

条件付き最適設計

前田陽祐 (03-240236)

2024 年 7 月 15 日

1 目的

講義における例を参考に、ある体積をもつ円筒容器の設計を考える。その際、円筒容器に使用する材料の体積を最小化することを目的とする。

1.1 設計変数

円筒容器の内側の半径 x_r と内側の高さ x_h 、容器の厚み t を設計変数とする。

1.2 制約関数

円筒容器の体積 V が一定であるとする。

$$h(x_r, x_h) = \pi x_r^2 x_h - V = 0$$

1.3 目的関数

円筒容器に使用する材料の体積 V_{material} を最小化する。

材料力学より、円筒容器の内圧 p に耐えられる容器の厚み t は内圧と外圧（大気圧） p_0 の差 $p - p_0$ に比例する。

$$t = \frac{(p - p_0)x_r}{\sigma}$$

ここで、 σ は材料の許容応力である。

また、内圧 p の最大値は、容器の高さ x_h と大気圧 p_0 によって決まる。

$$p = p_0 + \rho g x_h$$

ここで、 ρ は液体の密度、 g は重力加速度である。したがって、内圧と外圧の差は次のように表される。

$$p - p_0 = \rho g x_h$$

円筒容器の面積は $2\pi x_r^2 + 2\pi x_r x_h$ であるので、材料の体積は単純化して次のように表される。

$$\begin{aligned} V_{\text{material}} &= (2\pi x_r^2 + 2\pi x_r x_h)t \\ &= 2\pi x_r(x_r + x_h) \frac{(p - p_0)x_r}{\sigma} \\ &= \frac{2\pi \rho g}{\sigma} x_r^2 x_h (x_r + x_h) \end{aligned}$$

目的関数は定数倍を無視することができるので、次のように表される。

$$f(x_r, x_h) = x_r^2 x_h (x_r + x_h) = x_r^3 h + x_r^2 h^2$$

2 最適化

2.1 ラグランジュアン

ラグランジュアン L は次のように表される。

$$\begin{aligned} L(x_r, x_h, \lambda) &= f(x_r, x_h) + \lambda h(x_r, x_h) \\ &= x_r^3 h + x_r^2 h^2 + \lambda(\pi x_r^2 x_h - V) \end{aligned}$$

2.2 必要条件

必要条件は x_r, x_h, λ のそれぞれでのラグランジュアンの偏微分が 0 になることである。すなわち、

$$\frac{\partial L}{\partial x_r} = 3x_r^2 h + 2x_r h^2 + 2\pi \lambda x_r h = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_h} = x_r^3 + 2x_r^2 h + \pi \lambda x_r^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi x_r^2 h - V = 0. \quad (3)$$

2.3 解

式 (3) より、

$$x_h = \frac{V}{\pi x_r^2} \quad (4)$$

が得られる。これを式 (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} x_r^3 + 2x_r^2 \frac{V}{\pi x_r^2} + \pi \lambda x_r^2 &= 0 \\ x_r^3 + \frac{2V}{\pi} + \pi \lambda x_r^2 &= 0 \\ \lambda &= -\frac{x_r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 x_r^2} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これを式 (1) に代入して、

$$\begin{aligned}
3r^2 \cdot \frac{V}{\pi x_r^2} + 2r \cdot \left(\frac{V}{\pi x_r^2} \right)^2 + 2\pi \left(-\frac{x_r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 x_r^2} \right) \cdot x_r \cdot \frac{V}{\pi x_r^2} &= 0 \\
3\frac{V}{\pi} + 2\frac{V^2}{\pi^2 x_r^3} - 2\frac{V}{\pi} - 4\frac{V^2}{\pi^2 x_r^3} &= 0 \\
\frac{V}{\pi} - 2\frac{V^2}{\pi^2 x_r^3} &= 0 \\
x_r &= \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}.
\end{aligned}$$

したがって、式 (4) より、

$$x_h = \frac{V}{\pi x_r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}.$$

式 (5) より、

$$\lambda = -\frac{x_r}{\pi} - \frac{2V}{\pi^2 x_r^2} = -\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi^4}} - \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi^4}} = -\sqrt[3]{\frac{16V}{\pi^4}}.$$

これが最適解の候補である。

2.4 十分条件

ヘッシアン行列 H は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_r^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_r \partial x_h} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_h \partial x_r} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_h^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6rh + 2h^2 + 2\pi\lambda x_h & 3r^2 + 4rh + 2\pi\lambda x_r \\ 3r^2 + 4rh + 2\pi\lambda x_r & 2r^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

これに最適解の候補

$$\begin{cases} x_r = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}} \\ x_h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} \\ \lambda = -\sqrt[3]{\frac{16V}{\pi^4}} \end{cases} \quad (6)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} 6\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{V^2}{16\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} & 3\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} \\ 3\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} - 2\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^5}} & 2\sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{32} \\ \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} & \sqrt[3]{108} \\ \sqrt[3]{108} & \sqrt[3]{108} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

これを用いて、最適解の十分条件 $\partial x^* H \partial x > 0$ for $\forall \partial x \neq 0$ について考える。

$$\begin{aligned}\partial x^* H \partial x / \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} &= \begin{bmatrix} \partial x_r & \partial x_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} & \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{108}} \\ \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{108}} & \sqrt[3]{108} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_r \\ \partial x_h \end{bmatrix} \\ &= \left(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} \right) \cdot (\partial x_r)^2 + 2 \left(\sqrt[3]{108} \right) \cdot \partial x_r \partial x_h + \left(\sqrt[3]{108} \right) \cdot (\partial x_h)^2\end{aligned}$$

ここで、 $h = 0$ の条件より、以下の式を用いることができる。

$$\nabla h \cdot \partial x = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_r} & \frac{\partial h}{\partial x_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_r \\ \partial x_h \end{bmatrix} = 2\pi x_r x_h \partial x_r + \pi x_r^2 \partial x_h = 0$$

これに最適解の候補 (6) を代入すると、

$$2\pi x_r x_h \partial x_r + \pi x_r^2 \partial x_h = 2\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} \partial x_r + \pi \sqrt[3]{\frac{4V^2}{\pi^2}} \partial x_h = 0$$

したがって、

$$\partial x_h = -\partial x_r$$

を得る。これを用いて、

$$\begin{aligned}\partial x^* H \partial x / \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} &= \left(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} \right) \cdot (\partial x_r)^2 + 2 \left(\sqrt[3]{108} \right) \cdot \partial x_r (-\partial x_r) + \left(\sqrt[3]{108} \right) \cdot (-\partial x_r)^2 \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{32} \right) \cdot (\partial x_r)^2 < 0\end{aligned}$$

という結果になる。したがって、最適解の候補 (6) は最適解ではないことがわかる。

3 考察

最適解の候補 (6) は最適解ではないことがわかった。この結果を簡単なグラフと比較して考察する。 $V = \pi$ としたときの $f(x_r, x_h)$ のグラフを図 1 に示す。このグラフを見ると、最適解の候補 (6) の値 ($x_r \approx 1.3$) に極小値が存在することがわかる。したがって、上記の十分条件に関する議論には誤りがあり、最適解の候補 (6) は最適解であると考えられる。

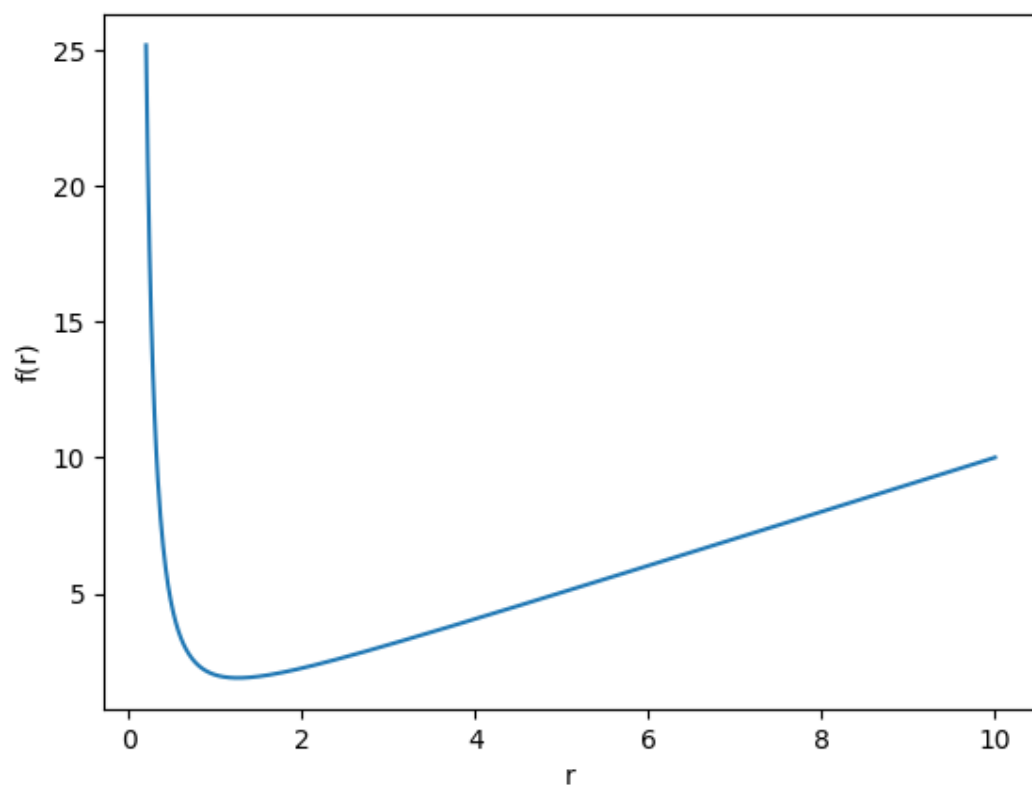


図1 $f(x_r, x_h)$ のグラフ