I.　線形代数と有名不等式

i.　三角不等式

三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

1. $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
2. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq |\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\||$

三角不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

次の 2 つの式を満たす平面ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を考える。

$$|\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}| = 1$$

$$|2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| = 1$$

このとき、$|\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}|$ の最大値と最小値を求めよ。

問題

関数 $f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2-2t+1}$ $(0 \leq t \leq 1)$ が最小値をとる t の値を求めよ。

問題

関数 $g(t) = \sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}$ $(t > 1)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

ii.　コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

コーシー・シュワルツの不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

$x, y, z > 0,\ x + y + z = 1$ のとき、以下に答えよ。

1. $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の最小値

参考

- https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/76/76-3.pdf
- https://mathematicsgarden.com/cschwarzprac/

II.　座標空間と数ベクトル空間

ここでは 2 次元と 3 次元の座標空間の問題を解いてみよう。

直線のパラメータ表示

直線 l 上の 1 点 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$ と方向ベクトル $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ が与えられたとき、直線 l 上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_0 + ta \\ y_0 + tb \\ z_0 + tc \end{pmatrix}$$

パラメータ t を消去すると、直線 l の方程式は次のように表される。

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

平面の方程式

平面上の点 $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ が与えられたとき、平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) = 0$ を満たす。よって

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

となる。これを整理すると、

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

となり、これが平面の方程式となる。

それでは問題を解いてみよう。

問題

点 $(0,2,1)$ を通り、$\boldsymbol{n} = (1,-2,3)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

問題

xyz 平面の平面 $P : 2x - y + 3z = 1$ に関して、点 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ と対照な点 A' を求めよ。

……解答

III.　線形写像

i.　線形写像

線形写像

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次の 2 つの条件を満たす写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を**線形写像**という。

1. $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
2. $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$

ii.　表現行列

表現行列

どんな線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対しても、ある一意な行列 A が存在して、

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と表される。この行列 A を f の**表現行列**という。

表現行列に関わる問題を解いてみよう。

問題

線形写像 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が次のように定義されるとき、f の表現行列を求めよ。

$$\text{f は}y = (\tan x)\text{での鏡映}$$

……………………………………………………………………………………

解答

線形写像の表現行列を求めるには、以下の 2 つの方法がある。

- 定義域の写像の元を一般的に表して、終域の元を求める。
- 基底を用いて表現行列を求める。

今回は 2 の方法を用いて表現行列を求める。xy 座標では $(1,0)$ と $(0,1)$ を基底として用いることができるので、それぞれの写像 f による像を求める。

$$f(1,0) = (\tan 1, 0) = (\cos 2x, \sin 2x)$$

$$f(0,1) = (0, \tan 1) = (\sin 2x, -\cos 2x)$$

よって求める表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

問題

$\mathbb{R}^3$ の点 A を、A から平面 $x - 2y + z = 0$ へ下ろした垂線の足に写す線形写像の表現行列を求めよ。 ……………………………………………………………………………………

解答

$\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルがどのように写るかを考える。$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$ に対して法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (1,-2,1)$ を用いて、$\boldsymbol{e}_1$ から平面へ下ろした垂線の足は

$$\boldsymbol{n} + t\boldsymbol{e}_1 = (1+t, -2t, t)$$

これが平面 $x - 2y + z = 0$ 上にあればよいので、$t = -\frac{1}{6}$ となる。どうの様にすることで、$\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ と $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ が写るかを考えると、求める表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

IV.　基底と次元

基底

ベクトル空間 V のベクトルたち $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たすとき、これらは V の**基底**をなすという。

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の 1 次独立である。
2. V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表される。

次元

ベクトル空間 V の基底の数を V の**次元**といい、$\dim V$ で表す。V が有限個のベクトルで生成できないとき、V は無限次元であるという $(\dim V = \infty)$。

基底の変換行列

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし、$\dim V = n$ とする。V の 2 つの基底

$$A : \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$$

$$B : \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

が与えられたとき、これらの基底の間の変換行列 P は次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

行列 P を A から B への基底の変換行列という。