第 1 章

Preface cum introduction

第 2 章

CLASSICAL SOLITONS AND SOLITARY WAVES

目的

非線形方程式の古典解のうち, ミンコフスキー計量やユークリッド方程式における場の方程式に対応するものがいくつかあり, そういった古典解から相対論的量子場の理論の情報を得る.

2.1 Introduction

本ゼミにおいてのメインテーマとなるソリトンとインスタントンであるが, どちらも簡単にいえば形状を保ったまま進行し互いに衝突・追突しても崩れないような局在化 (localized) した波の事である. そもそもソリトンの英語スペルは soliton であり, これは solitary(孤立した)+on(粒子につける接尾辞 (Fermi**on**, Bos**on**, Glu**on**, Phot**on** . . .)) から来ている. すなわち孤立した波の塊でありながら歪むことなく安定に一様な速度で進行する波であり, 粒子的に振る舞うような物理的対象を指す. ここで, なぜ局在化した波が粒子としてみなせるかということについては場の理論において場が作る波をエネルギーのたまり場のようなものであると捉えると, ポツンと局在化したエネルギーが非離散的 (連続的) に形を崩さずに移動していればまるで粒子が移動していると拡大解釈できることから理解できる.

このようなソリトンは様々な応用が効く. 本来素粒子は量子論で語られるべきものであるが, 相対論的な場の理論から素粒子も localize されたエネルギーパケットをもっていることがわかっており, 古典場の理論からスタートするソリトンを用いてその振る舞いを説明することができ, ソリトンが古典論と量子論をつなげる可能性を持ち合わせていることを意味する. 他にもソリトンには原子核, 陽子中性子の模型や宇宙論のテクスチャ, 物性の磁気スカーミオンなど素粒子原子核から物性, 宇宙まで様々な分野において重要な役割を果たす.

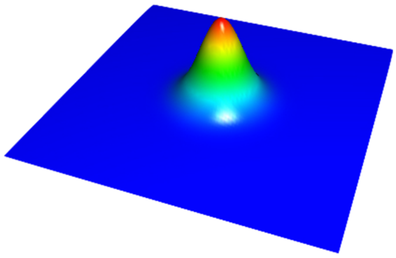


図 2.1 ソリトン

本章におけるメインテーマは sin-Gordons soliton や kink の ϕ^4 理論や'tHooft-Polyakov monopole やインスタントンなどの例を用いながらソリトン (Solitons) と孤立波 (Solitary waves) の区別をつけるということである.

また, 以下にこれから使う記法についてまとめておく.

- 空間と時空の座標系はベクトル $x^\mu(\mu = 0,1,2,3,; x^0 \equiv ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ で与えられる.
- 上付きまたは下付きの添字はミンコフスキー計量テンソル $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$;

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  で書かれる.(Mostly minus)
- 同じ添字がついてるものについては足し上げる.(縮約記法)
- ∂_μ は時間や空間での微分 $\frac{\partial}{\partial_\mu}$ を表す.
- 簡単のために本セクションに限っては 1 つの時間座標と 1 つの空間座標の (1+1) 次元, つまり $\mu = 0, 1$ とする.

2.2 Solitary waves and solitons

先に述べたように Soliton と Solitary wave は非線形の波動方程式においてどちらも局在化した特別な特徴をもつ解でありその区別はどのようにできるかを学ぶ.

2.2.1 Case of the simplest wave equation

まず, よくある最もシンプルな線形かつ非分散的である波動方程式

$$\begin{aligned} \Box\phi &= \partial^\mu \partial_\mu \phi \\ &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x,t) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

を考える. この解は以下のような 2 つの特徴をもつ.

(i) 解である $f(x \pm ct)$ は全領域で一意に定まり, 微分が定義され, 連続である (well-behaved function). また,$\omega = kc$ とすれば $\cos(kx \pm \omega t)$ と $\sin(kx \pm \omega t)$ の平面波はどちらも式 (2.1) の 1 つの解となっておりフーリエ変換で重ね合わせれば

$$f(x-ct) = \int \mathrm{d}k \left[a_1(k)\cos(kx-\omega t) + a_2(k)\sin(kx-\omega t)\right] \tag{2.2}$$

とかける. そして仮に局在化した解 $f(x-ct)$ をもってきた場合, その波のパケットは一定速度 $\pm c$ で歪みや形の崩れなく進む.

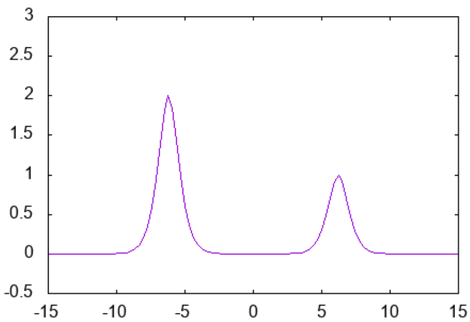
(ii) 波動方程式が線形であるが故に解として波のパケット $f_1(x-ct)$ と $f_2(x+ct)$ が与えられれば, それらの線形結合である

$$f_3(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

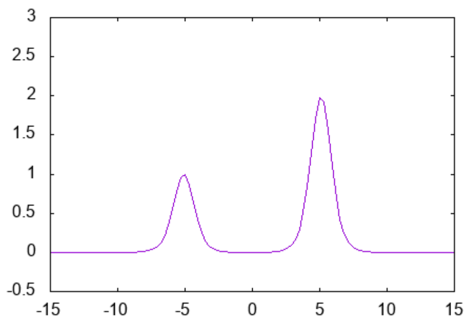
もまた解となる.
そして $t \to -\infty$ で $f(x,t)$ は 2 つのパケットはそれぞれ別の方向に向かって二分され, その後時間をかけて互いに歪まずに接近し衝突する. そして衝突後も形を崩さず $t \to \infty$ に向かって同じ 2 つのパケットが一定の速度で移動していく.

つまりこれらを簡単にまとめれば式 (2.1) の解は以下の性質を持つ.

(i) 1 つのパケットが歪まず, 形を維持したまま一定速度で移動する.
(ii) いくつかのパケットが互いに衝突したとしてもその進行速度と形が維持される.(別ファイルに添付した Gif を参照.)



(a)



(b)

2.2.2 Case of Klein-Gordon equation

しかしながら大半の波動方程式は非線形校を含んでいたり, 分散的であったりと複雑で全ての波動方程式が性質 (i),(ii) を満たしているとは限らない.

そのうちの一つが式 (2.1) に m^2c^2 の項を加えた Klein-Gordon 方程式

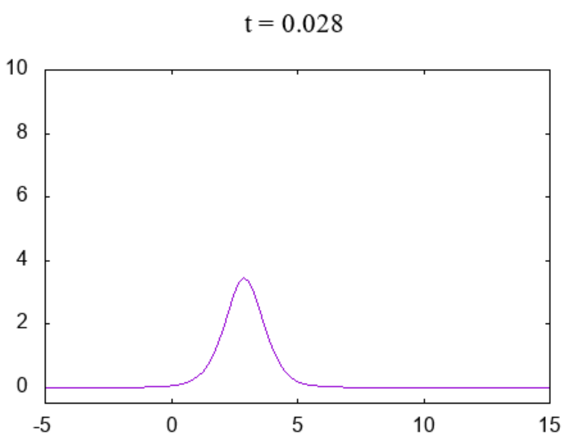
$$\left(\Box + m^2c^2\right)\phi(x,t) \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2\right)\phi(x,t)$$

$$= 0 \tag{2.3}$$

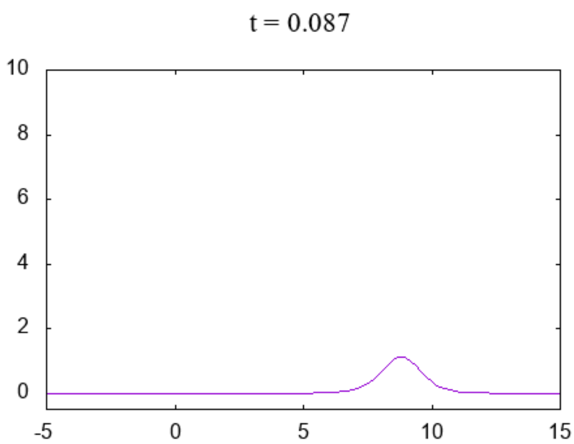
がある. これは明らかに先と同様に線形でありながら $\cos(kx \pm \omega t)$ と $\sin(kx \pm \omega t)$ の平面波解をもつ. しかし今回の場合は $\omega^2 = k^2c^2 + m^2c^4$ であり分散的という違いがある. いま先と同様に線形であることを用いて局在化したパケット解

$$f(x - ct) = \int \mathrm{d}k \, [a_1(k)\cos(kx - \omega t) + a_2(k)\sin(kx - \omega t)]$$

を作ったときに今回の場合, 波の進行速度が $\omega(k)/k$ というように波数 k に依存することになる. したがって一度作った波のパケットが時間とともに違った速度で形を広げながら伝搬してしまい, 先に述べた (i)(ii) の特徴を持ち合わせていないということがわかる.(別ファイルに添付した Gif を参照.)



(c)



(d)

なお紹介だけにはなるが, 他には解析的には解けないが式 (2.1) に ϕ^3 の項を付け加えたような以下の非線形波動方程式も (i)(ii) の特徴を持ち合わせていない.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) + \phi^3(x,t) = 0 \tag{2.4}$$

2.2.3 View of energy density

先の議論を踏まえて一般的には Soliton と Solitary-wave の以下のような区別がなされている.

- (i) の特徴を満たすもの $\cdots$ **Solitary-wave, Soliton**
- (i) を及び (ii) の特徴を満たすもの $\cdots$ **Soliton**

しかしこれではどういったときに (i) または (ii) の特徴を満たすのかはわかっておらず, 普遍的ではない.

ここで場 ϕ_i の波自体に着目するのではなく, むしろ場 ϕ_i がつくるエネルギー密度 ϵ に着目してみる. まず条件としては以下のような設定を課す.

- 空間内の全エネルギー $E[\phi_i]$ は保存し, 一般性を失わない.
- エネルギー E の最小値は 0.
- 空間内でエネルギーは有限の値をとるが無限遠では $E=0$.
- 任意の時刻 t において十分遠方 $(x \to \infty)$ で最小値 $E[\phi_i]$ に漸近するような場の方程式の解に対して局在化した (localized) という言葉をつかう.

ではこれらをいくつかの例を紹介しながら localize するとはどういうことか見ていく. 先に紹介した式 (2.4) の方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t)+\phi^3(x,t)=0$$

においては場 ϕ が作るエネルギーを見てみると

$$E[\phi]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\phi^4\right] \tag{2.5}$$

で与えられる. これは $\phi=0$ で最小値 $E[\phi]$ をとるから,localize すると言いたければ, 十分遠方 $x\to\infty$ で $\phi(x,t)\to 0$ となっていれば良い.

他には自発的対称性の破れを記述する有名な

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\phi+\phi^3=0 \tag{2.6}$$

という非線波動方程式におけるエネルギーは

$$E[\phi]=\int_{-x}^{\infty}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\phi^2-1\right)^2\right] \tag{2.7}$$

で与えられる. この $E[\phi]$ は $\phi(x,t)=\pm 1$ で最小値をとるから,localize すると言いたければ, 十分遠方 $x\to\infty$ で $\phi(x,t)\to\pm 1$ となる必要がある.

Solitary wave

localize するとはどういうことかが普遍的に述べられた上でエネルギー密度の観点から Solitary wave とは何かを考える.Solitary wave は場の方程式において localize しているという特異性だけでなく次のような時空依存のエネルギー密度を描くものと定義できる.

$$\epsilon(\boldsymbol{x},t)=\epsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t)\quad(\boldsymbol{u}:\text{速度ベクトル}) \tag{2.8}$$

これは明らかに場が作るエネルギー密度のパケットが一定の速度で形が変わらずに移動するという (i) の特徴を表現できており, これがまさに Solitary wave の定義とできる.

Soliton

次に Soliton についてもエネルギー密度の観点からその定義を考える.Soliton は先の議論の特徴 (i) だけでなく特徴 (ii) に重きを置く必要がある. 特徴 (ii) はいくつかのパケットが互いに衝突したとしてもその進行速度と形が維持されるということであった. そこで以下のような状況設定で議論を進める.

- 非線形波動方程式で localize した N 個の solitary wave 解 $\epsilon_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}t)$ で解が構成されている.

上記の状況を式で表せば

$$\varepsilon(x,t) \to \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0\left(x-a_i-u_i t\right), \quad \text{as } t \to -\infty \tag{2.9}$$

$$\varepsilon(x,t) \to \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0\left(x-a_i-u_i t+\delta_i\right), \quad \text{as } t \to +\infty \tag{2.10}$$

$$(\boldsymbol{\delta_i} : \text{定ベクトル})$$

となる. これは $t \to -\infty$ であるいくつかの Solitary wave のエネルギーパケットをもった解が一定速度かつ歪みなく進んだのち $t \to \infty$ で時間発展したとしても形が変わらないという特徴 (ii) の描像を描けているといえる. つまりこのエネルギー密度の関係式を満たすものが Soliton であると定義できる.

以上で Soliton と Solitary wave の区別ができるようになった. そしてこの世界には静的解を含めて Solitary wave は割と存在する. しかしながら Soliton は式 (2.10) の要請の縛りが強くほとんど存在しないというのが現状である. そもそも非線形場の方程式に対して Solitary wave の要請式 (2.8) を確認するのも割と大変な作業となる. そして式 (2.9)(2.10) の両方を満たしているかを確認するのはさらに労力が必要となる.(この本ではやりたきゃ一人で時間をかけてやってどうぞと記載してある.) また, 物理で Soliton と使われるとき大体は Solitary wave も含めてそう呼ぶ慣習があり, 重要なことはその違いを理解していることである. 研究等なんらかの場合に厳密に Soliton であることを示す必要がある場合には式 (2.8)(2.9)(2.10) の要請を確かめられれば良い. 一応逆散乱法やバックグラウンド変換などといったエレガントな方法も存在するということも紹介しておく.

2.3 Some solitary waves in two dimensions

2.3.1 Static Solitary wave and boundary conditions

解が時間依存していない静的解も Solitary wave であったからそのいくつか簡単な例について 2 次元系で見ていく.

以下のようなローレンツ不変なラグランジアン密度

$$\mathscr{L}(x,t) = \frac{1}{2}(\phi)^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi) \tag{2.11}$$

を考える.[*1]なおここでは光速 $c=1$ とし, ポテンシャル $U(\phi)$ は ϕ の関数で最小値が 0 のものとする. 作用の変分をとれば

$$\delta\left(\int dt \int_{-x}^{x} dx \mathscr{L}(x,t)\right) = 0 \tag{2.12}$$

となりこの内の一つから以下の波動方程式が導かれる.

$$\Box\phi \equiv \ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \phi}(x,t) \tag{2.13}$$

そしてエネルギーの関数は

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}(\phi)^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi)\right] \tag{2.14}$$

となる. そして $U(\phi)$ が $M(\geq 1)$ 個の点で最小値 0 をとする.

$$U(\phi) = 0 \quad \text{for} \quad \phi = g^{(i)}; \quad i = 1, \ldots, M \tag{2.15}$$

また, 仮に場 $\phi(x,t)$ が定数であれば式 (2.14) のエネルギーも最小値 $E[\phi]=0$ を

$$\phi = g^{(i)}; \quad i = 1, \ldots, M \tag{2.16}$$

でとる.

いま我々は簡単のために静的解の Solitary wave を考えるから式 (2.14) において時間の項を消せば

$$\phi''(x) \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = +\frac{\partial U}{\partial \phi}(x) \tag{2.17}$$

となる.

さらに Solitary wave は有限のエネルギーで localize したエネルギー密度をもっているという要請をこれに課す. 前セクションで述べたが,localize するには任意の時刻 t において十分遠方 $(x \to \pm\infty)$ で最小値 $E[\phi_i]$ に漸近する必要があった.(($\partial\phi/\partial x \to 0$ も.)) いま式 (2.15) で最小値をとることがわかっているから,localize するという要請から以下の境界条件が成立する.

$$\boxed{U(\phi) \to 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \to 0, \qquad \text{as} \quad x \to \pm\infty}$$

[*1] プライム記号 ("′") は時間微分を表しドット記号 ("˙") は空間微分を表す.

2.3.2 Solve the equation (2.17)

式 (2.17) をよく見ればニュートンの第二法則と同じになっていることに気付く. というのも $x \to t$, 場 ϕ を質点 (analogue particle) の位置座標と捉えればこれは単なるポテンシャルが $-U(\phi)$ の運動方程式である. このことからこの運動の全エネルギーは

$$W \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 - U(\phi) \tag{2.18}$$

となることがわかる. ここで先に述べた境界条件を課せば $W = 0$ のゼロエネルギーとなる. また式 (2.14) で与えられる実際の系においてのエネルギーに立ち返ってみても

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + U(\phi)\right]\mathrm{d}x \tag{2.19}$$

となり, これは明らかに analogue 粒子の運動の作用積分と同じ形になっていることがわかる. したがって, この静的解は粒子のゼロエネルギー ($W = 0$) の軌道の有限作用に対応しているといえる.

さらに式 (2.17) を解いてみる. 両辺に ϕ' をかけて積分すれば

$$\begin{aligned} \phi'\phi'' &= \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ \Rightarrow \int \phi'\phi''\mathrm{d}x &= \int \frac{\partial U}{\partial \phi}\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(\phi')^2 &= U(\phi) \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる.(なおここで境界条件である $x \to \pm\infty$ で $U(\phi) \to 0, (\partial\phi/\partial x) \to 0$ を課すことで積分定数はゼロと定まっている.) 式 (2.20) はまさに analogue 粒子におけるビリアル定理に対応していることがみてとれる.

2.3.3 Some potential

Case of potential which have unique minimum

先の結果を踏まえていくつかのポテンシャル上で analogue 粒子がどのような振る舞いをするかをみてみる. まず図 2.2 のような $\phi = \phi_1$ で最大値 $U(\phi_1) = 0$ を取るようなポテンシャルを考える. このとき analogue 粒子のゼロエネルギーの軌道はポテンシャル上で $\phi = \phi_1$ で最大値 0 をとりその他は常に負の値をとる. ここで Solitary wave の境界条件に立ち返ってみると, 十分遠方 ($x \to \pm\infty$) で $\phi = \phi_1$ となる必要があるが, 図を見てもわかるように例えば $x \to -\infty$ で $\phi = \phi_1$ だった場合に $x \to \infty$ で $\phi = \phi_1$ にもう一度なることは決してできない. というのも式 (2.18) において $W = 0$ であったから, 仮に $\phi = \phi_1$ から右か左のどちらかに転がっていってしまった場合常に $[-U()\phi)]$ は負の値で小さくなっていくから $W = 0$ に保つために運動エネルギー項 $(1/2(\mathrm{d}\phi/\mathrm{dx})^2)$ は常に正で値が大きく

なる. つまり一度 $\phi = \phi_1$ から進んだら粒子は止まることができなくなる. つまりこのポテンシャルでは解かずして Solitary wave にはなり得ないということがわかる.

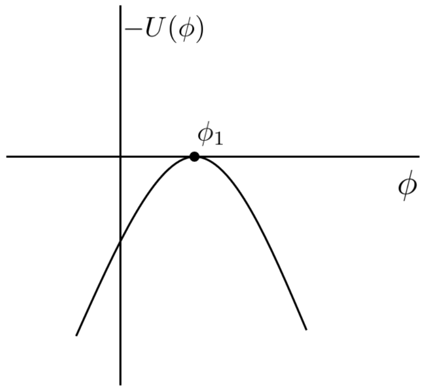


図 2.2 (a)

Case of potential which have degenerate minima

次に 2 個以上最小値が存在する例として図 2.3 のようなポテンシャルを考える. このポテンシャルは $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ の 3 つの場所で最小値をとる. 境界条件を満たすには $x \to \pm\infty$ で ϕ が 3 つの値のどれかになる必要があるが, 今回の場合それが可能である. 考えうるパターンとしては以下の 4 つに限られる.

1. $x \to -\infty$ で $\phi = \phi_1$ をスタートし,$x \to \infty$ で $\phi = \phi_2$ となる.
2. 1. の進行方向が逆パターン.
3. $x \to -\infty$ で $\phi = \phi_2$ をスタートし,$x \to \infty$ で $\phi = \phi_3$ となる.
4. 3. の進行方向が逆パターン.

これは $x \to -\infty$ で ϕ_1 にスタートし,$x \to \infty$ で ϕ_2 に至る場合を例にして考えると境界条件から ϕ_2 に至ったときには $U(\phi)$ と $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\phi$ はゼロとなっていることに起因する. 式 (2.20) 及び式 (2.17) において ϕ' の速度や加速度などは全て

$$\begin{aligned} \phi''' &= \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}U(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right) = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\phi^2}\phi' = 0 \\ \phi'''' &= \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\phi^2}\phi'' + \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}\phi^3}\left(\phi'\right)^2 = 0 \text{ etc.} \end{aligned} \tag{2.21}$$

というようにゼロになって消えてしまう. したがって ϕ_2 を超えて ϕ_3 に進んだり,ϕ_1 に再び戻ったりというパターンは完全になくなり, 上記の 4 パターンに限られる. そしてこの 4 パターンでのみ Solitary wave が存在しうるということになる.

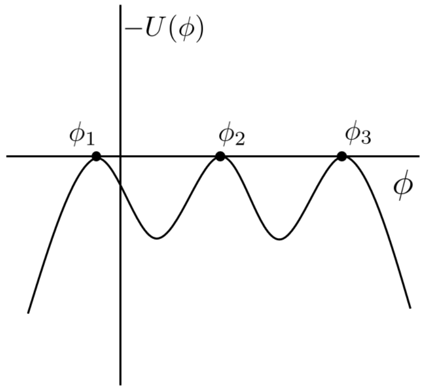


図 2.3 (b)

以上 2 つのポテンシャルの例から一般的に以下のようなことが言える.

(i) $U(\phi)$ の最小値が 1 つの場合, 静的な Solitary wave は存在しない.
(ii) $U(\phi)$ が n 個の最小値を保つ場合, 静的な Solitary wave は $2(n-1)$ 個存在する.

2.3.4 Solve the equation (2.20) with specific potential

式 (2.20) を実際にポテンシャルを当てはめて解いてみる.

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 = U(\phi)$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \pm\left[2U(\phi)\right]^{1/2} \tag{2.22}$$
$$\Rightarrow x - x_0 = \pm\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{[2U(\bar{\phi})]^{1/2}} \tag{2.23}$$

Case of static solution

まず静的解の場合について求めるために'kink' と呼ばれる以下のラグランジアン密度を考える.

$$\mathscr{L}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - U(\phi)$$
$$U(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - m^2/\lambda)^2 \tag{2.24}$$

このポテンシャルが作る運動方程式は

$$\phi'' - \phi' = m^2\phi - \lambda\phi^3 \tag{2.25}$$

となる. 静的なため時間の項が消え式 (2.25) は

$$\phi'' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\phi} = \lambda\phi^3 - m^2\phi \tag{2.26}$$

となり, これを式 (2.23) に代入すれば

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{\mathrm{d}\bar{\phi}}{\sqrt{\lambda/2}(\bar{\phi}^2 - m^2/\lambda)} \tag{2.27}$$

となる. いま $\phi(x_0) = 0$ とすれば

$$\phi(x) = \pm(m/\sqrt{\lambda}) \tanh\left[(m/\sqrt{2})(x - x_0)\right] \tag{2.28}$$

を得る. そしてこのプラス側をグラフにプロットすれば図 2.4 のような kink 解ができあがる. これを見ると明らかに Solitary wave として x_0 が変わるとしても形が変わらないまま並進移動することが伺える.

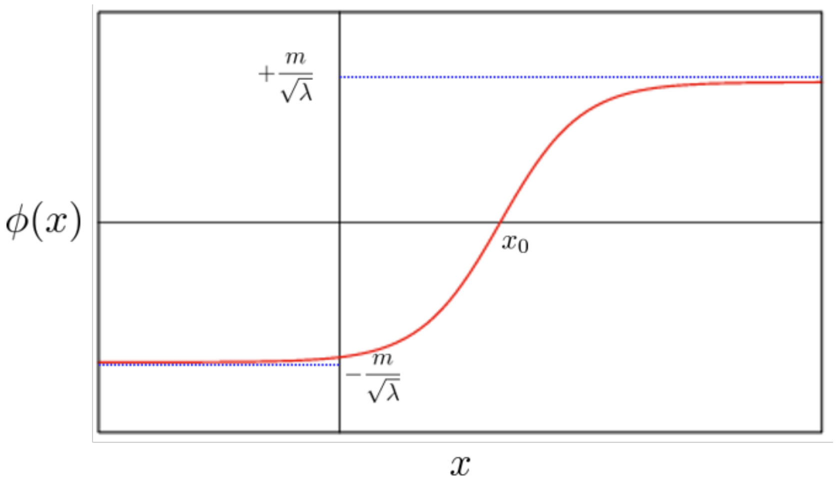


図 2.4 kink 解 ($\phi(x)$)

また,kink 解のエネルギー密度は

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) = 2U(\phi), \quad \text{using (2.22)} \tag{2.29}$$

$$= (m^4/2\lambda)\mathrm{sech}^4\left[m(x - x_0)/\sqrt{2}\right] \tag{2.30}$$

となり, これをグラフにプロットすれば図 2.5 のようになり確かに localize していることがわかる.

また,kink のエネルギー密度の合計は classical kinkmass M_{cl} と呼ばれ

$$M_{\mathrm{cl}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\epsilon(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\lambda} \tag{2.31}$$

で与えられ, 有限の値を取る.

以上のことから正の kink や負の antikink はまさに真の Solitary wave であるといえる. しかしながら kink や antikink はどちらも Soliton ではない.

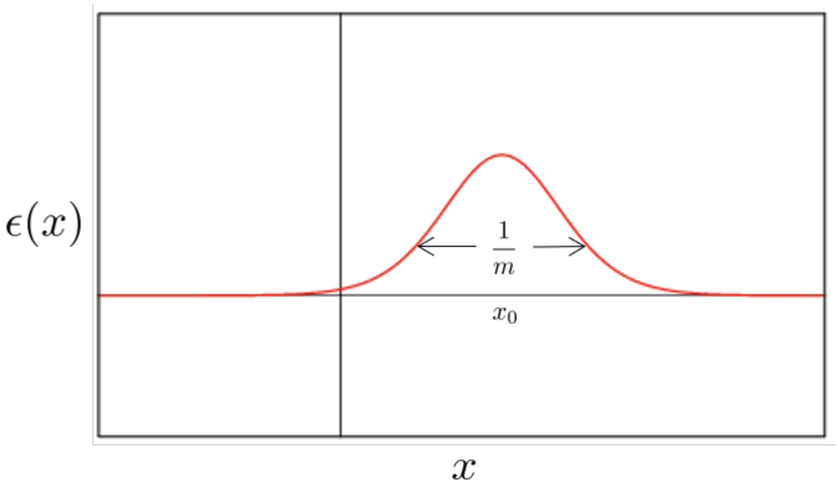


図 2.5 kink 解 ($\epsilon(x)$)

Lorentz-transform to the static solution

いま求めた kink 解はローレンツ不変な量であることがわかっており, 静的な解をローレンツ変換することによって動く kink 解を得ることができる. したがって式 (2.28) を速度 $1 > u > -1$ で動く系でローレンツ変換をすれば

$$\phi_u(x,t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x-x_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right] \tag{2.32}$$

となる.(式 (2.25) に代入すればこれが解になっていることも確かめられる.) またこの動的な kink 解の幅は $\sqrt{1-u^2}/m$ となっており, ローレンツ収縮が起きていることも見て取れる. 実際, 時間依存する kink 解 (2.32) のエネルギーを計算すると

$$\begin{aligned}
E\left[\phi_u\right] &= \int_{-x}^{x} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\left(\phi_u\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\phi_u'\right)^2 + U\left(\phi_u\right)\right] \\
&= \int_{-x}^{x} \mathrm{d}x \left[\left(\frac{m^4}{4\lambda}\frac{u^2}{1-u^2} + \frac{m^4}{4\lambda}\frac{1}{1-u^2} + \frac{m^4}{4\lambda}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. \times\ \mathrm{sech}^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{m^4}{2\lambda\left(1-u^2\right)} \mathrm{sech}^4\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{x-x_0-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{m^3}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{M_{\mathrm{cl}}}{\sqrt{1-u^2}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

となり, 静的な M_{cl} に対してローレンツ収縮が起きていることがわかる.

Case of $U(\phi)$ has three degenerate minima

$U(\phi)$ が 3 つの最小値をもつ縮退した例として以下のポテンシャルを考える.

$$U(\phi)=\frac{1}{2}\phi^2\left(\phi^2-1\right)^2$$

この最小値は $\phi=0,\pm1$ で縮退しており境界条件は

$$\phi=[-1,0],[0,1],[1,0]\text{ and }[0,-1]\quad\text{ at }x=[-\infty,\infty]$$

のように設定できる. また具体的な計算は行わないが式 (2.17) にこれを代入し解いた結果は

$$\phi=\pm\left(1+e^{\pm2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\tag{2.34}$$

となる. この解も localize したエネルギー密度をもち, 全エネルギーは有限となる.

2.3.5 Static solutions to system of coupled scalar fields

先の議論では 1 つの場 ϕ に対する解の考察であったが,2 つ以上の場が couple してできる静的な解についても考察する. 以下のようなラグランジアン密度を考える.

$$\mathscr{L}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi_{\mathrm{i}}}{\partial\mathrm{t}}\right)^2-\left(\frac{\partial\phi_{\mathrm{i}}}{\partial\mathrm{t}}\right)^2\right)-\mathrm{U}\left(\{\phi_{\mathrm{i}}\}\right)\tag{2.35}$$

このとき場の方程式は

$$\Box\phi_i=-\frac{\partial U}{\partial\phi_i};\quad i=1,\ldots,N\tag{2.36}$$

となり, 静的な場合時間の項を削除して

$$\phi''=\frac{\partial U}{\partial\phi_i}\tag{2.37}$$

となる. これもよく見れば前回と同様に analogue 粒子の描像と捉え直すことが可能で