条件付き最適設計

前田陽祐（03-240236）

2024 年 7 月 15 日

1　目的

講義における例を参考に、ある体積をもつ円筒容器の設計を考える。その際、円筒容器に使用する材料の体積を最小化することを目的とする。

1.1　設計変数

円筒容器の内側の半径 r と内側の高さ h、容器の厚み t を設計変数とする。

1.2　制約関数

円筒容器の体積 V が一定であるとする。

$$h(r,h) = \pi r^2 h - V = 0$$

1.3　目的関数

円筒容器に使用する材料の体積 V_{material} を最小化する。

材料力学より、円筒容器の内圧 p に耐えられる容器の厚み t は内圧と外圧（大気圧）p_0 の差 $p - p_0$ に比例する。

$$t = \frac{(p - p_0)r}{\sigma}$$

ここで、σ は材料の許容応力である。

また、内圧 p の最大値は、容器の高さ h と大気圧 p_0 によって決まる。

$$p = p_0 + \rho g h$$

ここで、ρ は液体の密度、g は重力加速度である。したがって、内圧と外圧の差は次のように表される。

$$p - p_0 = \rho g h$$

円筒容器の面積は $2\pi r^2 + 2\pi rh$ であるので、材料の体積は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{material}} &= (2\pi r^2 + 2\pi rh)t \\
&= 2\pi r(r+h)\frac{(p-p_0)r}{\sigma} \\
&= \frac{2\pi\rho g}{\sigma} r^2 h(r+h)
\end{aligned}
$$

目的関数は定数倍を無視することができるので、次のように表される。

$$
f(r,h) = r^2 h(r+h) = r^3 h + r^2 h^2
$$

2　最適化

2.1　ラグランジュアン

ラグランジュアン L は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
L(r,h,\lambda) &= f(r,h) + \lambda h(r,h) \\
&= r^3 h + r^2 h^2 + \lambda(\pi r^2 h - V)
\end{aligned}
$$

2.2　必要条件

必要条件は r, h, λ のそれぞれでのラグランジュアンの偏微分が 0 になることである。すなわち、

$$
\frac{\partial L}{\partial r} = 3r^2 h + 2rh^2 + 2\pi\lambda rh = 0 \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial h} = r^3 + 2r^2 h + \pi\lambda r^2 = 0 \tag{2}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - V = 0. \tag{3}
$$

2.3　解

式 (3) より、

$$
h = \frac{V}{\pi r^2} \tag{4}
$$

が得られる。これを式 (2) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
r^3 + 2r^2\frac{V}{\pi r^2} + \pi\lambda r^2 &= 0 \\
r^3 + \frac{2V}{\pi} + \pi\lambda r^2 &= 0 \\
\lambda &= -\frac{r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 r^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる。これを式 (1) に代入して、

$$
\begin{aligned}
3r^2 \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2r \cdot \left(\frac{V}{\pi r^2}\right)^2 + 2\pi\left(-\frac{r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 r^2}\right) \cdot r \cdot \frac{V}{\pi r^2} &= 0 \\
3\frac{V}{\pi} + 2\frac{V^2}{\pi^2 r^3} - 2\frac{V}{\pi} - 4\frac{V^2}{\pi^2 r^3} &= 0 \\
\frac{V}{\pi} - 2\frac{V^2}{\pi^2 r^3} &= 0 \\
r &= \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}.
\end{aligned}
$$

したがって、式 (4) より、

$$
h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}.
$$

式 (5) より、

$$
\lambda = -\frac{r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 r^2} = -\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi^4}} - \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi^4}} = -\sqrt[3]{\frac{16V}{\pi^4}}.
$$

これが最適解の候補である。

2.4 十分条件

ヘッシアン行列 H は以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial h} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial h \partial r} & \frac{\partial^2 L}{\partial h^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6rh + 2h^2 + 2\pi\lambda h & 3r^2 + 4rh + 2\pi\lambda r \\ 3r^2 + 4rh + 2\pi\lambda r & 2r^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

これに最適解の候補

$$
\begin{cases}
r = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}} \\
h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \\
\lambda = -\sqrt[3]{\frac{16V}{\pi^4}}
\end{cases}
\tag{6}
$$

を代入すると、

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} 6\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{V^2}{16\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} & 3\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} \\ 3\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} & 2\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{32} \\ \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} \\ \sqrt[3]{108} & \sqrt[3]{108} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

これを用いて、最適解の十分条件 $\partial x^* H \partial x > 0$ for $\forall \partial x \neq 0$ について考える。

$$\begin{aligned}\partial x^* H \partial x / \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} &= \begin{bmatrix}\partial r & \partial h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} \\ \sqrt[3]{108} & \sqrt[3]{108}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial r \\ \partial h\end{bmatrix} \\ &= \left(\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{32}\right)\cdot(\partial r)^2 + 2\left(\sqrt[3]{108}\right)\cdot \partial r \partial h + \left(\sqrt[3]{108}\right)\cdot(\partial h)^2\end{aligned}$$

ここで、$h = 0$ の条件より、以下の式を用いることができる。

$$\nabla h \cdot \partial x = \begin{bmatrix}\partial r & \partial h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial r \\ \partial h\end{bmatrix} = 2\pi r h \partial r + \pi r^2 \partial h = 0$$

これに最適解の候補 (6) を代入すると、

$$2\pi r h \partial r + \pi r^2 \partial h = 2\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}}\partial r + \pi \sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}}\partial h$$

したがって、

$$\partial h = -\partial r$$

を得る。これを用いて、

$$\begin{aligned}\partial x^* H \partial x / \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} &= \left(\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{32}\right)\cdot(\partial r)^2 + 2\left(\sqrt[3]{108}\right)\cdot \partial r(-\partial r) + \left(\sqrt[3]{108}\right)\cdot(-\partial r)^2 \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{32}\right)\cdot(\partial r)^2 < 0\end{aligned}$$

という結果になる。したがって、最適解の候補 (6) は最適解ではないことがわかる。

3 考察

最適解の候補 (6) は最適解ではないことがわかった。物理的な意味を考えると、$r \to 0$ の極限では、円筒容器の体積が 0 になるため、最適解は $r \neq 0$ であることがわかる。