I.　線形代数と有名不等式

i.　三角不等式

三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

1. $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
2. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$

三角不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

次の 2 つの式を満たす平面ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を考える。

$$|\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}| = 1$$

$$|2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| = 1$$

このとき、$|\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}|$ の最大値と最小値を求めよ。

問題

関数 $f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2-2t+1}$ $(0 \leq t \leq 1)$ が最小値をとる t の値を求めよ。

問題

関数 $g(t) = \sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}$ $(t > 1)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

ii.　コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

コーシー・シュワルツの不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

$x, y, z > 0,\ x+y+z=1$ のとき、以下に答えよ。

1. $x^2+y^2+z^2$ の最小値
2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ の最小値

参考

- https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/76/76-3.pdf
- https://mathematicsgarden.com/cschwarzprac/

II.　座標空間と数ベクトル空間

ここでは 2 次元と 3 次元の座標空間の問題を解いてみよう。

直線のパラメータ表示

直線 l 上の 1 点 $\boldsymbol{p}=(x_0, y_0, z_0)$ と方向ベクトル $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ が与えられたとき、直線 l 上の任意の点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}+t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_0+ta \\ y_0+tb \\ z_0+tc \end{pmatrix}$$

パラメータ t を消去すると、直線 l の方程式は次のように表される。

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

平面の方程式

平面上の点 $\boldsymbol{p}=(x_0,y_0,z_0)$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ が与えられたとき、平面上の任意の点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})=0$ を満たす。よって

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

となる。これを整理すると、

$$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0=d$$

となり、これが平面の方程式となる。

それでは問題を解いてみよう。

問題

点 $(0,2,1)$ を通り、$\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

問題

xyz 平面の平面 $P: 2x-y+3z=1$ に関して、点 $A\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

III.　線形写像

i.　線形写像

線形写像

$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次の 2 つの条件を満たす写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を**線形写像**という。

1. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
2. $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$

ii.　表現行列

表現行列

どんな線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対しても、ある一意な行列 A が存在して、

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と表される。この行列 A を f の**表現行列**という。

表現行列に関わる問題を解いてみよう。

問題

線形写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が次のように定義されるとき、f の表現行列を求めよ。

$$\text{f は}y = (\tan x)\text{での鏡映}$$

解答

線形写像の表現行列を求めるには、以下の 2 つの方法がある。

- 定義域の写像の元を一般的に表して、終域の元を求める。
- 基底を用いて表現行列を求める。

今回は 2 の方法を用いて表現行列を求める。xy 座標では $(1,0)$ と $(0,1)$ を基底として用いることができるので、それぞれの写像 f による像を求める。

$$f(1,0) = (\tan 1, 0) = (\cos 2x, \sin 2x)$$

$$f(0,1) = (0, \tan 1) = (\sin 2x, -\cos 2x)$$

よって求める表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

IV.　基底と次元

基底

ベクトル空間 V のベクトルたち $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たすとき、これらは V の**基底**をなすという。

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の 1 次独立である。
2. V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表される。

次元

ベクトル空間 V の基底の数を V の**次元**といい、$\dim V$ で表す。V が有限個のベクトルで生成できないとき、V は無限次元であるという ($\dim V = \infty$)。

基底の変換行列

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$\dim V = n$ とする。V の 2 つの基底

$$A : \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$$

$$B : \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

が与えられたとき、これらの基底の間の変換行列 P は次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

行列 P を A から B への基底の変換行列という。