随机过程及应用 Assignment-5

选课序号: 26
郭宇航
202021080728

Exercise 1 设随机过程 $\{X(t) = \sin \xi t, t \geq 0\}$，其中 $\xi \sim U(0, 2\pi)$，试证明:

- $\{X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是平稳随机序列;
- $\{X(t), t \geq 0\}$ 不是平稳随机过程。

Solution. (1) 首先考虑均值函数: $m_X(n) = E(X(n)) = E(\sin \xi n) = \int_0^{2\pi}(1/2\pi)\sin n\xi \mathrm{d}\xi = 0$. 其次考虑自相关函数 $R_X(n, n+k)$.

$$\begin{aligned}
R_X(n, n+k) &= E(X(n)X(n+k)) = E(\sin n\xi \cdot \sin(n+k)\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\xi \sin(n+k)\xi \mathrm{d}\xi \\
&= (-\frac{1}{4\pi})\left(\int_0^{2\pi} \cos(2n+k)\xi \mathrm{d}\xi - \int_0^{2\pi} \cos k\xi \mathrm{d}\xi\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

不难发现随机序列的均值函数 $m_X(n)$ 为常数，自相关函数只与时间间隔 k 相关，因此此随机序列为平稳随机序列。
(2) 考虑随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数 $m_X(t)$.

$$m_X(t) = E(X(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2t\pi}(1 - \cos 2t\pi)$$

随机过程 $X(t)$ 的均值函数是关于时间 t 的函数而不是一个常数，从而违背平稳过程的基本要求，因此该随机过程不是平稳随机过程。

Exercise 2 设 $\{X(t) = \xi \cos \beta t + \eta \sin \beta t, t \in \mathcal{R}\}$, 其中 ξ 与 η 互相独立，都服从 $N(0, \sigma^2)$, 证明随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 为严平稳正态随机过程，并给出 n 维特征函数（矩阵形式）。

Solution. 由于 ξ, η 相互独立且均服从 $N(0, \sigma^2)$，因此不难发现 $X(t)$ 为正态过程，对于正态过程而言，严平稳性和宽平稳性等价，因此我们直接证明这个正态过程是一个宽平稳过程即可。
均值函数: $m_X(t) = E(\xi \cos \beta t + \eta \sin \beta t) = \cos \beta t E(\xi) + \sin \beta t E(\eta) = 0$. 自相关函数:

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E(X(t)X(t+\tau)) = E\left[(\xi \cos \beta t + \eta \sin \beta t)(\xi \cos \beta(t+\tau) + \eta \cos \beta(t+\tau))\right] \\
&= [\cos \beta t \cos \beta(t+\tau)]E[\xi^2] + [\cos \beta t \sin \beta(t+\tau) + \sin \beta t \cos \beta(t+\tau)]E[\xi\eta] + [\sin \beta t \sin \beta(t+\tau)]E[\eta^2] \\
&= \sigma^2(\cos \beta t \cos \beta(t+\tau) + \sin \beta t \sin \beta(t+\tau)) \\
&= \sigma^2 \cos(\beta\tau)
\end{aligned}$$

因此随机过程 $X(t)$ 的均值函数为 0，自相关函数是关于时间间隔 τ 的函数，从而随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是一个宽平稳的正态过程，也就是一个严平稳的正态过程。
下面写出其 n 维特征函数：

$$\varphi(\mathbf{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u}\right\}$$

其中 $\mathbf{C}$ 表示协方差函数：$C_X(\tau) = \sigma^2\cos(\beta\tau)$.

Exercise 3 设随机过程 $\{X(t) = \xi\cos\omega_0 t + \eta\sin\omega_0 t, t \in \mathcal{R}\}$，其中 ω_0 为常数。证明其为平稳过程的充要条件是 ξ, η 是互不相关的随机变量，且 $E(\xi) = E(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = \sigma^2$.

Solution. 一方面：首先证明充分性，假设 ξ, η 是互不相关的随机变量，$E(\xi) = E(\eta) = 0$ 以及 $D(\xi) = D(\eta) = \sigma^2$. 首先考虑随机过程 $X(t)$ 的均值函数：$m_X(t) = E(X(t)) = E(\xi\cos\omega_0 t + \eta\sin\omega_0 t) = \cos\omega_0 t E(\xi) + \sin\omega_0 t E(\eta) = 0$，因此均值函数是一个常数。其次再考虑 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(t, t+\tau)$.

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E((\xi\cos\omega_0 t + \eta\sin\omega_0 t)(\xi\cos\omega_0(t+\tau) + \eta\sin\omega_0(t+\tau))) \\
&= \cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)E(\xi^2) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)E(\eta^2) \\
&= \sigma^2\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}$$

其中由于 ξ, η 互不相关，则 $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta) = 0$，同时由于数学期望均为 0，则 $E(\xi^2) = E(\eta^2) = D(\xi) = D(\eta) = \sigma^2$. 从而可以知道这个随机过程的自相关函数只与时间间隔相关，与起始时间和结束之间无关，随机过程是一个平稳过程。至此充分性证明完毕。
另外一方面证明必要性，根据定义我们可以写出随机过程 $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t) = \cos\omega_0 t E(\xi) + \sin\omega_0 t E(\eta)$. 由于 $X(t)$ 是平稳过程，则均值函数与时间 t 是无关的，从而 $E(\xi) = E(\eta) = 0$. 类似地求出自相关函数 $R_X(t, t+\tau)$ 可以表示为：

$$R_X(t, t+\tau) = \cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)E(\xi^2) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)E(\eta^2) + E(\xi\eta)\sin(2\omega_0 t + \tau)$$

进行化简整理可以得到：

$$2R_X(\tau) - (E(\xi^2) + E(\eta^2))\cos\omega_0\tau(E(\xi^2) - E(\eta^2))\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau) + 2E(\xi\eta)\sin(2\omega_0 t + \omega\tau)$$

从而有 $E(\xi^2) = E(\eta^2)$, $E(\xi\eta) = 0$. 而前面又均值我们又可以知道 $E(\xi) = E(\eta) = 0$，从而我们可以得到：$D(\xi) = D(\eta)$ 同时 $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta) = 0$，所以随机变量 ξ 和 η 是不相关的。

Exercise 4 设二阶矩过程 $X(t), t \in \mathcal{R}$ 的均值函数为 $m_X(t) = \alpha + \beta t$（$\alpha$,$\beta$ 都是常数），协方差函数为 $C_X(s, t) = e^{-\lambda|t-s|}$，令 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$，讨论随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是否为平稳过程。

Solution. 讨论 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的平稳性，首先考虑其均值函数 $m_Y(t) = E(X(t+1)) = E(X(t)) = \alpha + \beta(t+1) - \alpha + \beta t = \beta$. 为一个常数。然后讨论自相关函数 $R_Y(t, t+\tau)$.

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) =& E(Y(t)Y(t+\tau)) = E[(X(t+1) - X(t))(X(t+\tau+1) - X(t+\tau))] \\
=& E[X(t+1)X(t+\tau+1)] - E[X(t+1)X(t+\tau)] - E[X(t)X(t+\tau+1)] + E[X(t)X(t+\tau)] \\
=& C_X(t+1, t+\tau+1) - C_X(t+1, t+\tau) - C_X(t, t+\tau+1) + C_X(t, t+\tau) \\
& - (m_X(t+1)m_X(t+\tau+1) - m_X(t+1)m_X(t+\tau) - m_X(t)m_X(t+\tau+1) + m_X(t)m_X(t+\tau)) \\
=& 2\exp\{-\lambda|\tau|\} - \exp\{-\lambda|\tau-1|\} - \exp\{-\lambda|\tau+1|\} - \beta^2
\end{aligned}$$

显然，随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数与起始时间 t 无关，只与时间间隔 t 相关。综上可以得到结论：随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是一个宽平稳过程。

Exercise 5 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个零均值，相关函数为 $R_X(\tau)$ 的正态平稳过程。证明 $\{X^2(t), t \in \mathcal{R}\}$ 为平稳过程。

Solution. 不妨令 $\{Y(t) = X^2(t), t \in \mathcal{R}\}$，则我们首先可以写出 $m_Y(t) = E(X^2(t)) = D(X(t)) + m_X^2(t) = R_X(0)$. 显然为常数。下面写出 $Y(t)$ 的自相关函数：$R_Y(t, t+\tau)$.

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[X^2(t)X^2(t+\tau)] \\ &= E[X^2(t)] + E[X^2(t+\tau)] + 2E[X(t)X(t+\tau)]^2 \\ &= 2R_X(0) + 2R_X^2(\tau) \end{aligned}$$

显然 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数只与时间间隔 τ 相关，与开始时间无关，因此得到结论 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 即 $\{X^2(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是一个平稳过程。

Exercise 6 设 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 和 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 均为平稳过程，其均值函数 $m_X = 0, m_Y = 0$, 自相关函数分别为 $R_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}\cos\beta\tau, R_Y(\tau) = 9 + e^{-2\tau^2}$. 并且 $X(t), Y(t), \xi$ 是相互独立的，令：

$$Z(t) = \xi X(t)Y(t), \quad (0 < D(\xi) < +\infty)$$

证明 $\{Z(t), t \in \mathcal{R}\}$ 为平稳过程，并求其均值函数，方差函数以及自相关函数。

Solution. 首先考虑 $Z(t)$ 的均值函数 $m_Z(t) = E(\xi X(t)Y(t)) = E(\xi)E(X(t))E(Y(t)) = 0$. 然后考虑 $Z(t)$ 的自相关函数：

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) =& E(Z(t)Z(t+\tau)) = E(\xi^2 X(t)Y(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)) \\ =& E(\xi^2)R_X(t, t+\tau)R_Y(t, t+\tau) \\ =& E(\xi^2)2e^{-2|\tau|}\cos\beta\tau \cdot (9 + e^{-2\tau^2}) \end{aligned}$$

$Z(t)$ 的方差函数为：$D(Z(t)) = E(Z^2(t)) = E(\xi^2 X^2(t)Y^2(t)) = E(\xi^2)2 \times 10 = 20E(\xi^2)$.

Exercise 7 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的均值函数为 $m(t) = 0$, 相关函数 $R(\tau) = e^{-|\tau|}$. 讨论其均方连续性，均方可积性，均方可导性以及均值的均方遍历性。

Solution. 首先对于一个实随机过程而言，其均方连续的充要条件是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续，且此时 $R_X(\tau)$ 处处连续。考虑 $X(t)$ 的自相关函数在零点处的连续性，显然我们不难发现函数 $R(\tau) = e^{-|\tau|}$ 在零点的左右极限相等，均为 1. 从而该随机过程的自相关函数在零点连续，进一步自相关函数处处连续从而该随机过程均方连续，且均方可积。平稳随机过程均方可导的要求是在零点处的一阶导数二阶导数存在。对于这个随机过程而言：

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta s \to 0}} \frac{R(\Delta s - \Delta t) - R(-\Delta t) - R(\Delta s) + R(0)}{\Delta s \Delta t} \\ =& \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta s \to 0}} \frac{e^{-|\Delta t - \Delta s|} - e^{-|\Delta t|} - e^{-\Delta s} + 1}{\Delta s \Delta t} \end{aligned}$$

当 $\Delta s = \Delta t$ 时，则有：

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{2 - 2e^{-\Delta t}}{\Delta^2} = +\infty$$

因此该随机过程是均方不可导的。
考虑均值的均方遍历性，根据定理：

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T}) C_X(\tau) \mathrm{d}\tau \\
=&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T}) e^{-\tau} \mathrm{d}\tau \\
=&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^{2T} e^{-\tau} \mathrm{d}\tau - \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \tau e^{-\tau} \mathrm{d}\tau \right) \\
=&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[1 + \frac{1}{2T} (e^{-2T} - 1) \right] \\
=&0
\end{aligned}$$

因此平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是均方连续，均方可积，均方可导的，同时均值具有均方遍历性。

Exercise 8 随机电报信号 $X(t)$ 的样本函数如下图所示（见课本 P175），设均值和相关函数分别为 $m_X = 0, R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$.

当 $Y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t) \mathrm{d}t$ 时，证明：

- $m_Y = 0$;
- $E(Y^2) = \frac{1}{2\lambda T} - \frac{1 - e^{-4\lambda T}}{8\lambda^2 T^2}$.

Solution.（1）不妨写出 $Y(t)$ 的均值函数：

$$\begin{aligned}
m_Y(t) = E(Y(t)) &= E(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t) \mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E(X(t)) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 0 \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

从而可以得到 $m_Y = 0$.
（2）不妨写出 $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned}
E(Y^2) =& \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} R_X(t - s) \mathrm{d}s \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} e^{-2\lambda|t-s|} \mathrm{d}s \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{4T^2} (\frac{2T}{\lambda} - \frac{1 - e^{-4\lambda T}}{2\lambda^2}) \\
=& \frac{1}{2\lambda T} - \frac{1 - e^{-4\lambda T}}{8\lambda^2 T^2}
\end{aligned}$$

Exercise 9 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的相关函数 $R(\tau) = e^{-\tau^2}$. 讨论其均方连续性，均方可积性，均方可导性。如果 $X(t)$ 均方可导，令：

$$Y(t) = X(t) + X'(t)$$

求随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数。

Solution. 对于实平稳过程来说，均方连续的充要条件是自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续。考虑 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处的左右极限：

$$\lim_{\tau \to 0^-} R_X(\tau) = \lim_{\tau \to 0^+} R_X(\tau) = 1$$

因此自相关函数在 $\tau = 0$ 处连续，从而随机过程均方连续，同时也是均方可积的。下面考虑均方可导性：对于平稳过程来说，其均方可微的充要条件是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处二次可微。

$$\begin{aligned}
(R_X(\tau))' &= (e^{-\tau^2})' = -2\tau e^{-\tau^2} \\
(R_X(\tau))'' &= (-2\tau e^{-\tau^2})' = (4\tau^2 - 2)e^{-\tau^2}
\end{aligned}$$

不难发现自相关函数在 $\tau = 0$ 处是二次可微的 (这样写不太严谨)，所以该随机过程是均方可导的。下面求解随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数。根据定义：

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) =& E(Y(t)Y(t+\tau)) = E((X(t) + X'(t))(X(t+\tau)X'(t+\tau))) \\
=& E(X(t)X(t+\tau)) + E(X(t)X'(t+\tau)) + E(X'(t)X(t+\tau)) + E(X'(t)X'(t+\tau)) \\
=& R_X(\tau) + R'_X(\tau) - R_X(\tau) - R''_X(\tau) \\
=& R_X(\tau) - R''_X(\tau) = e^{-\tau^2} - (4\tau^2 - 2)e^{-\tau^2} = (3 - 4\tau^2)e^{-\tau^2}
\end{aligned}$$

Exercise 10 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数为 $R(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$. 讨论其均方连续性，均方可积性以及均方可导性。如果均方可导，则求其导数过程 $X'(t)$ 的自相关函数 $R_{X'}(\tau)$ 和 $X(t)$ 与 $X'(t)$ 的互相关函数 $R_{XX'}(\tau)$ 和 $R_{X'X}(\tau)$.

Solution. 对于实平稳过程来说，均方连续的充要条件是自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续。考虑 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处的左右极限：

$$\lim_{\tau \to 0^-} \frac{1}{1+\tau^2} = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{1}{1+\tau^2} = 1$$

因此这个平稳过程具有均方连续性，根据均方连续必均方可积，该平稳过程也是均方可积的。下面讨论均方可导性：对于平稳过程来说，其均方可微的充要条件是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处二次可微。

$$(R_X(\tau))' = \left(\frac{1}{1+\tau^2}\right)' = -\frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}$$

$$(R_X(\tau))'' = \left(-\frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}\right)' = \frac{6\tau^2 - 2}{(1+\tau^2)^3}$$

不难发现该随机过程的自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处是二次可微的，从而随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 具有均方可导性。由于 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是一个均方可导的平稳过程，则其均方导数过程 $\{X'(t), t \in \mathcal{R}\}$ 仍是一个平稳过程且其自相关函数 $R_{X'}(\tau)$ 可以表示为：

$$R_{X'}(\tau) = -R''_X(\tau) = \frac{2 - 6\tau^2}{(1+\tau^2)^3}$$

同时 $X(t)$ 和 $X'(t)$ 的互相关函数可以表示为：

$$R_{XX'}(\tau) = R'_X(\tau) = -\frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}$$
$$R_{X'X}(\tau) = -R'_X(\tau) = \frac{2\tau}{(1+\tau^2)^2}$$

Exercise 11 设随机过程 $X(t) = \xi\cos(\beta t + \eta), t \in \mathcal{R}$, 其中 $\xi \sim N(0,1), \eta \sim U(0, 2\pi)$，$\xi$ 与 η 相互独立，β 为正常数。试证明随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 为平稳过程，且具有关于均值的均方遍历性。

Solution. 首先考虑均值函数：$m_X(t) = E(X(t)) = E(\xi\cos(\beta t + \eta)) = E(\xi)E(\cos(\beta t + \eta)) = 0$. 然后考虑自相关函数：

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) =& E(X(t)X(t+\tau)) = E(\xi\cos(\beta t + \eta)\xi\cos(\beta(t+\tau) + \eta)) \\
=& E(\xi^2)E(\cos(\beta t + \eta)\cos(\beta(t+\tau) + \eta)) \\
=& \frac{1}{2}E(\cos\beta\tau + \cos(2\beta t + \beta\tau + 2\eta)) \\
=& \frac{1}{2}\cos\beta\tau
\end{aligned}$$

因此这个随机过程为平稳过程。下面考虑均值的均方遍历性。

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})C_X(\tau)\mathrm{d}\tau \\
=&\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(\frac{1}{2}\cos\beta\tau - 0)\mathrm{d}\tau \\
=&0
\end{aligned}$$

因此这个随机过程的均值具有均方遍历性。

Exercise 12 设随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$，其中 A, ω, Θ 是相互独立的随机变量，且 $A \sim N(0,4), \Theta \sim U[-\pi, \pi], \omega \sim U[-5, 5]$. 试证明随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 为平稳过程，且具有关于均值的均方遍历性。

Solution. 首先考虑该随机过程的均值函数：$m_X(t) = E(X(t)) = E(A\cos(\omega t + \Theta)) = E(A)E(\cos(\omega t + \Theta)) = 0$. 然后考虑自相关函数：

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) =& E(X(t)X(t+\tau)) \\
=& E(A\cos(\omega t + \Theta)A\cos(\omega(t+\tau) + \Theta)) \\
=& E(A^2)E(\cos(\omega t + \Theta)\cos(\omega(t+\tau) + \Theta)) \\
=& 4\cdot\frac{1}{2}E(\cos\omega\tau + \cos(2\omega(t+\tau) + 2\Theta)) \\
=& \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau \\
=& \frac{1}{5}\cdot\frac{2\sin 5\tau}{\tau} \\
=& \frac{2\sin 5\tau}{5\tau}
\end{aligned}$$

因此随机过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是一个平稳过程。下面考虑均值的均方遍历性。实践证明从协方差函数的角度考察这个问题不太好处理，因此我们从定义出发求解时间平均 $< X(t) >$:

$$\begin{aligned} < X(t) > =& \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\mathrm{d}t \\ =& \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega t+\Theta)\mathrm{d}t \\ =& \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{A}{\omega T}\sin\omega T\cos\Theta \\ =& 0 = m_X(t) \end{aligned}$$

因此这个随机过程的均值均有均方遍历性。

Exercise 13 已知零均值平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的谱密度为：

$$S(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega|, & |\omega| \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Solution. 由于自相关函数和谱密度函数互为傅里叶变换和反变换，自相关函数可以写为：

$$\begin{aligned} R(\tau) =& \mathcal{F}[S_X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\omega|)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega \\ =& \frac{1}{\pi\tau^2}(1-\cos\tau) \end{aligned}$$

Exercise 14 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的相关函数：

$$R(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau|, & |\tau| \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Solution. 由于自相关函数和谱密度函数互为傅里叶变换和反变换，因此谱密度函数可以写为：

$$\begin{aligned} S(\omega) =& \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ =& \int_{-1}^{1}(1-|\tau|)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ =& 2\int_{0}^{1}(1-\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ =& \frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2} \end{aligned}$$

Exercise 15 已知平稳过程 $\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和自谱密度 $S_X(\omega)$. 设:

$$Y(t) = X(t+a) - X(t), t \in \mathcal{R}$$

其中 a 为常数，求证 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 也是平稳过程，并求其自相关函数 $R_X(\tau)$ 和自谱密度 $S_Y(\omega)$.

Solution. 首先证明过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是平稳过程。均值函数为 $m_Y(t) = E(Y(t)) = E(X(t+a) - X(t)) = 0$. 自相关函数为:

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) =& E(Y(t)Y(t+\tau)) = E((X(t+a) - X(t))(X(t+\tau+a) - (X(t+\tau)))) \\
=& R_X(t+a, t+\tau+a) - R_X(t+a, t+\tau) - R_X(t, t+\tau+a) + R_X(t, t+\tau) \\
=& R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a) + R_X(\tau) \\
=& 2R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a)
\end{aligned}$$

因此随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 是平稳过程。由于 $R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a)$ 我们可以写出自谱密度函数:

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) =& \mathcal{F}(R_Y(\tau)) = \mathcal{F}(2R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a)) \\
=& 2S_X(\omega) - e^{-j\omega a}S_X(\omega) - e^{j\omega a}S_X(\omega) \\
=& 2(1-\cos\omega a)S_X(\omega)
\end{aligned}$$

因此随机过程 $\{Y(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的谱密度为: $2(1-\cos\omega a)S_X(\omega)$.