姿勢推定のための KalmanFilter

Eisoku Kuroiwa

2016 年 2 月 22 日

目次

1　回転に関する知識

ここでは姿勢推定の KalmanFilter を意識しつつ，回転に関するもろもろの知識をまとめて，証明する．

証明することは

subsection 1.1 回転行列の角速度の関係

ある剛体 A が回転している時に，その剛体の角速度ベクトルを world 座標系 W で表記した $\boldsymbol{\omega}^W$ と world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A\boldsymbol{R}$ の間には

$$
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^W & \omega_y^W \\ \omega_z^W & 0 & -\omega_x^W \\ -\omega_y^W & \omega_x^W & 0 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times \tag{1}
$$

が成り立つ．ここでいう $\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系の角速度ベクトルであって，IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要．

subsection 1.2 回転行列と RPY の関係

剛体 A の角速度ベクトルを A 座標系相対で表記した $\boldsymbol{\omega}^A$ が IMU から取得できる．それと，world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A\boldsymbol{R}$ をロール・ピッチ・ヨーに変換したものの関係式は

$$
\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x^A \\ \boldsymbol{\omega}_y^A \\ \boldsymbol{\omega}_z^A \end{pmatrix} \tag{2}
$$

である．

subsection 1.3 回転行列と Quaternion の関係

同様に，クォータニオン $\tilde{\boldsymbol{q}}$ を使って表記すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}} \qquad (3)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega}^A \qquad (4)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_x^A & -\boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_z^A \\ \boldsymbol{\omega}_x^A & 0 & \boldsymbol{\omega}_z^A & -\boldsymbol{\omega}_y^A \\ \boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_z^A & 0 & \boldsymbol{\omega}_x^A \\ \boldsymbol{\omega}_z^A & \boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_x^A & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，スカラー部を q_0，ベクトル部を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として，$\tilde{\boldsymbol{q}} = (q_0, \boldsymbol{q})$ とした．

subsection 1.4 加速度と回転の関係

`http://knock.t.u-tokyo.ac.jp/lecture/pdf_data01/5.pdf`の式 (14) に詳しいが，

$$
\boldsymbol{a}^A = \dot{\boldsymbol{v}}^A + \boldsymbol{\omega}^A \times \boldsymbol{v}^A + {}^W_A\boldsymbol{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +g \end{pmatrix} \tag{6}
$$

いや，これは微妙かも．違うかもしれない．難しいので，一旦置いておく．

subsection 1.5 クォータニオンと回転行列の関係

$$
{}^W_A\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \tag{7}
$$

である．

1.1　回転行列の角速度の関係

1.1.1　証明

${}^W_A\boldsymbol{R}$ は回転行列なので，

$$
{}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{E} \tag{8}
$$

が成り立つ．この両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{{}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\boldsymbol{R}^T\} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{E} \qquad (9)\\
\Leftrightarrow\ &{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T + {}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}^T = \boldsymbol{O} \qquad (10)\\
\Leftrightarrow\ &{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T + \{{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T\}^T = \boldsymbol{O} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となるので，${}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T$ は歪対称行列だと分かる．よって

$$
\begin{aligned}
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} && (12)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T &= [X]_\times && (13)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}} &= [X]_\times {}^W_A\boldsymbol{R} && (14)
\end{aligned}
$$

となる X が存在する．ここで，A の原点から伸びているとあるベクトル $\boldsymbol{p}^A$ を考える．$\boldsymbol{p}^A$ は A に固定されていて，一緒に動く．Equation 14を利用すると

$$
\begin{aligned}
&{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^A = [X]_\times {}^W_A\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A && (15)\\
\Leftrightarrow &{}^W_{A(t)}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^{A(t)} = [X]_\times {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^{A(t)} && (16)\\
\Leftrightarrow &{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^A = [X]_\times \boldsymbol{p}^W_t && (17)\\
\Leftrightarrow &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}^W_A\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - {}^W_A\boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}\boldsymbol{p}^A = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (18)\\
\Leftrightarrow &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (19)
\end{aligned}
$$

となる．$\boldsymbol{p}^W_t$ は時刻 t のときの座標系 W で表記したベクトルとなる．$\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t}$ は $\boldsymbol{p}^W_t$ をとあるベクトル $\boldsymbol{s}^W$ 周りに微少量 $\Delta\theta$ だけ回転させたものと考えられて，

$$
\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} = \boldsymbol{p}^W_t + \Delta\boldsymbol{p} \tag{20}
$$

と表現すると

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{p}\text{の向き} &= \boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t\text{の向き} && (21)\\
\Delta\boldsymbol{p}\text{の大きさ} &= \|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta && (22)
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{p} &= \frac{\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t}{\|\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t\|}\|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta && (23)\\
&= \frac{\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t}{\|\boldsymbol{s}^W\|\|\boldsymbol{p}^W_t\|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta && (24)\\
&= \frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|} \times \boldsymbol{p}^W_t\Delta\theta && (25)
\end{aligned}
$$

なので，Equation 19より

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (26)\\
\Leftrightarrow &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|} \times \boldsymbol{p}^W_t\Delta\theta}{\Delta t} = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (27)\\
\Leftrightarrow &\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \boldsymbol{p}^W = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (28)\\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{\omega}^W \times \boldsymbol{p}^W = [X]_\times \boldsymbol{p}^W && (29)
\end{aligned}
$$

となる．よって，$[X]_\times = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times$ と分かった．

Equation 14より，

$$
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}} = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times {}^W_A\boldsymbol{R} \tag{30}
$$

となって証明できた．

ここでいう $\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系の角速度ベクトルであって，IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要．

1.1.2 具体例で実験

Figure 1のようなパターンを考える．このとき，

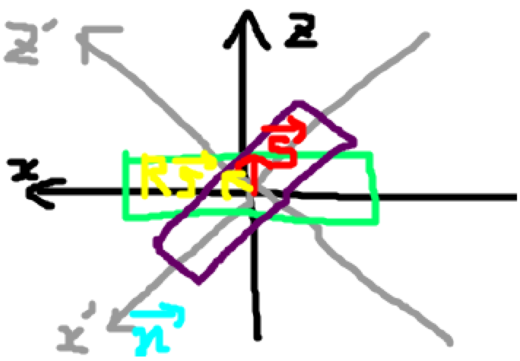

図1: 黒い座標を W の座標系，BODY リンクを想定した直方体が world 座標系の原点に最初あって（緑色の直方体），今はピッチ軸周りに 45 度回転して（灰色座標および紫色の直方体）いる状態．ここからさらに水色の軸 $\boldsymbol{n}$ 周りに $\Delta\eta$ 回転しようとしている．はてなブログから持ってきたのであれだけど，黄色のベクトルが $\boldsymbol{p}^A$

$$
\begin{aligned}
{}^W_{A(t)}\boldsymbol{R} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} && (31)\\
{}^{A(t)}_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\eta & -\sin\Delta\eta \\ 0 & \sin\Delta\eta & \cos\Delta\eta \end{pmatrix} && (32)\\
\boldsymbol{p}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (33)
\end{aligned}
$$

となる．回転行列はListing 1で求められる．

Listing 1: matrix_from_euler.py

```python
#!/usr/bin/env python
import tf, math
tf.transformations.euler_matrix(0, math.pi/4, 0)
```

Equation 19の左辺は

$$\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} = {}^W_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A \tag{34}$$

$$= {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}^{A(t)}_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A \tag{35}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos\Delta\eta}{\sqrt{2}} \\ -\sin\Delta\eta \\ \frac{\cos\Delta\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\Delta\eta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{p}^W_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{38}$$

より，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Equation 19とEquation 29から，$\boldsymbol{\omega}^W$ は

$$\boldsymbol{\omega}^W \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

を満たすはず．

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

なので，

$$\boldsymbol{\omega}^W = {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \end{pmatrix} \tag{42}$$

であるが，これはEquation 40を満たすので，合っている．

ジャイロセンサが感知するのは，$\boldsymbol{\omega}^A$ の方．

1.2 回転行列と RPY の関係

1.2.1 証明

https://www.jstage.jst.go.jp/article/sicetr1965/40/11/40_11_1160/_pdfが参考になるし，このテクニックはすごい気がする．

RPY は，オイラー角の一種で，Z→Y→X の順番で軸周りに回転していくスタイル．回転角度を順に，Yaw(γ)→Pitch(β)→Roll(α) と呼ぶ．これを使って回転行列を表現すると

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{43}$$

となる．

一方，$[\boldsymbol{\omega}]_\times = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$ であり，

$$[\boldsymbol{\omega}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$= \omega_x\boldsymbol{X}_1 + \omega_y\boldsymbol{X}_2 + \omega_z\boldsymbol{X}_3 \tag{45}$$

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

となって，ここで急に

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{X}_1 \tag{49}$$

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{O} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{O} \tag{51}$$

という関係式を思いつくことができれば，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_1^T \tag{52}$$

$$\omega_y\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_2[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_2^T \tag{53}$$

$$\omega_z\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{X}_3[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_3^T \tag{54}$$

という境地に達する．これを使うと，割と簡単に $[\boldsymbol{\omega}]_\times = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$ をオイラー角の微分について整理することが可能になる．（この境地に達しないと，回転行列の微分をして，,，のようにゴリゴリ計算しないといけなくて，sympy を使ってもちょっと無理だった．）

どう簡単になるかというと，りあえず最初の式に注目すると，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_1^T \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{X}_1^T \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \left(\boldsymbol{X}_1\dot{\boldsymbol{R}}\right)\left(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{R}\right)^T \tag{57}$$

が成り立つ．

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{58}$$

と置くと，

$$\omega_x \boldsymbol{X}_1 = \left(\boldsymbol{X}_1 \dot{\boldsymbol{R}}\right) \left(\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{R}\right)^T \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dot{a}_{31} & -\dot{a}_{32} & -\dot{a}_{33} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{31} & a_{21} \\ 0 & -a_{32} & a_{22} \\ 0 & -a_{33} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \tag{61}$$

ここで，回転行列の性質 $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ と $a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$ より，微分して，$\dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} = 0$ と $\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} = -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23}$ なので，

$$\omega_x \boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x \boldsymbol{X}_1 = (\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23}) \boldsymbol{X}_1 \tag{64}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \tag{65}$$

これはすごい．他の項にも適用して，

$$\omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \tag{66}$$

$$\omega_y = \dot{a}_{11}a_{31} + \dot{a}_{12}a_{32} + \dot{a}_{13}a_{33} \tag{67}$$

$$\omega_z = \dot{a}_{21}a_{11} + \dot{a}_{22}a_{12} + \dot{a}_{23}a_{13} \tag{68}$$

となる．これを，今回注目している Z-Y-X オイラー角に当てはめて整理すると（これもなかなか大変...）

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$\boldsymbol{\omega}^A$ を求めるために，両辺左から ${}^W_A\boldsymbol{R}^T$ をかけて整理すると

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{71}$$

ちなみに，Listing 2で検証可能．

Listing 2: rotation_matrix.py

```
#!/usr/bin/env python
from sympy import *
interactive.printing.init_printing(use_latex=true)
var("a:z")
roll = Matrix([[1, 0, 0],
               [0, cos(a), -sin(a)],
               [0, sin(a), cos(a)]])
pitch = Matrix([[cos(b), 0, sin(b)],
                [0, 1, 0],
                [-sin(b), 0, cos(b)]])
yaw = Matrix([[cos(c), -sin(c), 0],
              [sin(c), cos(c), 0],
              [0, 0, 1]])
rot = yaw * pitch * roll
tar = Matrix([[cos(b)*cos(c), -sin(c), 0],
              [cos(b)*sin(c), cos(c), 0],
              [-sin(b), 0, 1]])
Q = rot.transpose() * tar
print expand(Q[1,0])
```

この逆は

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^A \tag{72}$$

となる[*1]．

1.2.2　具体例で実験

subsubsection 1.1.2と同じシチュエーションを考える．角速度を求めようとすると

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

なので

$$\boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\alpha} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\alpha} \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

となり，確かに直感と合う．

また，別のシチュエーションとして，ヨー方向に 90 度回転させた後に，world 座標のピッチ方向に回転させた場合は，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \tag{76}$$

[*1] http://www.wolframalpha.com/input/?i=Inverse%5B%7B%7B1%2C0%2C-sin%28b%29%7D%2C%7B0%2Ccos%28a%29%2C+sin%28a%29*cos%28b%29%7D%2C%7B0%2C-sin%28a%29%2C+cos%28a%29+*+cos%28b%29%7D%7D%5D

のとき，

$$\boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

となり，確かに直感と合う．

1.3 回転行列と Quaternion の関係

http://www.mss.co.jp/technology/report/pdf/18-07.pdfが参考になる．

1.3.1 クォータニオンの定義

スカラー部を q_0，ベクトル部を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として，$\tilde{\boldsymbol{q}} = (q_0, \boldsymbol{q})$ とする．

回転クォータニオンは

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k})\sin\frac{\theta}{2} \tag{79}$$

で，とある座標系 B で表現された位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ を座標系は動かさずに位置ベクトルだけ回転させるときは $\boldsymbol{a}^B_{t+1} = \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^B_t\tilde{\boldsymbol{q}^*}$ で，座標系を動かして位置ベクトルの先っぽにある点は動かさないときは $\boldsymbol{a}^{B_{t+1}} = \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^{B_t}\tilde{\boldsymbol{q}^*}$ となる．

ベクトルと掛け算するときは $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ を $a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ と見なして計算するというのがミソ*2．例えば $(3,0,0)$ を $x = z, y = 0$ の軸周りに 60 度回すとすると，回転クォータニオンは $\tilde{\boldsymbol{q}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$ なので，

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^B_t\tilde{\boldsymbol{q}^*} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\cdot 3\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right) && (80)\\
&= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right) && (81)\\
&= \left(\frac{9}{4}\boldsymbol{i} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\boldsymbol{i} + \frac{3}{8}\boldsymbol{k}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{8}\boldsymbol{k} - \frac{3}{8}\boldsymbol{i}\right) && (82)\\
&= \frac{9}{4}\boldsymbol{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{4}\boldsymbol{k} && (83)
\end{aligned}$$

となって，回転後は $(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4})$ となる．

一般的にもできて，クォータニオンのベクトル部の掛け算は $\boldsymbol{uj} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}$ なので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^B_{t+1} &= \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^B_t\tilde{\boldsymbol{q}^*} && (84)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) && (85)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) && (86)\\
&= \left\{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2} + \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) && (87)\\
&= -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\frac{\sin\theta}{2} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{u} + \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) && (88)\\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} + \{\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u}\}\cos\theta + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\theta && (89)
\end{aligned}$$

となって，綺麗にベクトル部だけ残る．

*2 http://mathtrain.jp/quaternion

1.3.2 クォータニオンの定義

あるベクトル $\boldsymbol{a}_t$ があって，回っていて，$t = t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\boldsymbol{q}}_t$，$t = t + \Delta t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} &= \tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t}\boldsymbol{a}_0\tilde{\boldsymbol{q}}^*_{t+\Delta t} && (90)\\
&= \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\boldsymbol{a}_t\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}^* && (91)\\
&= \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{a}_0\tilde{\boldsymbol{q}}^*_t\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}^* && (92)
\end{aligned}$$

となるので，

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t} = \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t \tag{93}$$

となる．ここで，$\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}$ は $\boldsymbol{s}^W$ 周りに微少量 $\Delta\theta$ だけ回転させたものと考えられて，

$$\tilde{\boldsymbol{\Delta q}} = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\Delta\theta \tag{94}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t} - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} && (95)\\
&= \frac{\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} && (96)\\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\Delta\theta\right)\tilde{\boldsymbol{q}}_t - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} && (97)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\tilde{\boldsymbol{q}}_t && (98)\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t && (99)
\end{aligned}$$

と分かる．行列形式で表現すると

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t && (100)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z\end{pmatrix}\left\{q_0 + \begin{pmatrix}q_1 \\ q_2 \\ q_3\end{pmatrix}\right\} && (101)\\
&= \frac{1}{2}\left\{q_0\begin{pmatrix}\omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z\end{pmatrix} - (\omega_X q_1 + \omega_Y q_2 + \omega_Z q_3) + \begin{pmatrix}\omega_Y q_3 - \omega_Z q_2 \\ \omega_Z q_1 - \omega_X q_3 \\ \omega_X q_2 - \omega_Y q_1\end{pmatrix}\right\} && (102)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z \\ \omega_X & 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Y & \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ \omega_Z & -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3\end{pmatrix} && (103)
\end{aligned}$$

となる．

しかし，$\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系で表された角速度で，IMU が観測するのは local 座標で表された角速度なので，ベクトルの回転ではなくて座標系の回転であるためにクォータニオンの順番が変わることに注意しつつ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^A &= \tilde{\boldsymbol{q}}^*_t\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t && (104)\\
\Leftrightarrow\boldsymbol{\omega}^W &= \tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A\tilde{\boldsymbol{q}}^*_t && (105)
\end{aligned}$$

と変換しなくてはいけない．

そうすると

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(106)\\ &= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A\tilde{\boldsymbol{q}}_t^*\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(107)\\ &= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A &(108)\end{aligned}$$

これを行列形式で書くと

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z\\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y\\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x\\ \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix} \tag{109}$$

のように中身がちょっと変わるので，注意．

1.4 加速度と回転の関係

わかった気になっていたけど，よく分かっていない．

回転しながら自由落下している IMU は加速度としてどんな値を返すか，が分かれば良さそう．

1.5 クォータニオンと回転行列の関係

`http://jp.mathworks.com/help/aeroblks/quaternionstodirectioncosinematrix.html`が参考になる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^A &= {}^W_A\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{p}^W &(110)\\ \boldsymbol{p}^A &= \tilde{\boldsymbol{q}}^*\boldsymbol{p}^W\tilde{\boldsymbol{q}} &(111)\end{aligned}$$

であることに注目して，クォータニオンの演算を書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^A &= \tilde{\boldsymbol{q}}^*\boldsymbol{p}^W\tilde{\boldsymbol{q}} &(112)\\ &= (q_0 - \boldsymbol{q})\,\boldsymbol{p}^W(q_0 + \boldsymbol{q}) &(113)\\ &= q_0^2\boldsymbol{p}^W - 2\left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}^W\right)q_0 + \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}^W\right)\boldsymbol{q} - \left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}^W\right)\times\boldsymbol{q} &(114)\\ &= q_0^2\boldsymbol{p}^W - 2\left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}^W\right)q_0 + \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}^W\right)\boldsymbol{q} + \left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}^W\right)\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{p}^W &(115)\\ &= \left(q_0^2 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{p}^W - 2\left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}^W\right)q_0 + 2\left(\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{p}^W\right)\boldsymbol{q} &(116)\\ &= \left(q_0^2 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{p}^W - 2q_0\left(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}^W\right) + 2\boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{p}^W\right) &(117)\\ &= \left(q_0^2 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{E}\boldsymbol{p}^W - 2q_0[\boldsymbol{q}]_\times\boldsymbol{p}^W + 2\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{p}^W &(118)\\ &= \left\{\left(q_0^2 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{E} - 2q_0[\boldsymbol{q}]_\times + 2\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T\right\}\boldsymbol{p}^W &(119)\\ &= \begin{pmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2\,(q_0q_3+q_1q_2) & 2\,(-q_0q_2+q_1q_3)\\ 2\,(-q_0q_3+q_2q_1) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2\,(q_0q_1+q_2q_3)\\ 2\,(q_0q_2+q_3q_1) & 2\,(-q_0q_1+q_3q_2) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{pmatrix}\boldsymbol{p}^W &(120)\end{aligned}$$

となるので，

$${}^W_A\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2\,(-q_0q_3+q_2q_1) & 2\,(q_0q_2+q_3q_1)\\ 2\,(q_0q_3+q_1q_2) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2\,(-q_0q_1+q_3q_2)\\ 2\,(-q_0q_2+q_1q_3) & 2\,(q_0q_1+q_2q_3) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{pmatrix} \tag{121}$$

となる．Equation 43の

$${}^W_A\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma\\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} \tag{122}$$

と比較して，いいとこ取りをすると

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\gamma &= q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 &(123)\\ \cos\beta\sin\gamma &= 2\,(q_0q_3+q_1q_2) &(124)\\ -\sin\beta &= 2\,(-q_0q_2+q_1q_3) &(125)\\ \sin\alpha\cos\beta &= 2\,(q_0q_1+q_2q_3) &(126)\\ \cos\alpha\cos\beta &= q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 &(127)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\arctan\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}\\ \arcsin\left\{-2\left(-q_0q_2+q_1q_3\right)\right\}\\ \arctan\frac{2(q_0q_3+q_1q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}\end{pmatrix} \tag{128}$$

ちなみに，クォータニオンとオイラー角は`https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles`より

$$\begin{aligned}{}^W_A\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_z(\gamma)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\alpha) &(129)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\\ 0\\ 0\\ \sin\frac{\gamma}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\\ 0\\ \sin\frac{\beta}{2}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} &(130)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\end{pmatrix} &(131)\end{aligned}$$

wikipedia の式を写しただけで，検算はしていない．

2 オイラー角表現の KalmanFilter

ここでいうオイラー角は ZXY オイラー角で，ロール・ピッチ・ヨーのこと．

IMU が観測する角速度と RPY の関係式は

$$\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \tag{132}$$

で，自身が加速していない場合の加速度と姿勢の関係式は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}acc_x\\ acc_y\\ acc_z\end{pmatrix} &= {}^W_A\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{g}^W &(133)\\ &= \begin{pmatrix}-\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}g &(134)\end{aligned}$$

Equation 132を $\alpha = 0$，$\beta = 0$ で近似すれば線形＋互いに素にできるし，近似しなければ EKF でできる．EKF の場合は $\beta = \frac{\pi}{2}$ でEquation 132が 0 除算してしまって破綻する．

2.1 線形カルマンフィルタ

2.1.1 事前準備

関係式（ゼロ点付近で近似）

$$\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \tag{135}$$

内部状態（オイラー角＋その微分（角速度）のバイアス）

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ b_{w_x}\\ b_{w_y}\\ b_{w_z}\end{pmatrix} \tag{136}$$

予測（互いに独立しているので，decouple 可能）

$$\boldsymbol{x}^-_{k+1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\Delta t & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta t & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta t\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}^+_k + \begin{pmatrix}\Delta t & 0 & 0\\ 0 & \Delta t & 0\\ 0 & 0 & \Delta t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{pmatrix} \tag{137}$$

観測（線形にするために観測した加速度を元に求めた姿勢を観測したことにする）

$$\alpha = \arctan\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \arctan\frac{acc_y}{acc_z} \tag{138}$$

$$\beta = \arctan\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \arctan\frac{-acc_x}{\sqrt{acc_y^2 + acc_z^2}} \tag{139}$$

2.1.2 中身

$$\begin{pmatrix}\alpha^-_{k+1}\\ b^-_{\omega_x k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^+_k\\ b^+_{\omega_x k}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\Delta t\\ 0\end{pmatrix}\dot{\alpha}_{k+1} \tag{140}$$

$$\boldsymbol{P}^-_{k+1} = \begin{pmatrix}1 & -\Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^+_{k+1}\begin{pmatrix}1 & -\Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{141}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -\Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\clubsuit & \heartsuit\\ \diamondsuit & \spadesuit\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Delta t\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{142}$$

$$= \begin{pmatrix}\clubsuit - \Delta t\diamondsuit & \heartsuit - \Delta t\spadesuit\\ \diamondsuit & \spadesuit\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\Delta t & 1\end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{143}$$

$$= \begin{pmatrix}\clubsuit - (\diamondsuit + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t & \heartsuit - \spadesuit\Delta t\\ \diamondsuit - \spadesuit\Delta t & \spadesuit\end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{144}$$

$$= \begin{pmatrix}\clubsuit - (\diamondsuit + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} & \heartsuit - \spadesuit\Delta t\\ \diamondsuit - \spadesuit\Delta t & \spadesuit + Q^{lower}_{k+1}\end{pmatrix} \tag{145}$$

加速度から求めた姿勢を観測したことになっているので，

$$h(\begin{pmatrix}\alpha^-_{k+1}\\ b^-_{\omega_x k+1}\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^-_{k+1}\\ b^-_{\omega_x k+1}\end{pmatrix} = \alpha^-_{k+1} \tag{146}$$

よって，

$$y_{k+1} = z_{k+1} - \alpha^-_{k+1} \tag{147}$$

$$S_{k+1} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^-_{k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T + R_{k+1} \tag{148}$$

$$= \clubsuit - (\diamondsuit + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} + R_{k+1} \tag{149}$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}^-_{k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T S^{-1}_{k+1} \tag{150}$$

$$= \begin{pmatrix}\clubsuit - (\diamondsuit + \heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1}\\ \diamondsuit - \spadesuit\Delta t\end{pmatrix} S^{-1}_{k+1} \tag{151}$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{1}{1 + \dfrac{R_{k+1}}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1}}}\\ \dfrac{\diamondsuit - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} + R_{k+1}}\end{pmatrix} \tag{152}$$

となるので

$$\begin{pmatrix}\alpha^+_{k+1}\\ b^+_{\omega_x k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^-_{k+1}\\ b^-_{\omega_x k+1}\end{pmatrix} + \boldsymbol{K}_{k+1}y_{k+1} \tag{153}$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} z_{k+1} + R_{k+1}\alpha^-_{k+1}}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} + R_{k+1}}\\ b^+_{\omega_x k+1}\end{pmatrix} \tag{154}$$

$$\boldsymbol{P}^+_{k+1} = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{K}_{k+1}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{P}^-_{k+1} \tag{155}$$

$$= \left(\boldsymbol{E} - \begin{pmatrix}\dfrac{1}{1 + \dfrac{R_{k+1}}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1}}} & 0\\ \dfrac{\diamondsuit - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} + R_{k+1}} & 0\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{P}^-_{k+1} \tag{156}$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{1}{1 + \dfrac{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1}}{R_{k+1}}} & 0\\ -\dfrac{\diamondsuit - \spadesuit\Delta t}{\clubsuit - (\diamondsuit+\heartsuit)\Delta t + \spadesuit\Delta^2 t + Q^{upper}_{k+1} + R_{k+1}} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^-_{k+1} \tag{157}$$

となる．

ここで，2016/02/22 の hrpsys の実装では

$$\begin{pmatrix}\alpha^+_0\\ b^+_{\omega_x 0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{158}$$

$$\boldsymbol{P}^+_0 = \boldsymbol{O} \tag{159}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}0.001 * \Delta t & 0\\ 0 & 0.003 * \Delta t\end{pmatrix} \tag{160}$$

$$R = 1000 \tag{161}$$

なので，1 ステップ進めると

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^- \\ b_{\omega_{x1}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x1}\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{162}$$

$$\boldsymbol{P}_1^- = \begin{pmatrix} 0.001*\Delta t & 0 \\ 0 & 0.003*\Delta t \end{pmatrix} \tag{163}$$

$$S_1 = 0.001*\Delta t + 1000 \tag{164}$$

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{pmatrix} \frac{0.001*\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{165}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ b_{\omega_{x1}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x1}\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{0.001*\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} \\ 0 \end{pmatrix} (z_1 - \omega_{x1}\Delta t) \tag{166}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0.001*\Delta t*z_1+1000*\omega_{x1}\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{167}$$

$$\boldsymbol{P}_1^+ = \begin{pmatrix} \frac{1000}{0.001*\Delta t+1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.001*\Delta t & 0 \\ 0 & 0.003*\Delta t \end{pmatrix} \tag{168}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{169}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0.001*\Delta t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{170}$$

で，もう 1 ステップ進めると

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^- \\ b_{\omega_{x2}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.001*\Delta t*z_1+1000*\omega_{x1}\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} + \omega_{x2}\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{171}$$

$$\boldsymbol{P}_2^- = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} + \Delta^2 t + 0.001*\Delta t & -\Delta t \\ -\Delta t & 1+0.003*\Delta t \end{pmatrix} \tag{172}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3\Delta t}{\Delta t+1e^6} & -\Delta t \\ -\Delta t & 1+0.003*\Delta t \end{pmatrix} \tag{173}$$

$$S_2 \simeq \frac{(2+1000\Delta t)\,\Delta t}{0.001*\Delta t+1000} + 1000 \tag{174}$$

$$= \frac{(3+1000\Delta t)\,\Delta t + 1e^6}{0.001*\Delta t+1000} \tag{175}$$

$$\boldsymbol{K}_2 \simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \\ \frac{-0.001*\Delta^2 t-1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \end{pmatrix} \tag{176}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \\ \frac{-1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \end{pmatrix} \tag{177}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^+ \\ b_{\omega_{x2}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2^- \\ b_{\omega_{x2}}^- \end{pmatrix} + \boldsymbol{K}_2 \left(z_2 - \alpha_2^-\right) \tag{178}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)\Delta t z_2 + \left(\Delta t+1e^6\right)\alpha_2}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{179}$$

$$\boldsymbol{P}_2^+ = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t+1e^6}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} & 0 \\ \frac{1000\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3\Delta t}{\Delta t+1e^6} & -\Delta t \\ -\Delta t & 1+0.003*\Delta t \end{pmatrix} \tag{180}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2+1000\Delta t)e^3\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} & \frac{-\left(\Delta t+1e^6\right)\Delta t}{(3+1000\Delta t)\Delta t+1e^6} \\ ? & ? \end{pmatrix} \tag{181}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0.002*\Delta t & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \tag{182}$$

となって，最終的には

$$\boldsymbol{P}^+ = \begin{pmatrix} 0.558269 & -0.077438 \\ -0.077438 & 0.0216277 \end{pmatrix} \tag{183}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0.000558269 \\ -7.7438e-05 \end{pmatrix} \tag{184}$$

$$S = 1000.56 \tag{185}$$

に収束していた．なんでだろう．

ただ，とりあえずジャイロの積算のみに頼っていることが分かったので，ゼロ点がずれていると一生ずれるのと早く動くとずれるということがわかった．

Equation 132を使って入力しているジャイロを変換することで，ゼロ点周りでの近似誤差を減らすことが可能．

2.2 非線形カルマンフィルタ

3 Quternion 表現の KalmanFilter

3.1 ジャイロのバイアスを含めた EKF

3.1.1 関係式

角速度からクォータニオンを更新する式

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})\tilde{\boldsymbol{q}}_t \tag{186}$$

クォータニオンから重力加速度を求める式

$$\begin{pmatrix} acc_x \\ acc_y \\ acc_z \end{pmatrix} = {}^W_A\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{g}^W = \begin{pmatrix} 2\left(-q_0q_2 + q_1q_3\right) \\ 2\left(q_0q_1 + q_2q_3\right) \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} g \tag{187}$$

状態量

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ b_{\omega_x} \\ b_{\omega_y} \\ b_{\omega_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{b}_\omega \end{pmatrix} \tag{188}$$

3.1.2 中身

- $\boldsymbol{x}_k^+$
- $\boldsymbol{P}_k^+$

がすでに求まっている状態で，

- $\boldsymbol{\omega}_{k+1}$
- $\boldsymbol{acc}_{k+1}$

を取得したところから始まる．

謎だけど入力 $\boldsymbol{u}$ をジャイロだと考えて，Predicted state estimate は

$$\boldsymbol{x}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1}^- \\ \boldsymbol{b}_{\omega_{k+1}}^- \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}_k^+, \boldsymbol{u}_{k+1}) \tag{189}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{k+1} - \boldsymbol{b}_{\omega_k}^+)\tilde{\boldsymbol{q}}_k^+\Delta t + \tilde{\boldsymbol{q}}_k^+ \\ \boldsymbol{b}_{\omega_k}^+ \end{pmatrix} \tag{190}$$

$$= \begin{pmatrix} q_0^+ - \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t q_1^+ - \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t q_2^+ - \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t q_3^+ \\ \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t q_0^+ + q_1^+ + \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t q_2^+ - \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t q_3^+ \\ \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t q_0^+ - \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t q_1^+ + q_2^+ + \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t q_3^+ \\ \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t q_0^+ + \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t q_1^+ - \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t q_2^+ + q_3^+ \\ b_{\omega_{k_x}}^+ \\ b_{\omega_{k_y}}^+ \\ b_{\omega_{k_z}}^+ \end{pmatrix} \tag{191}$$

となるので，

$$\boldsymbol{F}_k = \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_k^+, \boldsymbol{u}_{k+1}} \tag{192}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t & \frac{\Delta t q_1^+}{2} & \frac{\Delta t q_2^+}{2} & \frac{\Delta t q_3^+}{2} \\ \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t & 1 & \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\Delta t q_0^+}{2} & \frac{\Delta t q_3^+}{2} & -\frac{\Delta t q_3^+}{2} \\ \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t & 1 & \frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\Delta t q_3^+}{2} & -\frac{\Delta t q_0^+}{2} & \frac{\Delta t q_1^+}{2} \\ \frac{\omega_{{k+1}_z} - b_{\omega_{k_z}}^+}{2}\Delta t & \frac{\omega_{{k+1}_y} - b_{\omega_{k_y}}^+}{2}\Delta t & -\frac{\omega_{{k+1}_x} - b_{\omega_{k_x}}^+}{2}\Delta t & 1 & \frac{\Delta t q_2^+}{2} & -\frac{\Delta t q_1^+}{2} & -\frac{\Delta t q_0^+}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{193}$$

$$= \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \tag{194}$$

よって Predicted covariance estimate は

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k+1}^+\boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{195}$$

$$= \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \clubsuit & \heartsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \square^T & \boldsymbol{O} \\ \triangle^T & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{196}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\square\clubsuit + \triangle\diamondsuit\right)\square^T + \left(\square\heartsuit + \triangle\spadesuit\right)\triangle^T & \square\heartsuit + \triangle\spadesuit \\ \diamondsuit\square^T + \spadesuit\triangle^T & \spadesuit \end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{197}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\square\clubsuit + \triangle\diamondsuit\right)\square^T + \left(\square\heartsuit + \triangle\spadesuit\right)\triangle^T + \boldsymbol{Q}_{k+1}^{upper} & \square\heartsuit + \triangle\spadesuit \\ \diamondsuit\square^T + \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \boldsymbol{Q}_{k+1}^{lower} \end{pmatrix} \tag{198}$$

$$= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix} \tag{199}$$

注目は $\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k+1}^+\boldsymbol{F}_k^T$ の右下 $\spadesuit$ が単調増加になってしまっているところ．これで予測の部分は終わり．ちなみに，$\boldsymbol{x}_{k+1}^-$ はクォータニオンの要件である大きさ 1 を満たしていない可能性があるので，正規化する．

次に，修正の部分．

$$h(\boldsymbol{x}_{k+1}^-) = \tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1}^{-*}\boldsymbol{g}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1}^- = \begin{pmatrix} 2\left(-q_0^-q_2^- + q_1^-q_3^-\right) \\ 2\left(q_0^-q_1^- + q_2^-q_3^-\right) \\ {q_0^-}^2 - {q_1^-}^2 - {q_2^-}^2 + {q_3^-}^2 \end{pmatrix} g \tag{200}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{k+1} &= \left.\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^-_{k+1}} && (201)\\
&= 2g\begin{pmatrix} -q^-_2 & q^-_3 & -q^-_0 & q^-_1 & 0 & 0 & 0\\ q^-_1 & q^-_0 & q^-_3 & q^-_2 & 0 & 0 & 0\\ q^-_0 & -q^-_1 & -q^-_2 & -q^-_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (202)\\
&= \begin{pmatrix} \$ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} && (203)
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{k+1} &= \boldsymbol{acc}_{k+1} - h(\boldsymbol{x}^-_{k+1}) && (204)\\
\boldsymbol{S}_{k+1} &= \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}^-_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1} + \boldsymbol{R}_{k+1} && (205)\\
\boldsymbol{K}_{k+1} &= \boldsymbol{P}^-_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1}\boldsymbol{S}^{-1}_{k+1} && (206)
\end{aligned}
$$

となって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^+_{k+1} &= \boldsymbol{x}^-_{k+1} + \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{y}_{k+1} && (207)\\
\boldsymbol{P}^+_{k+1} &= \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}\right)\boldsymbol{P}^-_{k+1} && (208)
\end{aligned}
$$

となる．$\boldsymbol{R}_{k+1}$ が一定であれば，$\boldsymbol{P}^+_{k+1}$ は今回の観測による影響は受けないことに注意．$\boldsymbol{H}_{k+1}$ 経由で次のサイクルから入る．

また，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{k+1} &= \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}^-_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1} + \boldsymbol{R}_{k+1} && (209)\\
&= \begin{pmatrix} \$ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \$ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^T + \boldsymbol{R}_{k+1} && (210)\\
&= \$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1} && (211)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{k+1} &= \boldsymbol{P}^-_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1}\boldsymbol{S}^{-1}_{k+1} && (212)\\
&= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \$ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1} && (213)\\
&= \begin{pmatrix} \clubsuit'\$^T \\ \diamondsuit'\$^T \end{pmatrix}\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1} && (214)\\
&= \begin{pmatrix} \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1} \\ \diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1} \end{pmatrix} && (215)\\
\boldsymbol{x}^+_{k+1} &= \boldsymbol{x}^-_{k+1} + \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{y}_{k+1} && (216)\\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}^+_{k+1} \\ \boldsymbol{b}^+_{\omega_{k+1}} \end{pmatrix} && (217)\\
&= \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}^-_{k+1} \\ \boldsymbol{b}^-_{\omega_{k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1} \\ \diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\boldsymbol{y}_{k+1} \end{pmatrix} && (218)\\
\boldsymbol{P}^+_{k+1} &= \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1}\right)\boldsymbol{P}^-_{k+1} && (219)\\
&= \left(\boldsymbol{E} - \begin{pmatrix} \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{O} \\ \diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{P}^-_{k+1} && (220)\\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} - \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{O} \\ -\diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^-_{k+1} && (221)\\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} - \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{O} \\ -\diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$ & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \clubsuit' & \heartsuit' \\ \diamondsuit' & \spadesuit' \end{pmatrix} && (222)\\
&= \begin{pmatrix} \clubsuit' - \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\clubsuit' & \heartsuit' - \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\heartsuit' \\ \diamondsuit' - \diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\clubsuit' & \spadesuit' - \diamondsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\heartsuit' \end{pmatrix} && (223)
\end{aligned}
$$

さらに，更新の時と同様に $\boldsymbol{x}^+_{k+1}$ はクォータニオンの要件である大きさ 1 を満たしていない可能性があるので，正規化する．

ところで $\boldsymbol{P}^+$ が対角行列だとすると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^-_{k+1} &= \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}^+_{k+1}\boldsymbol{F}^T_k + \boldsymbol{Q}_{k+1} && (224)\\
&= \begin{pmatrix} \square\clubsuit\square^T + \triangle\spadesuit\triangle^T + \boldsymbol{Q}^{upper}_{k+1} & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \boldsymbol{Q}^{lower}_{k+1} \end{pmatrix} && (225)\\
&= \begin{pmatrix} \clubsuit' & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T & \spadesuit + \boldsymbol{Q}^{lower}_{k+1} \end{pmatrix} && (226)\\
\boldsymbol{P}^+_{k+1} &= \begin{pmatrix} \clubsuit' - \clubsuit'\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\clubsuit' & \triangle\spadesuit \\ \spadesuit\triangle^T - \spadesuit\triangle^T\$^T\left(\$\clubsuit'\$^T + \boldsymbol{R}_{k+1}\right)^{-1}\$\clubsuit' & \spadesuit + \boldsymbol{Q}^{lower}_{k+1} \end{pmatrix} && (227)
\end{aligned}
$$

となるので，対角行列ではないっぽい．

3.2　autopilot の実装

`http://autopilot.sourceforge.net/kalman.html`が web ページでは紹介されているけど，実装はもっと別のことをしているっぽい．ジャイロが 2 つしかついていないっぽいのと，C の計算が謎い．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & 0 & \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \\ p & 0 & 0 & -q & -\frac{q_0}{2} & \frac{q_3}{2} \\ q & 0 & 0 & p & -\frac{q_3}{2} & -\frac{q_0}{2} \\ 0 & q & -p & 0 & \frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{228}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0.01^2 & & & & & \\ & 0.01^2 & & & & \\ & & 0.01^2 & & & \\ & & & 0.01^2 & & \\ & & & & 0.03 & \\ & & & & & 0.03 \end{pmatrix} \tag{229}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^{-} = \boldsymbol{P}_k^{+} + \Delta t \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{A}_{k+1} \boldsymbol{P}_k^{+} + \boldsymbol{P}_k^{+} \boldsymbol{A}_{k+1}^{T} \right) \tag{230}$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1}^{-} = \tilde{\boldsymbol{q}}_k^{+} + \Delta t \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & 0 \\ p & 0 & 0 & -q \\ q & 0 & 0 & p \\ 0 & q & -p & 0 \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}_k^{+} \tag{231}$$