条件付き最適設計

前田陽祐（03-240236）

2024 年 7 月 14 日

1　目的

講義における例を参考に、ある体積をもつ円筒容器の設計を考える。その際、円筒容器に使用する材料の体積を最小化することを目的とする。

1.1　設計変数

円筒容器の内側の半径 r と内側の高さ h、容器の厚み t を設計変数とする。

1.2　制約関数

円筒容器の体積 V が一定であるとする。

$$h(r, h) = \pi r^2 h - V = 0$$

1.3　目的関数

円筒容器に使用する材料の体積 V_{material} を最小化する。

材料力学より、円筒容器の内圧 p に耐えられる容器の厚み t は内圧と外圧（大気圧）p_0 の差 $p - p_0$ に比例する。

$$t = \frac{(p - p_0)r}{\sigma}$$

ここで、σ は材料の許容応力である。

また、内圧 p の最大値は、容器の高さ h と大気圧 p_0 によって決まる。

$$p = p_0 + \rho g h$$

ここで、ρ は液体の密度、g は重力加速度である。したがって、内圧と外圧の差は次のように表される。

$$p - p_0 = \rho g h$$

円筒容器の面積は $2\pi r^2 + 2\pi rh$ であるので、材料の体積は次のように表される。

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{material}} &= (2\pi r^2 + 2\pi rh)t \\ &= 2\pi r(r+h)\frac{(p-p_0)r}{\sigma} \\ &= \frac{2\pi\rho g}{\sigma} r^2 h(r+h) \end{aligned}$$

目的関数は定数倍を無視することができるので、次のように表される。

$$f(r,h) = r^2 h(r+h)$$

2　最適化

2.1　ラグランジュアン

ラグランジュアン L は次のように表される。

$$\begin{aligned} L(r,h,\lambda) &= f(r,h) + \lambda h(r,h) \\ &= r^2 h(r+h) + \lambda(\pi r^2 h - V) \end{aligned}$$

2.2　必要条件