I.　はじめに

i.　数学の学習

数学の学習段階は以下の 3 つの段階がある。

1. 数学用語・記号の定義と、それが表す概念 (意味) をを学ぶ
2. 学んだ定義に関する定理とその証明を理解する
3. 証明した定義を使って問題を解く

上であげた学習の 3 段階は高校でも、大学でも変わらない。しかし、高校の学習ではどうしても 3 の問題を解く段階が重視されている。大学入試の合格という大きな目標があるため仕方ない。そのため、高校までは数学用語の定義の理解や定理とその証明に関しては、あまり力を入れて学習してこなかった人も多いだろう。

しかし、大学以降の数学の教科書は主に 1 と 2 を扱う。

ii.　数学書の構成

数学書は体系を作り上げている。数学書では議論の出発点として最初に証明なしで認める基本的な事実を挙げる。これを**公理**という。数学書では、公理と定義を出発点にしてこれらに関する定理を証明していく形を取る。このように、公理と定義をもとに次々と定理を証明していく様子は以下のように図で表すことができる。

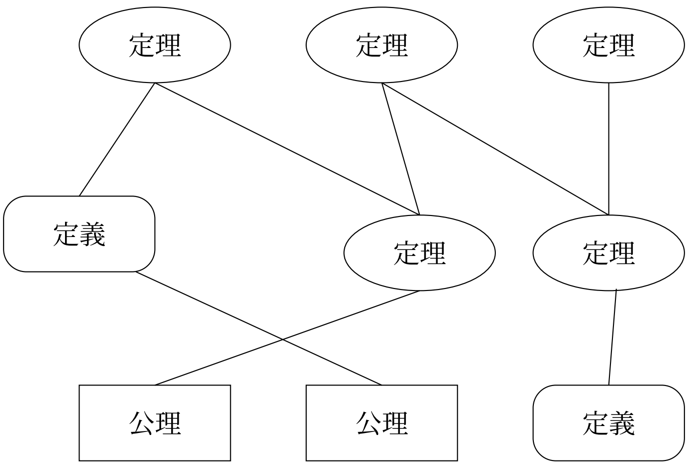

図 1　数学書の構成

図 1 のようなつながり全体を**体系**と呼ぶ。数学書を読むときは、この体系を意識して読むことが大切である。

iii.　定理・命題・補題・系

数学書には定理以外にも、命題、補題、系などが登場する。これらの違いを明らかにしておく。

1. 命題

命題とは、正しくないか正しいかが数学的にはっきり定まる文のことである。命題は真か偽かのどちらかである。例えば、以下の 2 つの文は命題である。

- 1 は素数である
- 1 は奇数である

命題の内容が正しいとき、その命題は**真**であるといい、正しくないときは**偽**であるという。上の例では、1 は素数でないので、1 は素数であるという命題は偽である。2 は奇数であるので、2 は奇数であるという命題は真である。

数学の命題は、断言する文である。そのため、ただ断言しているだけではその命題の内容が数学的に正しいかはわからない。証明されて初めてその命題の内容が正しいことがわかる。

2. 定理

定理とは、命題のうち、証明された命題のことである。定理は真である。定理は、公理や定義、他の定理を用いて証明される。定理は数学書の体系を作り上げる上で必要な命題であるので、しっかり理解することが大切である。

3. 系と補題

系とは、証明した命題や定理を使えばすぐに得られる新たな命題のことをいう。また、ある命題を証明するために補助として使う命題のことを補題という。

iv. 数学書を読むときの注意点

1. 地の文は注意して読む

数学書には定義や命題など見出しをつけた別立ての部分がたくさんある。だから、数学書を読む経験が浅い人は別立ての部分ばかりに集中してしまい、別立てではない地の文を軽く読み飛ばしてしまいがちだ。しかし、地の文にも重要な情報が書かれていることがあるので、地の文も注意して読むことが大切である。

地の文は「なぜそのようなことを考えるのか」を説明する動機づけやが書かれていることもある。動機付けを理解することで、その後の議論が理解しやすくなるため、地の文も注意して読むことが大切である。

2. 定義は頻繁に使われる

図 1 で示したように数学書は定義を出発点に議論が進んでいく。今までの学習では定義の理解をあまり重視してこなかったかもしれないが、大学以降の数学書では定義を頻繁に使っている。そのた

め、定義を理解しておくことが大切である。定義を紙に書くなどして頭に染み込ませることが重要である。

3.　詰まったときの処方箋

数学書では、「定義 $\rightarrow$ 定理 $\rightarrow$ 証明」という流れで体系を築き上げていく。この体系は過去の数学者たちが問題を解決する過程で考え出した概念の定義や発見した定理を整理して並べたものである。そのため、定義や定理の背景には、「こういう問題を解きたい」という問題意識がある。しかし、すでに出来上がった体系をこれから学ぶ我々に、それと同じ気持ちはない。定義や定理を見ても、「なぜこのような概念を考えるのか」「この定理を証明すると何が良いのか」という意味がわからないことが多い。

　では、どうすればいいか。まずは、**定義や定理の前後にある地の文から動機を探す**のが 1 つのやり方である。次に、**章や節など大きなまとまりをざっと通しで読む**のもいいやり方である。定義や概念は実際に使われているところを見ると理解が深まる。通して読む範囲としては、わからなくなった部分を含む章や節などが標準的である。数学書は全体で体系を作り上げていくが、1 つの章や節には全体の体系の一部である「小さな体系」が書かれていることが多い。

　ざっと理解するには目次や前書きが助けになる。目次に並んでいる章や項目は、そこに何が書かれているかを一言でまとめたものである。だから目次を見ると、体系全体の地図を見ることができる。「なぜこんなことを考えるか」という疑問はこのように解決しよう。

　一方で、扱っている内容の抽象度が高いという理解の阻害要因もある。高校までの数学では、具体的な式で表せられる対象の扱い方を学ぶ。例えば、関数であれば $ax^2 + bx + c$ という 2 次関数や $\sin x$ や $\cos x$ といった具体的に式で表現できる対象を扱ってきた。しかし、大学以降では例えば「n 回微分可能な関数 $f(x)$ はどのような性質を持っているか」を考える。$f(x)$ がどのような関数であるかは決めずに「n 回微分可能な関数」という抽象的な性質を持った関数を一般的に考えている。

　数学書を読む中で、抽象的な議論で理解ができなかったら、具体例を考えることが大切である。例えば、n 回微分可能な関数 $f(x)$ がどのような関数であるかを考えるとき、$n = 1$ の場合を考えると具体的に $f(x)$ がどのような関数であるかがわかる。この具体例を考えることで、一般的な議論を理解しやすくなる。数学書の中に具体例が書かれていたら、絶好の機会だと思って読み込んで見ることが重要である。ただ、大学以降の数学書では定義を頻繁に使っている 1 つ具体例を考えるのも難しいことが多い。その場合はもちろん自分で時間をかけて考えることも大切であるが、他の参考書やネットで具体例を探すのも有効である。

コラム 数学書で数学を学ぶ意義

初めて本格的な数学書を読んだとき、多くの人がその難解さに圧倒されることだろう。「定義 $\to$ 定理 $\to$ 証明」の嵐に打ちひしがれてしまうかもしれない。大学で単位を取るためだけなら確かに数学書をじっくり読む必要はおそらくなく、問題演習を中心に学習することで十分だろう。しかし、数学書を読むことには大きな意義がある。
それは、「自分の中に正しい根拠を持つ」ことである。数学を使うものの中には、定理を支えればいいと考えている人もいるかもしれない。しかし、学習の目標の 1 つは道具として使えるかだけにとどまらずなぜ正しいのか、それを自分なりに理解することではないだろうか。方法だけを学ぶのでは、何かを学んだという実感も持てないはずだ。

II.　数学と論理

この章では、「でない」、「かつ」、「または」、「ならば」などの論理記号を使って数学的な命題を表す方法を学ぶ。これらは日常生活でも使う用語であるが、数学の論理を書き表すときには少し違った意味を持つ。この章で学ぶことは、数学の論理を理解するための基礎である。

i.　「~でない」

日常語の「~でない」との違いは、数学の「~でない」では 2 回「~でない」は使うと肯定を意味することである。

- あの人は一番になるのを望んでいる。
- あの人は一番になるのを望んでいないことはない。

日常語では上の 2 つの文は違うという印象を得るだろう。しかし数学では上の 2 つの文は同じ意味である。数学らしい例を出すと例えば、「m は偶数ではない、ではない」という文があったら、これは「m は偶数である」と同じである。

また、ある命題が真であるときその否定は偽である。例えば、「2 は偶数である」は真であるが、その否定である「2 は偶数ではない」は偽である。逆に偽の命題の否定は真である。数学では原則として、命題は真か偽かのどちらかである。

ii.　「かつ」と「または」

まず、「かつ」は日常語と同じく「P かつ Q である」といえば「P と Q の両方が成り立つ」という意味である。P, Q は命題である。次に、「または」日常語と意味が異なってくるので注意が必要だ。数学では「P または Q である」といえば「P か Q の少なくとも一方は成り立つ」という意味である。少なくとも一方とは、片方だけでもいいし、両方でもいい。日常語ではどちらか 1 つしか成り立たないようにかんじるかもしれないが、数学では両方成り立つ場合も含まれる。

「かつ」と「または」の否定も考えてみよう。まずは「かつ」の否定を考える。「P かつ Q である」の否定は「P でない、または、Q でない」というと同じである。例えば、「m は偶数かつ素数である」の否定は「m は偶数でない、または、m は素数でない」となる。次に「または」の否定を考える。「P または Q である」の否定は「P でなく、かつ、Q でない」というと同じである。例えば、「m は偶数かつ素数である」の否定は「m は偶数でない、または、m は素数でない」となる。

ここでは、「かつ」と「または」の否定は「かつ」が「または」に、また「または」が「かつ」に変わることに注意してほしい。そして「かつ」や「または」で繋がれている命題も否定されていることに注意する。

iii.　「ならば」

「ならば」は数学用語の中でも難しいので、しっかり理解しておきたい。まず、「P ならば Q」が正しくても、「P である。」が真であるとは限らない。例えば、「n が偶数ならば〇〇が成り立つ。」とあっても n が偶数かはわからない。もし n が偶数だったら〇〇が成り立つといっているだけで、n が偶数かは別の話である。

次に、裏と逆の扱いについて注意する。「P ならば Q である。」という命題に対して、「P でないならば、Q ではない。」という命題を**裏**といい、「Q ならば P である。」という命題を**逆**という。ある命題が真であるからといって、その逆や裏が真であるとは限らない。例えば、「$a = 1$ ならば $a^2 = 1$ である」という命題が正しくても、その逆である「$a = 1$ でないならば、$a^2 \neq 1$」とは限らない。また、裏である「$a \neq 1$ ならば $a^2 \neq 1$ である」とも限らない。textbf もとの命題とその裏や逆は無関係であると覚えておこう。

iv.　対偶

「P ならば Q である。」という命題に対して、「Q でないならば P でない。」という命題を**対偶**という。重要なのは、**もとの命題とその対偶は真偽が一致する**ということである。

コラム 前件否定の誤謬と後件否定の誤謬

III.　数学書の読み方

この章では、実際の定義や定理を見ながら数学書の読み方を体感していく。

i.　定義は設定も合わせて覚える

数学書では定義が頻繁に使われる。だから、**数学用語と記号の定義を覚える**ことが重要である。定義 1 を使って定義を読むときのポイントを 3 つ説明する。

定義 1 約数と倍数

①a を整数、b を 0 でない整数とする。②$a = bq$ を満たす整数 q が存在するとき、③b は a の**約数**であるという。また、a は b の**倍数**であるといい、$b|a$ と書く。

1.　定義されている用語・記号

全体を読んで、定義されている数学用語と記号を読み取る。③で**約数**、**倍数**、|という記号が定義されている。

2.　定義における設定

用語と記号を押さえたら、最初に戻って定義における設定を読み取る。①で設定を述べている。数学の文章を読むときは、a, b, x, y などの文字が何を表すかについて常に意識することが重要だ。**定義は設定も合わせて覚えよう。**

3.　定義の内容

最後に定義の内容を読み取る。定義 1 では、②という条件が定義の内容である。この条件が満たされているとき、③であるという。

コラム 定義の覚え方

数学は暗記科目ではないと言われることが多いが、定義だけは覚えないといけない。定義をなかなか覚えられないときは**定義を読んだ後に何も見ずに紙に書く練習をする**といいだろう。もちろんすぐには覚えられず、何度も忘れてしまうだろう。数学書を読み進めていく中で、**数学用語や記号が登場するたびに、定義を思い出してみて正確に言えなかったら、定義をもう一度読み直していよう。**特に、命題の証明や例の説明の中で、定義の内容がどのように使われているかをしっかり押さえる。
索引を活用して定義を覚えこんでしまうまで何度も復習することが大切である。**数学書はなんども行ったり来たり繰り返し読むのが当たり前**だと思っておこう。

ii.　定義の種類

定義は大きく分けて対象の定義、関係の定義、性質の定義の 3 つに分けることができる。

1.　対象の定義

例 1

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

??節で説明したように、内積の定義も読んでみましょう。定義されている数学用語は**内積**で記号は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ である。定義における設定は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をベクトルとし、θ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角としている。定義の内容は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ としている。対象定義は、**定義されるものが何であるか**が定義の内容である。

2.　関係の定義

例 2

直線 l と平面 α が点 O で交わっているとする。点 O を通る α 上のすべての直線が l と交わるとき、直線 l は平面 α と**直交**しているという。

例 2 の定義も読んでみましょう。定義されている数学用語は**直交**である。定義における設定は、直線 l と平面 α が点 O で交わっているとしている。定義の内容は、点 O を通る α 上のすべての直線が l と交わるとき、直線 l は平面 α と直交しているとしている。関係の定義は、**どのようなときにその関係をもつか**が定義の内容である。

3.　性質の定義

例 3

関数 $f(x)$ がすべての実数 x について、$f(x) = -f(-x)$ を満たすとき、$f(x)$ は**奇関数**であるという。

定義されている用語は**奇関数**である。定義における設定は、関数 $f(x)$ がすべての実数 x について、$f(x) = -f(-x)$ を満たすとしている。定義の内容は、関数 $f(x)$ が奇関数であるとき、$f(x) = -f(-x)$ を満たすとしている。性質の定義は、**どのような性質を持つか**が定義の内容である。ただし、「△△ を満たすものを⋆⋆という」という形がいつでも性質の定義であるというわけで

はなく、△△ を満たすものが 1 つしかない場合は対象の定義である。定義に限らず、**数学書を読むときは、文脈を意識するように心がけよう。**

iii.　具体例の読み方

具体例について理解することはとても重要である。例を読むときは 3 つのポイントを意識することが大切である。

例 4

3, -5 は 15 の約数である。また、-6 は 2 の倍数である。

1.　何についての例か (主題)

まず、全体を読んで何についての例なのかを押さえる。例 4 は定義 1 で定義した**約数**、**倍数**についての例である。主題を読み取るときは細かい部分に捉われず、大まかに何についての例を挙げているかを押さえることが大切である。

2.　主題について何を述べているか (主張)

主題について、何が正しい (成り立つ) と述べられているかを命題の形で書き下す。例 4 の主張を命題の形で取り出すと、「3 は 15 の約数である」、「-5 は 15 の約数である」、「-6 は 2 の倍数である」の 3 つである。

3.　主張はなぜ正しいのか (理由)

例の証明は定義や定理を使って示す。今回は定義 1 から「3 は 15 の約数である」を証明する。定義を利用するときは定義の設定を当てはめて考える。a に 15、b に 3 を当てはめればいいことがわかる。定義では「a を整数、b を 0 ではない整数」としているが、今回は問題なさそうである。設定の確認が終わったら、条件が満たされているかを確認する。定義の条件は「$a = bq$ を満たす整数 q が存在する」ことであるから、$q = 5$ が存在するので今回の例の証明ができた。

定義を使って議論するときは、「設定のあてはめ $\rightarrow$設定の確認 $\rightarrow$条件の確認」の流れで証明を行おう。

iv.　命題の仮定と結論を捉える

命題 1

a, b を整数とする。$a \neq b$ かつ $b|a$ であるならば、$|b| \leq |a|$ である。

命題 1 のように、数学の命題の多くは、「△△　ならば ⋆⋆である。」という形をしている。この

△△ の部分を**仮定**といい、⋆⋆の部分を**結論**という。「ならば」を含む命題を読むときは、仮定と結論の関係をしっかり読む必要がある。

　また、この命題には $b|a$ という仮定があるが、この仮定には「b は 0 ではない整数」という設定が隠されている。**定義に含まれた仮定**が証明に必要になるケースもあるので注意しよう。

　いつでも、「ならば」の前が仮定、後が結論になるとは限らない。仮定や結論の中に「ならば」が入ることもある。また、「このとき」や「~とすると」などの言葉も、「ならば」と同じような意味で使われる。以下の命題 2 で仮定と結論を探してみよう。

命題 2

実数 x, y について、$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば $x = y = 0$ であるとする。このとき、すべてのベクトルは $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ (α, β は実数) の線形結合で表される。

v.　根拠と結論のつながりをひとつひとつ確認する

次の命題 3 の証明を見てみよう。

命題 2

a, b は整数とする。$a \neq 0$ かつ $b|a$ であるならば、$|b| \leq |a|$ である。

命題 3 の証明

①$b|a$ だから $a = bq$ を満たす整数 q が取れる。②$a \neq 0$ だから、$q \neq 0$ である。
③よって $|q| \geq 1$ であるので、④ $|a| = |bq = |b||q| \geq |b|$ である。

　証明を読むときは、根拠と結論のつながりをひとつひとつ確認する。特に、次の 2 つのタイプの表現に注意する。

1. **A だから B である**
2. **「よって」、「したがって」、「以上より」**

　1 の表現が出てきたら、次のことを注意しよう。

- なぜ A であるか
- なぜ A だったら B だといえるか

「なぜ A であるのか」の検討を忘れがちなので注意する。例えば、「A だったら B である」が正しくても、そもそも「A である」が正しくなければ、B という結論は導けない。「本当に A なのか?」と立ち止まって考える必要がある。

　①はで考えるべきことは以下の 2 つだ。

- なぜ $b|a$ であるか。
- なぜ $b|a$ だったら、$a = bq$ を満たす整数 q が取れるのか

「なぜ $b|a$ であるか。」については、命題 3 の仮定である。照明の中では、、仮定に書かれている設定と条件は正しいものとして使える。「なぜ $b|a$ だったら、$a = bq$ を満たす整数 q が取れるのか」については、定義 1 を使って証明する。

②について考えることは以下の 2 つだ。

- なぜ $a \neq 0$ であるか
- なぜ $a \neq 0$ だったら、$q \neq 0$ であるのか

「なぜ $a \neq 0$ であるか」については、命題 3 の仮定である。「なぜ $a \neq 0$ だったら、$q \neq 0$ であるのか」について、ここで証明したいのことは「$a \neq 0$ ならば $q \neq 0$」という命題である。ここでは対偶を取ってみよう。対偶を取ると「$q = 0$ ならば $a = 0$」となる。これは $a = bq$ より明らかである。よって、$q \neq 0$ である。対偶が真なのでもとの命題も真である。

ここで、「よって」「したがって」「以上より」に関するポイントを考える。これらは、ここまでの議論で得られた事項を組み合わせると次の結論が得られるという意味で使われる。③ では、$|q| \geq$ という結論が得られるのは、①と②からであるといっている。

vi. 証明を読み終えたら

証明を読み終えたら、次の 2 つのことをするといい。まず、textbf 命題の仮定が証明のどこで使われたかを確認する・もし使っていない仮定があれば、根拠と結論の繋がりについて見落としがあるかもしれないので、証明をよく見直そう。次に、**証明全体の流れを見直す**。何も見ないで証明の大筋を再現できるくらいくらいに頭に入れるのを目標としよう。何も見ないで紙に書き起こすのも良いだろう。

vii. 命題は正確に当てはめて使う

証明した命題を使うときは、以下の 3 つの段階を踏む。

1. 当てはめ
2. 条件の確認
3. 結論の使用

IV. 全称命題と存在命題

「任意の」と「存在して」という数学用語にも慣れる必要がある。

i. 全称命題と存在命題

「すべての △△ について $\cdots$」であるという命題を**全称命題**という。例えば、

$$(\diamond)\text{すべての整数}n\text{について、}n^3+2n\text{は 3 の倍数である。}$$

は全称命題である。また、同じ意味で以下のようにも表せられる。

$$(\diamond)\text{任意の整数}n\text{について、}n^3+2n\text{は 3 の倍数である。}$$

「ある △△ が存在して $\cdots$」であるという命題を**存在命題**という。例えば、

$$(\diamond)\text{ある 2 以上の整数}n\text{について、}2^n+1=n^2\text{が成り立つ。}$$

は存在命題である。また、同じ意味で以下のようにも表せられる。

$$\text{ある 2 以上の整数 n が存在して、}2^n+1=n^2\text{が成り立つ。}$$

存在命題については、**一意性**が問題になることも多い。一意性とは、「ある条件を満たすものがただ 1 つ存在する。」という意味である。数学で存在するといえば、少なくとも 1 つ存在するという意味で、いくつあるかはわからない。

ii. 全称命題の証明

全称命題の証明を命題 4 を使って考えよう。

命題 4

すべての実数 x について、$0 \leq x-[x] < 1$ が成り立つ。

命題 4 は、「$0 \leq x$ かつ $x-[x] < 1$ である」という全称命題である。「すべての △△ について⋆⋆である」という形の全称命題は以下の手順で証明をする。

1. △△ から勝手に 1 つ取ってくる
2. 取ってきたものについて⋆⋆であることを証明する。

命題 4 証明

①x を実数とする。②ガウスの記号の定義より、[x] は x 以下であるから、[x] $\leq x$ である。③よって、$0 \leq x - [x]$ が成り立つ。④また、ガウス記号の定義より、$[x]+1$ は x 以下ではない。⑤すなわち $[x]+1 > x$ であるから、$x-[x] < 1$ である。⑥以上より、$0 \leq x-[x] < 1$ が成り立つ。

①は実数を勝手に 1 つ取ってきて x と名前をつけるという意味である。「実数 x を任意に取る」や「任意の実数 x について」などということもある。

次の例を見てみる。「すべての △△ について⋆⋆である」の形をした全称命題を証明する際に、一度にまとめて扱うのが難しい場合がある。いくつかの特定の場合に分けて考察することを、**場合分け**という。場合分けの議論の読み方は以下のようになる。

1. 証明の全体読んで、どのような場合分けをされているかをみる
2. ありうる全ての場合が尽くされているかを確認する
3. 証明のどの部分で場合分けが扱われているかを押さえる。

iii.　存在命題の証明

存在命題の証明を命題 5 を使って考えよう。

命題 5 と証明

命題 5

a, b は有理数で、$a < b$ とする。このとき、$a < c < b$ を満たす有理数 c が存在する。

証明

$c = \frac{a+b}{2}$ とする。a, b は有理数だから、c も有理数である。$a < b$ だから、$c - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} > 0$ である。同様に、$b - c > 0$ であるから、$a < c < b$ である。よって、$a < c < b$ を満たす有理数 c が存在する。

「ある △△ について、⋆⋆である。」という存在命題の基本は以下のようである。

1. △△ を作る手順を述べる
2. 作ったものについて、確かに⋆⋆であることを証明する。

iv.　一意性の証明

一意性の証明には、**条件を満たすものが 2 つあるとして、その 2 つが実は等しいことを証明する。**

v.　全称と存在の順序

まず「存在 →全称」の順番の命題を見てみよう。

例 5 有理数に対するリュービルの近似不等式

命題 5

α を有理数とする。このとき、ある正の数 c が存在して、すべての整数 q と 0 でない整数 q について、$\frac{p}{q} \neq \alpha$ ならば、

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{|q|}(\star)$$

が成り立つ。

証明

①α は有理数だから、$\alpha = \frac{a}{b}$ となる整数 a と自然数 b が取れる。 ②$c = \frac{1}{b}$ とする。③p を整数、q を 0 でない整数とする。$\frac{p}{q} \neq \alpha$ とする。 ④このとき、

$$|\alpha - \frac{p}{q}| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq-bp}{bq}\right| = \frac{|aq-bp|}{|bq|}$$

である。⑤さらに、$\frac{p}{q} \neq \alpha$ だから $aq - bq$ は 0 ではないので $|aq - bq| \geq 1$ である。⑥したがって証明終了。

存在が先なので、正の数 c は後から取る p や q とは無関係に定めなければならない。最初の存在命題の証明は以下の手順で証明する。

1. 正の数 c を作る手順を述べる
2. 作った c が条件を満たすことを証明する

また、2 の条件は全称命題の証明なので、それを加味すると以下の手順を踏むことになる。

1. 正の数 c を作る手順を述べる (①と②)
2. 整数 p と 0 でない整数 q を勝手に 1 組取ってくる
3. 取ってきた p と q について、$\frac{p}{q} = \alpha$ ならば$\star$が成り立つことを示す

次に「全称 $\rightarrow$存在」の形の命題を扱う。

命題 6 有理数の稠密生

実数が持つ次の性質を**アルキメデスの原理**という。

任意の実数xに対し、$x < n$を満たす整数 n が存在する。

アルキメデスの原理を使うと以下のことがわかる。
定理
α を実数とする。任意の正の数 ϵ について、$|\alpha - r| < \epsilon$ を満たす有理数 r が存在する。

証明
①正の数 ϵ を任意に取る。②アルキメデスの原理より、$\frac{1}{\epsilon} < m$ を満たす整数 m が取れる。③$\frac{1}{\epsilon} > 0$ だから、m は正の整数である。④$m\alpha$ は実数だから、$m\alpha < k$ を満たす整数 k が存在するので、そのような k のうち最小のものを取る。⑤このとき、$k - 1 \leq m\alpha \leq k$ であるから、$-1 \leq m\alpha \leq 0$ である。⑥ そこで、$r = \frac{k}{m}$ とすれば、⑦r は有理数で、

$$|\alpha - r| = |\alpha - \frac{k}{m}| = \frac{|m\alpha - k|}{m} \leq \frac{1}{m} < \epsilon$$

が成り立つ。

全称命題を使って存在命題を証明するときは、以下の手順を踏む。

1. 正の数 ϵ を任意に取ってくる
2. 有理数 r を作る手順を述べる
3. 作った r について $|\alpha| - r < \epsilon$ が成り立つことを示す。

V.　写像を題材に数学の文章を読みこなす

VI.　さまざまな論法

最後に数学の証明でたびたび登場する論法について取り上げる。
最初に数学でよく登場する論法の一覧を示す。

- 対偶
- 数学的帰納法 (累積帰納法)
- 部屋割り論法
- 背理法

以下では、数学的帰納法 (累積帰納法)、部屋割り論法、背理法について説明する。

i. 数学的帰納法 (累積帰納法)

ii. 部屋割り論法

iii. 背理法

無理数のディオファントス近似

定理
α を無理数とする。このとき、次の不等式を満たす整数の組み p, q(ただし $q \neq 0$) が無限個存在する。

$$(\spadesuit) 0 < |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

証明
①α は無理数だから整数ではないので、$0 < |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ が成り立つ。②よって $p = [a], q = 1$ とすれば、♠が成り立つ。③したがって、♠を満たす整数の組み p, q が存在する。
④仮に、♠を満たす整数の組み p, q が有限個しかないとする。⑤それらを $p_1, q_1, p_2, q_2, \cdots, p_n, q_n$ とする。$|\alpha q_i - p_i|(i = 1, 2, \cdots, n)$ の最小値を ρ とする。⑥α は無理数だから $\rho > 0$ である。⑦そこで、j を満たす 2 以上の整数 N を取る。⑧ディリクレの定理より $|\alpha - \frac{a}{b}| \leq \frac{1}{Nb}$ かつ $1 \leq b \leq N - 1$ を満たす整数 a, b が存在する。⑨この a, b について、

$$0 < |\alpha - \frac{a}{b}| \leq \frac{1}{Nb} < \frac{1}{b^2}$$

より♠が成り立つから、$a = p_k, b = q_k$ となる k が存在する。⑩このとき、

$$|aq_k - p_k| = |\alpha - \frac{p_k}{q_k}| = |\alpha - \frac{a}{b}|b \leq \frac{1}{Nb}b = \frac{1}{N} < \rho$$

である。⑪これは、ρ の最小性に反する。⑫したがって、♠を満たす整数の組み p, q が無限個存在する。

背理法の証明を読むときは次のことを注意して読む。
(1) 主張の否定を確認する
上の例では主張の否定が④で述べられている。

(2) どのような命題について矛盾が生じたのか読み取る
⑪で矛盾が生じている。最小値の定義から集合 $\{1, 2, \cdots n\}$ のすべての要素 i について、$|\alpha q_i - p_i| \geq \rho$ が成り立つはずだが、⑩では不等式 $|aq_k - p_k| < \rho$ が成り立っている。⑨で k は集合 $\{1, 2 \cdots n\}$ の要素だといわれているので、次の命題が真になる。 集合 $\{1, 2, \cdots n\}$ のすべての要素 i について、$|\alpha q_i - p_i| \geq \rho$ が成り立つはずだが、

これは上の命題の否定であるから、その否定と元の命題が両方真になっている。

(3) 証明の中で主張の否定が本質的にどこで使われているか押さえる