B}$ 的行列式为 0，因此可以发现三维的分布为退化的正态分布，从而我们无法写出任意n 维的概率密度函数$(n \geq 3)$. 但是我们可以写出n 维的特征函数。

$$\varphi(\mathrm{u}) = \varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathrm{u}\mathbb{B}\mathrm{u}^T\}$$

其中$\mathrm{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$\mathbb{B}$ 表示上面的协方差矩阵。

Exercise 3 设$\{X(t), t \in \mathrm{R}\}$ 是具有零均值和协方差$C(s,t)$ 的正态过程，则对于任意的非负数s,t 和τ，证明：

- $E[X^2(t)] = C(t,t) = D(t)$;
- $D[X^2(t)] = 2C^2(t,t) = 2D^2(t)$;
- $Cov[X^2(s), X^2(t)] = 2C^2(s,t)$;
- $Cov[X(s)X(s+\tau), X(t)X(t+\tau)] = C(s,t)C(s+\tau, t+\tau) + C(s,t+\tau)C(s+\tau,t)$.

Solution.

- 证明. 根据方差的定义以及$X(t)$ 的均值为 0 可得：

$$E[X^2(t)] = D(t) + E^2[X(t)] = D(t) = R(t,t) = C(t,t) - m^2(t) = C(t,t)$$

□

- 证明. 将随机变量$X(t)$ 进行标准化我们可以得到一个标准正态分布，即$(X(t)/\sqrt{D(t)}) \sim (0,1)$. 因此我们可以知道$(X^2(t)/D(t)) \sim \chi^2(1)$. 根据卡方分布的特性，$E(\chi^2(k)) = k, D(\chi^2(k)) = 2k$ 可知$D(X^2(t)/D(t)) = 2$. 从而得到：

$$D[X^2(t)] = 2D^2(t) = 2C^2(t,t)$$

□

- 证明. 根据协方差函数的定义可知：

$$\begin{aligned}
Cov[X^2(s), X^2(t)] &= R[X^2(s)X^2(t)] - E[X^2(s)]E[X^2(t)] \\
&= E[X^2(s)X^2(t)] - E[X^2(s)]E[X^2(t)] \\
&= E[X^2(s)]E[X^2(t)] + 2[E(X(s))E(X(t))]^2 - E[X^2(s)]E[X^2(t)] \\
&= 2[E(X(s))E(X(t))]^2 \\
&= 2C(s,t)
\end{aligned}$$

□

- 证明.

$$\begin{aligned}
&Cov[X(s)X(s+\tau), X(t)X(t+\tau)] \\
=&E[X(s)X(s+\tau)X(t)X(t+\tau)] - E[X(s)X(s+\tau)]E[X(t)X(t+\tau)] \\
=&E[X(s)X(s+\tau)]E[X(t)X(t+\tau)] + E[X(s)X(t)]E[X(s+\tau)X(t+\tau)] \\
&+ E[X(s)X(t+\tau)]E[X(s+\tau)X(t)] - E[X(s)X(s+\tau)]E[X(t)X(t+\tau)] \\
=&E[X(s)X(t)]E[X(s+\tau)X(t+\tau)] + E[X(s)X(t+\tau)]E[X(s+\tau)X(t)] \\
=&R(s,t)R(s+\tau, t+\tau) + R(s,t+\tau)R(t, s+\tau) \\
=&C(s,t)C(s+\tau, t+\tau) + C(s,t+\tau)C(s+\tau,t)
\end{aligned}$$

□

Exercise 4 设随机变量$\xi \sim N(0,1), \{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为σ^2 的维纳过程，ξ 和$W(t)$ 相互独立，设：

$$X(t) = \xi t + W(t), t \geq 0$$

- 求随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数$m_X(t)$，方差函数$D_X(t)$ 以及自相关函数$R_X(s,t)$.
- 求其一维，二维概率密度函数和特征函数。

Solution. (1). 根据题意可知：

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(\xi t + W(t)) = 0 + 0 = 0$$

$$D_X(t) = R(t,t) = E(X^2(t)) = E(\xi^2)t^2 + E(W^2(t)) = t^2 + \sigma^2 t$$

$$R_X(s,t) = E(X(s)E(t)) = 1 \times st + \sigma^2 \min\{s,t\} = st + \sigma^2 \min\{s,t\}$$

(2). 由题意可知ξt 和$W(t)$ 均为正态过程且相互独立，根据正态过程的可加性可知$X(t)$ 也为正态过程。因此可以知道$X(t)$ 服从参数为$(0+0,(1+\sigma^2)t)$ 的正态分布，一维概率密度函数为：

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)t}} \exp\{-\frac{1}{2t^2}\frac{x^2}{1+\sigma^2}\}$$

进一步可以写出二维概率密度函数：

$$f(x,y;s,t) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{s(t+\sigma^2)(t-s)}} \exp\{-\frac{t(s+\sigma^2)}{2\sigma^2(t-s)}[\frac{x^2}{s^2+\sigma^2} - \frac{2xy}{t(s+\sigma^2)} + \frac{y^2}{t^2+\sigma^2}]\} \quad \text{设} s < t$$

一维特征函数表示为：

$$\varphi(u,t) = \exp\{-\frac{1}{2}u^2t^2(1+\sigma^2)\}$$

二维特征函数表示为：

$$\varphi(u,v;s,t) = \exp\{\frac{1}{2}[(s^2+\sigma^2 s)u^2 + 2(t+\sigma^2)suv + (t^2+\sigma^2 t)v^2]\} \quad \text{设} s < t$$

Exercise 5 设$\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为$\sigma^2 = 4$ 的维纳过程，令$X = W(2), Y = W(3)$，求：

- $E(XY)$ 和$E[(X-Y)^2]$.
- 随机变量(X,Y) 的协方差矩阵C.
- 随机变量(X,Y) 的概率密度$f(x,y)$ 和特征函数$\varphi(u,v)$.

Solution. (1).

$$E(XY) = E[W(2)W(3)] = R_W(2,3) = \sigma^2 \min\{2,3\} = 2 \times 4 = 8$$

$$E[(X_Y)^2] = E^2[W(3) - W(2)] = E^2[W(1)] = 1 \times 4 = 4$$

(2). 根据题意可知：

$$Cov(X,X) = D(X) = 2 \times \sigma^2 = 8$$

$$Cov(Y,Y) = D(Y) = 3 \times \sigma^2 = 12$$

$$Cov(X,Y) = R_W(2,3) - m(2)m(3) = \sigma^2 \times \min\{2,3\} = 8$$

因此协方差矩阵$\mathbb{C}$ 表示为:

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

(3). 根据 (1)(2) 不难发现(X,Y) 服从二维联合正态分布且概率密度函数可以表示为:

$$f(x,y;2,3) = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \exp\{-\frac{1}{16}(3x^2 - 4xy + 2y^2)\}$$

特征函数为:

$$\varphi(u,v;2,3) = \exp\{-2(2u^2 + 4uv + 3v^2)\} \quad u,v \in \mathrm{R}$$

Exercise 6 设$\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为σ^2 的维纳过程, 设常数$a > 0$, 令$X(t) = W(t+a) - W(a)$, 求随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的协方差函数$C_X(s,t)$.

Solution. 根据题意:

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= R_X(s,t) - E(X(s))E(X(t)) \\ &= E[W(s+a)W(t+a)] - E[W(s+a)W(a)] - E[W(a)W(t+a)] + E[W^2(a)] \\ &= \sigma^2(a + \min\{s,t\}) - 2\sigma^2 a + \sigma^2 a \\ &= \sigma^2 \min\{s,t\} \end{aligned}$$

Exercise 7 已知寻呼台在$[0,t]$ 内收到的呼唤次数$\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程, 每分钟平均收到2 次呼唤, 求:

- 2 分钟内收到3 次呼唤的概率;
- 已知$[0,3]$ 内收到5 次呼唤, 在$[0,2]$ 内收到3 次呼唤的概率.

Solution. (1). 根据齐次泊松过程的性质, 2 分钟内收到3 次呼唤的概率可以表示为:

$$P\{N(t+2) - N(t) = 3\} = \frac{(2\times 2)^3}{3!} e^{2\times 2} = \frac{32}{3} e^{-4}$$

(2). 根据条件概率公式可知:

$$\begin{aligned} P\{N(2) - N(0) = 3 | N(3) - N(0) = 5\} =& \frac{P\{N(2) - N(0) = 3, N(3) - N(0) = 5\}}{P\{N(3) - N(0) = 5\}} \\ =& \frac{P\{N(2) - N(0) = 3, N(3) - N(2) = 2\}}{P\{N(3) - N(0) = 5\}} \\ =& \frac{80}{243} \end{aligned}$$

Exercise 8 设$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为λ 的泊松过程，分别求：

- $E[N(s)N(s+t)]$;
- 当$0 < s < t$ 时，$P\{N(s) = k | N(t) = n\}$;
- $P\{N(t+s) = j | N(s) = i\}$.

Solution. (1). 根据题意可知：

$$\begin{aligned} E[N(s)N(s+t)] =& R(s, s+t) = \lambda \min(s, s+t) + \lambda^2 s(s+t) \\ =& \lambda s + \lambda^2 (s^2 + st) \end{aligned}$$

(2). 当$0 < s < t$ 时，根据题意$P\{N(s) = k | N(t) = n\}$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} P\{N(s) = k | N(t) = n\} =& \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} \\ =& \frac{P\{N(0+s) - N(0) = k, N(s+t-s) - N(s) = n-k\}}{P\{N(t+0) - N(0) = n\}} \\ =& s^k (t-s)^{n-k} \end{aligned}$$

(3). $P\{N(t+s) = j | N(s) = i\}$ 可以写为：

$$P\{N(t+s) = j | N(s) = i\} = P\{N(t+s) - N(s) = j - i\} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}$$

Exercise 9 设$\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是参数为λ_1 的泊松过程，$\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是参数为λ_2 的泊松过程，两者相互独立。对于$0 \leq k \leq n$，证明下列的式子成立：

- $$P\{N_2(t) = k | N_1(t) + N_2(t) = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}$$
- $$E\{N_2(t) | N_1(t) + N_2(t) = n\} = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Solution. 证明. (1). 首先根据题意$N_1(t), N_2(t)$ 为两个相互独立的泊松过程，根据泊松分布的可加性我们可以知道$N_1(t) + N_2(t)$ 服从参数为$\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布。因此假设$\{N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是服从参数为$\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。等式左边写为：

$$\begin{aligned} P\{N_2(t) = k | N_1(t) + N_2(t) = n\} &= P\{N_2(t) = k | N_1(t) = n - k\} \\ &= \frac{P\{N_2(t) = k, N_1(t) = n-k\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{(\lambda_2 t)^k e^{-\lambda_2 t} (\lambda_1 t)^{n-k} e^{-\lambda_1 t} n!}{k!(n-k)!(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda_2)^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k} \frac{(\lambda_1)^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n-k}} \\ &= C_n^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

□

证明. (2). 根据期望的定义我们可以写出：

$$
\begin{aligned}
E[N_2(t)|N_1(t)+N_2(t)] &= \sum_{k=0}^{n} kP\{N_2(t)=k|N_1(t)+N_2(t)=n\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&= n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}
$$

□

Exercise 10 设$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为λ 的泊松过程，求：

- 二维概率分布；
- n 维概率分布；

Solution. (1). 二维概率分布表示为：(假设$t > s$)

$$
\begin{aligned}
&P\{N(s)=j, N(t)=k\} = P\{N(s)=j, N(t)-N(s)=k-j\} \\
=&P\{N(s)=j\}P\{N(t-s)=k-j\} = \frac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda s}\frac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$

(2). n 维概率分布表示为：

$$
P\{N(B_i)=n_i, i=1,2,\cdots,n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda|B_i|)_i^n}{n_i!}e^{-\lambda|B_i|}
$$

其中B_i 表示为i 个时间间隔区间。

Exercise 11 设$N(t)$ 表示某发射源在$[0,t]$ 内发射的粒子数，$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为λ 的泊松过程。若每一个发射出的一个粒子都以概率p 的可能被记录。且每个粒子的记录不仅独立于其他粒子的记录，也独立于$N(t)$. 若以$M(t)$ 表示在$[0,t]$ 内被记录的粒子数。证明$\{M(t), t \geq 0\}$ 是一个参数为λp 的泊松过程。

Solution. 根据题意，假设定义Y_n 表示第n 个粒子被记录的随机变量，其分布律表示为一个二项分布：

$$
Y_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}
$$

根据题意$M(t)$ 可以表示为：

$$
M(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_n
$$

由于$N(t)$ 是一个参数为λ 的泊松过程，且我们知道Y_n 之间相互独立且Y_n 与$N(t)$ 之间也是相互独立的，因此我们知道$M(t)$ 是一个复合泊松过程，从而其满足是一个独立增量过程，且其一维特征函数表示为：

$$\begin{aligned}\varphi_M(u,t) &= e^{\lambda t[\varphi_{Y_1}(u)-1]} \\ &= e^{\lambda t[(1-p+pe^{ju})^1-1]} \\ &= e^{\lambda t[pe^{ju}-p]} \\ &= e^{\lambda tp[e^{ju}-1]}\end{aligned}$$

根据反演公式和唯一性定理，特征函数与分布函数之间的一一对应关系，我们不难知道$M(t)$ 的分布是一个服从参数为λtp 的泊松分布。进一步地我们可以根据齐次泊松过程的定义（四条规则）可以求解出$M(t)$ 是参数为λp 的泊松过程。

Exercise 12 假设在$[0,t]$ 内男女顾客到达某商场的人数分别独立地服从每分钟1 人与每分钟2 人的泊松过程。求：

- $[0,t)$ 到达商场总人数的分布；
- 已知到时刻t 时已有60 人到商场的条件下，问其中40 人是女性顾客的概率？平均将有多少是女性顾客？

Solution. (1). 假设男性顾客在$[0,t]$ 时间内到达商场的人数表示为服从参数为$\lambda=1$ 的泊松过程；女性顾客在$[0,t]$ 时间内到达商场的人数表示为服从参数为$\lambda=2$ 的泊松过程；由于这两个过程相互独立，那么根据泊松过程的叠加我们不难知道在$[0,t]$ 时间内到达商场的总人数是一个服从参数为3 的泊松过程。
(2). 假设男性顾客到达的人数表示为$N_1(t)$，女性顾客到达的人数表示为$N_2(t)$，根据题意可知：

$$P\{N_2(t)=40|N_1(t)+N_2(t)=60\} = \binom{60}{40}\left(\frac{2}{3}\right)^{40}\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$$

从而再次利用第 17 题的结论得到：$E(N_2(t)|N_1(t)+N_2(t)=60) = 60\times\frac{2}{3}=40.$

Exercise 13 假设$[0,t]$ 内顾客到达商场的人数$\{N(t),t\geq 0\}$ 是参数为λ 的泊松过程，且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为p 和$q(p+q=1)$，设$N_1(t)$ 和$N_2(t)$ 分别为$[0,t]$ 内到达商场的男女顾客数。求$N_1(t)$ 和$N_2(t)$ 的一维分布，并证明它们相互独立。

Solution.（泊松过程的分解）根据题意使用全概率公式可知：

$$\begin{aligned}P\{N_1(t)=k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} P\{N_1(t)=k|N(t)=n\}\cdot P\{N(t)=n\} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt}\end{aligned}$$

因此我们知道$\{N_1(t),t\geq 0\}$ 是服从参数为λp 的泊松过程。同理可以得到$\{N_2(t),t\geq 0\}$ 是服从参数为λq 的泊松过程。

下面考虑相互独立性：

$$\begin{aligned}
P\{N_1(t)=k,N_2(t)=j\} &= P\{N_1(t)=k,N_2(t)=j|N(t)=k+j\}P\{N(t)=k+j\} \\
&= P\{N_1(t)=k,N_2(t)=j|N(t)=k+j\}\frac{(\lambda t)^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda t} \\
&= \binom{k+j}{k}p^k q^j \frac{(\lambda t)^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda pt)^k e^{-\lambda pt}}{k!}\cdot\frac{(\lambda qt)^j}{j!}e^{-\lambda qt} \\
&= P\{N_1(t)=k\}P\{N_2(t)=j\}
\end{aligned}$$

从而$N_1(t),N_2(t)$ 的独立性得证。

Exercise 14 设$X,Y_1,Y_2,\cdots$ 为相互独立的随机变量序列，其中X 服从参数为λ 的泊松分布，$Y_1,Y_2,\cdots$ 同服从参数为λ 的指数分布。定义过程：

$$X(t)=\sum_{k=1}^{X} I_{[0,t]}(Y_k),\quad t\in[0,\infty)$$

其中示性函数$I_{[0,t]}(Y_k)$ 定义为：

$$I_{[0,t]}(Y_k)=\begin{cases}1, & 0<Y_k<t\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

试证明$\{X(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程。

Solution. 根据题意我们可以得到（假设$t>s,m\geq n+k$）：

$$\begin{aligned}
&P\{X(s)=n,X(t)-X(s)=k\}\\
=&P\{\sum_{k=1}^{X} I_{[0,s]}(Y_k)=n,\sum_{k=1}^{X} I_{[0,t]}(Y_k)-\sum_{k=1}^{X} I_{[0,s]}(Y_k)=k\}\\
=&\sum_{m\geq n+k} P\{\sum_{i=1}^{m} I_{[0,s]}(Y_i)=n,\sum_{i=1}^{m} I_{[s,t]}(Y_i)=k\}P\{X=m\}\\
=&\sum_{m\geq n+k}\binom{m}{n}(1-e^{-\lambda s})^n\binom{m-n}{k}(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda t})^k\binom{m-n-k}{m-n-k}(1-1+e^{-\lambda t})^{m-n-k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\\
=&\sum_{m\geq n+k}\frac{m!}{n!(m-n)!}(1-e^{-\lambda s})^n\frac{(m-n)!}{k!(m-n-k)!}(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda t})^k(e^{-\lambda t})^{m-n-k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\\
=&\frac{(\lambda(1-e^{-\lambda s}))^n}{n!}e^{-\lambda(1-e^{-\lambda s})}\cdot\frac{(\lambda(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda t}))^k}{k!}e^{-\lambda(e^{-\lambda s}-e^{-\lambda t})}\cdot\sum_{m\geq n+k}\frac{(\lambda e^{-\lambda t})^{m-n-k}}{(m-n-k)!}e^{-\lambda e^{-\lambda t}}
\end{aligned}$$

由此我们不难发现$\{X(t),t\geq 0\}$ 是参数为$\frac{\lambda}{t}(1-e^{-\lambda t})$ 的泊松过程，结论得证。