随机过程及应用 Assignment-1

选课序号: 26
郭宇航
202021080728

Exercise 1 设$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{1,2\}, B = \{3\}$. 求一个含有$A, B$ 为元素的一个σ-代数。

Solution. 根据σ-代数应该满足的条件：(1)Ω 是其中的元素；(2) 对逆运算封闭；(3) 对可列并运算封闭。可以写出一个满足条件的σ-代数为：

$$\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{4,5,6\}, \emptyset\}$$

Exercise 2 某战士有两支枪，射击某目标时命中率分别为0.9 及0.5. 若随机地用一支枪，射击一发子弹后发现命中目标，问此枪是哪一支的概率分别为多大?

Solution. 记事件A 表示战士使用第一支枪进行射击，记事件B 表示战士使用第二支枪进行射击，记事件C 表示一次射击命中. 根据题中给出的已知条件我们可以知道：$P(A) = P(B) = 0.5$. $P(C) = P(A) \times 0.9 + P(B) \times 0.5$. 我们希望求解的目标为：$P(A|C)$ 以及$P(B|C)$. 根据条件概率公式可以得到：

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{0.5 \times 0.9}{0.9 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = \frac{9}{14}$$
$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.9 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = \frac{5}{14}$$

因此是第一支枪的概率为9/14, 是第二支枪的概率为5/14.

Exercise 3 设4 个黑球与2 个白球随机地等分成A, B 两组，记A 组中的白球数为X，然后交换A 与B 中的一个球，再记交换后A 组中的白球数为Y，试求:

(a) X 的分布律

Solution.

X	0	1	2
P	1/5	3/5	1/5

(b) $Y|X$ 的分布律

Solution.

Y	0	1	2	Y	0	1	2	Y	0	1	2
$P\{Y = i \| X = 0\}$	1/3	2/3	0	$P\{Y = i \| X = 1\}$	2/9	5/9	2/9	$P\{Y = i \| X = 2\}$	0	2/3	1/3

Exercise 3 continued on next page...

(c) Y 的分布律

Solution. 根据全概率公式：

Y	0	1	2
P	1/5	3/5	1/5

Exercise 4 设随机变量X 的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{x^2+1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) 求解常数A.

Solution. 根据概率密度函数的性质可以写出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

代入$f(x)$ 的概率密度函数不难求解得到：

$$\int_0^{+\infty} \frac{A}{x^2+1}\mathrm{d}x = 1$$

$$A(\arctan x|_{+\infty} - \arctan x|_0) = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}$$

因此常数A 为$\frac{2}{\pi}$.

(b) 求解分布函数$F(x)$.

Solution.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u$$

当$x \leq 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}u = 0$. 当$x > 0$ 时，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\pi(u^2+1)}\mathrm{d}u$.
求解得到分布函数$F(x)$ 如下：

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(c) 求解随机变量$Y = \ln X$ 的分布函数以及概率密度函数.

Solution. 考虑$Y = \ln X$. 不难写出随机变量Y 的分布函数表示为：

$$F_Y(y) = P\{Y = \ln X < y\} = \int_{\ln x < y} f_X(x)\mathrm{d}x, \quad y \in \mathcal{R}$$

从而可以得到当$x > 0$ 时：

$$F_Y(y) = \int_0^{e^y} \frac{2}{\pi(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\arctan e^y, \quad y \in \mathcal{R}$$

Exercise 4 continued on next page...

进一步可以得到概率密度函数：

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2e^y}{\pi}\frac{1}{e^{2y}+1}, \quad y \in \mathcal{R}$$

Exercise 5 设随机变量(X,Y) 的概率密度函数为：

$$f(x,y) = A\sin(x+y), 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) 求解常数A.

Solution.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

不难解得常数$A = \frac{1}{2}$.

(b) 求解数学期望$E(X), E(Y)$.

Solution. 已知随机变量(X,Y) 的联合概率密度函数，可以直接求出X 和Y 的边缘密度函数：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(\sin y + \cos y) \end{aligned}$$

求解数学期望：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \\ E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}y(\sin y + \cos y)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

因此随机变量X 和Y 的数学期望均为$\pi/4$.

(c) 求解方差$D(X), D(Y)$.

Solution. 求解方差：$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2(\sin x + \cos x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2 \end{aligned}$$

Exercise 5 continued on next page...

从而:

$$D(X)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}-2-(\frac{\pi}{4})^2=\frac{\pi}{2}-2+\frac{\pi^2}{16}$$

同理可以计算得到随机变量Y 的方差为：$\frac{\pi}{2}-2+\frac{\pi^2}{16}$.

(d) 协方差以及相关系数.

Solution. 协方差表示为：$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$. 首先计算$E(XY)$.

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}xy(\sin x+\cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{4}x\sin x-\frac{1}{2}x(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^2}{16}\end{aligned}$$

因此协方差为：

$$cov(X,Y)=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{4}=0$$

相关系数表示为：

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$$

Exercise 6 假设随机变量X 服从指数分布：

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-kx} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}(k>0)$$

求解特征函数$\varphi(u)$ 并使用$\varphi(u)$ 求解数学期望以及方差。

Solution. 指数分布的特征函数为：

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}ke^{jux}e^{-kx}\mathrm{d}x=(1-\frac{ju}{k})^{-1},\quad u\in R$$

使用$\varphi(u)$ 求解数学期望和方差。由于随机变量X 这里的n 阶矩存在，根据X 的特征函数的p 阶导数$\varphi^{(p)}(u)$ 存在且：

$$E(X^p)=j^{(-p)}\varphi^{(p)}(0),\quad p\leq n$$

由于$\varphi'(0)=\frac{j}{k},\varphi''(0)=j^2k^{-2}$. 从而可以直接计算得到数学期望与方差：

$$\begin{aligned}E(X)&=j^{-1}\varphi'(0)=\frac{1}{k}\\D(X)&=j^{-2}\varphi''(0)=\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

因此数学期望为k^{-1}，方差为k^{-2}.

Exercise 7 设随机变量X, Y 相互独立，且分别服从参数为λ_1, λ_2 的泊松分布，试用特征函数求解$Z = X + Y$ 这个随机变量的概率分布。

Solution. 由题意可知：

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{jt}-1)}$$
$$\varphi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{jt}-1)}$$

又随机变量X, Y 相互独立，随机变量$Z = X + Y$ 的特征函数为：

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{jt}-1)}\end{aligned}$$

显然不难发现根据反演公式和唯一性定理，我们可以找到唯一的分布函数与上述特征函数对应。因此随机变量Z 服从参数为$(\lambda_1 + \lambda_2)$ 的泊松分布。

Exercise 8 一名矿工陷进一个有三扇门的矿井中。第一扇门通到一个隧道，走两小时后他可到达安全区。第二扇门通到又一隧道，走三小时会使他回到这矿井中。第三扇门通到另一个隧道，走五小时后，仍会使他回到这矿井中。假定这矿工总是等可能地在三扇门中选择一扇，让我们计算矿工到达安全区的平均时间。

Solution. 假设X 表示这名矿工到达安全区所需要的时间，Y 表示矿工第一次选择的门。则不难写出：

Y 的分布律可以表示为：$E(Y = i) = 1/3, i = 1, 2, 3.$ 而根据全数学期望公式：

$$\begin{aligned}E(X) &= E(E(X)|Y) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(Y = i) \cdot E(X|Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} 1/3 \times E(X|Y = i)\end{aligned}$$

根据题意可知：$E(X|Y = 1) = 2, E(X|Y = 2) = 3 + E(X), E(X|Y = 3) = 5 + E(X)$. 代入上式可以得到方程：

$$E(X) = \frac{1}{3}(2 + 3 + E(X) + 5 + E(X))$$

最终可以求得$E(X) = 10$，即这名矿工到达安全区的平均时间为 10 小时。

Exercise 9 假设(X, Y) 的分布密度为：

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

请问X, Y 是否相互独立？

Exercise 9 continued on next page...

Solution. 已知联合概率密度函数，不难求出边缘概率密度函数：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 4xy\mathrm{d}y = 2x \quad (0 < x < 1)$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 4xy\mathrm{d}x = 2y \quad (0 < y < 1)$$

根据二维连续型随机变量(X,Y),X,Y 之间独立的充要条件是对于连续点有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$. 不难发现这个问题上$X,Y$ 相互独立因为$f_X(x)f_Y(y) = 4xy = 4xy$。

假设(X,Y) 的分布密度为：

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

请问X,Y 是否相互独立？

Solution. 已知联合概率密度函数，不难求出边缘概率密度函数：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^x 8xy\mathrm{d}y = 4x^3 \quad (0 < x < 1)$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 8xy\mathrm{d}x = 4y \quad (0 < y < 1)$$

根据二维连续型随机变量(X,Y),X,Y 之间独立的充要条件是对于连续点有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$. 不难发现这个问题上$X,Y$ 不是相互独立的，因为$f_X(x)f_Y(y) = 16x^3y \neq 8xy$.

Exercise 10 试证明：

(a) 设N 为取值非负整数的随机变量，则：

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{N \geq n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N > n\}$$

Solution. 证明. 根据离散型随机变量期望的定义：

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP\{N = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(P\{N \geq n\} - P\{N \geq n+1\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} nP\{N \geq n\} - \sum_{n=0}^{+\infty} nP\{N \geq n+1\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} nP\{N \geq n\} - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)P\{N \geq n\} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-(n-1))P\{N \geq n\} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P\{N \geq n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N > n\}
\end{aligned}$$

Exercise 10 continued on next page...

□

(b) 设X 是取值为非负实数的随机变量，分布函数为$F(x)$, 则：

$$E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] \mathrm{d}x$$

Solution. 证明. 根据连续型随机变量期望的定义：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

从题中给出的式子出发 (假设随机变量概率密度函数存在且$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < \infty$) 可以得到：

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} [1 - F(x)] \mathrm{d}x &= x[1 - F(x)]|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \mathrm{d}(1 - F(x)) \\
&= x[1 - F(x)]|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(-f(x)) \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

□

Exercise 11 若随机变量X 与Y 的联合密度函数为：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < |y| < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$ 和$f_{Y|X}(y|x)$.

Solution. 先求边缘概率密度函数：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y = \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1 \mathrm{d}y = 2x & (0 < x < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x = \begin{cases} \int_y^1 1 \mathrm{d}x = 1 - y & (0 \le y < 1) \\ \int_{-y}^1 1 \mathrm{d}x = 1 + y & (-1 < y < 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 1 - |y| & (0 \le |y| < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

首先计算$f_{X|Y}(x|y)$，当$-1 < y < 0$ 时：

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1+y} & -y < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Exercise 11 continued on next page...

当$0 \le y < 1$ 时：

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y} & y < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

下面计算$f_{Y|X}(y|x)$，当$0 < x < 1$ 时：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x} & -x < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) 条件概率$P(X > \frac{1}{2}|Y > 0)$ 与$P(X > \frac{1}{2}|Y = \frac{1}{4})$.

Solution.

$$P(X > \frac{1}{2}|Y > 0) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_{X|Y}(x|0 < Y < \frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-y)} \quad (0 < y < \frac{1}{2})$$

$$P(X > \frac{1}{2}|Y = \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$$