随机过程及应用 Assignment-2

选课序号: 26
郭宇航
202021080728

Exercise 1 设随机过程$X_t = A\cos t, t\in\mathcal{R}$，其中$A$ 是随机变量，其分布律为：

$$P\{A=i\}=\frac{1}{3}, i=1,2,3$$

试求：

- 一维分布函数$F_{\frac{\pi}{4}}(x), F_{\frac{\pi}{2}}(x)$.
- 二维分布函数$F_{0,\frac{\pi}{3}}(x,y)$.
- 均值函数$m_X(t)$.
- 协方差函数$C_X(s,t)$.

Solution.

- 两个一维分布函数分别为：

$$F_{\frac{\pi}{4}}(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3} & \sqrt{2}\le x<\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 1 & \frac{3\sqrt{2}}{2}\le x\end{cases}$$

$$F_{\frac{\pi}{2}}(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

- 二维随机变量$(X_0, X_{\frac{\pi}{3}})$ 的联合分布律为：因此对于这个二维随机变量来说我们可以写出其分布函

$(X_0, X_{\frac{\pi}{3}})$	$(1,1/2)$	$(2,1)$	$(3,3/2)$
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

数为：

$$F_{(0,\frac{\pi}{3})}(x,y)=P\{X_0\le x, X_{\frac{\pi}{3}}\le y\}=\begin{cases}0 & x<1 \text{ or } y<1/2\\ 1/3 & x\in[1,2), y\ge 1/2 \text{ or } x\ge 1, y\in[1/2,1)\\ 2/3 & x\in[2,3), y\ge 1 \text{ or } x\ge 2, y\in[1,3/2)\\ 1 & x\ge 3, y\ge 3/2\end{cases}$$

- 此随机过程的均值函数可以表示为：

$$m(t) = E(X_t) = \sum_{i=1}^{3} P\{X_t = i\cos t\} i\cos t = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos t + \cos t = 2\cos t$$

- 协方差函数根据公式表示为：

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= Cov(X_s, X_t) = E[(X_t - m(s))(X_t - m(t))] \\ &= R_X(s,t) - m(s)m(t) \\ &= E_X(X_s X_t) - m(s)m(t) \\ &= \frac{14}{3}\cos s\cos t - 4\cos s\cos t \\ &= \frac{2}{3}\cos s\cos t \end{aligned}$$

协方差函数表示为：$C_X(s,t) = 2/3\cos s\cos t$

Exercise 2 考虑正弦波过程$\{X_t = \xi\cos\omega t, t \geq 0\}$, 其中$\omega$ 为正常数，$xi \sim U(0,1)$.

- 分别求$t = \frac{\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$ 时X_t 的概率密度$f_t(x)$;
- 求均值函数$m_X(t)$，方差函数$D(t)$，相关函数$R(s,t)$，协方差函数$C(s,t)$.

Solution. 问题（1）:
当$t = \frac{\pi}{4\omega}$ 时，X_t 的概率密度函数为：

$$f_{\frac{\pi}{4\omega}}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 & otherewise \end{cases}$$

当$t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时，X_t 的概率密度函数为：

$$P\{X_{\frac{\pi}{2\omega}} = 0\} = 1$$

当$t = \frac{3\pi}{4\omega}$ 时，X_t 的概率密度函数为：

$$f_{\frac{3\pi}{4\omega}}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ 0 & otherewise \end{cases}$$

当$t = \frac{\pi}{\omega}$ 时，X_t 的概率密度函数为：

$$f_{\frac{\pi}{\omega}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1, 0) \\ 0 & otherewise \end{cases}$$

问题（2）:
均值函数为：

$$m_X(t) = E(X_t) = \cos\omega t E(\xi) = \frac{1}{2}\cos\omega t$$

方差函数为：

$$D_X(t) = E(X_t - m_X(t)) = \cos^2 \omega t[E(\xi^2) - \frac{1}{4}] = \frac{1}{12}\cos^2 \omega t$$

相关函数为：

$$R_X(s,t) = E(X(s)X(t)) = \frac{1}{3}\cos \omega s \cos \omega t$$

协方差函数为：

$$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m(s)m(t) = \frac{1}{3}\cos \omega s \cos \omega t - \frac{1}{4}\cos \omega s \cos \omega t = \frac{1}{12}\cos \omega s \cos \omega t$$

Exercise 3 假设随机过程$X_t = e^{-\xi t}, t > 0$, 其中随机变量$\xi \sim U(0,1)$，求该过程的均值函数$m_X(t)$，相关函数$R_X(s,t)$ 以及一维概率密度函数。

Solution. 均值函数表示为：

$$m_X(t) = E(e^{-\xi t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}F(x) = \int_0^1 e^{-xt}\mathrm{d}x = \frac{1}{t}(1-e^{-t})$$

相关函数为：

$$R_X(s,t) = E(X(s)X(t)) = E(e^{-\xi(s+t)}) = \frac{1}{s+t}(1-e^{-(s+t)}), \quad s,t > 0$$

一维概率密度函数写为：

$$f(t,x) = f(\left(-\frac{1}{t}\ln x\right)) \cdot \left|\frac{1}{tx}\right| = \frac{1}{tx} \quad x \in (e^{-t}, 1)$$

Exercise 4 设$\{X_n, n = 1,2,\cdots,\}$，试求：

(a) Y_2 的分布律（概率分布）

(b) Y_n 的均值函数$E(Y_n)$

(c) 计算相关函数$R_Y(m,n)$

Solution. 问题（1）Y_2 的分布律为：

Y_2	-2	0	2
p	$1/4$	$1/2$	$1/4$

问题（2）Y_n 的均值函数为：

$$E(Y_n) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$$

问题（3）相关函数$R_Y(m,n)$ 为：当$m \le n$ 时，我们可以写为：

$$R_Y(m,n) = E(Y(m)Y(n)) = E(Y(m)(Y(m) + \sum_{i=m+1}^{n} X_i)) = D(Y(m)) + E(Y(m))\sum_{i=m+1}^{n} X_i = m$$

当$n \le m$ 时，同理可以得到：$R_Y(m,n) = n$.
因此综上所述我们可以将相关函数$R_Y(m,n)$ 写为：$\min\{m,n\}$.

Exercise 5 考虑随机游动$Y_0 = 0, Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n = 1, 2, \cdots,$，其中$\{X_k, k = 1, 2, \cdots\}$ 为相互独立同服从正态分布$N(0, \sigma^2)$，试求：

(a) Y_n 的概率密度；

(b) (Y_n, Y_m) 的联合概率密度函数$(m > n)$.

Solution. 问题（1）Y_n 的概率密度函数：根据正态分布的可加性：$Y_n \sim N(0, n\sigma^2)$ 因此概率密度函数可以写为：

$$f_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} \cdot \sigma} e^{-\frac{y^2}{2\pi\sigma^2}}, \quad y \in \mathcal{R}$$

问题（2）(Y_n, Y_m) 的联合概率密度函数，首先写出$(Y(n, Y(m)))$ 的二维特征函数为：

$$\begin{aligned}\varphi_{m,n}(t) &= E(e^{iu\sum_{k=1}^{m} X(k) + iv\sum_{p=1}^{n} X(p)}) \\ &= E(e^{i(u+v)\sum_{k=1}^{n} X(k) + iv\sum_{p=n+1}^{m} X(p)}) \\ &= e^{-\frac{n}{2}\sigma^2(u+v)^2} \cdot e^{-\frac{m-n}{2}\sigma^2 v^2} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}(nu^2 + 2nuv + mv^2)}\end{aligned}$$

根据反演公式和唯一性定理我们不难知道：$(Y(n), Y(m)) \sim N\left(0, n\sigma^2, 0, m\sigma^2; \sqrt{\frac{n}{m}}\right)$. 从而联合概率密度函数可以写为：

$$f(m, n; x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{mn} \cdot \sigma^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{m}}} e^{-\frac{1}{2(1-\frac{n}{m})}\left(\frac{x^2}{n\sigma^2} - \frac{2xy}{m\sigma^2} + \frac{y^2}{m\sigma^2}\right)}$$

Exercise 6 已知随机变量ξ 和η 相互独立，且都服从正态分布$N(0, \sigma^2)$，令$Z = \max_{0 \le t \le 1} X_t$，设 $(1) X_t = \xi t + \eta$; $(2) X_t = \xi \cos t$，分别就两种情形计算$E(Z)$.

Solution. 问题（1）由于$0 \le t \le 1$，因为需要根据ξ 的正负值确定Z 的分布情况：

$$Z = \max_{0 \le t \le 1}\{X_t\} = \begin{cases} \xi + \eta & \xi > 0 \\ \eta & \xi \le 0 \end{cases}$$

从而我们可以得到$E(Z)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}E(Z) &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{0}^{\infty} (x + y) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} (x + y) \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

问题（2）采用类似的方法，考虑Z 的分布情况：

$$Z = \max_{0 \le t \le 1} X_t = \begin{cases} \xi & \xi > 0 \\ \xi \cos 1 & \xi \le 0 \end{cases}$$

同样的可以写出$E(Z)$:

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{0} x\cos 1 f(x)\mathrm{d}x + \infty_0^i nftyxf(x)\mathrm{d}x \\
&= (1-\cos 1)\int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(1-\cos 1)
\end{aligned}
$$

Exercise 7 一个通信系统，每隔T 秒信号源输出一个宽为X 的矩阵脉冲，其中随机变量$X \sim U(0,T)$，并假定不同时间间隔脉冲的宽度的取值时相互独立的，将这类信号称为脉冲调制信号。假设$\{Y_t, t \geq 0\}$表示脉冲宽度调制信号在t 时刻的振度，他的一条样本函数如下图1所示，试给出Y_t 的一维分布。

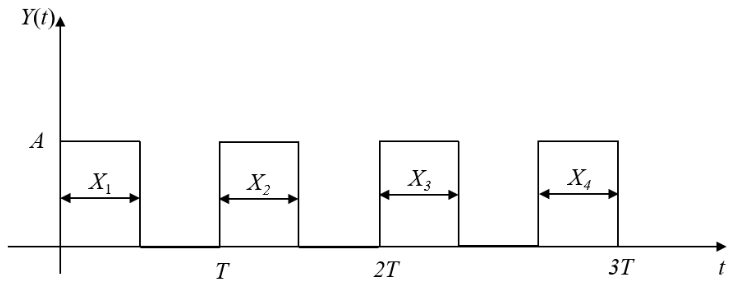

图 1: 脉冲调制信号的样本函数

Solution. 首先不难发现这个脉冲调制信号的样本函数具有周期性，因此我们在$t \in [0,T]$ 的范围内讨论$Y(t)$ 的一维概率分布：

$$
\begin{aligned}
P\{Y(t)=A\} &= P\{X_1 > t\} = \frac{T-t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T \\
P\{Y(t)=0\} &= \frac{t}{T}
\end{aligned}
$$

从而$Y(t)$ 的一维概率分布表示为：

$$
\begin{aligned}
P\{Y(t)=A\} &= \frac{T-t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T \\
P\{Y(t)=0\} &= 1 - P\{Y(t)=A\} = \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T
\end{aligned}
$$