姿勢推定のための KalmanFilter

Eisoku Kuroiwa

2016 年 2 月 21 日

目次

1　回転に関する知識

ここでは姿勢推定の KalmanFilter を意識しつつ，回転に関するもろもろの知識をまとめて，証明する．

証明することは

subsection 1.1 回転行列の角速度の関係

ある剛体 A が回転している時に，その剛体の角速度ベクトルを world 座標系 W で表記した $\boldsymbol{\omega}^W$ と world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A\boldsymbol{R}$ の間には

$$
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^W & \omega_y^W \\ \omega_z^W & 0 & -\omega_x^W \\ -\omega_y^W & \omega_x^W & 0 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times \tag{1}
$$

が成り立つ．ここでいう $\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系の角速度ベクトルであって，IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要.

subsection 1.2 回転行列と RPY の関係

剛体 A の角速度ベクトルを A 座標系相対で表記した $\boldsymbol{\omega}^A$ が IMU から取得できる．それと，world 座標系 W 相対の A の回転行列 ${}^W_A\boldsymbol{R}$ をロール・ピッチ・ヨーに変換したものの関係式は

$$
\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_x^A \\ \boldsymbol{\omega}_y^A \\ \boldsymbol{\omega}_z^A \end{pmatrix} \tag{2}
$$

である．

subsection 1.3 回転行列と Quaternion の関係

同様に，クォータニオン $\tilde{\boldsymbol{q}}$ を使って表記すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}} && (3)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\omega}^A && (4)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_x^A & -\boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_z^A \\ \boldsymbol{\omega}_x^A & 0 & \boldsymbol{\omega}_z^A & -\boldsymbol{\omega}_y^A \\ \boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_z^A & 0 & \boldsymbol{\omega}_x^A \\ \boldsymbol{\omega}_z^A & \boldsymbol{\omega}_y^A & -\boldsymbol{\omega}_x^A & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}} && (5)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，スカラー部を q_0，ベクトル部を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として，$\tilde{\boldsymbol{q}} = (q_0, \boldsymbol{q})$ とした．

subsection 1.4 加速度と回転の関係

`http://knock.t.u-tokyo.ac.jp/lecture/pdf_data01/5.pdf`の式 (14) に詳しいが，

$$
\boldsymbol{a}^A = \dot{\boldsymbol{v}}^A + \boldsymbol{\omega}^A \times \boldsymbol{v}^A + {}^W_A\boldsymbol{R}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +g \end{pmatrix} \tag{6}
$$

いや，これは微妙かも．違うかもしれない．難しいので，一旦置いておく．

の 4 つ．

1.1　回転行列の角速度の関係

1.1.1　証明

${}^W_A\boldsymbol{R}$ は回転行列なので，

$$
{}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{E} \tag{7}
$$

が成り立つ．この両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{{}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\boldsymbol{R}^T\} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{E} && (8)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T + {}^W_A\boldsymbol{R}{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}^T &= \boldsymbol{O} && (9)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T + \{{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T\}^T &= \boldsymbol{O} && (10)
\end{aligned}
$$

となるので，${}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T$ は歪対称行列だと分かる．よって

$$
\begin{aligned}
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} && (11)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}{}^W_A\boldsymbol{R}^T &= [X]_\times && (12)\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}} &= [X]_\times {}^W_A\boldsymbol{R} && (13)
\end{aligned}
$$

となる X が存在する．ここで，A の原点から伸びているとあるベクトル $\boldsymbol{p}^A$ を考える．$\boldsymbol{p}^A$ は A に固定されていて，一緒に動く．Equation 13を利用すると

$$
\begin{align}
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^A &= [X]_\times {}^W_A\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A \tag{14}\\
\Leftrightarrow {}^W_{A(t)}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^{A(t)} &= [X]_\times {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^{A(t)} \tag{15}\\
\Leftrightarrow {}^W_A\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{p}^A &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W_t \tag{16}\\
\Leftrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}^W_A\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - {}^W_A\boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}\boldsymbol{p}^A &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{17}\\
\Leftrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{18}
\end{align}
$$

となる．$\boldsymbol{p}^W_t$ は時刻 t のときの座標系 W で表記したベクトルとなる．$\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t}$ は $\boldsymbol{p}^W_t$ をとあるベクトル $\boldsymbol{s}^W$ 周りに微少量 $\Delta\theta$ だけ回転させたものと考えられて，

$$
\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} = \boldsymbol{p}^W_t + \Delta\boldsymbol{p} \tag{19}
$$

と表現すると

$$
\begin{align}
\Delta\boldsymbol{p}\text{の向き} &= \boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t\text{の向き} \tag{20}\\
\Delta\boldsymbol{p}\text{の大きさ} &= \|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta \tag{21}
\end{align}
$$

つまり

$$
\begin{align}
\Delta\boldsymbol{p} &= \frac{\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t}{\|\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t\|}\|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta \tag{22}\\
&= \frac{\boldsymbol{s}^W \times \boldsymbol{p}^W_t}{\|\boldsymbol{s}^W\|\|\boldsymbol{p}^W_t\|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\|\boldsymbol{p}^W_t\|\Delta\theta \tag{23}\\
&= \frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|} \times \boldsymbol{p}^W_t\Delta\theta \tag{24}
\end{align}
$$

なので，Equation 18より

$$
\begin{align}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{25}\\
\Leftrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|} \times \boldsymbol{p}^W_t\Delta\theta}{\Delta t} &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{26}\\
\Leftrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \boldsymbol{p}^W &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{27}\\
\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^W \times \boldsymbol{p}^W &= [X]_\times \boldsymbol{p}^W \tag{28}
\end{align}
$$

となる．よって，$[X]_\times = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times$ と分かった．

Equation 13より，

$$
{}^W_A\dot{\boldsymbol{R}} = [\boldsymbol{\omega}^W]_\times {}^W_A\boldsymbol{R} \tag{29}
$$

となって証明できた．

ここでいう $\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系の角速度ベクトルであって，IMU が出力するような local 座標系の角速度ベクトルではないことが重要．

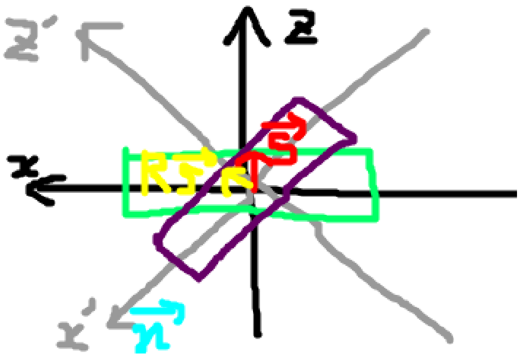

図1: 黒い座標を W の座標系，BODY リンクを想定した直方体が world 座標系の原点に最初あって（緑色の直方体），今はピッチ軸周りに 45 度回転して（灰色座標および紫色の直方体）いる状態．ここからさらに水色の軸 $\boldsymbol{n}$ 周りに $\Delta\eta$ 回転しようとしている．はてなブログから持ってきたのであれだけど，黄色のベクトルが $\boldsymbol{p}^A$

1.1.2 具体例で実験

Figure 1のようなパターンを考える．このとき，

$$
\begin{align}
{}^W_{A(t)}\boldsymbol{R} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{30}\\
{}^{A(t)}_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\eta & -\sin\Delta\eta \\ 0 & \sin\Delta\eta & \cos\Delta\eta \end{pmatrix} \tag{31}\\
\boldsymbol{p}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{32}
\end{align}
$$

となる．回転行列はListing 1で求められる．

Listing 1: matrix_from_euler.py

```python
#!/usr/bin/env python
import tf, math
tf.transformations.euler_matrix(0, math.pi/4, 0)
```

Equation 18の左辺は

$$
\begin{align}
\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} &= {}^W_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A \tag{33}\\
&= {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}^{A(t)}_{A(t+\Delta t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^A \tag{34}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\cos\Delta\eta}{\sqrt{2}} \\ -\sin\Delta\eta \\ \frac{\cos\Delta\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{35}\\
&\simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\Delta\eta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{36}\\
\boldsymbol{p}^W_t &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{37}
\end{align}
$$

より，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{p}^W_{t+\Delta t} - \boldsymbol{p}^W_t}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Equation 18とEquation 28から，$\boldsymbol{\omega}^W$ は

$$\boldsymbol{\omega}^W \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

を満たすはず．

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

なので，

$$\boldsymbol{\omega}^W = {}^W_{A(t)}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Delta\eta}{\Delta t} \end{pmatrix} \tag{41}$$

であるが，これはEquation 39を満たすので，合っている．

ジャイロセンサが感知するのは，$\boldsymbol{\omega}^A$ の方．

1.2 回転行列と RPY の関係

1.2.1 証明

https://www.jstage.jst.go.jp/article/sicetr1965/40/11/40_11_1160/_pdfが参考になるし，このテクニックはすごい気がする．

RPY は，オイラー角の一種で，Z→Y→X の順番で軸周りに回転していくスタイル．回転角度を順に，Yaw(γ)→Pitch(β)→Roll(α) と呼ぶ．これを使って回転行列を表現すると

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \tag{42}$$

となる．

一方，$[\boldsymbol{\omega}]_\times = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$ であり，

$$[\boldsymbol{\omega}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$= \omega_x\boldsymbol{X}_1 + \omega_y\boldsymbol{X}_2 + \omega_z\boldsymbol{X}_3 \tag{44}$$

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

となって，ここで急に

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{X}_1 \tag{48}$$

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{O} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{X}_1^T = \boldsymbol{O} \tag{50}$$

という関係式を思いつくことができれば，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_1^T \tag{51}$$

$$\omega_y\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_2[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_2^T \tag{52}$$

$$\omega_z\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{X}_3[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_3^T \tag{53}$$

という境地に達する．これを使うと，割と簡単に $[\boldsymbol{\omega}]_\times = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T$ をオイラー角の微分について整理することが可能になる．（この境地に達しないと，回転行列の微分をして，,，のようにゴリゴリ計算しないといけなくて，sympy を使ってもちょっと無理だった．）

どう簡単になるかというと，りあえず最初の式に注目すると，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{X}_1^T \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{X}_1^T \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \left(\boldsymbol{X}_1\dot{\boldsymbol{R}}\right)(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{R})^T \tag{56}$$

が成り立つ．

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{57}$$

と置くと，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \left(\boldsymbol{X}_1\dot{\boldsymbol{R}}\right)(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{R})^T \tag{58}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dot{a}_{31} & -\dot{a}_{32} & -\dot{a}_{33} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{31} & a_{21} \\ 0 & -a_{32} & a_{22} \\ 0 & -a_{33} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \tag{60}$$

ここで，回転行列の性質 $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ と $a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$ より，微分して，$\dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} = 0$ と $\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} = -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23}$ なので，

$$\omega_x\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{31} + \dot{a}_{32}a_{32} + \dot{a}_{33}a_{33} & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & -a_{31}\dot{a}_{21} - a_{32}\dot{a}_{22} - a_{33}\dot{a}_{23} & \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{23}a_{23} \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{a}_{31}a_{21} - \dot{a}_{32}a_{22} - \dot{a}_{33}a_{23} \\ 0 & \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x\boldsymbol{X}_1 = (\dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23})\boldsymbol{X}_1 \tag{63}$$

$$\Leftrightarrow \omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \tag{64}$$

これはすごい．他の項にも適用して，

$$\omega_x = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23} \tag{65}$$

$$\omega_y = \dot{a}_{11}a_{31} + \dot{a}_{12}a_{32} + \dot{a}_{13}a_{33} \tag{66}$$

$$\omega_z = \dot{a}_{21}a_{11} + \dot{a}_{22}a_{12} + \dot{a}_{23}a_{13} \tag{67}$$

となる．これを，今回注目している Z-Y-X オイラー角に当てはめて整理すると（これもなかなか大変...）

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{68}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{69}$$

$\boldsymbol{\omega}^A$ を求めるために，両辺左から ${}^W_A\boldsymbol{R}^T$ をかけて整理すると

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \tag{70}$$

ちなみに，Listing 2で検証可能．

Listing 2: rotation_matrix.py

```python
#!/usr/bin/env python
from sympy import *
interactive.printing.init_printing(use_latex=true)
var("a:z")
roll = Matrix([[1, 0, 0],
               [0, cos(a), -sin(a)],
               [0, sin(a), cos(a)]])
pitch = Matrix([[cos(b), 0, sin(b)],
                [0, 1, 0],
                [-sin(b), 0, cos(b)]])
yaw = Matrix([[cos(c), -sin(c), 0],
              [sin(c), cos(c), 0],
              [0, 0, 1]])
rot = yaw * pitch * roll
tar = Matrix([[cos(b)*cos(c), -sin(c), 0],
              [cos(b)*sin(c), cos(c), 0],
              [-sin(b), 0, 1]])
Q = rot.transpose() * tar
print expand(Q[1,0])
```

この逆は

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} & \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^A \tag{71}$$

となる[*1]．

1.2.2　具体例で実験

subsubsection 1.1.2と同じシチュエーションを考える．角速度を求めようとすると

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

なので

$$\boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\alpha} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\alpha} \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

となり，確かに直感と合う．

また，別のシチュエーションとして，ヨー方向に 90 度回転させた後に，world 座標のピッチ方向に回転させた場合は，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \tag{75}$$

のとき，

$$\boldsymbol{\omega}^W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\boldsymbol{\omega}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

となり，確かに直感と合う．

1.3　回転行列と Quaternion の関係

http://www.mss.co.jp/technology/report/pdf/18-07.pdfが参考になる．

1.3.1　クォータニオンの定義

スカラー部を q_0，ベクトル部を $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ として，$\tilde{\boldsymbol{q}} = (q_0, \boldsymbol{q})$ とする．

回転クォータニオンは

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k})\sin\frac{\theta}{2} \tag{78}$$

で，とある座標系 B で表現された位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ を座標系は動かさずに位置ベクトルだけ回転させるときは $\boldsymbol{a}^B_{t+1} =$

[*1] http://www.wolframalpha.com/input/?i=Inverse%5B%7B%7B1%2C0%2C-sin%28b%29%7D%2C%7B0%2Ccos%28a%29%2C+sin%28a%29*cos%28b%29%7D%2C%7B0%2C-sin%28a%29%2C+cos%28a%29+*+cos%28b%29%7D%7D%5D

$\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}_t^B\tilde{\boldsymbol{q}^*}$ で，座標系を動かして位置ベクトルの先っぽにある点は動かさないときは $\boldsymbol{a}^{B_{t+1}} = \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^{B_t}\tilde{\boldsymbol{q}^*}$ となる．

ベクトルと掛け算するときは $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ を $a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ と見なして計算するというのがミソ[*2]．例えば $(3,0,0)$ を $x = z, y = 0$ の軸周りに 60 度回すとすると，回転クォータニオンは $\tilde{\boldsymbol{q}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$ なので，

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}_t^B\tilde{\boldsymbol{q}^*} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\cdot 3\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right) &(79)\\
&= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right) &(80)\\
&= \left(\frac{9}{4}\boldsymbol{i} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\boldsymbol{i} + \frac{3}{8}\boldsymbol{k}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{8}\boldsymbol{k} - \frac{3}{8}\boldsymbol{i}\right) &(81)\\
&= \frac{9}{4}\boldsymbol{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{4}\boldsymbol{k} &(82)
\end{aligned}$$

となって，回転後は $(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4})$ となる．

一般的にもできて，クォータニオンのベクトル部の掛け算は $\boldsymbol{u}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{j}$ なので

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{t+1}^B &= \tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}_t^B\tilde{\boldsymbol{q}^*} &(83)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) &(84)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) &(85)\\
&= \left\{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2} + \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) &(86)\\
&= -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\frac{\sin\theta}{2} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{u} + \left(\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right) &(87)\\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} + \{\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u}\}\cos\theta + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}\sin\theta &(88)
\end{aligned}$$

となって，綺麗にベクトル部だけ残る．

1.3.2　クォータニオンの定義

あるベクトル $\boldsymbol{a}_t$ があって，回っていて，$t = t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\boldsymbol{q}}_t$，$t = t + \Delta t$ のときのクォータニオンを $\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} &= \tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t}\boldsymbol{a}_0\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t}^* &(89)\\
&= \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\boldsymbol{a}_t\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}^* &(90)\\
&= \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{a}_0\tilde{\boldsymbol{q}}_t^*\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}^* &(91)
\end{aligned}$$

となるので，

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t} = \tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t \tag{92}$$

となる．ここで，$\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}$ は $\boldsymbol{s}^W$ 周りに微少量 $\Delta\theta$ だけ回転させたものと考えられて，

$$\tilde{\boldsymbol{\Delta q}} = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\Delta\theta \tag{93}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{t+\Delta t} - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} &(94)\\
&= \frac{\tilde{\boldsymbol{\Delta q}}\tilde{\boldsymbol{q}}_t - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} &(95)\\
&= \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\Delta\theta\right)\tilde{\boldsymbol{q}}_t - \tilde{\boldsymbol{q}}_t}{\Delta t} &(96)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{s}^W}{\|\boldsymbol{s}^W\|}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(97)\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(98)
\end{aligned}$$

と分かる．行列形式で表現すると

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(99)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_X\\ \omega_Y\\ \omega_Z\end{pmatrix}\left\{q_0 + \begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}\right\} &(100)\\
&= \frac{1}{2}\left\{q_0\begin{pmatrix}\omega_X\\ \omega_Y\\ \omega_Z\end{pmatrix} - (\omega_X q_1 + \omega_Y q_2 + \omega_Z q_3) + \begin{pmatrix}\omega_Y q_3 - \omega_Z q_2\\ \omega_Z q_1 - \omega_X q_3\\ \omega_X q_2 - \omega_Y q_1\end{pmatrix}\right\} &(101)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z\\ \omega_X & 0 & -\omega_Z & \omega_Y\\ \omega_Y & \omega_Z & 0 & -\omega_X\\ \omega_Z & -\omega_Y & \omega_X & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix} &(102)
\end{aligned}$$

となる．

しかし，$\boldsymbol{\omega}^W$ は world 座標系で表された角速度で，IMU が観測するのは local 座標で表された角速度なので，ベクトルの回転ではなくて座標系の回転であるためにクォータニオンの順番が変わることに注意しつつ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^A &= \tilde{\boldsymbol{q}}_t^*\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(103)\\
\Leftrightarrow\boldsymbol{\omega}^W &= \tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A\tilde{\boldsymbol{q}}_t^* &(104)
\end{aligned}$$

と変換しなくてはいけない．

そうすると

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^W\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(105)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A\tilde{\boldsymbol{q}}_t^*\tilde{\boldsymbol{q}}_t &(106)\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}_t\boldsymbol{\omega}^A &(107)
\end{aligned}$$

これを行列形式で書くと

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z\\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y\\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x\\ \omega_z & \omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix} \tag{108}$$

のように中身がちょっと変わるので，注意．

1.4　加速度と回転の関係

2　オイラー角表現の KalmanFilter

[*2] http://mathtrain.jp/quaternion