Assignment 1 for Finite Automata Theory

郭宇航
202021080728

Exercise 1

2.1 设 $L = \{0^n 1^m | n, m \geq 1\}$，试构造满足要求的文法 G.

(1) G 是 RG.

(2) G 是 CFG 但不是 RG.

(3) G 是 CSG 但不是 CFG.

(4) G 是短语结构文法但不是 CSG.

Solution:

(1) 构造 RG 文法：

$$
\begin{aligned}
&S \to 0A \\
&A \to 1|0A|0B \\
&B \to 1|1B
\end{aligned}
$$

(2) 构造 CFG 文法但非 RG 文法：

$$
\begin{aligned}
&S \to AB \\
&A \to 0|0A \\
&B \to 1|1B
\end{aligned}
$$

(3) 构造 CSG 文法但非 CFG 文法：

$$
\begin{aligned}
&S \to 0A \\
&0A \to 01|00A \\
&A \to 1|1A
\end{aligned}
$$

(4) 构造短语结构文法但不是 CSG:

$$
\begin{aligned}
&S \to ABC \\
&A \to 0|0A \\
&B \to 0|B \\
&C \to \epsilon
\end{aligned}
$$

2.2 设 $\Sigma = \{0, 1\}$, 请给出 Σ 上的下列语言的文法。

(1) 所有以 0 开头的串。

(2) 所有以 0 开头 1 结尾的串。

(3) 所有以 11 开头以 11 结尾的串。

(4) 所有 0 和 1 一样多的串。

(5) 所有 0 比 1 多的串。

(6) 所有长度为偶数的串。

(7) 所有包含子串 01011 的串。

(8) 所有包含 3 个连续 0 的串。

Solution:

(1) 所有以 0 开头的串。

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 0A|0 \\
A &\rightarrow 0A|1A|0|1
\end{aligned}
$$

(2) 所有以 0 开头 1 结尾的串。

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 0A \\
A &\rightarrow 0A|1A|1
\end{aligned}
$$

(3) 所有以 11 开头 11 结尾的串。

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 11|111|11A \\
A &\rightarrow 0A|1A|11
\end{aligned}
$$

(4) 所有 0 和 1 一样多的串。

$$S \rightarrow S0S1S|S1S0S|\epsilon$$

(5) 所有 0 比 1 多的串。

$$S \rightarrow 0S1|01S|1S0|10S|SS|0$$

(6) 所有长度为偶数的串。

$$S \rightarrow 00S|01S|10S|11S|\epsilon$$

(7) 所有包含子串 01011 的串。

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 01011|A01011B \\
A &\rightarrow 0A|1A|\epsilon \\
B &\rightarrow 0B|1B|\epsilon
\end{aligned}
$$

(8) 所有包含 3 个连续的 0 的串。

$$S \to 000|A000B$$
$$A \to 0A|1A|\epsilon$$
$$B \to 0B|1B|\epsilon$$

2.3 设 $\Sigma = \{a, b, c\}$，构造下列语言的文法。

(1) $\{a^n b^n | n \geq 0\}$

(2) $\{a^n b^m | n, m \geq 1\}$

(3) $\{a^n b^n a^n | n \geq 1\}$

(4) $\{a^n b^m a^k | n, m, k \geq 1\}$

(5) $\{a\omega a | a \in \Sigma, \omega \in \Sigma^+\}$

(6) $\{x\omega x^T | x, \omega \in \Sigma^+\}$

(7) $\{x | x = x^T, x \in \Sigma^+\}$

(8) $\{x x^T \omega | x, \omega \in \Sigma^+\}$

Solution:

(1) $\{a^n b^n | n \geq 0\}$

$$S \to aSb|\epsilon$$

(2) $\{a^n b^m | n, m \geq 1\}$

$$S \to AB$$
$$A \to aA|a$$
$$B \to bB|b$$

(3) $\{a^n b^n a^n | n \geq 1\}$

$$S \to aba|aSBa$$
$$aB \to Ba$$
$$bB \to bb$$

(4) $\{a^n b^m a^k | n, m, k \geq 1\}$

$$S \to aS|aB$$
$$B \to bA|bB$$
$$A \to a|aA$$

(5) $\{a\omega a | a \in \Sigma, \omega \in \Sigma^+\}$

$$S \to aAa$$
$$A \to aA|bA|cA|a|b|c$$

(6) $\{x\omega x^T | x, \omega \in \Sigma^+\}$

$$S \to aAa|bAb|cAc$$
$$A \to aA|bA|cA|a|b|c$$

(7) $\{x | x = x^T, x \in \Sigma^+\}$

$$S \to aSa|bSb|cSc|a|b|c|aa|bb|cc$$

(8) $\{xx^T\omega | x, \omega \in \Sigma^+\}$

$$S \to AB$$
$$A \to aAa|bAb|cAc|aa|bb|cc$$
$$B \to a|b|c|aB|bB|cB$$