

「基礎 OR/OR 演習」 第 1 回 (2016/10/04) 演習課題解答例

演習課題 1. 1 「鉄鉱石配合問題」の定式化と最適解

変数の定義

x_j = 配合 1 トン当たりの鉱山 j の鉄鉱石の割合 ($j=1, \dots, n=4$)

(これは、配合 1 トン当たりの鉱山 j の鉄鉱石の重量と言い換えても同じ)

(たとえば、 $x_1=0.5$ は、鉱山 1 の鉄鉱石が 50%)

z = 配合トン当たりの費用

目的関数の定義 (数式、および、簡単な言語記述の説明)

$z = 800 x_1 + 400 x_2 + 600 x_3 + 500 x_4$ (配合 1 トン当たりの費用)

制約条件の定義 (数式、および、簡単な言語記述の説明)

$10 x_1 + 3 x_2 + 8 x_3 + 2 x_4 \geq 5$ (元素Aの必要最小量)

$90 x_1 + 150 x_2 + 75 x_3 + 175 x_4 \geq 100$ (元素Bの必要最小量)

$45 x_1 + 25 x_2 + 20 x_3 + 37 x_4 \geq 30$ (元素Cの必要最小量)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (全体が1トン; 換言すれば、全体が100%)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (変数の非負条件)

パッケージで解いた結果

最適目的関数値 = $z = 511.1$

最適目的関数値を与える解 = 最適解

$x_1 = 0.2593, x_2 = 0.7037, x_3 = 0.0370, x_4 = 0.0000$

鉄鉱石配合問題						
購入単価	800	400	600	500		
	鉄石1	鉄石2	鉄石3	鉄石4	含有量	目的関数
変数	0.25926	0.7037	0.03704	0		511.111
制約条件						
元素A	10	3	8	2	5 \geq	5
元素B	90	150	75	175	131.667 \geq	100
元素C	45	25	20	37	30 \geq	30
合計	1	1	1	1	1 =	1

Microsoft Excel 8.0d 感度レポート
ワークシート名: [Book10]鉄鉱石配合問題
レポート作成日: 01/10/08 17:23:11

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$B\$6	変数 鉄石1	0.259259259	0	800	223.6363636	120
\$C\$6	変数 鉄石2	0.703703704	0	400	66.84782609	300
\$D\$6	変数 鉄石3	0.037037037	0	600	85.71428571	118.2692308
\$E\$6	変数 鉄石4	0	91.11111111	500	1E+30	91.11111111

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$F\$9	元素A 含有量	5	44.44444444	5	2.375	0.25
\$F\$10	元素B 含有量	131.6666667	0	100	31.66666667	1E+30
\$F\$11	元素C 含有量	30	4.444444444	30	0.714285714	7
\$F\$12	合計 含有量	1	155.5555556	1	0.25	0.043478261

演習課題 1. 2 「農場経営問題」の定式化と最適解（質問(3)以降の解答は p.3 以降）

変数の定義 （質問(1)；変数の単位は以下の解答例に限る訳ではなくいろいろ考えられるが、単位の取り方によって諸係数の値が変わりうることに注意）

W =小麦の生産量兼販売量（生産したものは売れると仮定）（acres）

A =アルファルファの生産量（tons）

B =牛肉の生産量兼販売量（生産したものは売れると仮定）（tons）

A_b =アルファルファの購入量（tons）

A_s =アルファルファの販売量（tons）

z = 収入－費用

目的関数の定義（数式、および、簡単な言語記述の説明）

最大化 $z = 72W - 30/3A + 560B - 36A_b + 34A_s$ 。（「収入－費用」の最大化）

（コメント）目的関数は「費用－収入」の最小化でもかまわない。

質問(b) 小麦 1acre 当たりの収益を示す係数 72 は、 $1.60(\$/bushel) \times 50(bushel/acre) - 8(\$/acre; \text{労働費他}) = 72$ ；アルファルファ 1ton 当たりの費用 $30/3 = 10$ は $30(\$/acre) \div 3(tons/acre) = 10$ ；牛肉 1ton 当たりの収益 560 は $600(\$/ton) - 40(\$/ton; \text{労働費他}) = 560$ ；以下、自明。

制約条件の定義（数式、および、簡単な言語記述の説明）

$W + (1/3)A + 0.05B \leq 1,200$ （土地の利用上限：単位acres）

$1.5W + (2.5/3)A + 0.1B \leq 2,000$ （灌漑用水の利用上限：単位acre feet）

$A - 4B + A_b - A_s = 0$ （アルファルファの需給バランス：単位tons）

$W, A, B, A_b, A_s \geq 0$ （非負条件）

質問(b) 土地制約のアルファルファの係数1/3は、アルファルファ1ton当たり1/3acreが必要なため；用水制約のアルファルファの係数2.5/3は、アルファルファ1ton当たり1/3acreが必要で、アルファルファ1acre当たり2.5acre feetの用水が必要なため；他は表の通り。

パッケージで解いた結果

最適目的関数値 = $z = 8320000$

最適目的関数値を与える解＝最適解

W （小麦）=0, A （アルファルファの生産量）=0, B （牛肉）=20000(tons),
 A_b （アルファルファの購入量）=80000(tons), A_s （アルファルファの販売量）=0

農場経営(Buster Sod)問題

利益	72	560	-10	-36	34	8320000
	W (acres)	B (tons)	A (tons)	A_b (tons)	A_s (tons)	
	小麦	牛肉	アルファ生産	アルファ購入	アルファ販売	
変数	0	20000	0	80000	0	
土地	1	0.05	0.33333333			1000 ≤ 1200
灌漑用水	1.5	0.1	0.83333333			2000 ≤ 2000
アルファ		-4	1	1	-1	0 = 0

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$B\$6	変数 小麦	0	-6168	72	6168	1E+30
\$C\$6	変数 牛肉	20000	0	560	1E+30	411.2
\$D\$6	変数 アルファ生産	0	-3440.666665	-10	3440.666665	1E+30
\$E\$6	変数 アルファ購入 80000		0	-36	2	100.2135922
\$F\$6	変数 アルファ販売	0	-2	34	2	1E+30

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$G\$8	土地	1000	0	1200	1E+30	200
\$G\$9	灌漑用水	2000	4160	2000	400	2000
\$G\$10	アルファ	0	36	0	80000	1E+30

演習課題 1. 3 「生産ライン問題」の定式化と最適解

変数の定義

a = Astro の生産数量

c = Cosmo の生産数量

z = 総利益

目的関数の定義 (数式、および、簡単な言語記述の説明)

最大化 $z = 20a + 30c$ (総利益の最大化)

制約条件の定義 (数式、および、簡単な言語記述の説明)

$a \leq 70$ (Astro の生産能力)

$c \leq 50$ (Cosmo の生産能力)

$a + 2c \leq 120$ (組立工程 (部署

A) 労働力の上限)

$a + c \leq 100$ (検査工程 (部署

B) の労働力上限)

$a, c \geq 0$ (非負条件)

生産ライン問題					
利益	20	30			2150
	Astro	Cosmo			
生産台数	70	25			
Astro生産能力	1		70	\leq	70
Cosmo生産能力		1	25	\leq	50
組立工程労働力(A)	1	2	120	\leq	120
検査工程検査労働力(B)	1	1	95	\leq	100

パッケージで解いた結果

最適目的関数値 = $z = 2150$

最適目的関数値を与える解 = 最適解

$a = 70, c = 25$

Microsoft Excel 12.0 感度レポート

ワークシート名: [Book1]Sheet1

レポート作成日: 2011/09/28 11:49:09

変化させるセル

セル	名前	計算値	限界コスト	目的セル係数	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$F\$14	生産台数 Astro	70	0	20	1E+30	5
\$G\$14	生産台数 Cosmo	25	0	30	10	30

制約条件

セル	名前	計算値	潜在価格	制約条件右辺	許容範囲内増加	許容範囲内減少
\$H\$15	Astro生産能力	70	5	70	10	50
\$H\$16	Cosmo生産能力	25	0	50	1E+30	25
\$H\$17	組立工程労働力(A)	120	15	120	10	50
\$H\$18	検査工程検査労働力(B)	95	0	100	1E+30	5

演習課題 1. 2 農場経営

(3) どれだけの水を使用しているか？ → 2000 acre ft (acre ft は、水の単位)

Beef の生産は？ → 20,000 tons

(4) アルファルファは購入か販売か？ → 80,000 tons の購入

(5) もう 1acre の土地があったとして、どれだけの対価を支払う用意があるか？ → 支払う用意はない。(なぜなら、潜在価格＝双対価格が 0 だから) これ以上、増やしてもしょうがない。

(6) 水の制約に関する潜在価格を考える。水の割当量が微小量増加したとする場合の、割当量単位当たりの最大利益の増加の度合いが、\$4160。具体的には、割当量が 1acre foot 増加(減少)すれば、最大利益が\$4160 だけ増加(減少)する。この割合が信用できる範囲は、感度レポートから 0 から 2400 acre feet の範囲。

アルファルファのバランス制約に対する潜在価格は\$36。これは、もしアルファルファの「在庫」が手元に 1ton あると、それに伴って利益が\$36 増えることを示している。

(7) 小麦の価格が 3 倍に跳ね上がったら、最適解はどうなるか？ → 小麦の生産量 W の目的関数の係数 72 に関する「許容範囲内増加」は 6168、つまり、 W の係数が 6240 まで最適解は変化しない。価格が 3 倍に跳ね上がっても W の係数は、 $1.6 \times 3 \times 50 - 8 = 232$ であるので、最適解は変わらない(最適目的関数値は増加する；どれだけの増加かは各自計算)

(8) 最適解における利益は？ → \$ 8,320,000

(9) アルファルファの購入価格が\$36 から\$37 に変わったら、最大利益は？ → A_b の係数が -36 から -37 に「減少」するが、アルファルファ購入価格の「許容範囲内減少」が 100.2136 であるので A_b の目的関数の係数が -136.2136 (符号が負であることに注意) まで最適解は変化しない。したがって、最大利益は、\$80,000 (= A_b の最適解における値) だけ減少して、 $8,320,000 - 80,000 = \$8,240,000$ となる。

(10) アルファルファの購入価格がどれだけ下がると最適政策が変わるか？ → A_b の目的関数の係数の「許容範囲内増加」(購入価格の低下は、 A_b の係数の「増加」となることに注意) は 2 なので A_b の目的関数の係数が -34 までは最適解は変わらない。一方、\$2 以上アルファルファの価格が下がると最適政策が変化する可能性が出てくる。(直感的にも明らかのように、購入価格が\$2 以上下がった場合には、アルファルファを購入して売却することによって利益を上げられるようになる。)

演習課題 1. 3 生産ライン問題

(1) 略, (2) Cosmo の生産能力 25 台分, けんさ工程 (部署 B) の労働力 5 単位, (3) $2 \times 5 = \$10$ の増加, (4) 変化なし, (5) $15 \times 10 - 100 = \$50 > 10 \times 5 - 2 \times 10 = \30 , (6) Astro の生産台数 1 台当たり \$5 の最大利益の増加；この値が正しい範囲は $70 - 50 = 20$ 台から $70 + 10 = 80$ 台まで, (7) \$35 は「許容範囲内増加(+10)」の範囲内なので最適解は変わらず； $5 \times 25 = \$125$ の利益増, (8) \$18 は「許容範囲内減少(-5)」の範囲内なので最適解は変わらず； $2 \times 70 = \$140$ の利益減, (9) \$45 は「許容範囲内増加(+10)」の範囲を越えており最適解は変わる；利益は

少なくとも $10 \times 25 = \$250$ 増加。

第 1 回 OR 演習講評 (2016/10/04)

(1) 演習課題 1.1 (鉄鋼石配合問題)

各元素に関する成分組成を満たす最小コストの各鉱山の鉱石の割合を求めればよい。変数は、配合 1 トン当たりの各鉱山の鉱石の重量と考えればよい。全体が 1 トンと考えるので、各変数の総和を 1 とする制約が必要だが、これを忘れていた解答がチラホラある。変数を配合割合と考えてもよいが、目的関数を考えると、製品 1 トン当たりで考えていることに注意する。

ちなみに、総和を 1 とする制約を入れずに解くと、変数値の総和が 1 でない答えが出て、変数の定義で意図していた答えが出ないことになる。

(2) 演習課題 1.2 (農場経営問題)

変数の単位の取り方によって、実質的に等価ないくつもの解答が存在する。変数は 5 個と考えるのが自然かつ定式化しやすいが、アルファルファの販売量を変数としない定式化もありうる（ただし、変数 4 個でアルファルファの販売量を変数としない場合は、アルファルファの販売量が負にならないように注意する必要がある。土地と水に関する制約のほか、アルファルファに関する制約が必要になる。アルファルファは、生産、販売、購入が考えられるので、それぞれに一つずつ変数を用意するのが考えやすい。その場合、制約は、アルファルファの「入り」（生産、購入）と「出」（牛のえざ、売却）がバランスする（あるいは、入りが出を上回る）ことを制約とすればよい。なお、定式化する前にアルファルファを売却するか、購入するか計算している人がいるが、どうせ最適化するのだから、最適化モデルが購入か売却かを定める形の定式化が望ましい。また、定式化に「場合分け」を考えている解答があるが、通常の定式化では場合分けすることは許されない。(3)-(10)の質問項目は、主に、解答レポート、感度レポートから情報を読みとる練習である。

演習時間内に解答できなかった場合は、各自解答を考え、上記の解答例と見比べること。