I.　線形代数と有名不等式

i.　三角不等式

三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

1. $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
2. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq |\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\||$

三角不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

次の 2 つの式を満たす平面ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を考える。

$$|\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}| = 1$$

$$|2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| = 1$$

このとき、$|\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}|$ の最大値と最小値を求めよ。

問題

関数 $f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2-2t+1}$ $(0 \leq t \leq 1)$ が最小値をとる t の値を求めよ。

問題

関数 $g(t) = \sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}$ $(t > 1)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

ii.　コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

コーシー・シュワルツの不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

$x, y, z > 0,\ x + y + z = 1$ のとき、以下に答えよ。

1. $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の最小値

参考

- https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/76/76-3.pdf
- https://mathematicsgarden.com/cschwarzprac/

II.　座標空間と数ベクトル空間

ここでは 2 次元と 3 次元の座標空間の問題を解いてみよう。

直線のパラメータ表示

直線 l 上の 1 点 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$ と方向ベクトル $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ が与えられたとき、直線 l 上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_0 + ta \\ y_0 + tb \\ z_0 + tc \end{pmatrix}$$

パラメータ t を消去すると、直線 l の方程式は次のように表される。

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

平面の方程式

平面上の点 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ が与えられたとき、平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) = 0$ を満たす。よって

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

となる。これを整理すると、

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

となり、これが平面の方程式となる。

それでは問題を解いてみよう。

問題

点 $(0,2,1)$ を通り、$\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

問題

xyz 平面の平面 $P: 2x-y+3z=1$ に関して、点 $A\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ と対照な点 A' を求めよ。

..........解答

III.　連立方程式と階数

階数

任意の行列 A は行基本変形を繰り返すことによって、**階段行列**にすることができる。このとき、この階段行列のなかの少なくとも 1 つは 0 ではない成分を持つ行の個数 r を行列 A の**階数**といい、$\mathrm{rank}A$ で表す。
任意の行基本変形に対して、行列 A の階数は一意に定まる。

連立方程式の解と階数に関する定理を紹介する。

連立方程式と階数

n 元連立一次方程式に関して、$\boldsymbol{A}$ を係数行列、$\boldsymbol{b}$ を定数ベクトルとして $\boldsymbol{Ab}$ が拡大係数行列とする。このとき、次のことが成り立つ。

- $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{Ab}=r$ のとき、連立方程式は解を持つ。
- $n>\mathrm{rank}A$ なら、連立方程式は無数の解を持つ。
- $n=$rank $\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{Ab}=r$ のとき、連立方程式はただ 1 つの解を持つ。
- $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{Ab}=r<n$ のとき、連立方程式は解を持たない。

次に、行列の世界の積の逆元を意味する**逆行列**について紹介する。

逆行列

正方行列 A に対して、A と積をとると単位行列 I が得られるとき、A の逆行列 A^{-1} が存在するといい、$AA^{-1}=A^{-1}A=I$ を満たす。 逆行列が存在するとき、A は**正則行列**であるという。

逆行列と余因子行列

n 次正方行列 A が正則であるとき、その逆行列 A^{-1} は次のように表される。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

$\tilde{A}$ は A の余因子行列であり、A の余因子 C_{ij} は次のように表される。

$$C_{ij} = \tilde{A_{ji}}$$

ここで、$\tilde{A_{ji}}$ は A の i 行 j 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものである。

逆行列に関する問題を解いてみよう。**掃き出し法**によって逆行列を求める問題を解いてみよう。

問題

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

掃き出し法とは、$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ の形になるように、

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & A^{-1} \end{pmatrix}$$

ように、行列 A を I に変換する方法である。この方法を用いて、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.　線形写像

i.　線形写像

線形写像

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次の 2 つの条件を満たす写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を**線形写像**という。

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
2. $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$

ii. 表現行列

表現行列

どんな線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対しても、ある一意な行列 A が存在して、

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と表される。この行列 A を f の**表現行列**という。

表現行列に関わる問題を解いてみよう。

問題

線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が次のように定義されるとき、f の表現行列を求めよ。

$$\text{f は} y = (\tan x) \text{での鏡映}$$

解答

線形写像の表現行列を求めるには、以下の 2 つの方法がある。

- 定義域の写像の元を一般的に表して、終域の元を求める。
- 基底を用いて表現行列を求める。

今回は 2 の方法を用いて表現行列を求める。xy 座標では $(1, 0)$ と $(0, 1)$ を基底として用いることができるので、それぞれの写像 f による像を求める。

$$f(1, 0) = (\tan 1, 0) = (\cos 2x, \sin 2x)$$

$$f(0, 1) = (0, \tan 1) = (\sin 2x, -\cos 2x)$$

よって求める表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

問題

$\mathbb{R}^3$ の点 A を、A から平面 $x-2y+z=0$ へ下ろした垂線の足に写す線形写像の表現行列を求めよ。 ………………………………………………………………………………

解答

$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルがどのように写るかを考える。$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$ に対して法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (1,-2,1)$ を用いて、$\boldsymbol{e}_1$ から平面へ下ろした垂線の足は

$$\boldsymbol{n} + t\boldsymbol{e}_1 = (1+t, -2t, t)$$

これが平面 $x-2y+z=0$ 上にあればよいので、$t=-\frac{1}{6}$ となる。どうの様にすることで、$\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ と $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ が写るかを考えると、求める表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

V.　部分空間

部分空間

ベクトル空間 V の部分集合 W が次の 2 つの条件を満たすとき、W は V の**部分空間**であるという。

1. $\mathbf{0} \in W$
2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ に対して、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$
3. $\lambda \boldsymbol{u} \in W$

部分空間を扱った問題を解いてみよう。

問題

次の W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間となるか判定せよ。

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - z = y + 2z = x - y\}$$

………………………………………………………………………………

解答

まず、$\mathbf{0} = (0,0,0) \in W$ である。

VI.　基底と次元

基底

ベクトル空間 V のベクトルたち $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たすとき、これらは V の**基底**をなすという。

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の 1 次独立である。
2. V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表される。

次元

ベクトル空間 V の基底の数を V の**次元**といい、$\dim V$ で表す。V が有限個のベクトルで生成できないとき、V は無限次元であるという $(\dim V = \infty)$。

一次独立と一次従属

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が**一次独立**であるとは、$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとき、$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ に限るをいう。
それ以外のとき、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は**一次従属**であるという。

一次独立について重要な定理を紹介する。

一次独立と同値な条件

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は、以下のいずれかが成り立つことである。$V = \mathbb{R}^n$ のとき、

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ に対し、$n \times k$ 行列 $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ のランクが k である。
- $\det A \neq 0$
- A が正則行列である。
- $< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n >= \mathbb{R}^n$

問題

次のベクトルの組みが一次独立であるか判定せよ。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して行基本変形をして簡約化して階段行列を求めると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$rankA = 3$ であり、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立である。

基底の変換行列

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$\dim V = n$ とする。V の 2 つの基底

$$A : \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$$

$$B : \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$$

が与えられたとき、これらの基底の間の変換行列 P は次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

行列 P を A から B への基底の変換行列という。

問題

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

として、$\mathbb{R}^3$ の基底 $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から $\mathbb{R}^3$ の基底 $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ への変換行列 P を求めよ。

....

解答

定義より、$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)P$ であるので、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ として、$P = A^{-1}B$ を求める。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

別解

掃き出し法を用いて直接 $P = A^{-1}B$ を求めることもできる。((AB) の形になるように行列を並べて、A の部分を単位行列に変換する)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

参考

- https://uxhpu.net/mathematics/change_of_basis/