

## 目次

1	線形探索	1
1.1	線形探索の実装	1
1.2	番兵	1
2	二分探索	2
2.1	配列を探索する二分探索	2
2.2	一般化した二分探索	4
2.3	めぐる式二分探索	5
3	二分探索木	6
3.1	二分探索木の作成	6
3.2	二分探索木の探索	8
3.3	二分探索木の削除	9
3.3.1	子ノードがない場合	10
3.3.2	子ノードが1つの場合	10
3.3.3	子ノードが2つの場合	11
3.4	二分木の実装	11
4	平衡木	15
4.1	二分木の問題点	15
4.2	平衡木	15
4.3	AVL 木	15
4.3.1	回転	17
4.4	赤黒木	18
4.5	B 木	18
4.6	Treap	18
5	参考	18
6	力任せ法	18
7	KMP 法	20
7.1	力任せ法の無駄	20
7.2	KMP 法の仕組み	20
7.3	スキップテーブルの作成	22
7.4	KMP 法の実装	24
8	BM 法	26
8.1	BM 法の仕組み	26
8.2	パターンテーブルだけの実装の問題点	27
8.3	BM 法の実装	28
9	ラビン・カープ法 (ローリングハッシュ)	30

9.1	ラビン・カーブ法の実装	30
10	問題	31
11	最大公約数とユークリッドの互除法	34
11.1	問題と解説	34
11.1.1	ABC 118 C - Monsters Battle Royale	34
12	拡張ユークリッドの互除法	35
13	素数判定	36
13.1	ナイーブな実装	36
13.2	エラトステネスの篩	37
13.3	エラトステネスの篩の実装	39
14	素因数分解	39
14.1	ナイーブな実装	39
14.2	SPF を用いた実装	40
14.3	互いに素	41
14.4	問題 1.	45
15	冪乗: 繰り返し二乗法	46
16	逆元とフェルマーの小定理	47
16.1	フェルマーの小定理と逆元	48
17	参考	49
18	スタック	50
18.1	スタックの実装	50
19	キュー	53
19.1	キューの実装	54
20	線形リスト	57
20.1	線形リストの実装	57
21	ツリー (木構造)	60
21.1	木構造の用語	60
21.1.1	根と葉	60
21.1.2	深さと高さ	60
21.1.3	二分木 (binary tree)	61
22	ヒープ	62
22.1	ヒープの実装	64
23	セグメント木	66
23.1	数学の知識の確認	66
23.1.1	二項演算	66
23.1.2	閉じた演算	66
23.1.3	完全二分木	66

## 1 線形探索

23.2	セグメント木の仕組み	67
23.2.1	セグメント木の構造	67
23.3	セグメント木の実装	68
23.3.1	セグメント木の構築	68
23.3.2	要素の更新	69
23.3.3	区間の演算結果の取得	69
23.3.4	実装	70
24	BIT	72
24.1	和	72
24.2	更新	72
24.3	実装	73

探索の章で扱うアルゴリズムは以下と通りです。

- 線形探索
- 二分探索
- 二分探索木
- Treeq
- 平衡木 (AVL 木、B 木、赤黒木)
- ハッシュ法

検索 (サーチ) とは、データ集合 (配列など) から、目的とする値を持った要素を探し出すことを意味する。

### I. 線形探索

**線形探索**は、目的とする要素が見つかるまで先頭から順に要素を見ていく探索方法です。例えば、以下の配列で 0 を探すなら前から順番に、8, 4, 5, 0, 2 の順に要素を見ていきます。

8	4	5	0	2
---	---	---	---	---

#### i. 線形探索の実装

コード 1 線形探索の実装

```
1 def linear_search(array: list[int], value: int) -> int:
2     """
3     線形探索をして一致するならその index を返す. 一致しないときは -1 を返す
4     """
5     for i in range(len(array)):
```

```

6         if array[i] == value:
7             return i
8
9     return -1

```

## ii. 番兵

番兵法では探索するデータ集合の最後に目的とする数を追加します。最後に番兵を追加することで、より効率的に探索を行うことができます。実際には番兵を追加してもそこまで効率が良くなるわけではないですが、番兵を追加することで、ループの条件判定を省略することができます。

8	4	5	3	2	0
---	---	---	---	---	---

番兵

コード 2 番兵の実装

```

1 def linear_search(array: list[int], value: int) -> int:
2     """
3     線形探索をして一致するならその index を返す. 一致しないときは -1 を返す
4     """
5     i = 0
6     copied_array = array.copy()
7     copied_array.append(value)
8     while copied_array[i] != value: i += 1
9
10    return i if i < len(array) else -1

```

## II. 二分探索

### i. 配列を探索する二分探索

二分探索はソートされた配列に対して高速に探索を行うアルゴリズムの一つです。二分探索では探索する区間が条件に応じてどんどん半分になっていくため、計算量は  $O(\log n)$  となります。以下の配列に対して、二分探索で 18 を探す場合を考えましょう。

最初の区間は配列全体を取ります。0-indexed な配列を考えると、mid は 39 となり目的の 18 より大きいです。mid が目的の値より大きい場合、右の区間を狭めます。right = mid - 1 とします。

5	18	22	28	39	48	51	68	82	94
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↑				↑				↑	
left				mid				right	

right を 3 に更新しました。mid = (0 + 3) // 2 = 1 となります。mid の値は 18 で目的の値と一致します。

5	18	22	28	39	48	51	68	82	94
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↑	↑		↑						
left	mid		right						

次に、目的とする値を 19 として配列に存在しない場合を考えましょう。mid = 1 の値は 18 で目的の値よりも小さいので、下の図のように left を mid + 1 に更新します。mid = (2 + 3) // 2 = 2 となります。mid の値は 22 で目的の値より大きいです。よって、right を mid - 1 に更新します。すると、right = 1, left = 2 となり、left > right となるので探索を終了します。

5	18	22	28	39	48	51	68	82	94
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		↑	↑						
		left	right						

二分探索の実装は以下の通りです。

コード 3 二分探索の実装

```

1 def binary_search(A: list[int], value: int) -> int:
2     left, right = 0, len(A) - 1
3
4     while left <= right:
5         mid = (left + right) // 2
6
7         if A[mid] == value:
8             return mid
9 
```

```

10     if A[mid] < value:
11         left = mid + 1
12     else:
13         right = mid - 1
14
15     return -1

```

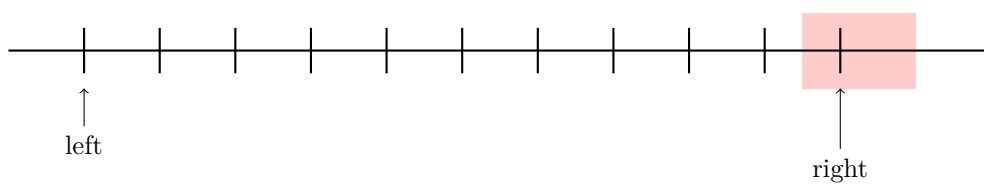
## ii. 一般化した二分探索

Python の標準ライブラリである `bisect` の `bisect_left` の実装をしましょう。`bisect_left` はソートされた配列に対して、与えられた値以上の最小の index を返す関数です。`bisect_left` は二分探索を用いて実装されています。先ほどの配列から要素を探す二分探索では、要素一致するか否かを判定していましたが、今回はもっと一般化して「mid がある条件を満たすか否か」を判定して範囲を狭めていきます。このとき、left より右側の区間は条件を満たさず、right より左側の区間は条件を満たすようにします。

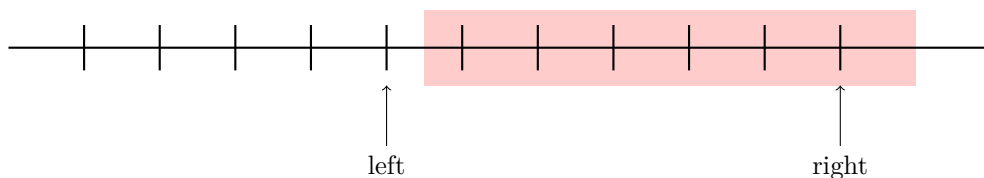
二分探索では以下の図のような条件を満たす赤い部分を条件を満たす境界ギリギリになるように更新していきます。

- left は常に条件を満たさない
- right は常に条件を満たす

という条件を満たすように処理を進めていき、最終的に left が条件を満たさない最大の index、right が条件を満たす最小の index を返します。`bisect_left` では left が与えられた値よりも小さく、right が与えられた値以上の最小の index を返す関数です。



初期状態



終了状態

`bisect_left` の実装は以下の通りです。

コード 4 bisect\_left の実装

```
1 def bisect_left(array: list[int], key: int) -> int:
2     left, right = -1, len(array)
3
4     while right - left > 1:
5         mid = (left + right) // 2
6
7         if array[mid] < key:
8             left = mid
9         else:
10            right = mid
11
12    return right
```

bisect\_left の実装では、左側が条件を満たさない、右側が条件を満たすといった実装になっています。これだとまだ条件次第で left が条件を満たす、right が条件を満たさないという実装もあり得ます。そこで以下ではめぐる式二分探索のさらに一般化した実装を紹介します。

### iii. めぐる式二分探索

めぐる式二分探索では、

- ng は常に条件を満たさない
- ok は常に条件を満たす

のように数直線上の右や左という概念を持たせずに実装します。めぐる式二分探索は以下のように実装されます。is\_ok は条件を満たすかどうかを判定する関数ですので、条件に合わせて実装します。

コード 5 めぐる式二分探索

```
1 def binary_search(array: list[int], key: int):
2     ng, ok = -1, len(array)
3
4     while abs(ok - ng) > 1:
5         mid = (ng + ok) // 2
6
7         if is_ok(array, mid, key):
8             ok = mid
9         else:
```

```
10         ng = mid
11
12     return ok
```

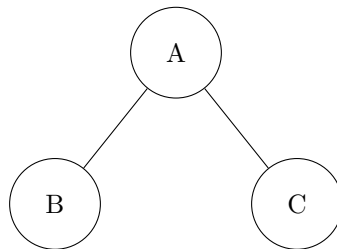


### III. 二分探索木

二分探索は探索自体は  $O(\log n)$  で行うことができますが、配列がソートされているひつようがあり、データの挿入や削除がある場合は毎回ソートがあり非効率ではあります。解決策としては、**データ構造で解決**や **Treepq** などがあります。データ構造で解決する方法の一つが**二分探索木**です。

**二分探索木**は以下の性質を持った木構造です。

- 左子ノードは親ノードよりも小さい (または等しい) (下の図では  $B \leq A$ )
- 右子ノードは親ノードよりも大きい (下の図では  $A < C$ )



二分探索木で行う処理は以下の通りです。

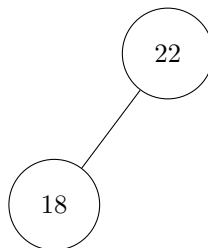
- 木の作成
- 探索
- 削除

#### i. 二分探索木の作成

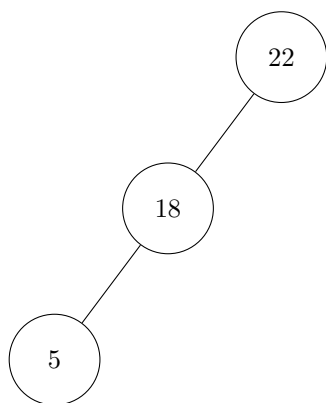
[22, 18, 5, 82, 51, 39] の配列を二分探索木に変換してみましょう。



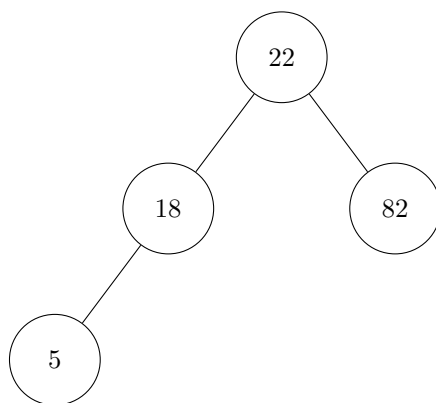
22 を挿入



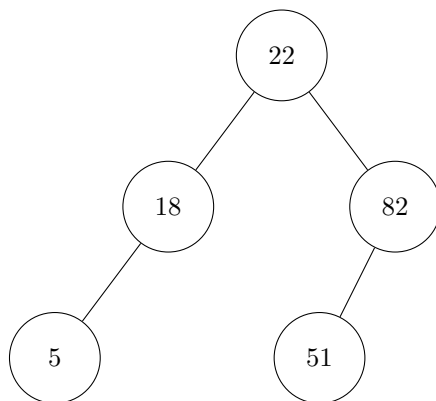
18 を挿入



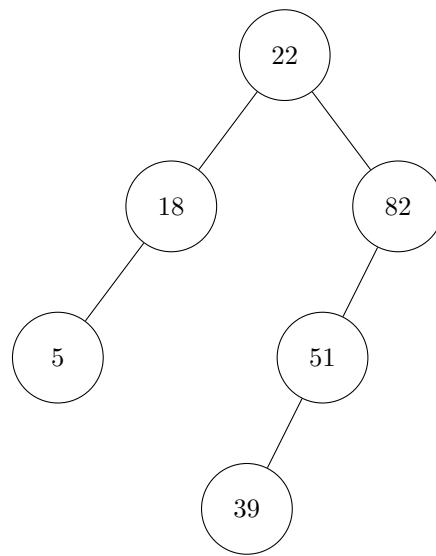
5 を挿入



82 を挿入



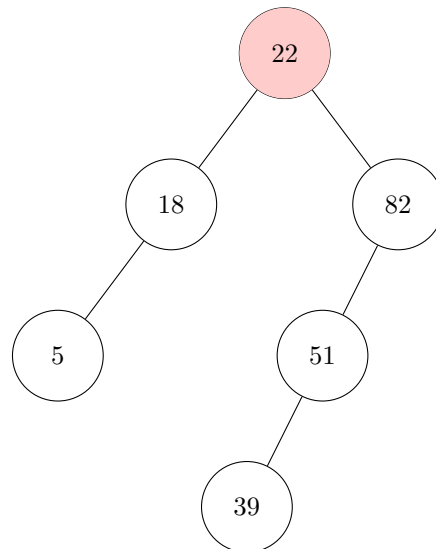
51 を挿入



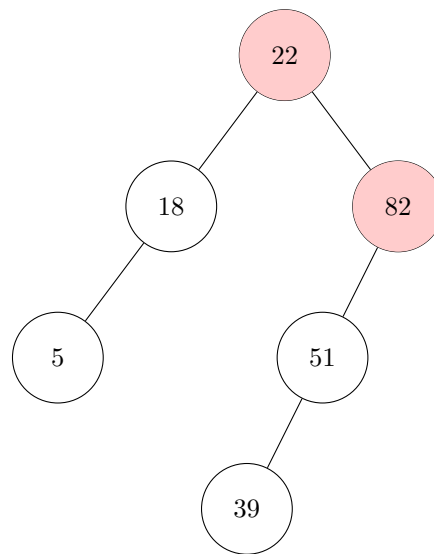
39 を挿入

## ii. 二分探索木の探索

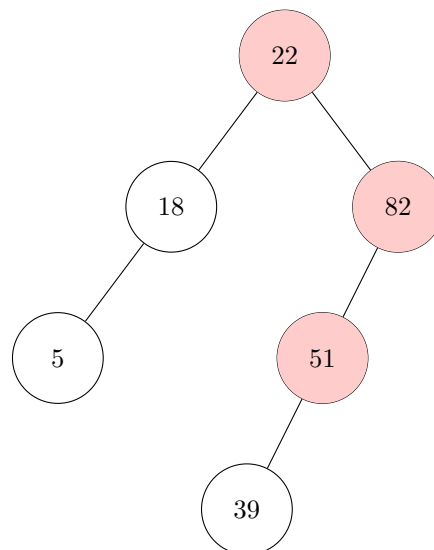
上の木を例に 51 を探してみましょう。根から順に探していきます。



51 は 22 よりも大きいので右の子ノードに進みます。



51 は 82 よりも小さいので左の子ノードに進みます。見つかりました。



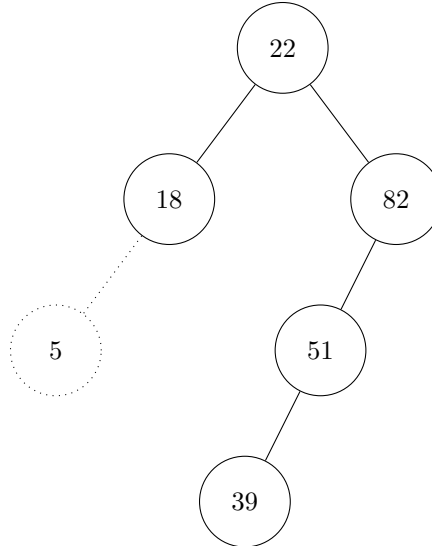
### iii. 二分探索木の削除

二分探索木からノードを削除する場合は以下の 3 つのケースがあります。

- 子ノードがない場合
- 子ノードが 1 つの場合
- 子ノードが 2 つの場合

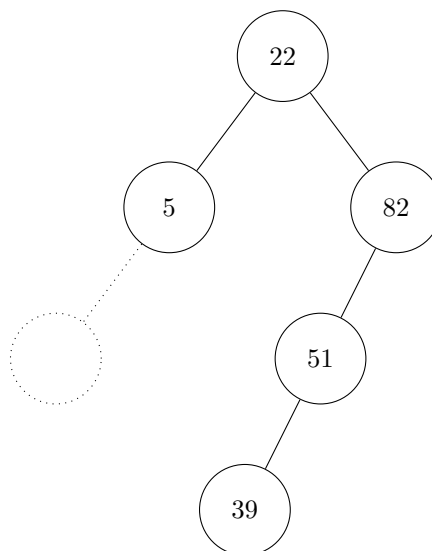
### 1. 子ノードがない場合

例えば 5 を削除する場合を考えます。5 は左右の子ノードがないので、他のノードに影響がないためそのまま削除します。



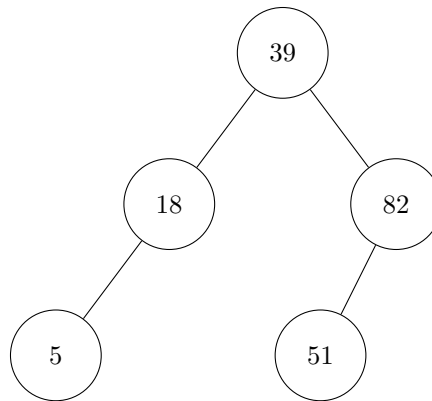
### 2. 子ノードが 1 つの場合

次に 18 を削除する場合を考えます。18 は左の子ノードが 5 しか持っていないので、5 を 18 の位置に移動させます。18 は親ノードから見て左の子ノードですが、右ノードの場合も同様に処理します。



### 3. 子ノードが2つの場合

最後に 22 を削除する場合を考えます。削除するノードが 2 つの子ノードを持っている場合は、削除するノードの左の子ノードの最大値か、右の子ノードの最小値を持ってきて、削除するノードに移動させます。ここでは、22 の右の子ノードの最小値 39 を持ってきて、22 の位置に移動させます。



#### iv. 二分木の実装

コード 6 二分木の実装

```
1 class Node:
2     def __init__(self, data: int) -> None:
3         self.data: int = data
4         self.right: Node | None = None
5         self.left: Node | None = None
6
7     def __str__(self) -> str:
8         return str(self.data)
9
10 class BinarySearchTree:
11     def __init__(self):
12         self.root = None
13
14     def create(self, array: list[int]) -> None:
15         for i in range(len(array)):
16             self.insert(array[i])
17
18     def insert(self, data: int) -> None:
19         if self.root is None:
```

```
20     self.root = Node(data)
21     else:
22         self._insert_recursively(self.root, data)
23
24     def _insert_recursively(self, node: Node, data: int) -> None:
25         if data <= node.data:
26             if node.left is None:
27                 node.left = Node(data)
28             else:
29                 self._insert_recursively(node.left, data)
30         else:
31             if node.right is None:
32                 node.right = Node(data)
33             else:
34                 self._insert_recursively(node.right, data)
35
36     def search(self, value: int) -> Node | None:
37         if self.root is None:
38             return self.root
39
40         return self._search_recursively(self.root, value)
41
42     def _search_recursively(self, node: Node, value: int) -> Node | None:
43         if node.data == value:
44             return node
45
46         if value < node.data:
47             if node.left is None:
48                 return node.left
49             else:
50                 return self._search_recursively(node.left, value)
51         else:
52             if node.right is None:
53                 return node.right
54             else:
55                 return self._search_recursively(node.right, value)
```

```
56
57 def delete(self, value: int) -> Node | None:
58     if self.root is None:
59         return self.root
60     else:
61         self.root = self._delete_recursively(self.root, value)
62
63 def _delete_recursively(self, node: Node, value: int) -> Node | None:
64     if value < node.data:
65         if node.left is None:
66             return None
67         else:
68             node.left = self._delete_recursively(node.left, value)
69     elif value > node.data:
70         if node.right is None:
71             return None
72         else:
73             node.right = self._delete_recursively(node.right, value)
74     else:
75         if node.left is None and node.right is None:
76             return None
77         elif node.left is None:
78             return node.right
79         elif node.right is None:
80             return node.left
81         else:
82             successor = self._successor()
83             node.data = successor.data
84             self._delete_recursively(node.right, successor.data)
85
86     return node
87
88 def _successor(self) -> Node | None:
89     if self.root is None:
90         return self.root
91
```



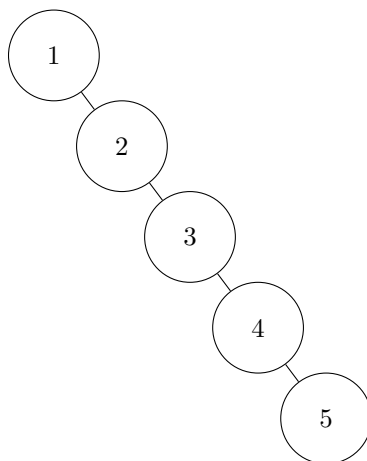
```
92     node = self.root
93
94     while node.left is not None:
95         node = node.left
96
97     return node
```

## IV. 平衡木

---

### i. 二分木の問題点

二分木は最悪の場合木が以下のように片方に伸びてしまった場合、計算量が  $O(n)$  になってしまいます。



### ii. 平衡木

平衡木は**回転**や乱択アルゴリズムを用いて木の高さを自動的に小さくする方向に調整できる木構造です。

扱う平衡木の代表的なものには以下のものがあります。

- AVL 木
- 赤黒木
- B 木
- Treap

### iii. AVL 木

AVL 木とは、**Adelson-Velsky and Landis** の名前から取られた木構造で、以下の性質を持ちます。

- 任意のノードにおいて、左右の部分木の高さの差が 1 以下である

以降の考察のために **balance factor** という言葉を導入します。

**balance factor**

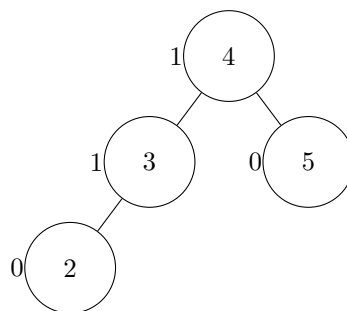
あるノードの左部分木の高さから右部分木の高さを引いた値を **balance factor** といいます。

- $\text{balance factor} = \text{左部分木の高さ} - \text{右部分木の高さ}$

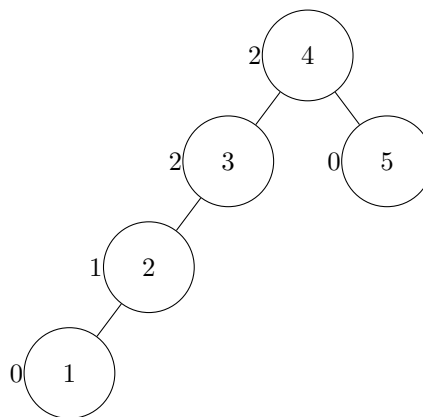
AVL 木の性質を balance factor を使って表すと以下のようになります。

- 任意のノードにおいて、balance factor は -1, 0, 1 のいずれかである

AVL 木の例を以下に示します。ノードの横に書いてあるのが balance factor です。

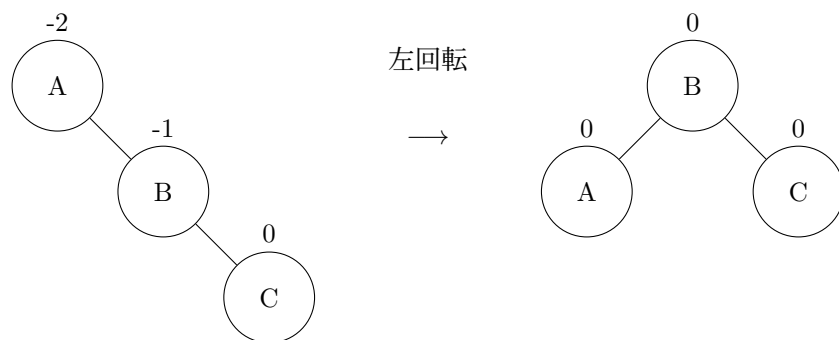


次は AVL 木の条件を満たしていない木です。

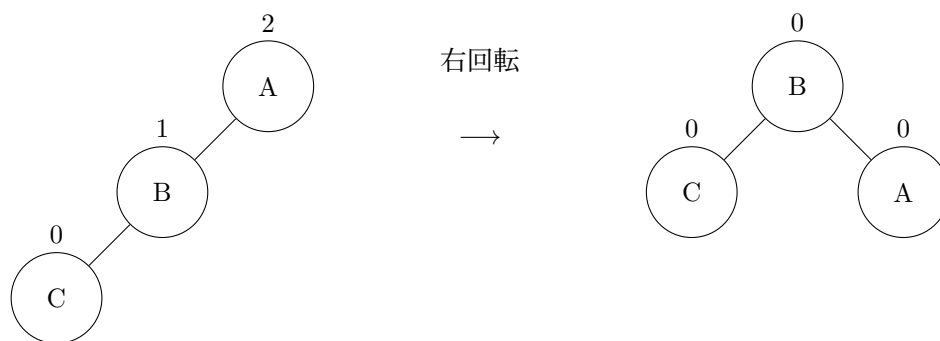


## 1. 回転

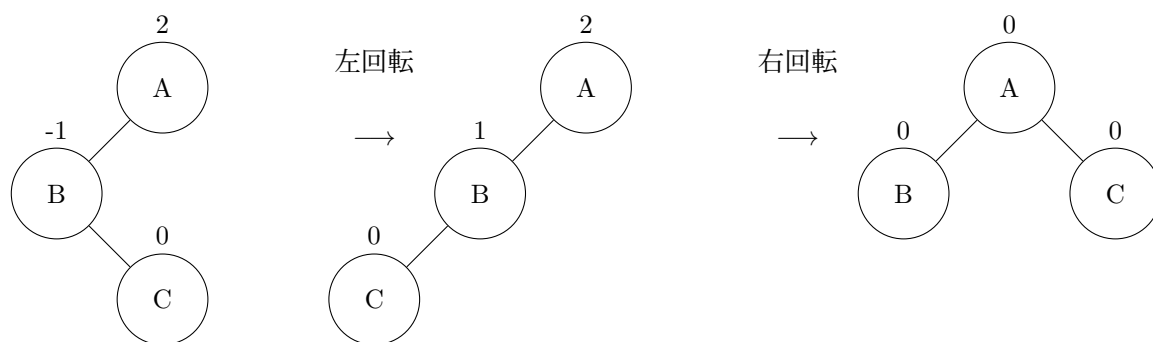
## 1. 左回転



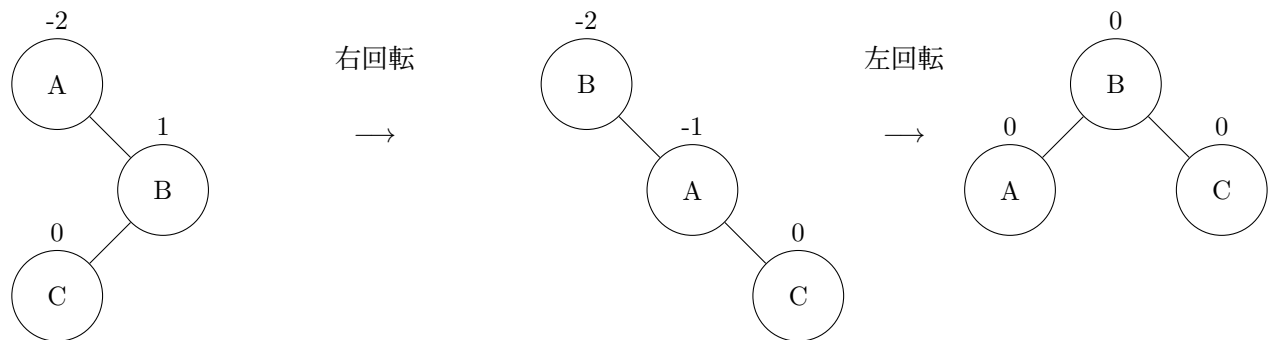
## 2. 右回転



## 3. 左右回転



## 4. 右左回転



iv. 赤黒木

v. B 木

vi. Treap

## V. 参考

### 二分探索

- <https://qiita.com/drken/items/97e37dd6143e33a64c8c>

### 二分探索木

- <https://www.geeksforgeeks.org/introduction-to-avl-tree/>

EEIC2024 アルゴリズムの授業で扱った文字列照合のアルゴリズムのシケプリです。扱った内容は以下の通りです。

- 力任せ法
- KMP 法
- BM 法
- BMH 法
- ラビン・カープ法 (ローリングハッシュ)

## VI. 力任せ法

力任せ法は文字通り文字列において、所望のパターンが見つかるまで前から順に比較していく方法です。以下で text と pattern の文字列が与えられたときに、text の中に pattern が含まれるかどうか考えましょう。文字列の文字を表す記法は  $\text{text}[i]$  のように 0-index で表します。

最初は  $\text{text}[0]$  と  $\text{pattern}[0]$  を比較すると一致しません。一致しないときは、text の cursor を 1 つ進めて  $\text{text}[1]$  と  $\text{pattern}[0]$  を比較します。

## 6 力任せ法

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

text

A	B	A	B	D								
---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

pattern

text[1] と pattern[0] を比較すると、一致します。しかし、text[5] と pattern[4] が一致しないので、text の cursor を 1 つ進めて text[2] と pattern[0] を比較します。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

text

	A	B	A	B	D							
--	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

pattern

これを一致していくまで続けていくと、以下のようになります。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

text

							A	B	A	B	D	
--	--	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	--

pattern

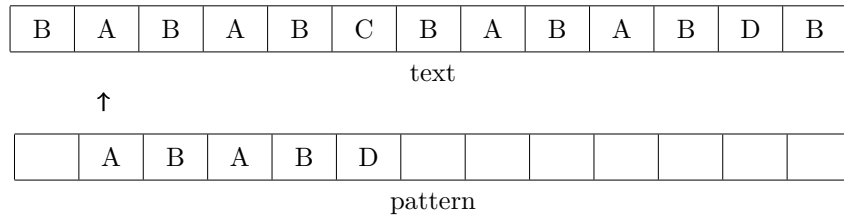
例を通じて力任せ法では、text を 0 から text の長さ - pattern の長さまで動かすことで、pattern が text に含まれるかどうかを判定することができます。C 言語でプログラムを書いてみましょう。

### コード 7 力任せの実装

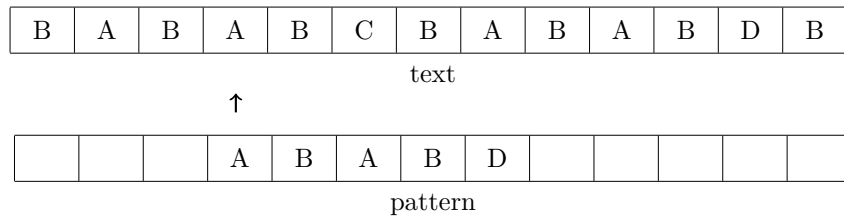
```
1 def brute_force(text: str, pattern: str) -> int:
2     for text_cursor in range(len(text) - len(pattern) + 1):
3         pattern_cursor = 0
4         moving_text_cursor = text_cursor
5         while pattern_cursor < len(pattern) and text[moving_text_cursor]
6             == pattern[pattern_cursor]:
7             pattern_cursor += 1
8             moving_text_cursor += 1
9
10        if pattern_cursor == len(pattern):
11            return text_cursor
12
13    return -1
```

## VII. KMP 法

### i. 力任せ法の無駄

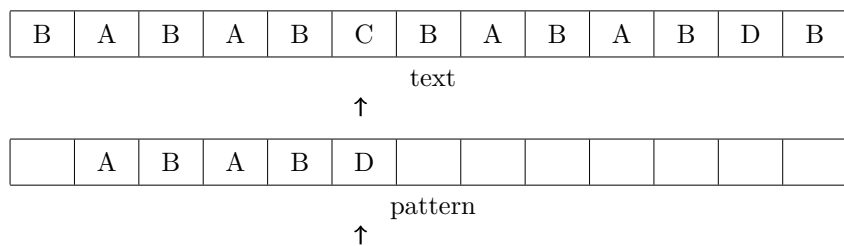


上の例では text[1] から照合を始めて text[5] で照合が失敗していることがわかります。力任せ法では次に text[2] から照合を始めることとなりますが、それは text の方の cursor が一度通った場所を再度通ることになります。このように、力任せ法は text の cursor が一度通った場所を再び通ることが多いため、無駄が多いといえます。ただ、上の例では ABAB というパターンがあって、ABAB の部分が繰り返されていることがわかります。このような繰り返し部分がある場合、次に照合を始める位置をスキップすることで無駄が省けそうではないでしょうか？下の例では、text の cursor が後戻りすることなく、pattern の位置も前にスキップされています。

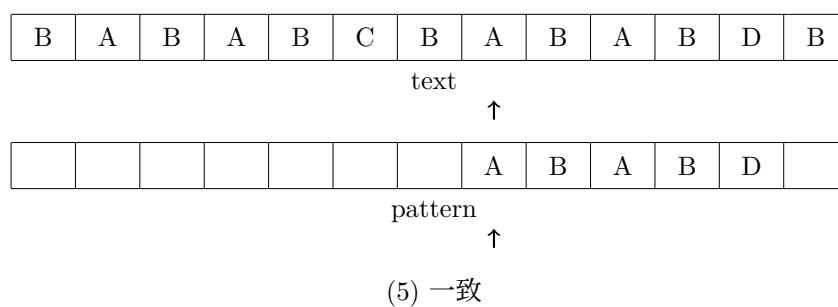
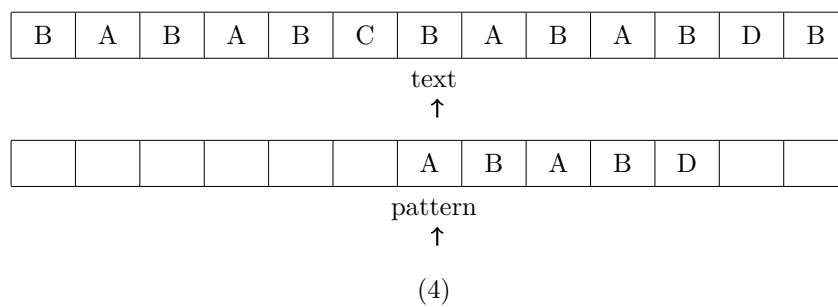
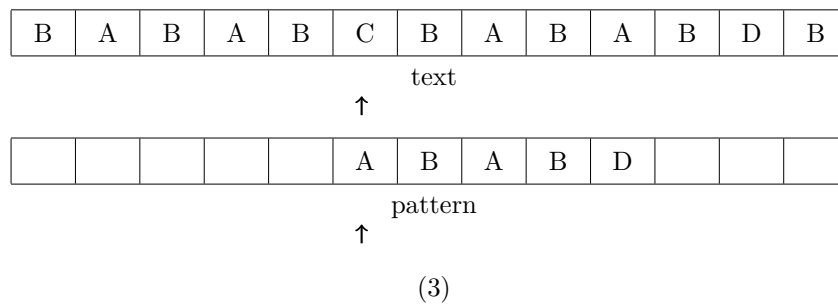
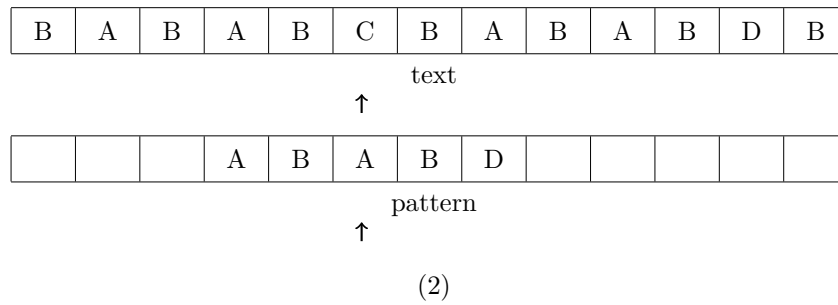


### ii. KMP 法の仕組み

上のスキップを実現する方法の 1 つに KMP 法があります。KMP 法の流れを具体例を見て確認します。



(1)



(1) では pattern[4] で照合失敗しており、pattern[0] から pattern[3](ABAB) の前半と text[1] から text[4] の (ABAB) の後半 2 文字が一致しています。つまり、最初の 2 文字は比べなくても一致していることがわかります。そのため (2) では pattern の cursor を patten[2] にして照合を開始しています。

(2) では文字が一致しておらず、pattern をずらしても text[4], ,text[5] には一致しないので、(3)



では pattern の cursor をはじめに戻しています。

(3) と (4) では文字が一致しておらず、さらに pattern もこれ以上右にシフトすることができないので、text と pattern とともに最初の位置から cursor を開始しています。

(5) では pattern が text に含まれていることがわかりました。

上の例で見た text と pattern で一致しているときに飛ばせる cursor の数は pattern によって事前に決まります。そのため、文字列照合の前に**スキップテーブル**作成を前処理として行います。

### iii. スキップテーブルの作成

スキップテーブルは以下の条件を満たします。

- スキップテーブルの配列の長さは pattern の長さ - 1
- スキップテーブルの  $i$  番目の要素は、pattern の  $i$  番目までの部分文字列の最大の接頭辞と接尾辞の長さ、つまり pattern[0] から pattern[i] までの文字列を見たとき、前から何文字目までが後ろから何文字目までと一致しているかを表す。
- スキップテーブルの最初の要素は 0

スキップテーブルを作成するには、pattern 同士をずらして比べていきます。その際に以下の手順で作成します。

- 文字がマッチする場合は、直近の最長部分一致の長さを記録し、そのまま照合を次の文字に進める
- 文字がマッチしない場合は、マッチが失敗した位置からパターンの中で可能な部分一致の場所に移動する (KMP 法そのもの)

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B	
	B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B

pattern

pattern[1] と pattern[0] から照合を開始します。pattern[1] で照合が失敗しました。pattern[0] で失敗すると pattern を動かさないで skip[1] に 0 を入れて cursor を進めます。

0	0											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

skip

次は pattern[2] と pattern[0] を照合します。今回は文字が一致しているため、 $0 + 1$  をして skip[2] に 1 を入れて cursor を進めます。また、pattern[3] と pattern[1]、pattern[4] と pattern[2] も一致しているため、skip[3] と skip[4] にはそれぞれ 2 と 3 を入れます。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B		
		B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B

pattern

0	0	1	2	3							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

skip

pattern[5] と pattern[3] は一致していません。マッチが失敗した位置からパターンの中で可能な部分一致の場所に移動するつまり、skip[3-1] = skip[2] の 1 にします。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B				
				B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B

pattern

比較せずとも pattern[4] と pattern[0] は一致していることに注意をしてください。ただ。pattern[5] と pattern[1] で比較して失敗しているので、skip[1-1] を見て pattern を 0 から開始に移動します。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B					
					B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B

pattern

下の pattern を移動できるだけ移動しても一致していないので、skip[5] には 0 を入れて再び cursor を前に移動させます。下の図のように次に移動すると上の pattern[10] まででは一致していることがわかるので、skip を同様に埋めてしまいます。

B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B						
						B	A	B	A	B	C	B	A	B	A	B	D	B

pattern

0	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

skip

pattern[11] と pattern[5] を比較すると一致していないので、skip[5-1] = skip[4] を見ると 3 になっ

ているので下の pattern の照合位置を 4 からにします。

Diagram illustrating a sequence of boxes (cells) arranged in two rows. The top row contains 18 boxes, with the first 12 boxes labeled B, A, B, A, B, C, B, A, B, A, B, D, B, and the remaining 6 boxes empty. The bottom row contains 18 boxes, with the first 8 boxes empty, followed by B, A, B, A, B, C, B, A, B, A, B, D, B, and the last box empty. Below the bottom row, the word "pattern" is centered under the last 12 boxes of the row.

pattern[11](D) と pattern[3](A) はまたもや一致していないので、skip[3-1] = skip[2] を見ると 1 になっているので、下の pattern の照合位置を 1 からにします。

Diagram illustrating a sequence of boxes (cells) arranged in two rows. The top row contains 18 boxes, with the first 12 boxes labeled B, A, B, A, B, C, B, A, B, A, B, D, B, and the remaining 6 boxes empty. The bottom row contains 18 boxes, with the first 10 boxes empty, followed by B, A, B, A, B, C, B, A, B, A, B, and the last box labeled I. Below the bottom row, the word "pattern" is centered under the sequence of boxes.

またまた `pattern[11]` と `pattern[1]` は一致しておらず、もう `pattern` の移動する余裕はないので `skip[10]` には 0 を入れます。

0	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
skip											

これでスキップテーブルは完成です。好きな文字列と上の例で扱った文字列を照合してみると理解が深まります。

## iv. KMP 法の実装

実装のポイントは以下の2つです。

- スキップテーブルの作成
- 前処理で用意したスキップテーブルを使った文字列照合

## コード 8 KMP 法の実装

```
1 def create_table(pattern: str) -> list[int]:
2     skip = [0] * (len(pattern) - 1)
3     j = 0
4
5     for i in range(1, len(pattern) - 1):
```

```
6         if pattern[i] == pattern[j]:
7             j += 1
8             skip[i] = j
9         else:
10            while j > 0 and pattern[i] != pattern[j]:
11                j = skip[j-1]
12
13            # 例によっては忘れがちなので注意
14            if pattern[i] == pattern[j]:
15                j += 1
16
17            skip[i] = j
18
19    return skip
20
21 def kmp(text: str, patten: str) -> int:
22     skip_table = create_table(patten)
23     pattern_cursor = 0
24     # len(text) - len(pattern) + 1ではないことに注意
25     for text_cursor in range(len(text)):
26         if text[text_cursor] == patten[pattern_cursor]:
27             pattern_cursor += 1
28         else:
29             while pattern_cursor > 0 and text[text_cursor] != patten[
30                 pattern_cursor]:
31                 pattern_cursor = skip_table[pattern_cursor - 1]
32
33             if text[text_cursor] == pattern[pattern_cursor]:
34                 pattern_cursor += 1
35
36     if pattern_cursor == len(patten):
37         return text_cursor - len(patten) + 1
38
39     return - 1
```

## VIII. BM 法

### i. BM 法の仕組み

BM 法は照合パターンの前からではなくて、後ろから照合を開始します。照合パターンの一番最後つまり D から照合を開始します。C と D は一致していないので、ずらしします。

B	A	B	A	C	C	B	A	B	A	B	A	B	D	B
A	B	A	B	D										

BM 法では以下のように最初から多くスキップすることが多いです。

B	A	B	A	C	C	B	A	B	A	B	A	B	D	B
					A	B	A	B	D					

また A と D は一致していないのでスキップします。今回は A という文字で照合が失敗していますが、照合パターンにも A があるので先ほどのように一気に飛ばせません。

B	A	B	A	C	C	B	A	B	A	B	A	B	D	B
							A	B	A	B	D			

次も同様に考えると以下のようになり、一致します。

B	A	B	A	C	C	B	A	B	A	B	A	B	D	B
									A	B	A	B	D	

上の例では、照合パターンの最後の文字から照合を開始しました。その際に text で一致しない文字に応じて text の照合 cursor の位置を動かしていました。では、その動かす大きさはどのように決まるでしょうか？ KMP 法と同様にスキップテーブルを作成します。スキップテーブルを以下のポイントを意識して作成します。照合パターンの長さを  $l$  とします。

- パターンに含まれない文字とパターンの一番最後にしかない文字の移動量は  $l$
- 一番最後以外に含まれる文字に関しては、末尾に最も近い出現位置が  $i$  ( $0 \leq i < l$ ) ならば、そのときの移動量は  $l - i + 1$
- 移動量は text に出現する文字をすべて網羅する辞書で管理

text 照合中にどの文字で失敗したかに応じて移動量が変化するので、text に登場する文字が文字が予め分かっている必要があります。text に登場する文字に応じて US-ASCII や UTF-8 などの文字コードを使って辞書を作成します。今回は US-ASCII で実装します。

## ii. パターンテーブルだけの実装の問題点

実はパターンテーブルだけでは問題が起こることがあります。プログラムの停止性に関わる問題です。例えば以下のような text と pattern を考えます。

				B	A	D	D	D	B					
				A	C	A	D	B						

マッチテーブルは以下のようです。

A	B	C	D	E
2	5	3	1	5

まず、D で失敗しているのでスキップテーブルの D を見ると 1 になっています。text の照合開始位置を一つ進めます。

				B	A	D	D	D	B					
					A	C	A	D	B					

今度も D で失敗しているので、text の照合開始位置を 1 進めましょう。今回は text の途中までは照合が成功しているので、+1 するのは照合が失敗した index であることに注意してください。

				B	A	D	D	D	B					
				A	C	A	D	B						

これは最初に見たパターンと同じになっているため、無限ループが発生しています。問題の原因は、スキップテーブルだけだと text の照合開始 index が後戻りすることがあるためです。スキップテーブルを用いることで、照合開始地点よりも前から照合してもパターンと一致することがないことが保証されているので、そもそも後戻りする意味はないです。つまり、不一致の場合に次の照合開始地点は前の照合開始地点よりも後ろになって欲しいです。

				D	B	A	B	D						
				A	C	A	B	D						

上の例では照合失敗を検知するまで 4 回比較しており、最後に照合した 1 点の index + 4 の地点から照合を開始しても問題ありません。よってスキップする大きさを決めるには、

$$skip\_size = \max(\text{比較回数}, \text{スキップテーブルの値})$$

とすれば良いです。

### iii. BM 法の実装

実装のポイントは以下の通りです。

- スキップテーブルの実装
- スキップテーブルを利用して文字列照合

コード 9 BM 法の実装

```
1 def bm(text: str, pattern: int) -> int:
2     def create_table(pattern: str) -> list[int]:
3         skip = [0] * (1 << 7)
4         for i in range(1 << 7):
5             last_match = -1
6             for j in range(len(pattern)):
7                 if pattern[j] == chr(i):
8                     last_match = j
9
10            if last_match == -1 or last_match == len(pattern) - 1:
11                skip[i] = len(pattern)
12            else:
13                skip[i] = len(pattern) - last_match - 1
14        return skip
15
16    skip = create_table(pattern)
17
18    text_cursor = len(pattern) - 1
19
20    while text_cursor < len(text):
21        moving_text_cursor = text_cursor
22        pattern_cursor = len(pattern) - 1
23
24        while text[moving_text_cursor] == pattern[pattern_cursor] and
25            pattern_cursor > 0:
26            moving_text_cursor -= 1
27            pattern_cursor -= 1
```

```
28     if pattern_cursor == 0:
29         return text_cursor - len(pattern) + 1
30
31     # スキップテーブルを見て text の参照開始位置を更新
32     compared_times = len(pattern) - pattern_cursor
33     skip_table_value = skip[ord(text[moving_text_cursor])]
34
35     text_cursor += max(skip_table_value, compared_times)
36
37     return -1
38
39
40 text = input()
41 pattern = input()
42
43 print(bm(text, pattern))
```



## IX. ラビン・カーブ法 (ローリングハッシュ)

照合パターンとテキストのハッシュを計算し、そのハッシュが一致するか否かで文字列の一致を判定する方法を紹介します。照合パターンの長さを  $l$  とすると、ハッシュを利用することで比較の計算量を  $O(l)$  から  $O(1)$  へと定数時間にすることが可能です。

ハッシュは以下のように計算します。互いに素な定数  $a, h (1 < a < h)$  を用意して、照合パターン  $(p_0 \cdots p_{l-1})$  に対して、

$$H(P) = (a^{l-1}p_0 + a^{l-2}p_1 + \cdots + a^0p_{l-1}) \mod h \quad (1)$$

テキストの部分文字列 ( $\text{text}[0]$  から  $\text{text}[l-1]$ ) のハッシュも同様に計算して  $H(S, 0, l-1)$  とすると、 $H(P)$  と  $H(S, 0, l-1)$  が一致するとき、 $\text{text}[0]$  から  $\text{text}[l-1]$  と照合パターンが一致すると考える。もちろんハッシュが衝突する可能性もあるので実際に一致しているか確認する必要がありますが、今回はハッシュが一致していれば文字列も一致しているとします。

しかし、このハッシュの計算をテキストの大きさだけ計算すると、 $O(nl)$  の計算量になってしまいます。ここで、テキストのハッシュは  $\mod h$  を取ったものであるため、

$$a^{l-1}p_0 + a^{l-2}p_1 + \cdots + a^0p_{l-1} = H(S, 0, l-1) + Ah(A \text{ は整数}) \quad (2)$$

と表せます。

これを利用すると、 $H(S, 1, l)$  は前の  $H(S, 0, l-1)$  を用いて以下のように表せます。

$$\begin{aligned} H(S, 1, l) &= a^{l-1}s_1 + a^{l-2}s_2 + \cdots + a^0s_l \\ &= a(a^{l-2}s_1 + a^{l-3}s_2 + \cdots + a^1s_{l-1}) + s_l \\ &= a(a^{l-1}s_0 + a^{l-2}s_1 + \cdots + a^0s_{l-1}) - a^l s_0 + a^0 s_l \\ &= aH(S, 0, l-1) - a^l s_0 + a^0 s_l \end{aligned} \quad (3)$$

よって、テキストのそれぞれのハッシュは前のハッシュを利用することで、定数時間で計算することがわかりました。これをローリングハッシュといいます。

### i. ラビン・カーブ法の実装

実装のポイントは以下通りです。

- $a, h$  を適当に決める
- 文字を数値に変換する
- テキストと照合パターンのハッシュを保持して尺取法のように計算する

コード 10 ラビン・カーブ法の実装

```
1 def rolling_hash(text: str, pattern: str) -> list[int]:
2     a = 31
3     h = 998244353
4
5     text_length, pattern_length = len(text), len(pattern)
6     text_hash = pattern_hash = 0
7
8     # aを先に計算 剰余を取らないと実行時間が非常に長くなる
9     a_1 = 1
10    for i in range(pattern_length):
11        a_1 = (a_1 * a) % h
12
13
14    # 最初のハッシュを計算する. 式(1)より
15    for i in range(pattern_length):
16        text_hash = (a * text_hash + ord(text[i])) % h
17        pattern_hash = (a * pattern_hash + ord(pattern[i])) % h
18
19    for i in range(text_length - pattern_length + 1):
20        if pattern_hash == text_hash:
21            return i
22
23        if i < text_length - pattern_length:
24            # テキストのハッシュを更新
25            text_hash = (a * text_hash - a_1 * ord(text[i]) + ord(text[i
26                + pattern_length])) % h
27
28            if text_hash < 0:
29                text_hash += h
30
31    return -1
```

## X. 問題

### 問題 1 ABC 276 A - Right

英子文字からなる文字列が与えられます。最後に現れる  $a$  の index を求める問題です。存在しな

ければ、-1 を出力する問題です。力任せ法と Python の標準ライブラリを使って2つの解法を使って解いてみましょう。実際に AtCoder に参加するときなどは、標準ライブラリを使った解法を使うことが多いですが、勉強中は自分で実装することが大切です。

## コード 11 問題 1 の解答

```
1 def brute_force_last_index(text: str, pattern: str) -> int:
2     last_index = -1
3     for text_cursor in range(len(text) - len(pattern) + 1):
4         pattern_cursor = 0
5         moving_text_cursor = text_cursor
6         while pattern_cursor < len(pattern) and text[moving_text_cursor]
          == pattern[pattern_cursor]:
7             pattern_cursor += 1
8             moving_text_cursor += 1
9
10        if pattern_cursor == len(pattern):
11            last_index = text_cursor
12
13
14    return last_index
15
16 text = input()
17 pattern = "a"
18
19 last_index = brute_force_last_index(text, pattern)
20
21 print(last_index + 1 if last_index != -1 else last_index)
22
23 # 標準ライブラリを使った解法
24 text = input()
25 pattern = "a"
26
27 last_index = text.rfind(pattern)
28
29 print(last_index + 1 if last_index != -1 else last_index)
```

問題 2 ABC 336 B - CTZ

## コード 12 問題 2 の解答

```
1 def cal_ctz(number: int) -> int:
2     bit_size = number.bit_length()
3     shift_size = 0
4
5     while shift_size < bit_size:
6         if number & (1 << shift_size):
7             return shift_size
8         else:
9             shift_size += 1
10
11 def main():
12     n = int(input())
13     ctz = cal_ctz(n)
14
15     print(ctz)
16
17 if __name__ == "__main__":
18     main()
```

問題 3 yukicoder No.430 文字列検索ローリングハッシュの練習問題です。

参考

- <https://blog.hamayanhamayan.com/entry/2016/10/03/083532>

問題 ABC 141 E - Who Says a Pun? ローリングハッシュ +  $\alpha$  の難しい問題です。整数に関しては以下の内容を扱います。

- 最大公約数とユークリッドの互除法
- 拡張ユークリッドの互除法
- 素数判定
  - ナイーブな実装
  - エラトステネスの篩
- 素因数分解
  - ナイーブな実装
  - SPF を用いた実装
- 冪乗: 繰り返し二乗法
- 逆元とフェルマーの小定理

## XI. 最大公約数とユークリッドの互除法

整数  $a, b (a > b)$  の最大公約数を求めるには、ユークリッドの互除法を使用します。

### ユークリッドの互除法

$a, b (a > b)$  の最大公約数は  $a \% b$  と  $b$  の最大公約数と等しい。

$a, b$  の剰余を計算繰り返し計算していった  $b$  が 0 になった時の  $a$  が最大公約数となります。繰り返し同じ計算をするので、再帰関数を使って実装します。

コード 13 ユークリッドの互除法実装

```

1 def gcd(a: int, b: int) -> int:
2     # 終了条件
3     if b == 0:
4         return a
5
6     if a < b:
7         a, b = b, a
8
9     return gcd(b, a % b)

```

最大公約数をアルゴリズムを理解するだけではなくて、図形を使って直感的に理解しましょう。参考に記したけんちゃんさんの最大公約数の記事を参考にすると、最大公約数は  $n$  次元の立方体を考えたときにそれを均等に分割できる最大の立方体の辺の長さとして考えることができます。このように考えると、最大公約数が何を意味しているのかが直感的に理解できるかもしれません。

### i. 問題と解説

#### 1. ABC 118 C - Monsters Battle Royale

問題からはすぐには気づきにくいですが、最大公約数を利用します。 $n$  次元の立方体を考えたときにそれを均等に分ける最大の立方体の辺の長さを求める問題と同じです。配列  $A$  のどの要素も  $\text{gcd}$  の倍数になっているので、 $\text{gcd}$  がこれ以上分割できない最小の辺の長さとなります。どんなに操作を加えても最小の辺の長さは変わりません。このように操作を繰り返しても変わらない数のことを**不変量**といいます。与えられた配列  $A$  の要素同士の引き算から必ず  $\text{gcd}$  を生み出せるかという疑問が生まれるかもしれませんが、ユークリッドの互除法を使うことで、 $\text{gcd}$  を求めることができます。

## コラム 再帰関数

おそらく初めて再帰関数を見た方は再帰関数の動きがわかりにくいと思います。再帰関数は自分自身を呼び出す関数です。そのため、再帰関数を理解するためには、関数が呼び出された時にどのような動きをするのかを理解する必要があります。関数が呼び出されると、スタックに関数が積まれていきます。最初に呼び出した `gcd` は一番下に、最後に呼び出した `gcd` はスタックの一番上に置かれます。一番上の関数戻り値がわかったら、連鎖的にそれより下の関数の値もわかります。そして今回の場合シグネチャからもわかる通り、`int` のデータ型の値を返す関数です。`return` する箇所ですべて `int` の値を返す関数を呼び出しているので、スタックに積まれた関数が `return` するまで関数が呼び出され続けます。イコールが終了条件を満たすまで連なっていると考えるとわかりやすいかもしれません。

## XII. 拡張ユークリッドの互除法

ユークリッドの互除法では、最大公約数を求めることができますが、拡張ユークリッドの互除法を使うと、最大公約数だけでなく、 $ax + by = \gcd(a, b)$  を満たす  $x, y$  を求めることができます。

$ax + by = \gcd(a, b)$  の  $a, b$  に対してユークリッドの互除法を適用していきます。通常のユークリッドの互除法のように、 $a \% b, b$  を計算していきますが、計算した結果それが次の一次不定方程式の係数となります。 $bx_1 + \{(a \% b)y_1\} = \gcd(a, b)$  となります。ここで、

$$a \% b = a - (a / b) \times b$$

が成立することから、代入して

$$bx_1 + ay_1 - (a / b) \times by_1 = \gcd(a, b)$$

$$ay_1 + b(x_1 - (a / b)y_1) = \gcd(a, b)$$

$ax + by = \gcd(a, b)$  と  $a, b$  について係数比較をすることで、

$$x = y_1, y = x_1 - (a / b) \times y_1 \tag{4}$$

$x_1, y_1$  は  $b, a \% b$  に対して再帰的に求めることができます。終了条件は  $b = 0$  のときで、このときの  $x$  が求める  $x$  となります。

具体例を見ましょう。 $a = 108, b = 56$  つまり  $108x + 56y = \gcd(108, 56)$  です。

$$108x + 56y = \gcd(108, 56)$$

$$56x_1 + 52y_1 = \gcd(56, 52)$$

$$52x_2 + 4y_2 = \gcd(52, 4)$$

$$4x_3 + 0y_3 = \gcd(4, 0)$$

$ax + by = \gcd(a, b)$  の解  $(x, y)$  が  $b$  と  $a \% b$  を係数にした一次不定方程式の解  $(x_1, y_1)$  から求められていることを確認してください。上から順に再帰的に  $(b, a \% b)$  を求めています。 $b = 0$  になったとき、 $x_3 = 1, y_3 = 0$  になります。式 (1) より、 $x_2 = y_3 = 0, y_2 = x_3 - (52 // 4) \times y_3 = 1$  となります。同様に、 $x_1 = y_2 = 1, y_1 = x_2 - (56 // 54)y_2 = -1$

以上より、 $x = y_1 = -1, y = x_1 - (108 // 56) \times y_1 = 2$  となります。

実装は以下のようになります。

コード 14 拡張ユークリッドの互助法実装

```

1 def extended_gcd(a: int, b: int) -> tuple[int, int, int]:
2     if b == 0:
3         return a, 1, 0
4     else:
5         gcd, x1, y1 = extended_gcd(b, a % b)
6
7         # 係数の更新
8         x = y1
9         y = x1 - (a // b) * y1
10
11     return gcd, x, y

```

### XIII. 素数判定

#### i. ナイーブな実装

ナイーブな実装では以下の定理を利用して、自然数  $n$  の素数判定を行います。

##### 定理 1

自然数  $n$  が  $\sqrt{n}$  以下の素数で割り切れないならば、 $n$  は素数である。

実装は以下のようになります。

コード 15 ナイーブな素数判定

```

1 def is_prime(n: int) -> bool:
2     # 忘れないように注意
3     if n <= 1:
4         return False
5     i = 2
6     while i * i <= n:
7         if n % i == 0:
8             return False
9         i += 1
10
11     return True

```

ナイーブな実装では、1 個の自然数が素数か判定するには  $O(\sqrt{n})$  でできますが、 $n$  個の数を判定するとなったら  $O(n\sqrt{n})$  かかり少し遅いです。

## ii. エラトステネスの篩

多くの自然数の素数判定を高速に行う方法の 1 つにエラトステネスの篩があります。求める自然数の最大値を  $n$  とすると、1 から  $n$  までの自然数の素数判定はエラトステネスの篩を使うと、 $O(n \log \log n)$  の計算量で実行可能です。

エラトステネスの篩では、判定したい自然数  $n$  までのテーブルを作成し、2 から順に以下の操作を  $\sqrt{n}$  まで繰り返します。

1.  $i = 2$  からスタート
2.  $i$  がテーブルでバツがついていない場合、 $i$  を除いた  $i$  のすべての倍数を素数ではないとする
3.  $i = i + 1$  ( $i = \sqrt{n}$  まで 2 へ)

例として  $n = 100$  の場合を見てみます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×
×	×	×	×	×

i = 2 の場合

1	2	3	×	5	×	7	×	×	×
11	×	13	×	×	×	17	×	19	×
×	×	23	×	25	×	×	×	29	×
31	×	×	×	35	×	37	×	×	×
41	×	43	×	×	×	47	×	49	×
×	×	53	×	55	×	×	×	59	×
61	×	×	×	65	×	67	×	×	×
71	×	73	×	×	×	77	×	79	×
×	×	83	×	85	×	×	×	89	×
91	×	×	×	95	×	97	×	×	×

i = 3 の場合

1	2	3	×	5	×	7	×	×	×
11	×	13	×	×	×	17	×	19	×
×	×	23	×	×	×	×	×	29	×
31	×	×	×	×	×	37	×	×	×
41	×	43	×	×	×	47	×	49	×
×	×	53	×	×	×	×	×	59	×
61	×	×	×	×	×	67	×	×	×
71	×	73	×	×	×	77	×	79	×
×	×	83	×	×	×	×	×	89	×
91	×	×	×	×	×	97	×	×	×

i = 5 の場合

1	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>
<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59	<del>60</del>
61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79	<del>80</del>
<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>
<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	97	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

$i = 7$  の場合

1 を除いて残った数が素数です。

### iii. エラトステネスの篩の実装

コード 16 エラトステネスの篩の実装

```

1 def is_prime(n: int) -> list[bool]:
2     is_prime_list = [True] * (n + 1)
3     is_prime_list[0] = is_prime_list[1] = False
4     i = 2
5     while i * i <= n:
6         if is_prime_list[i]:
7             for j in range(i * i, n + 1, i):
8                 is_prime_list[j] = False
9         i += 1
10
11     return is_prime_list

```

## XIV. 素因数分解

### i. ナイーブな実装

ナイーブな素因数分解では、与えられた自然数  $n$  を 2 から  $\sqrt{n}$  まで順に割っていき、1 になれば終了します。割り切れた数を素因数としてリストに追加していきます。 $\sqrt{n}$  まで続けて  $n$  が 1 でない場合は、その数も素因数としてリストに追加します。

コード 17 ナイーブな素因数分解の実装の実装

```

1 def enumerate_prime_factors(n: int) -> list[int]:
2     primes = []
3     i = 2
4     while i * i <= n:
5         if n % i == 0:
6             primes.append(i)
7             n //= i
8             while n % i == 0:
9                 primes.append(i)
10                n //= i
11            i += 1
12
13     # 残ったnが素数の場合
14     if n > 1:
15         primes.append(int(n))
16
17     return primes

```

ナイーブな実装では、自然数  $n$  が与えられたときの計算量は  $O(\sqrt{n})$  です。 $m$  個の素因数分解をするときは計算量が  $O(m\sqrt{n})$  となります。

## ii. SPF を用いた実装

SPF(Smallest Prime Factor: 自然数  $n$  を割り切る最小の素数) を用いることで、ナイーブな実装よりも高速に素因数分解を行うことができます。SPF を用いた素因数分解はエラトステネスの篩をする際に SPF を記録することで実装できます。

コード 18 SPF を用いた素因数分解の実装

```

1 def spf(n: int) -> list[int]:
2     spf_table = [i for i in range(n + 1)]
3     is_prime = [True] * (n + 1)
4
5     i = 2
6
7     while i * i <= n:
8         if is_prime[i]:
9             for j in range(i + i, n + 1, i):
10                is_prime[j] = False

```

```

11         if spf_table[j] == j:
12             spf_table[j] = i
13
14         i += 1
15
16     return spf_table
17
18 def prime_factorization(n: int) -> list[int]:
19     primes = []
20     spf_table = spf(n)
21
22     while n > 1:
23         prime = spf_table[n]
24         n //= prime
25         primes.append(prime)
26
27     return primes

```

### iii. 互いに素

#### 互いに素

$a, b \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとは、 $a, b$  の最大公約数が 1 であることをいう。

互いに素の性質をいくつか紹介します。

$a, b \in \mathbb{Z}$  の最大公約数を  $g$  とすると、

$$a = g \cdot a', b = g \cdot b' (a' \text{ と } b' \text{ は互いに素})$$

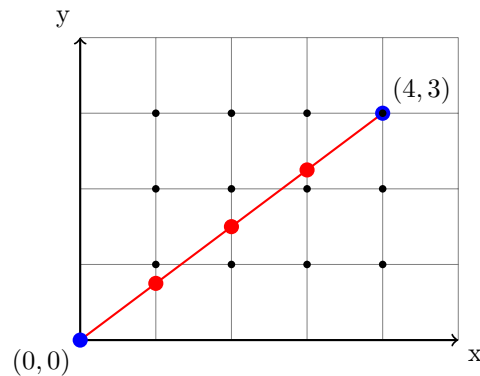
と互いに素な数と最大公約数の積で表すことができる。

この性質の応用例は 2 点間の格子点の個数です。

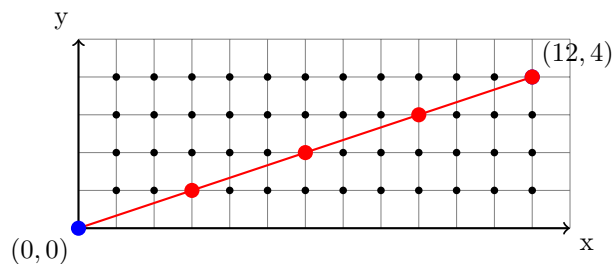
2 次元座標平面上に 2 点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  が与えられたとき、片方が原点になるように並行移動した 2 点を結ぶ直線上の格子点の個数は、2 点間の最大公約数を  $g$  とすると、 $g-1$  個です。ただし、2 点は格子点の個数に含まないとして。

2 点の位置関係が重要で片方を原点になるように並行移動しても一般性を失わないので、 $x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1$  とします。まず、 $x, y$  が互いにその場合を考えます。互いに素のときは

$(0,0)$  と  $(x,y)$  を結ぶ線分の間には格子点は存在しません。



次に、 $(x,y)$  が互いに素ではない場合、つまり最大公約数が 1 よりも大きい場合を考えます。このとき、 $x = g \cdot x', y = g \cdot y'$  と表すことができます。 $g$  が 1 よりも大きい場合は、 $(0,0)$  と  $(x,y)$  を結ぶ線分は格子点を通ることがあります。この  $(x,y)$  を最大公約数  $g = 4$  で割ると、 $(0,0)$  と  $(3,1)$  となり、3 と 1 は互いに素です。先ほどのように互いに素の場合は格子点は存在しません。 $d = 4$  というのはこの互いに素という格子点の最小単位が 4 つであることを示しています。今回の設定では、線分の端は格子点に含まれないので、格子点の個数は  $4 - 1 = 3$  個です。



実装例を以下に示します。

コード 19 2点間の格子点の個数の実装

```

1 def GCD(a: int, b: int) -> int:
2     if a < b:
3         a, b = b, a
4     if b == 0:
5         return a
6
7     return GCD(b, a % b)
8
9 def count_grid_points(x1: int, y1: int, x2: int, y2: int) -> int:

```

```

10  x, y = abs(x1 - x2), abs(y1 - y2)
11  return GCD(x, y) - 1

```

他にも様々な性質があります。

#### 互いに素と一次不定方程式

$a, b \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとき、

$$ax + by = 1$$

を満たす  $x, y \in \mathbb{Z}$  が存在する。

これは上で見た拡張ユークリッドの互除法そのものです。

$a, b \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとき、 $b \in \mathbb{Z}$  に関して  $bc$  が  $a$  で割り切れるなら、 $c$  は  $a$  の倍数である。

**証明**

$a, b$  は互いに素であるから、 $ax + by = 1$  を満たす  $x, y \in \mathbb{Z}$  が存在する。

$$c = c \times 1 = c(ax + by) = acx + bcy$$

$acx$  は自明に  $a$  で割り切れる。 $bcy$  も条件より  $a$  で割り切れるから、 $c$  は  $a$  の倍数である。

#### 合同式の割り算

$a, m \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとする。

$$ax \equiv by \pmod{m}$$

であるとき、

$$x \equiv y \pmod{m}$$

が成立する。

#### 倍数の周期性

$a, m \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとする。

$$0, a, 2a, \dots, (m-1)a$$

を  $m$  で割った余りを昇順に並び替えると、 $0, 1, 2, \dots, m-1$  になる。

**逆元と合同方程式**

$a, m \in \mathbb{Z}$  が互いに素であるとする。任意の  $b \in \mathbb{Z}$  に対して、

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

を満たす  $x \in \mathbb{Z}$  が  $m$  を法としてただ一つ在する。特に、 $b = 1$  の場合を逆元という。

**中国剰余定理****Euler 関数は乗法的****Euler の定理**

## iv. 問題 1.

素因数分解に関する問題です。

**問題 約数列挙**

自然数  $N$  が与えられるので、 $N$  の約数を昇順に列挙せよ。ただし、 $N$  は  $1 \leq N \leq 10^{12}$  を満たす。

例

入力: 12

出力: 1 2 3 4 6 12

回答:

```
1 def enumerate_divisors(n: int) -> list[int]:
2     divisors = set()
3     for i in range(1, int(n ** 0.5) + 1):
4         if n % i == 0:
5             divisors.add(i)
6             if i != n // i:
7                 divisors.add(n // i)
8
9     return list(divisors)
10
11
12 def main():
13     n = int(input())
14     divisors = enumerate_divisors(n)
15
16     print(*divisors)
17
18 if __name__ == "__main__":
19     main()
```

問題 2. ABC 057 C - Digits in Multiplication

約数列挙の問題です。

問題 3. ARC 052 C - Factors of Factorial

約数の個数を求める問題です。約数の個数も素因数分解の結果から求めることを利用します。

問題 4. ARC 026 B - 完全数



約数の総和

### オイラー関数

オイラー関数とは、自然数  $N$  が与えられたときに、 $1, 2, \dots, N$  のうち  $n$  と互いに素になる数の個数を求める関数  $\Phi(N)$  です。

回答:

```

1 def enumerate_divisors(n: int) -> list[int]:
2     divisors = set()
3     for i in range(1, int(n ** 0.5) + 1):
4         if n % i == 0:
5             divisors.add(i)
6             if i != n // i:
7                 divisors.add(n // i)
8
9     return list(divisors)
10
11
12 def main():
13     n = int(input())
14     divisors = enumerate_divisors(n)
15
16     print(*divisors)
17
18 if __name__ == "__main__":
19     main()

```

問題 5 yukicoder No.442 和と積

2つの整数  $a, b$  が与えられるので、 $a + b, a \times b$  の最大公約数を求める問題です。

コード 20 2点間の格子点の個数の実装

## XV. 冪乗: 繰り返し二乗法

$x^n$  を求める際に単に  $x \times x \times \dots \times x$  と計算すると  $O(n)$  の計算量がかかります。繰り返し二乗法を用いると、 $O(\log n)$  で計算することができます。また、冪乗では計算結果が非常に大きくなることがあるので、計算結果を  $\text{mod}$  で割った余りを求めることがあります。剰余で答えを出すときの演

算によって処理が異なるので注意が必要です。

- 加算: 加算した後で mod を取る
- 減算: 減算した後で mod を取る
- 乗算: 乗算した後で mod を取る
- 除算: 計算途中で mod を取るときは逆元を用いる (後述)

コード 21 繰り返し二乗法の実装

```

1 def exp_mod(n: int, m: int, mod: int) -> int:
2     if m == 0:
3         return 1
4     if m == 1:
5         return n % mod
6     ans = 1
7     m1, m2 = m // 2, m % 2
8     ans *= exp_mod(n, m1, mod) % mod
9     ans = (ans * ans) % mod
10
11    ans *= exp_mod(n, m2, mod)
12    ans %= mod
13
14    return ans

```

## XVI. 逆元とフェルマーの小定理

除算の mod を取るとき、計算途中で mod をもった場合と最後に mod を取った場合で結果が異なることがあります。例えば、 $a = 20, b = 4, mod = 6$  で考えます。

### • 計算途中で mod を取る場合:

1. まず、 $a$  と  $b$  に対して mod を取ります:

$$a \bmod m = 20 \bmod 6 = 2$$

$$b \bmod m = 4 \bmod 6 = 4$$

2. 次に、得られた mod の値で除算を行い、さらに mod を取ります:

$$\left( \frac{a \bmod m}{b \bmod m} \right) \bmod m = \left( \frac{2}{4} \right) \bmod 6$$

通常の整数除算では、これは 0 (小数は考慮しない) となるため、

$$0 \bmod 6 = 0$$

結果は 0 になります。

• 最後に mod を取る場合:

1. まず、 $a$  を  $b$  で割ります:

$$\frac{20}{4} = 5$$

2. 次に、その結果に対して mod を取ります:

$$5 \bmod 6 = 5$$

除算の mod を求めるときは、計算途中で mod を取ると結果が異なることがあるので、逆元を用いて計算します。

### i. フェルマーの小定理と逆元

除算における mod を考えるためにフェルマーの小定理と逆元を導入します。

#### フェルマーの小定理

$a$  は任意の自然数、 $m$  を素数で  $a, m$  が互いに素であるとき、以下の式が成り立つ。

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

#### 逆元

$m$  が素数で、 $a$  が  $m$  では割り切れない整数であるとき、以下の式を満たす  $x$  が  $[1, m)$  の範囲で一意に存在する。このような  $x$  を  $(\bmod m)$  における  $a$  の逆元と呼ぶ。

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

ここで、 $a^{m-1} \equiv a \times a^{m-2} \equiv 1 \pmod{m}$  となるので、 $a^{m-2}$  が  $a$  の逆元であることがわかります。以上より以下のことがわかります。

**$a$  で割ることは、 $a$  の逆元をかけることと等しい**

逆元を使った問題を解いてみましょう。

**問題**  ${}_nC_k$  を 998244353 で割ったあまりを求めるプログラムを作成せよ。

**回答**  ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  の剰余を求めるます。mod の世界で除算が登場しているので、逆元を用いて計算します。乗算するのは  $(n-k)!, k!$  であることから、これらで割ることは mod の世界では、これらの逆元つまり、それぞれ  $(n-k)!^{(DIV-2)}, k!^{(DIV-2)}$  をかけることと等しいです。

コード 22  ${}_nC_k$  を求める

```

1  DIV = 998244353
2
3  def factorial(n: int) -> list[int]:
4      memo = [1] * (n + 1)
5      for i in range(1, n + 1):
6          memo[i] = (memo[i-1] * i) % DIV
7
8      return memo
9
10 def inverse(n: int) -> int:
11     return pow(n, DIV - 2, DIV)
12
13 def comb(n: int, k: int, memo: list[int]) -> int:
14     return (memo[n] * inverse(memo[k]) * inverse(memo[n-k])) % DIV
15
16 n, k = map(int, input().split())
17 memo = factorial(n)
18 print(comb(n, k, memo) % DIV)

```

## XVII. 参考

参考になるサイトには扱ったアルゴリズムの別の見方や演習問題などがあるので、以下にリンクを示します。

### 最大公約数

- <https://qiita.com/drken/items/0c88a37eec520f82b788>

### 素数判定

- <https://algo-method.com/tasks/318>

### 素因数分解

- <https://qiita.com/drken/items/a14e9af0ca2d857dad23#%E5%95%8F%E9%A1%8C-10-abc-150-d---semi-commE7%82%B9>

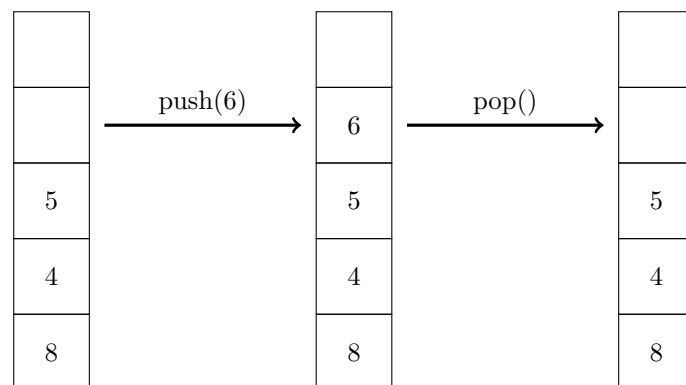
EEIC2024 アルゴリズムの授業で扱ったデータ構造のアルゴリズムのシケプリです。扱った内容は以下の通りです。

- スタック
- キュー
- 線形リスト
- ツリー
- ヒープ
- セグメント木 (発展的な内容)
- BIT(発展的な内容)

## XVIII. スタック

スタックは LIFO(Last In First Out) といって、最後に入れたデータが最初に取り出されるデータ構造です。本を積み重ねるイメージで考えるとわかりやすいです。スタックには以下の操作があります。

- push: スタックにデータを追加する
- pop: スタックからデータを取り出す



スタックのイメージ

### i. スタックの実装

実装のポイントは以下の3つです。Python の class を使って実装します。

- スタックは配列で実装する
- 要素が入る位置を示すポインタを持つ
- push と pop のメソッドを実装する

実装は以下の 24 のようになります。

コード 23 スタックの実装

```
1  class Stack:
2      def __init__(self, size: int) -> None:
3          self.stack: list[int] = [0] * size
4          self.top: int = 0
5
6      def push(self, value: int) -> None:
7          if self.top < len(self.stack):
8              self.stack[self.top] = value
9              self.top += 1
10         else:
11             print("This stack is full.")
12
13     def pop(self) -> None:
14         if self.top > 0:
15             self.top -= 1
16             return_value = self.stack[self.top]
17             return return_value
18         else:
19             print("This stack is empty.")
20
21 def main():
22     size = 5
23     stack = Stack(size)
24
25     stack.push(8)
26     stack.push(4)
27     stack.push(5)
28     stack.push(6)
29     return_value = stack.pop()
30
31     print(f"returned value is {return_value}")
```

```
32  
33 main()
```

## Column1 collections.deque

実際にスタックを使用するときは、Python の標準ライブラリである collections の deque を使うと便利です。Python では Stack スタックやキューが明示的に用意されていないため、双方向キューである deque を使ってスタックやキューを使用します。スタックは上記のように配列で簡単に実装可能ですが、標準ライブラリの deque を使うことで、より高速にスタックを使用できます。

## コード 24 スタックの実装

```
1  def main():  
2  from collections import deque  
3  stack = deque()  
4  
5  stack.append(8)  
6  stack.append(4)  
7  stack.append(5)  
8  stack.append(6)  
9  
0  return_value = stack.pop()  
1  
2  print(f"returned value is {return_value}")  
3  
4  main()
```

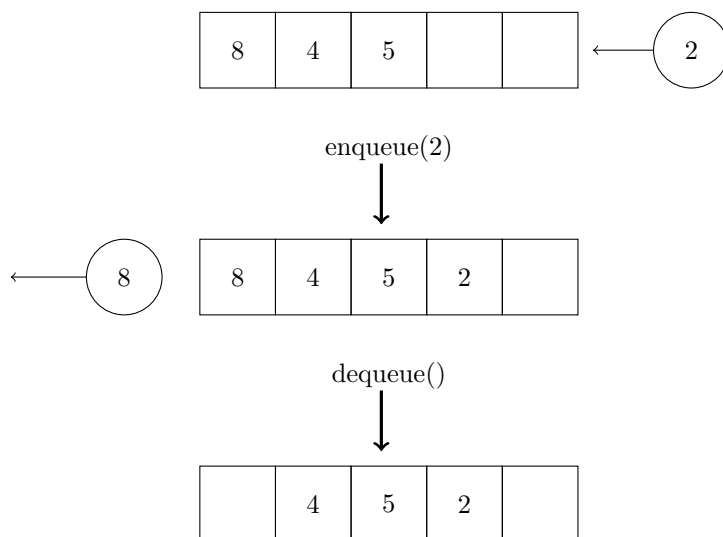
## XIX. キュー

キューは FIFO(First In First Out) といって、最初に入れたデータが最初に取り出されるデータ構造です。ディズニーランドの待ち行列のようなイメージで考えるとわかりやすいです。キューには以下のような操作があります。

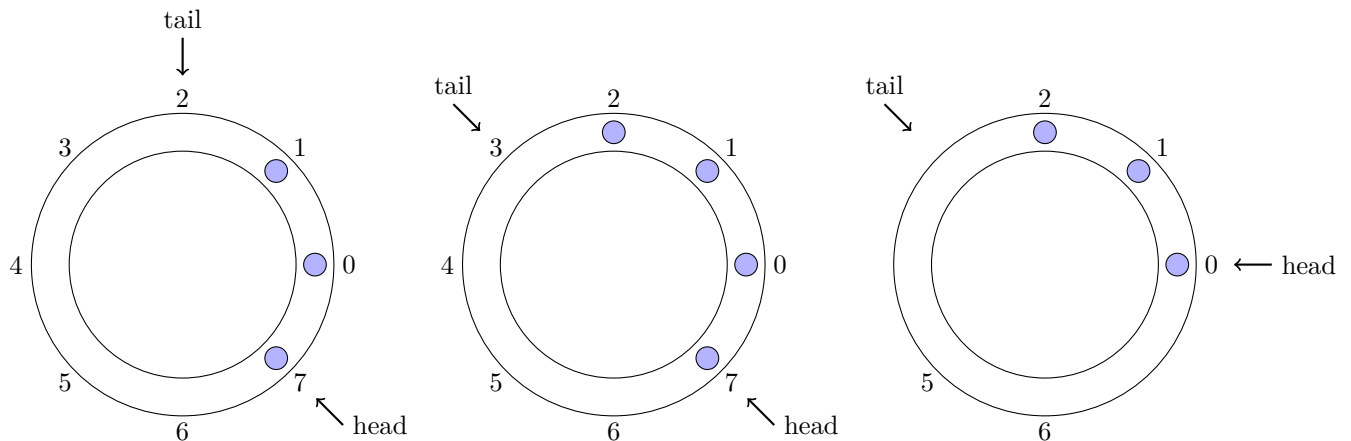
- enqueue: キューにデータを追加する
- dequeue: キューからデータを取り出す

先ほどのスタックと違って配列の頭からデータを取り出していることに注意してください。つまり、dequeue をするたびに取り出すデータの位置をずらす必要があります。従って、データを取り出すための先頭アドレス、データを追加するための末尾アドレスを持つ必要があります。

しかし、ここで困ったことがあります。dequeue をするたびに配列の頭が右にずれていくと、配列の先頭にデータが残っているにも関わらず、配列の末尾にデータが追加できなくなります。この問題を解決するために、リングバッファというデータ構造を使います。





**enqueue()****dequeue()**

リングバッファの仕組みを見てみましょう。enqueue をするときは tail の位置にデータを追加し tail を 1 だけ進めます。dequeue をするときは head の位置のデータを取り出し head を 1 だけ進めます。head と tail が同じ位置になったときは、キューが空になります。実装の際は、要素の数で割った余りを使って head と tail の位置を管理します。

**i. キューの実装**

キューの実装のポイントは以下の 3 つです。

- キューは配列で実装する
- 取り出す位置を示すポインタと追加する位置を示すポインタの 2 つを持つ
- リングバッファをモジュロ演算で実装する (%) を使う)
- enqueue と dequeue のメソッドを実装する

**コード 25 キューの実装**

```

1  class Queue:
2      def __init__(self, size: int) -> None:
3          self.queue = [0] * size
4          self.size = 0
5          self.head = 0
6          self.tail = 0
7
8      def enqueue(self, value: int) -> None:
9          if not self.is_full():
10             self.size += 1
11             self.queue[self.tail] = value

```

```
12         self.tail = (self.tail + 1) % len(self.queue)
13     else:
14         print("queue is full")
15
16     def dequeue(self) -> int:
17         if not self.is_empty():
18             self.size -= 1
19             return_value = self.queue[self.head]
20             self.head = (self.head + 1) % len(self.queue)
21             print(return_value)
22         else:
23             print("queue is empty")
24
25
26     def is_empty(self):
27         return self.size == 0
28
29     def is_full(self):
30         return self.size == len(self.queue)
31
32 queue = Queue(5)
33
34 queue.enqueue(8)
35 queue.enqueue(4)
36 queue.enqueue(5)
37
38 queue.enqueue(2)
39
40 queue.dequeue()
```

Column2 collections.deque

スタックと同様にキューも実際に使用するときは、Python の標準ライブラリである collections の deque を使うと便利です。

```
1 from collections import deque
```

```
2
3 queue = deque()
4
5 queue.append(8)
6 queue.append(4)
7 queue.append(5)
8
9 queue.append(2)
10
11 return_value = queue.popleft()
12
13 print(f"returned value is {return_value}")
```

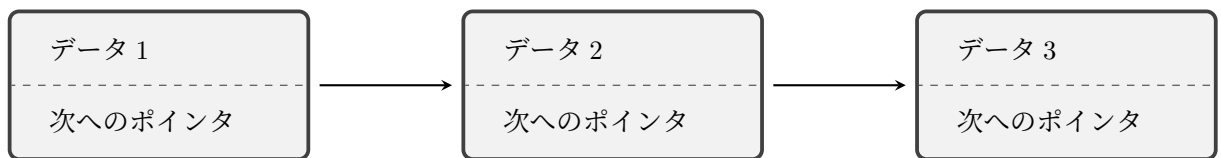
## XX. 線形リスト

線形リストとは、以下の図のようにデータと次のポインタを持つデータを連結させるデータ構造です。線形リストは必要なときに必要なデータを追加していくことができるため、空間計算量的に効率がいいです。しかし、データを取り出すときは先頭から順番にたどる必要があるため、時間計算量的には効率が悪いです。

今回実装する線形リストは以下の操作ができるものです。

- 片方向の線形リスト
- 新しい要素は常に末尾に追加する
- 検索は先頭から順番に行う

双方向の線形リストや、データの追加や削除を任意の位置で行うものもありますが、今回は片方向の線形リストを実装します。



### i. 線形リストの実装

先ほどのスタックやキューは配列を使って実装しましたが、線形リストはポインタ (Python ではクラスのインスタンス) を使って要素をつなげて実装します。

コード 26 線形リストの実装

```

1 class Node:
2     def __init__(self, value) -> None:
3         self.value = value
4         self.next: Node = None
5
6 class LinkedList:
7     def __init__(self) -> None:
8         self.head = Node(None)
9
10    def append(self, value: int) -> None:
11        current_cell = self.head
  
```

```
12     while current_cell.next != None:
13         current_cell = current_cell.next
14
15     # 追加する数値を値にもつノード
16     new_cell = Node(value)
17     # 現在の最後のノードの次のノードに付け加える
18     current_cell.next = new_cell
19
20     def pop(self, value: int) -> Node | None:
21         """
22         valueと同じ数値を値に持つノードを取り除く
23         """
24         prev_cell = None
25         current_cell = self.head
26
27         while current_cell != None:
28             if current_cell.value == value:
29                 # 取り出すため、付け替える
30                 prev_cell.next = current_cell.next
31                 return value
32             else:
33                 prev_cell = current_cell
34                 current_cell = current_cell.next
35
36         return None
37
38 linked_list = LinkedList()
39
40 linked_list.append(10)
41 linked_list.append(535)
42 linked_list.append(51)
43 linked_list.append(40)
44 linked_list.append(40)
45 linked_list.append(1)
46
47 return_value = linked_list.pop(51)
```

```
48  
49 print(return_value)
```

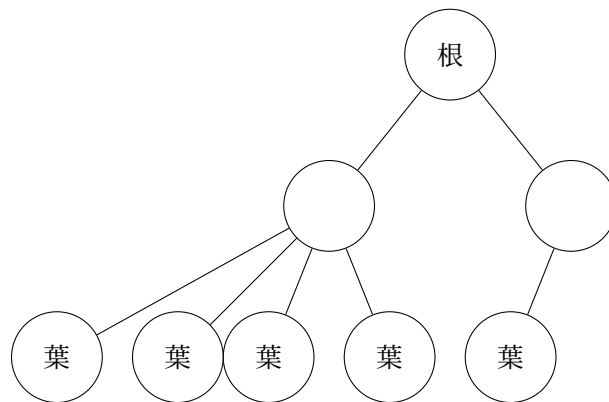
## XXI. ツリー (木構造)

木をひっくり返して根っこを上にして書いた木のような離散構造をツリーと言います。ツリーは用語が重要なため、以下の用語を覚えておくとい 좋습니다。

### i. 木構造の用語

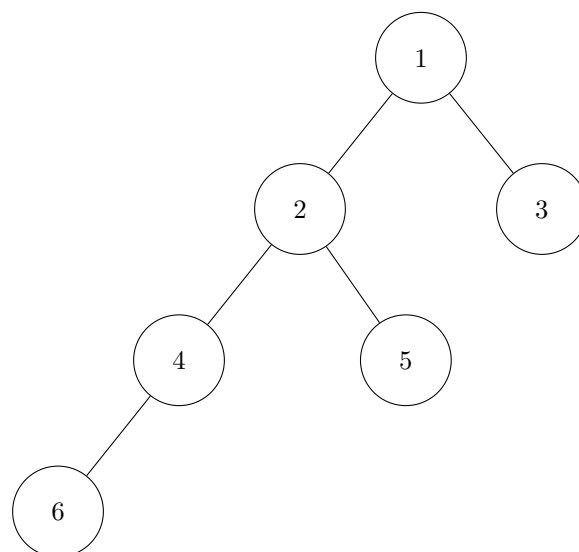
#### 1. 根と葉

一番上のノードを**根**、一番下のノード (より下に子ノードを持っていないノード) **葉**と言います。



#### 2. 深さと高さ

あるノードから繋がっている葉までの自分を除いたノードの数のうち最大の個数を**高さ**と言います。葉ノード自体の高さは0です。また、根からあるノードまでの高さを**深さ**と言います。



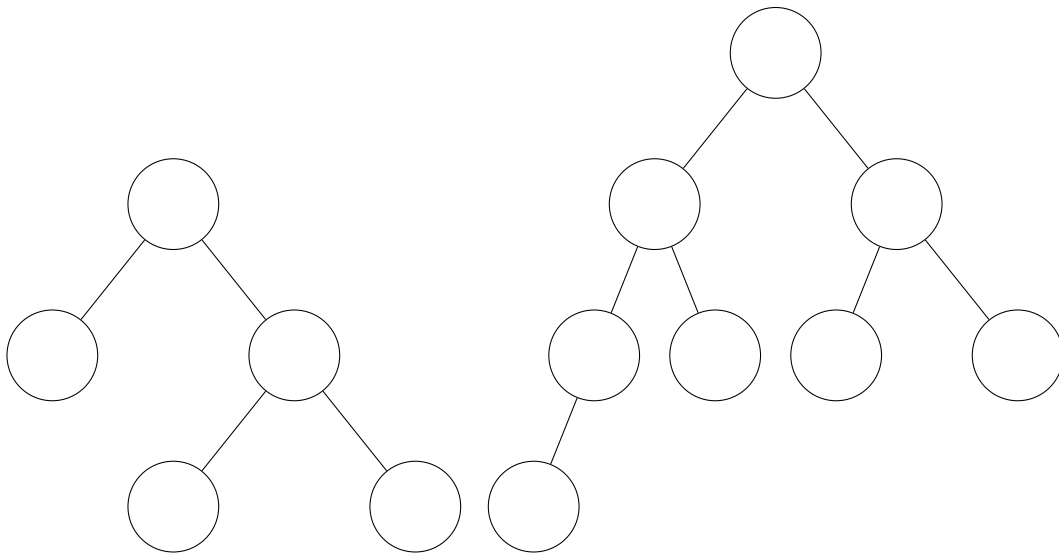
### 3. 二分木 (binary tree)

すべてのノードに関して、その子ノードの数が2以下である木を**二分木**といいます。二分木は以下のような特徴があります。上の木も二分木になっています。

また、完全二分木というものがあります。完全二分枝は英語で表記すると full binary tree と complete binary tree があります。これらは独立した定義ですので、注意してください。違いを整理すると以下ようになります。

- full binary tree: すべてのノードが0個または2個の子ノードを持つ二分木
- complete binary tree: 根がある階層 (level) を除いて、すべての階層で埋まりうるノードがすべて埋まっているかつ、最後の階層のノードは左から右に向かって埋まっている二分木

両者の違いは最初は分かりにくいですが、以下の図を見て理解を深めてください。



full binary tree の例

complete binary tree の例



## XXII. ヒープ

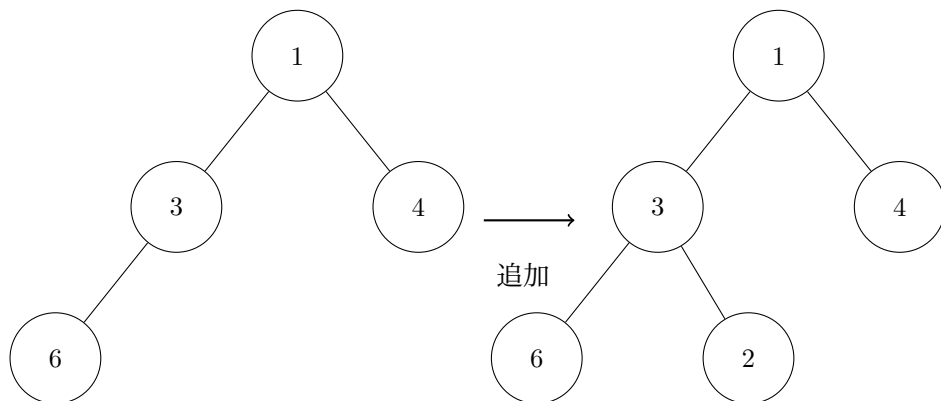
木構造を使ったデータ構造にヒープがあります。ヒープは以下の特徴があります。

- 親ノードは子ノードよりも大きい (または小さい) という性質を持つ
- 根ノードは常に最大 (または最小) となる

さらに今回はヒープの中でさらに、complete binary tree になっている**二分ヒープ**というデータ構造を扱います。ヒープは complete binary tree に対して、以下の操作を行います。

- 要素の追加
- 要素の取り出し

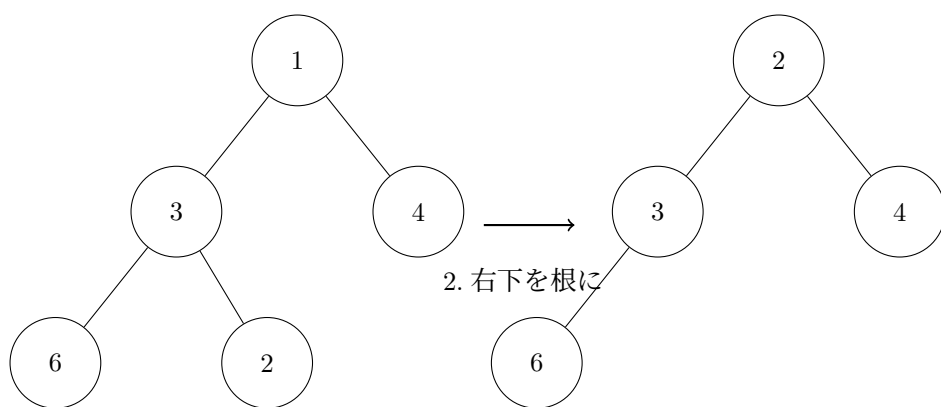
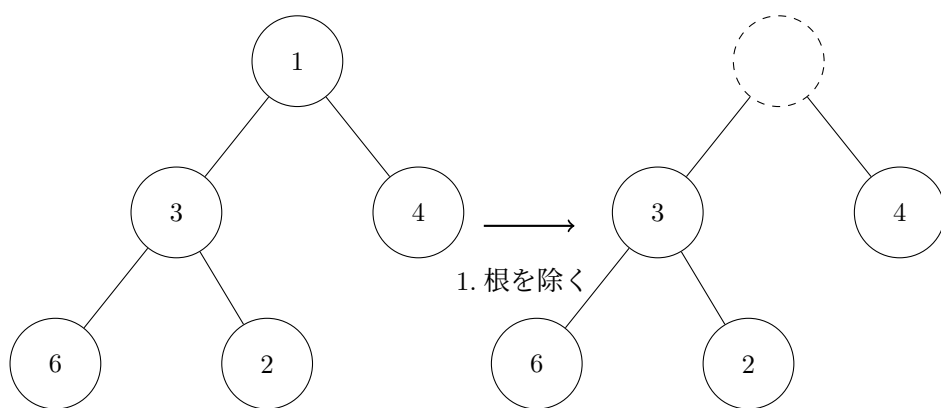
要素の追加に関して、二分ヒープが complete binary tree になっているため、根がある階層 (level) の一番右に要素を追加してきます。追加時に、追加したノードから根までヒープの条件を満たすように再帰的にノードを交換していきます。以下は最小ヒープの例です。



二分ヒープからの削除は少し複雑です。以下のような操作を行います。

1. 根ノードを取り除く
2. 一番右下のノードを根に移動する
3. 根から下に向かって、子ノードと比較して、ヒープの条件を満たすように再帰的にノードを交換していく

一番右のノードを根に移動する理由は、complete binary tree を保つためです。もしも、根を取り除いた後に直接根の子ノードを根にしまうと、必ずしも complete binary tree にならず実装が複雑になります。



上の例では、根を取り除き一番右のノードを根に移動すると木がヒープの性質を満たしていますが、一般的にはヒープの性質を満たすまで根から下に向かってノードを再帰的に交換していきます。

### i. ヒープの実装

二分ヒープの実装のポイントは

- 1-indexed の配列で実装する (要素数 + 1 の大きさの配列を用意する)

二分木は構造体を使わず配列だけで実装できる点が利点です。以下は最小ヒープの実装です。

コード 27 二分ヒープの実装

```
1 class Heap:
2     def __init__(self, size: int) -> None:
3         self.inf = 1 << 60
4         self.size = size + 1
5         self.heap = [self.inf] * self.size
6         self.tail = 0 # 現在のヒープのデータ数
7
8     # 複数回 swap 処理が登場するためメソッドにした
9     def swap(self, index1: int, index2: int) -> None:
10        self.heap[index1], self.heap[index2] = self.heap[index2], self.heap[
11            index1]
12
13    def push(self, value: int) -> None:
14        if self.tail != self.size - 1:
15            self.tail += 1
16            self.heap[self.tail] = value
17            self.check_from_leaf(self.tail)
18
19    def check_from_leaf(self, node: int) -> None:
20        # node が根なら再帰終了
21        if node == 1:
22            return
23
24        parent = node // 2
25        # ヒープの条件を満たさない
26        if self.heap[parent] > self.heap[node]:
```

```
26     self.swap(parent, node)
27     self.check_from_leaf(parent)
28
29
30 def pop(self) -> int | None:
31     if self.tail != 0:
32         popping_value = self.heap[1]
33         # 一番右の葉ノードを根ノードに移動
34         self.heap[1] = self.heap[self.tail]
35         self.tail -= 1
36         self.check_from_root(1)
37         return popping_value
38     else:
39         return None
40
41 def check_from_root(self, node: int) -> None:
42     left_child, right_child = 2 * node, 2 * node + 1
43
44     # left > rightよりこれだけで十分
45     if left_child > self.tail:
46         return
47
48     # 2つの子ノードの大小で区別する
49     smaller_node = larger_node = 0
50     if self.heap[left_child] < self.heap[right_child]:
51         smaller_node, larger_node = left_child, right_child
52     else:
53         smaller_node, larger_node = right_child, left_child
54
55     # 親ノードと小さい方の子ノードを比較
56     if self.heap[node] > self.heap[smaller_node]:
57         self.swap(node, smaller_node)
58         # 小さい方だけで十分
59         self.check_from_root(smaller_node)
```

## XXIII. セグメント木

セグメント木はある条件を満たす演算に関する区間の計算結果を高速に求めるデータ構造です。区間の計算結果を高速にもとめると聞いて累積和や尺取法を思い浮かべるかもしれませんが、セグメント木は扱うデータの要素が逐一変わるような状況でも区間の計算結果を高速に求めることができます。具体的な演算は、区間の最大・最小値や、合計値などがあります。

### i. 数学の知識の確認

セグメント木の内容に入る前に、セグメント木を理解するのに必要な数学の知識を整理します。

#### 1. 二項演算

自然数や文字列の集合  $S$  の任意 2 つの元から新たに値を生成する操作のことを  $S$  上の二項演算といいます。特に、 $x, y \in S$  に対する二項演算を  $op(x, y)$  と書き、

$$op(x, y) = x * y$$

と表現することにします。

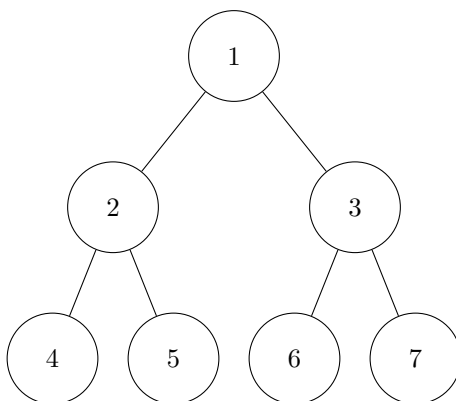
#### 2. 閉じた演算

$x, y \in S$  に対して  $op(x, y) \in S$  を満たすような演算を閉じた演算といいます。例えば、自然数の集合  $S$  において、 $op(x, y) = x + y$  は閉じた演算ですが、 $op(x, y) = x - y$  は閉じた演算ではありません。

今回実装するセグメント木は、閉じた演算を扱うため、セグメント木の演算は閉じた演算になるようにします。

#### 3. 完全二分木

セグメント木は完全二分木になっています。以下の図のように根以外のすべてのノードが 2 つの子ノードを持っていて、すべての葉の深さが同じ木になっています。



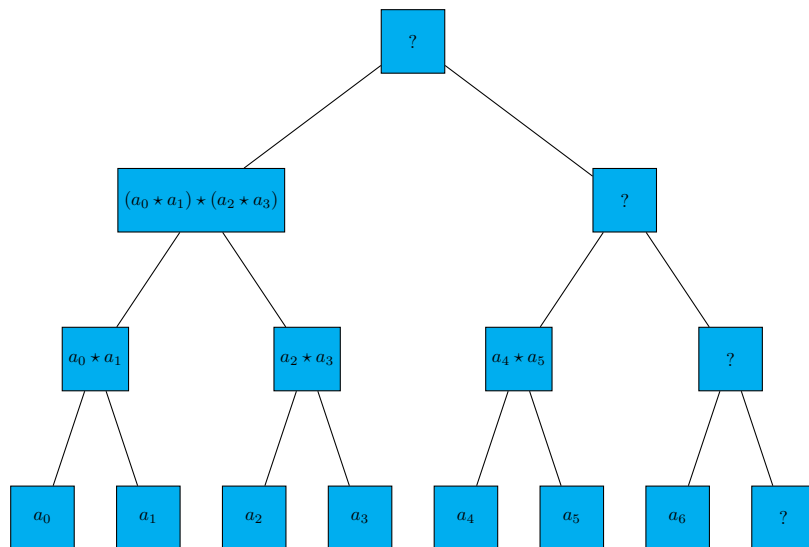
## ii. セグメント木の仕組み

セグメント木の理解に必要な知識の整理が終わったので、セグメント木の内容に入ります。

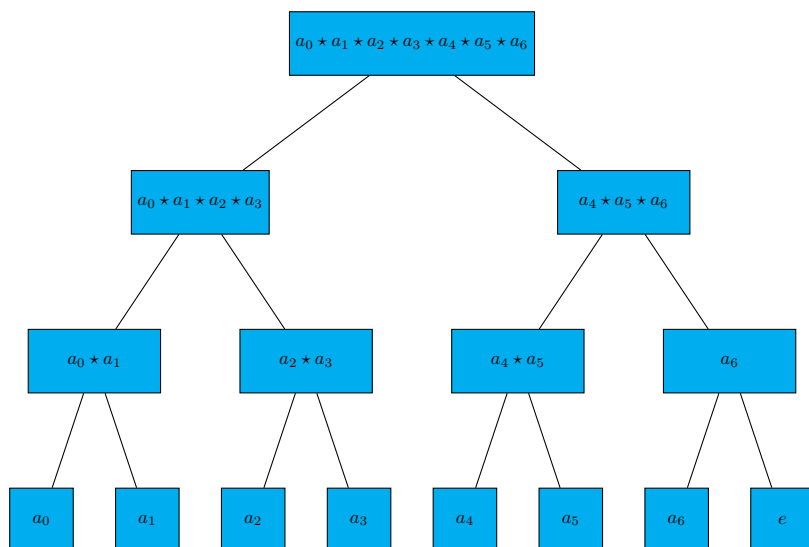
## 1. セグメント木の構造

セグメント木の構造の特徴は以下の通りです。下の図は  $a_0$  から  $a_6$  の 7 個のデータを持つセグメント木の例です。

- 葉ノードにデータを持つ
- 親ノードは 2 つの子ノードの演算結果を持つ
- $op(x, y)$  は結合法則を満たす ( $(x * y) * z = x * (y * z)$  が成立する)
- 集合  $S$  に対する  $op$  に単位元が存在する



図には?があります。?を全要素の総積をセグメント木の根が持つように埋めていきます。下の図の  $e$  は単位元を表しています。根  $a_0 * a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * a_5 * a_6$  は全要素の総積になっていることを考えると、その下の? は  $a_4 * a_5 * a_6$  になります。同様に、そのほかの?も埋めていくと以下の図のようになります。



### iii. セグメント木の実装

セグメント木も二分木なので配列で表現することが可能です。ヒープと同様に 1-indexed で実装します。以下の操作ができるようなセグメント木を実装します。

- セグメント木の構築
- 要素の更新
- 区間の演算結果の取得

#### 1. セグメント木の構築

セグメント木では葉にデータが格納され、葉の数はデータの数以上でかつ  $2^m$  で表せられる最小の数になります。 $2^m$  は 2 進数表記にすると  $2^m = \underbrace{100 \cdots 0}_m$  となるので、2 進数表記したときに  $m$  桁になる数と  $2^m$  になる数であるときは葉の数を  $2^m$  にします。つまり、データの数  $n$  が  $2^{m-1} + 1 \leq n \leq 2^m$  であるとき、葉の数は  $2^m$  になります。そして今回のセグメント木は 1-indexed の木になっているため配列の 0 番目の要素は無視します。よって、配列全体の長さは  $2m$  個になります。

セグメント木では扱う演算についての単位元を用意する必要があります。例えば、区間の最大値を求めるセグメント木では、単位元は  $-\infty$  になります。区間和では単位元は 0 になります。

葉をデータと単位元で埋めたら、その他のノードは 2 つの子ノードのデータを使って更新していきます。

## 2. 要素の更新

更新クエリに対しては、該当する葉ノードを更新した後、その親ノードを更新していきます。

## 3. 区間の演算結果の取得

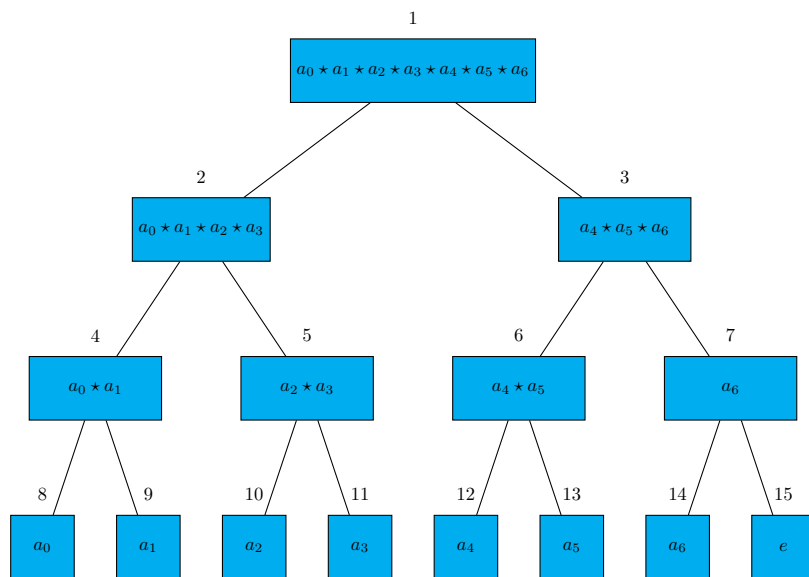
区間の演算結果の取得は少々複雑です。何個か例を挙げて説明します。右開区間  $[left, right)$  の区間の演算結果を求めてみます。下のセグメント木を例にします。ノードの近くの数字は 1-indexed な配列でセグメント木を表現したときのインデックス番号です。

•  $left = 0, right = 3$  のとき

求めるものは  $a_0 * a_1 * a_2 = (a_0 * a_1) * a_2$  つまり 4 と 10 の演算結果になります。

•  $left = 1, right = 7$  のとき

求めるものは  $a_0 * a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * a_5 * a_6 = a_1 * (a_2 * a_3) * (a_4 * a_5) * a_6$  つまり、9 と 5 と 6 と 14 の演算結果になります。



どのノードを使うかを機械的に判断していくにはどうすればいいでしょうか。それは、 $left$  と  $right$  が親ノードから見て右子ノードか左子ノードにあるかを見ていけばいいです。 $left$  と  $right$  が右か左にあるかを見ていき、両者の間隔を狭めていって、 $left$  と  $right$  が同じノードになるまで続けます。

1.  $left$  を右に移動する

$left$  が指すノードを使うか、それともその親ノードを使うかの判定を考えます。 $left$  と  $right$  の間は連続した区間であることに注意すると、 $left$  が親の左側にある場合は親ノードの値を使えばいい



ことがわかります。一方で、left が親の右側にある場合は、left が指すノードの値を使う必要があります。また 1-indexed なセグメント木では右ノードと左ノードは偶奇で判定できます。

#### 2. right を左に移動する

right も同様に考えます。ただ、right は开区間になっているため right - 1 を使うか使わないかを考えます。right が親の左側にある時は right - 1 よりも左側の要素を使うことになりますが、それは right - 1 の親ノードが含んでいるため、right - 1 は使いません。一方、right が親の右側にある場合は right - 1 を使う必要があります。

### 4. 実装

以上の考察をコードにします。以下は区間の最大値を求めるセグメント木の実装例です。

コード 28 セグメント木の実装

```

1  # 区間の最大値を求めるセグメント木
2  class SegmentTree:
3      def __init__(self, data_size: int, v: list[int] | None = None):
4          self.data_size = data_size
5          self.log = (data_size - 1).bit_length()
6          self.capacity = 1 << self.log
7          self.e = - (1 << 60)
8          self.tree = [self.e] * (2 * self.capacity)
9
10     # データが事前に与えられている場合
11     if v is not None:
12         # 葉ノードを埋める
13         for i in range(self.data_size):
14             self.tree[self.capacity + i] = v[i]
15
16         # 葉ノード以外を埋める
17         for i in range(self.capacity - 1, 0, -1):
18             self.update(i)
19
20     def update(self, index: int) -> None:
21         self.tree[index] = max(self.tree[2 * index], self.tree[2 * index
22                                 + 1])
23
24     # 更新クエリ
25     def set(self, index: int, value: int) -> None:

```

```
25     # 葉に移動
26     index += self.capacity
27     # 更新
28     self.tree[index] = value
29     # 上のノードを更新 根(1)を更新するまで続ける
30     while index > 1:
31         index //= 2
32         self._update(index)
33
34     # 取得クエリ
35     def prod(self, left: int, right: int) -> int:
36         left_value = right_value = self.e
37
38         # 葉に移動
39         left += self.capacity
40         right += self.capacity
41
42         while left < right:
43             # 範囲の左側が右のノード、本実装では奇数
44             if left % 2 == 1:
45                 left_value = max(left_value, self.tree[left])
46                 left += 1
47
48             if right & 2 == 1:
49                 right -= 1
50                 right_value = max(right_value, self.tree[right])
51
52             # 親に移動
53             left //= 2
54             right //= 2
55
56         return max(left_value, right_value)
57
58     def all_prod(self):
59         return self.tree[1]
```

## XXIV. BIT

BIT(Binary Indexed Tree) はフェニック木とも呼ばれるデータ構造で、要素の値が変化する区間の和を高速に求めることができます。セグメント木でも区間和の計算ができますが、BIT はセグメント木よりもシンプルに実装が可能です。区間和に限定すればセグメント木は牛刀をもって鶏を割くようなものです。セグメント木はより一般的な演算に対応したデータ構造です。

BIT はセグメント木に比べてシンプルです。

### i. 和

1 番目から  $i$  番目の要素の和を高速に求めるために、以下のような操作を行います。

1.  $i$  を 2 進数表記にしたときに一番右にある 1 の要素を足していく
2. 1 の要素を足していくときに、その要素を取り除いて次の 1 の要素を足していく

例えば、 $i = 7$  の場合を考えると、 $7 = 111(2)$  となり、右から 1 を引いていくと、 $111(2), 110(2), 100(2), 000(2)$ 、つまり  $7, 6, 4, 0$  となります。

BIT のデータを持つ配列を `bit` とすると、1 から 7 番目の要素の和は、`bit[0] = 0` になっているので、

$$\text{bit}[7] + \text{bit}[6] + \text{bit}[4] + \text{bit}[0]$$

になります。

### ii. 更新

要素の更新は和の計算と逆の操作を行います。具体的には、以下の操作を行います。

1.  $i$  を 2 進数表記にしたときに一番右にある 1 の要素を引いていく
2. 1 の要素を引いていくときに、その要素を取り除いて次の 1 の要素を引いていく

例えば、 $A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$  という等差数列の 5 番目に 6 を足すと、 $A = [1, 2, 3, 4, 11, 6, 7, 8]$  になります。このような値の更新を BIT で行ってみましょう。

まず、5 を 2 進数で表すと、 $101_2$  となります。ここで、一番右にある 1 の桁に 1 を足す操作を順に行っていきます。 $N = 8$  を超える前に操作をやめます。

具体的には、 $101_2 \rightarrow 110_2 \rightarrow 1000_2$  となります。これを 10 進数に直すと、 $5 \rightarrow 6 \rightarrow 8$  となります。ここで出てきた数をインデックスとして、6 を足していくことで値を更新することができます。

実際の操作は以下ようになります。

```
BIT[5] += 6
BIT[6] += 6
BIT[8] += 6
```

## iii. 実装

BIT の実装例は以下の通りです。

コード 29 BIT の実装

```
1  class BIT:
2      def __init__(self, size: int) -> None:
3          self.size = size
4          self.tree = [0] * (size + 1)
5
6      def sum(self, index: int) -> int:
7          res = 0
8          while index > 0:
9              res += self.tree[index]
10             index -= index & (~index + 1)
11
12         return res
13
14     def update(self, index: int, value: int) -> None:
15         while index < self.size:
16             self.tree[index] += value
17             index += index & (~index + 1)
```