# Assigment 3 for Combinational Mathmatics

Guo Yuhang
202021080728

2020.9.28

## Exercise 3

3. 在边长为 1 的正三角形中任选 5 个点，证明存在两点，其距离不超过 1/2.

**Solution:** 将这个边长为 1 的正三角形取三条边的中点并进行连接。我们会发现构成了四个边长为 1/2 的小正三角形。将四个小正三角形看作盒子，问题转化为任取 5 个点放入这 4 个盒子中。根据鸽笼原理可知必定有 2 个点在同一个盒子中，也就是说任选的两个点一定在同一个小正三角形中，而在这个小正三角形中，两点最远距离为 1/2. 因此结论得证。

5. 在图 5-9 中，每个方格着红色或蓝色，证明至少存在两列有相同的着色。

**Solution:** 考虑任意一列的方格的着色可能的情况：红色 + 红色；红色 + 蓝色；蓝色 + 红色；蓝色 + 蓝色。将这 4 中着色方案看作 4 个盒子，将 5 列格子放入这 4 个盒子。根据鸽笼原理可知，至少有两列放在了同一个盒子中，也就是说至少有两列有相同的着色方案。因此结论得证。

6. 任给 5 个整数，则必定能从中选出 3 个使得他们的和能够被 3 整除。

**Solution:** 考虑任何一个整数除以 3 之后的余数可能为 $0, 1, 2$. 首先考虑第一种情况：如果这 5 个数中存在 3 个及以上的数除以 3 的余数相同，则显然可以找到其中的 3 个数使得他们的和能够被 3 整除；另外一种情况，假设这 5 个数中最多只有 2 个及以下的数除以 3 的余数相同，在这种情况下存在的可能性有：$00112, 00122, 01122$ 这三种情况，不难发现这三种情况下我们均可以找到 3 个数使得他们的和能够被 3 整除。综上两种情况，结论成立。

7. 一个学生打算使用 37 天共计 60 学时自学一本书，他计划每天至少

自学 1 个小时。证明无论他怎样安排自学时间表，必然存在相继的若干天在这些天中其自学的总时数恰好为 13 学时（假设每天自学的学时数为整数）。
**Solution:** 设 $a_i$ 表示该学生前 $i$ 天学习的总时数，其中 $i = 1, 2, \cdots, 37$. 于是 $a_1, a_2, \cdots, a_{37}$ 是一个严格递增的序列且我们可以知道：$a_1 \geq 1, a_37 \leq 60$. 于是我们可以知道：$a_1 + 13, a_2 + 13, \cdots, a_{37} + 13$ 也是一个严格递增序列且 $a_37 \leq 73$. 于是我们知道:

$$a_1, a_2, \cdots, a_{37}, a_1 + 13, a_2 + 13, \cdots, a_{37} + 13$$

这 74 个数都在 1-73 之间，那么根据鸽笼原理可知一定存在两个数相等，假设 $a_k$ 和 $a_l + 13$ 相等，则我们可以得到：

$$a_k - a_l = 13$$

因此我们可以知道在第 $k$ 天到第 $l$ 天之间这个学生一共学习的总时数等于 13 学时。

8. 已知 $n$ 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，证明在这 $n$ 个数中总可以选出两个数使得这两个数的和或者差能够被 $n$ 整除。
**Solution:** 对于任意的 $a_i$，其 $a_i \% n \in [0, n-1]$. 考虑第一种情况，存在一个数 $a_i \% n = k$ 同时 $a_j \% n = k$. 则这两个数的差可以被 $n$ 整除，结论成立；下面考虑第二种情况，如果不存在一个数对 $n$ 取模为 $k$ 同时另一个数对 $n$ 取模为 $k$. 即所有的取模的结果都不相同，那么对于 $n$ 个数一定存在一个 $k$ 使得 $a_i \% n = k$ 同时 $a_j \% n = n - k$. 则在这种情况下，两个数之和可以被 $n$ 整除。综上所述，在 $n$ 个正整数种一定可以在这 $n$ 个数种找到两个数使得两个数的和或者差能够被 $n$ 整除。

9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列。证明：如果 $n$ 是奇数，则乘积 $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ 是一个偶数。
**Solution:** 当 $n$ 为奇数时，我们不难发现 $1, 2, \cdots, n$ 中共有 $\frac{n-1}{2}$ 个偶数同时 $\frac{n+1}{2}$ 个奇数。考虑 $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i)$，如果 $a_i$ 和 $i$ 的奇偶性相同则 $a_i - i$ 一定为偶数，反之为奇数。下面我们使用反证法证明，假设乘积 $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i)$ 时一个奇数，则被乘的每一项都应该是奇数。考虑奇偶数的搭配，对于 $a_i$ 存在 $\frac{n-1}{2}$ 个偶数，需要在 $i$ 中找出 $\frac{n-1}{2}$ 个奇数与之对应，反之也相同，则最终会多余两个奇数，这两个奇数差一定为偶数，从而 $\prod_{i=1}^{n}(a_i - i)$ 一定为偶数，与假设矛盾，因此结论得证。

10. 证明：在任意 52 个整数中，必存在两个数，其和或差能被 100 整除。
**Solution:** 考虑任意的整数除以 100 的余数可以为 $0, 1, 2, \cdots, 99$. 考虑第一种情况，存在一个数 $a_i$ 对 100 取模的结果为 $k$ 同时 $a_j$ 对于 100 取模的

结果为 $100-k$. 那么这种情况下 $a_i+a_j$ 的结果一定能够被 100 整除。另一种情况下考虑如果不存在这样的组合结果存在 $\{1,99\},\cdots,\{49,51\}$ 共有 49 种，那么一共就存在 $49+1+1$ 种可能的余数结果，而共有 52 个整数存在，利用鸽笼原理我们会发现一定会有两个整数属于同一类，也就是说必定存在两个数 $a_i,a_j$ 的余数相等（两数之差可以被 100 整除）；或者这两个数的余数求和等于 100，从而两数之和能够被 100 整除。综上所述，在这任意的 52 个整数中必定存在两个数其和或者差能够被 100 整除。

11. 证明 $R(4,4)\leq 18$.

**Solution:** 根据 Ramsey 定理，当 $a,b\geq 2$ 时，$R(a,b)$ 是一个有限数且有 $R(a,b)\leq R(a-1,b)+R(a,b-1)$. 那么我们可以得到 $R(4,4)\leq R(3,4)+R(4,3)$. 而根据准确计算我们可以知道 $R(3,4)=R(4,3)=9$. 因此 $R(4,4)\leq 18$.

12. 证明:$R(a_1,a_2,\cdots,a_m)\leq R(a_1-1,a_2,\cdots,a_m)+R(a_1,a_2-1,a_3,\cdots,a_m)+\cdots+R(a_1,a_2,\cdots,a_m-1)$.

**Solution:** 设 $R_i=R(a_1,a_2,\cdots,a_i-1,\cdots,a_n),i=1,2,\cdots,n$, 我们记 $N=\sum_{i=1}^{n}R_i$. 考虑 $N$ 个顶点的完全图，使用 $n$ 中颜色 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对完全图的边进行染色。在 $N$ 个点中任取一点 $P$, 由 $P$ 连出 $N-1$ 条边。则有：

$$\begin{aligned}N-1&=R_1+R_2+\cdots+R_n-1\\&\geq R_1+R_2+\cdots+R_n-(n-1)\\&=R_1+R_2+\cdots+R_n-n+1\end{aligned}$$

现在存在 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 个盒子，根据鸽笼原理我们可以知道至少存在一个 $i(1\leq i\leq n)$ 使得这 $N-1$ 条边中染成 $c_i$ 颜色的边数至少是 $R_i$ 条。考虑其中染成 $c_i$ 颜色的 $R_i$ 条边，这 $R_i$ 条边连接到另外的 $R_i$ 个顶点，而 $R_i=R(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_i-1,\cdots,a_n)$, 因此这 $R_i$ 个顶点之间的连线要么有 $c_1$ 个纯 $a_1$ 角形；或者有 $c_2$ 个纯 $a_2$ 角形……或者有 $c_i$ 个纯 $a_i-1$ 角形（而我们知道点 $P$ 是和这 $a_i-1$ 个顶点所连的边都是 $c_i$ 颜色的，从而这 $a_i$ 个顶点组成了一个纯 $a_i$ 角形，也就是说存在一个 $c_i$ 颜色的纯 $a_i$ 角形）……或者存在 $c_n$ 个纯 $a_n$ 角形. 而 $R(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 是保证出现上述情况之一的最小正整数，从而有：

$$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leq R(a_1-1,a_2,\cdots,a_n)+R(a_1,a_2-1,\cdots,a_n)+\cdots+R(a_1,a_2,\cdots,a_n-1)$$

综上所述，原命题成立。