2020 年算法设计与分析 Assignment-2

Due: Nov 03, 2020

郭宇航 202021080728

Exercise 1 请简述证明一个问题是 NP 完全问题的主要步骤。

Solution. 证明分为两步：
（1）首先证明这个问题是一个 NP 问题；
（2）其次证明一个 NP 完全问题都可以归约到这个问题。
这样就完成了一个问题是 NP 完全问题的证明。

Exercise 2 请证明：如果我们可以在多项式时间内给出判定一个图是否存在哈密顿圈，则我们可以在多项式时间内找到一个图的哈密顿圈。（如果存在的话）

Solution. 假设在多项式时间内判断一个图是否存在哈密顿圈的问题记为问题 X，将多项式时间内找到一个图的哈密顿圈问题记为问题 Y，那么下面的目标是在多项式时间内将问题 Y 归约到问题 X：$Y \leq_p X$.

- 对于给定的图，首先调用问题 X 的解判断是否存在哈密顿圈，如果不存在则直接返回不存在方案，否则继续。
- 在给定的图中随机选择一条边，删除后调用问题 X 的解判断剩下的图是否存在一个哈密顿圈，如果不存在则这条边是原图的一个哈密顿圈的中一条边，将这个边添加入方案集合中，如果剩余图中仍然存在一个哈密顿圈则跳过这条边。
- 重复上述的操作直到遍历完整个给定的图的所有边，返回一个哈密顿图的方案。

Exercise 3 最长路径问题：给定简单无向图中是否存在长度大于等于 k 的简单路径？请证明这个问题是 NP 完全问题。

Solution.（1）首先考虑证明最长路径问题是一个 NP 问题：显然给出一个问题的实例一条简单路径，我们可以在多项式时间内验证这个实例路径的长度是否大于等于 k.
(2) 下面证明一个 NP 完全问题可以归约到最长路径问题，这里证明图的哈密尔顿圈问题可以归约到最长路径问题，即：HAMILTON-CYCYLE $\leq_p$ LONGEST-PATH. 归约流程为：（1）首先给出一个哈密顿图的实例 G，我们对应的构建一个最长路径的实例 (G', K)，其中 $G = G', K = |V| - 1$. 显然根据图 G 中存在哈密顿圈，我们一定可以在图 G' 中找到一个长度为 K 的平凡路径。

Exercise 4 图的匹配是一个边集，其中任意两条边都没有公共的顶点。请设计近似算法求解图的最大匹配问题，使得所得匹配集包含的顶点数超过最优解的 1/2.

Solution. 简单的贪心算法如算法1所示：根据上面的贪心算法我们不难发现我们可以自然得到一个点覆盖 $|S| = 2|M|$，假设 M^* 表示一个最大的图匹配解，显然我们可以知道前面得到的这个点覆盖结果 $S \geq |M^*|$.（对于给定的一个图，假设 M 表示任意的一个图匹配解，S 表示任意的一个点覆盖解，一定有 $|S| \geq |M|$）从而我们可以得到：

$$|M| = \frac{1}{2}|S| \geq \frac{1}{2}|M^*|$$

从而我们找到了一个满足 1/2 近似的图匹配近似算法。

Algorithm 1: GREEDY-GRAPH-MATCHING ALGORITHM

Input: graph $G = (V, E)$
Output: graph-matching: M
Initialize $M \to \emptyset$, $E' \to E$;
while $E' \neq \emptyset$ **do**
    Let $(u, v) \in E'$ be an arbitrary edge;
    $M \to M \cup \{(u, v)\}$.;
    Delete from E' all edges incident to either u or v.
end
return M