随机过程及应用 Assignment-4

选课序号: 26
郭宇航
202021080728

Exercise 1 设$\{X(t), t \in T\}$ 是零均值的正态过程。尝试证明$\{X^2(t), t \in T\}$ 也是二阶矩过程。

Solution. 对于任意的$t \in T$, 假设$X(t) \sim N(0, D(t))$，对这个随机变量进行标准化处理可以得到:

$$\frac{X(t)}{\sqrt{D(t)}} \sim N(0,1)$$

而标准正态分布$X(t)/\sqrt{D(t)}$ 的平方的分布服从参数为1 的卡方分布，即:

$$\frac{X^2(t)}{D(t)} \sim \chi^2(1)$$

从而根据卡方分布的特征可以知道这个随机变量的均值为1, 方差为2.

$$D(\frac{X^2(t)}{D(t)}) = E(\frac{X^4(t)}{D^2(t)}) - E^2(\frac{X^2(t)}{D(t)}) = 2$$

则: $E(X^4(t)/D^2(t)) = 3$. 进而$E(X^4(t)) = 3D^2(t) < +\infty$. 根据二阶矩随机过程的定义$\{X(t), t \in T\}$, 对于任意的$t \in T$ 都有$E(|X_t|^2) < +\infty$. 所以$\{X^2(t), t \in T\}$ 是一个二阶矩过程。

Exercise 2 设随机过程$\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的均值为零，协方差函数为:

$$C(s,t) = e^{-\alpha|t-s|}$$

其中常数为$\alpha > 0$. 讨论随机过程$\{X(t), t \in \mathcal{R}\}$ 的均方连续性，均方可积性和均方可导性。

Solution. 根据洛易夫收敛准则，我们可以知道该随机过程的均方连续性可以根据其自相关函数的性质确定，由于该随机过程的自相关函数为$R_X(s,t) = e^{-\alpha|t-s|}$，是连续的从而该随机过程是均方连续且均方可积的。

下面讨论其均方可导性，首先写出其广义二阶导数:

$$\lim_{\delta s \to 0, \delta t \to 0} \frac{R_X(t+\delta s, t+\delta t) - R_X(t+\delta s, t) - R_X(t, t+\delta t) + R_X(t,t)}{\delta s \delta t}$$
$$= \lim_{\delta s \to 0, \delta t \to 0} \frac{e^{-\alpha|\delta s - \delta t|} - e^{-\alpha|\delta s|} - e^{-\alpha|\delta t|} + 1}{\delta s \delta t}$$

当$\delta s = \delta t$ 时: $\lim_{\delta t \to 0} \frac{2-2e^{-\alpha \delta t}}{\delta t^2} = +\infty$

从而我们不难发现$\{X(t), -\infty < t + \infty\}$ 均方不可导。

Exercise 3 设$\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为σ^2 的维纳过程。

$$X(t) = \frac{1}{t}\int_0^t W(u)\mathrm{d}u$$

求随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数和协方差函数。

Solution. 根据题意可以知道：

$$E(X(t)) = \frac{1}{t}E(\int_0^t W(u)\mathrm{d}u) = \frac{1}{t}\int_0^t E(W(u))\mathrm{d}u = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= E(X(s)X(t)) \\ &= \frac{1}{st}E(\int_0^s\int_0^t R_W(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v) \\ &= \frac{1}{st}\sigma^2\min\{u,v\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \begin{cases} \frac{1}{st}\frac{\sigma^2 s^2}{6}(3t-s), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{1}{st}\frac{^2t^2}{6}(3s-t), & 0 \leq t \leq s \end{cases} \end{aligned}$$

由于$R_X(s,t) = C_X(s,t) + m_X(s)m_X(t) = C_X(s,t)$，因此协方差函数即为上式。

Exercise 4 设$N(t), t \geq 0$ 是参数为λ 的泊松过程

$$X(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(u)\mathrm{d}u$$

求随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数和协方差函数。

Solution. 类似上一题的思路根据题意我们可以得到：

$$E(X(t)) = \frac{1}{t}E(\int_0^t N(u)\mathrm{d}u) = \frac{1}{t}\int_0^s E(N(u))\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda u\mathrm{d}u = \frac{t\lambda}{2}$$

自相关函数表示为：

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t R_N(s,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{st}\left(\int_0^s\int_0^t \lambda\min\{u,v\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^s\int_0^t \lambda^2 uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda s(3t-s)}{6t} + \frac{\lambda^2 st}{4}, & 0 < s \leq t \\ \frac{\lambda t(3s-t)}{6s} + \frac{\lambda^2 st}{4}, & 0 < t \leq s \end{cases} \end{aligned}$$

根据$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$ 我们最终可以得到协方差函数为：

$$C_X(s,t) = \begin{cases} \frac{\lambda s(3t-s)}{6t}, & 0 < s \leq t \\ \frac{\lambda t(3s-t)}{6s}, & 0 < t \leq s \end{cases}$$

Exercise 5 设$\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为σ^2 的维纳过程。

$$Y(t) = \frac{1}{L}\int_t^{t+L} W(u)\mathrm{d}u$$

其中常数$L > 0$. 求随机过程$\{Y(t), t \geq 0\}$ 的均值函数和协方差函数。

Solution. 首先不难写出该随机过程$\{Y(t), t \geq 0\}$ 的均值函数表示为:

$$m_Y(t) = \frac{1}{L}\int_L^{t+L} E(W(u))\mathrm{d}u = 0$$

下面考虑其协方差函数:

$$C_Y(s,t) = R_Y(s,t) - 0 = \frac{1}{L^2}\int_s^{s+L}\left(\int_t^{t+L}\sigma^2\min\{u,v\}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v$$

当$t \leq s + L$ 时:

$$C_Y(s,t) = \frac{1}{L^2}\int_s^{s+L}\left(\int_t^{t+L}\sigma^2 v\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \frac{\sigma^2}{2}(2s+L)$$

当$s \leq t \leq s + L$ 时:

$$C_Y(s,t) = \frac{1}{L^2}\int_s^{s+L}\left(\int_t^{t+L}\sigma^2 v\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v + \frac{1}{L^2}\int_t^{s+L}\left(\int_u^{s+L}\sigma^2(u-v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \frac{\sigma^2}{2}(2s+L) + \frac{\sigma^2}{6L^2}(s+L-t)^3$$

同理还可以得到当$t \leq s \leq t + L$ 以及$s \geq t + L$ 的值:

$$C_Y(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}(2t+L) + \frac{\sigma^2}{6L^2}(t+L-s)^3$$
$$C_Y(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}(2t+L)$$

综上所述可以得到随机过程$Y(t)$ 的协方差函数为:

$$C_Y(s,t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}(2s+L) & t \geq s+L \\ \frac{\sigma^2}{2}(2s+L) + \frac{2}{6L^2}(s+L-t)^3 & s \leq t \leq s+L \\ \frac{\sigma^2}{2}(2t+L) + \frac{\sigma^2}{6L^2}(t+L-s)^3 & t \leq s \leq t+L \\ \frac{\sigma^2}{2}(2t+L) & s \geq t+L \end{cases}$$

Exercise 6 设$\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为$\sigma^2 = 1$ 的维纳过程，令:

$$X(t) = \int_0^t W(u)\mathrm{d}u$$

求随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的 (1) 一维概率密度函数和特征函数；(2) 二维概率密度函数和特征函数。

Solution. 由于维纳过程是正态过程同时正态过程的积分过程仍然是正态过程从而$\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个正态过程。

$$E(X(t)) = \int_0^t E(W(u))\mathrm{d}u = 0$$

$$D_X(t) = C_X(t,t) = \frac{t^3}{3}$$

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= \int_0^s \int_0^t C_W(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^s \int_0^t \min\{u,v\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \begin{cases} \frac{s^2}{6}(3t-s), & 0 \le s \le t \\ \frac{t^2}{6}(3s-t), & 0 \le t \le s \end{cases} \end{aligned}$$

从而$\{X(t), t \ge 0\}$ 的一维概率密度为:

$$f_X(t,x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi t}t} \exp\{-\frac{3x^2}{2t^3}\}, \quad 0 < t < +\infty, x \in \mathcal{R}$$

$\{X(t), t \ge 0\}$ 的二维概率密度函数为:

$$f_X(x,y;s,t) = \frac{3}{2\pi st\sqrt{st(1-\rho^2)}} \exp\{-\frac{3}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{s^3} - \frac{2\rho xy}{st\sqrt{st}} + \frac{y^2}{t^3}\right]\}, 0 < t < +\infty$$

其中$\rho = 3C_X(s,t)/st\sqrt{st}$. 一维特征函数为:

$$\varphi_X(t,i) \exp\{-\frac{t^3 i^2}{6}\}, 0 \le t \le +\infty$$

二维特征函数为:

$$\varphi_X(s,t;i,j) = \exp\{-\frac{1}{2}\left[\frac{3i^2}{s^3} + 2ijC_X(s,t) + \frac{3j^2}{t^3}\right]\}, 0 < t < +\infty$$

Exercise 7 设电容器上的电荷在随机时间N 以前是随参数为p 的二项过程增加。在N 以后电容器上的电荷保持常数。其中N 是服从参数为λ 的泊松随机变量，且与二项过程统计独立，如果X_n 是电容器在时刻n 的电荷。试证明当$n \to \infty$ 时X_n 均方收敛于X.

Solution. 假设$n \ge t$ 那么根据全概率公式:

$$\begin{aligned} E(|X_n - X_t|^2) &= E(E((X_n - X_t)^2|N)) \\ &= P\{N \le m\} \cdot E((X_N - X_t)^2|N=k) + \sum_{k=t+1}^{\infty} P\{N=k\} \cdot E((X_n - X_t)^2|N=k) \\ &= \sum_{k=t+1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(k-t)p(1+(k-t-1)p) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}(n-t)p(1+(n-t-1)p) \\ &\le e^{-\lambda}\lambda^2 p \sum_{k=t+1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2 p \sum_{k=t-1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

而我们又能够知道:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda}\lambda^2 p \sum_{k=t+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 0$$

进而可以得到$E(|X_n - X_t|^2)$ 的二重极限存在且为 0，因此$\{X_n, n \ge 1\}$ 这个随机变量是均方收敛到X 的。