

Assignment 2 for Combinational Mathematics

Guo Yuhang

202021080728

2020.9.24

Exercise 2

1. 求从 $1 - 10000$ 的整数中, 不能够被 $3, 4, 5$ 中任意一个整除的整数的个数。

Solution: 定义全集为 S 表示从 1 到 10000 的所有整数的集合, 定义 p_1 表示满足整数能够被 3 整除这一性质; 定义 p_2 表示满足整数能够被 4 整除这一性质; 定义 p_3 表示满足整数能够被 5 整除这一性质。同时分别定义 A_1, A_2, A_3 表示满足性质 p_1, p_2, p_3 的所有整数的集合。那么根据容斥原理, 在 $1 - 10000$ 的所有整数中不能被 $3, 4, 5$ 中任意一个整除的整数总数可以表示为:

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= 10000 - (3333 + 2500 + 2000) + (833 + 666 + 500) - 166 \\ &= 4000 \end{aligned}$$

因此最终在 $1 - 10000$ 的整数中共有 4000 个整数不能够被 $3, 4, 5$ 中任意一个整除。

2. 求 $1 - 1000$ 中既非完全平方又非完全立方的整数的个数。

Solution: 定义全集 S 表示为从 1 到 1000 的所有整数的集合。定义 p_1 表示在 $1 - 1000$ 中满足是完全平方的整数; 定义 p_2 表示在 $1 - 1000$ 中满足是完全立方的整数。同时定义 A_1, A_2 为分别满足 p_1, p_2 性质的整数的集合。根据容斥原理我们可以知道, 在 $1 - 1000$ 中既非完全平方数又非完全立方数

的整数个数可以表示为:

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| &= |S| - (|A_1| + |A_2|) + (|A_1| \cap |A_2|) \\ &= 1000 - (31 + 10) + 3 \\ &= 962 \end{aligned}$$

因此最终在 $1 - 1000$ 中的整数既非完全平方又非完全立方的整数的个数为 962 个。

3. 某校学生共有 120 名参加了数学竞赛, 竞赛试题共有甲乙丙三题。竞赛的结果是 12 名同学 3 题全对; 20 名同学只做对了甲乙两题; 16 名同学做对了甲丙两题; 28 名同学做对了乙丙两题; 48 名同学做对了甲题; 56 名同学做对了乙题; 16 名同学三题都做错了, 试求出做对了丙题的学生人数。

Solution: 假设 p_1 表示只做对甲题这一性质; p_2 表示只做对乙题这一性质; p_3 表示只做对丙题这一性质。分别使用集合 A_1, A_2, A_3 表示这三种性质对应的学生集合。

根据题中已给数据和容斥原理我们可以写出:

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ 16 &= 120 - (48 + 56 + |A_3|) + (20 + 12 + 16 + 28) - 12 \end{aligned}$$

解出方程我们可以得到 $|A_3| = 64$. 因此做对了丙题的学生人数为 64 人。

4. 在有 10 个字母 $a, a, b, b, c, c, d, d, e, e$ 的全排列中, 求相同字母不相邻的排列个数。

Solution: 定义全集 S 为这 10 个字母全排列组成的集合, 定义 p_1 表示字母 a 在排列中一定相邻的情况; 定义 p_2 表示字母 b 在排列中一定相邻的情况; 定义 p_3 表示字母 c 在排列中一定相邻的情况; 定义 p_4 表示字母 d 在排列中一定相邻的情况; 定义 p_5 表示字母 e 在排列中一定相邻的情况。那么根据容斥原理我们可以知道所有相同字母不相邻的排列数可以表示为:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5|.$$

对于 $|A_i|$, 我们可以将相同字母绑定后进行排列, 可以看作 9 个字母的重集

的全排列 $9!/2!2!2!2!1!$. 对于 $|A_i \cap A_j|$ 可以看成两组字母绑定后的全排列

$$\begin{aligned}
 & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5| \\
 &= |S| - \sum_{i=1}^5 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^5 |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\
 &= \frac{10!}{2!2!2!2!2!} - \binom{5}{1} \frac{9!}{2!2!2!2!1!} + \binom{5}{2} \frac{8!}{2!2!2!1!1!} \\
 &\quad - \binom{5}{3} \frac{7!}{2!2!1!1!1!} + \binom{5}{4} \frac{6!}{2!1!1!1!1!} - \binom{5}{5} \frac{5!}{1!1!1!1!1!} \\
 &= 113400 - 5 \times 22680 + 10 \times 5040 - 10 \times 1260 + 5 \times 360 - 120 \\
 &= 39480
 \end{aligned}$$

因此我们可以知道在这 10 个字母中相同字母不相邻的排列个数为 39480 个。

7. 在由 26 个字母 a, b, c, \dots, z 组成的全排列中, 求不包含字符串 *john*, *paul*, *smite* 的全排列个数。

Solution: 假设全集 S 表示的是由这 26 个字母组成的所有全排列情况, 同时设 p_1 表示包含字符串 *john* 这一性质的字符串; 设 p_2 表示的是包含字符串 *paul* 这一性质的字符串; 设 p_3 表示的是包含字符串 *smite* 这一性质的字符串。同时分别定义 A_1, A_2, A_3 表示满足 p_1, p_2, p_3 三个性质的字符串的集合。根据容斥原理我们可以将不包含 *john, paul, smite* 这三个字符串的字符串的集合可以写为: $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$ 。

计算过程如下:

$$\begin{aligned}
 & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\
 &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
 &= 26! - 23! - 23! - 22! + 20! + 19! + 19! - 16! \\
 &= 26! - 2 \times 23! - 22! + 20! + 2 \times 19! - 16!
 \end{aligned}$$

8. 在所有的 n 位数中, 包含数字 3, 8, 9 但不包含 0, 4 的数有多少个。

Solution: 首先不包含 0, 4 我们可以直接将 0, 4 排除在外, 也就是说 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 这 8 个数进行排列。首先假设全集 S 表示由这 8 个数组成的排列情况, 设 p_1 表示组成的数字中包含 3 的情况; p_2 表示组成的数字中包含 8 的情况; p_3 表示组成的数字中包含 9 的情况。对应的集合分别为 A_1, A_2, A_3 。根据容斥原理我们可以知道:

$$\begin{aligned}
 & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\
 &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
 &= 8^n - 3 \times 7^n + 3 \times 6^n - 5^n
 \end{aligned}$$

因此满足条件的数一共有 $8^n - 3 \times 7^n + 3 \times 6^n - 5^n$ 个。

9. 一个体育团体共 25 人，其中 14 人会踢足球，12 人会打乒乓球，6 人既会打乒乓球又会踢足球，5 人既会打篮球又会踢足球，还有 2 对这三种球都会打，而 6 个会打篮球的人都会打另外一种球（这三种球的一种）。求不会打球的人数。

Solution: 定义全集 S 表示的是整个体育团体中的所有人，定义 p_1 表示会踢足球的人， p_2 表示会打乒乓球的人， p_3 表示会打篮球的人。 A_1, A_2, A_3 分别对应具有这三种性质的人的集合。那么三种球都不会的人的集合可以表示为： $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ 。根据鸽笼原理我们可以写出下面的表达式：

$$\begin{aligned} & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\ &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= 25 - (14 + 12 + 6) + (6 + 5 + 6) - 2 \\ &= 25 - 32 + 17 - 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

因此在这个体育团体中存在 8 个人这三种球都不会打。

10. 求重集 $B = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 。

Solution: 重新定义一个重集 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$ 。定义 p_1 表示排列中至少包含 4 个 a ，定义 p_2 表示排列中至少包含 5 个 b ，定义 p_3 表示排列中至少包含 6 个 c 。同时分别定义满足这三种性质的排列的集合为 A_1, A_2, A_3 。那么原重集的 10-组合数可以表示为： $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ 。根据容斥原理我们可以进行求解：

$$\begin{aligned} & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\ &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= F(3, 10) - (F(3, 6) + F(3, 5) + F(3, 4)) + (F(3, 1) + F(3, 0) + 0) - 0 \\ &= 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

因此重集 $B = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10-组合数为 6。

11. 求重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10-组合数。

Solution: 重新定义一个重集 $B' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$ 。设由重集 B' 构成的 10-组合数为 S 。定义 p_1 表示排列至少包含 11 个 a ，同时 A_1 集合表示满足这一条件的所有排列情况组合的集合；定义 p_2 表示排列至少包含 4 个 b ，同时 A_2 集合表示满足这一条件的所有排列情况组合的集合；定义 p_3 表示排列至少包含 6 个 c ，同时 A_3 集合表示满足这一条件的所有排列情

况组合的集合；定义 p_4 表示排列至少包含 8 个 d，同时 A_4 集合表示满足这一条件的所有排列情况组合的集合。根据容斥原理我们可以写出：

$$\begin{aligned}
 & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| \\
 &= |S| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
 &= F(4, 10) - (0 + F(4, 6) + F(4, 4) + F(4, 2)) + F(4, 0) \\
 &= 286 - 84 - 35 - 10 + 1 \\
 &= 158
 \end{aligned}$$

因此重集 $B = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10-组合数为 158.

13. 求由数字 $1, 2, \dots, 8$ 所组成的全排列中偶数均不在其自然位置上的全排列的个数。

Solution: 根据题意，我们需要考虑的问题是 2, 4, 6, 8 不在原位的情况，其他的 4 个数随便排列。因此我们可以定义全集 S 为这 8 个数组成的全排列，同时假设 p_1 表示数字 2 排列在原位置的排列；假设 p_2 表示数字 4 排列在原位置的排列；假设 p_3 表示数字 6 排列在原位置的排列；假设 p_4 表示数字 8 排列在原位置的排列。分别假设对应的集合为 A_1 表示数字 2 在原位置的排列集合， A_2 表示数字 4 在原位置的排列集合， A_3 表示数字 6 在原位置的排列集合， A_4 表示数字 8 在原位置的排列集合。根据容斥原理可以写出：

$$\begin{aligned}
 & |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| \\
 &= |S| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
 &= 8! - \binom{4}{1} 7! + \binom{4}{2} 6! - \binom{4}{3} 5! + \binom{4}{4} 4! \\
 &= 24024
 \end{aligned}$$

因此由数字 $1, 2, \dots, 8$ 所组成的全排列中偶数均不在其自然位置上的全排列的个数为 24024.

14. 求由数字 $1, 2, \dots, 8$ 所组成的全排列中，恰好有 4 个数字在其自然位置上的全排列个数。

Solution: 根据错排的公式我们可以直接写出结果：

$$\begin{aligned}
 D_4 \binom{8}{4} &= 4! \binom{8}{4} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] \\
 &= \frac{8!}{4!} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right] \\
 &= 630
 \end{aligned}$$

因此由数字 $1, 2, \dots, 8$ 所组成的全排列中, 恰好有 4 个数字在其自然位置上的全排列的个数为 630 个。

16. 证明: D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数。

Solution: 当 $n = 1$ 时, $D_n = 0$; 当 n 为大于 1 的奇数的情况下, 我们设 $n = 2k - 1$, 其中 $k = 2, 3, \dots$. 则 $D_n = D_{2k-1}$. 根据推论 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. 将 $n = 2k - 1$ 代入其中, 我们可以得到: $D_{2k-1} = 2(k-1)(D_{2k-2} + D_{2k-3})$. 其中 k 取从 2 开始的一系列正整数。从而我们不难发现无论 $(k-1)(D_{2k-2} + D_{2k-3})$ 取任意的整数值得到的 D_{2k-1} 表示的一定是一个偶数。

20. 有张、王、刘、李 4 位教师和数学, 物理, 化学, 英语 4 门课程。已知张和李都不能教数学和英语, 王不能教化学, 刘不能教物理和化学。若要为每人安排一门他能教的课程, 且一门课程只能被一个人教, 试问有多少种不同的安排方案?

Solution: 在考虑这种存在一般限制的排列问题时, 我们可以使用棋盘多项式的方式来进行求解。使用棋盘多项式求解的顺序为: (1) 画出带有一般限制的棋盘; (2) 求解 $R(C_n)$; (3) 利用 n 元有禁位的排列数公式进行求解: $n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n$ 求解结果。下面我们先画出棋盘:

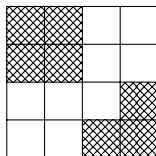


图 1: 有禁位棋盘结构

根据棋盘我们将棋盘分解为两个独立的棋盘 C_1, C_2 . 因此我们得到的棋盘多项式可以写为:

$$\begin{aligned} R(C) &= R(C_1)R(C_2) \\ &= (1 + 4x + 2x^2)(1 + 3x + x^2) \\ &= 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4 \end{aligned}$$

带入 n 元有禁位的排列数公式进行求解: $n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n$ 可以计算结果:

$$N = 4! - 7 \times 3! + 15 \times 2! - 10 \times 1! + 2 = 4$$

因此共有 4 种不用的排课方案。