I. 線形代数と有名不等式

i. 三角不等式

三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

1. $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
2. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big|$

三角不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

次の 2 つの式を満たす平面ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を考える。

$$|\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}| = 1$$

$$|2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| = 1$$

このとき、$|\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}|$ の最大値と最小値を求めよ。

問題

関数 $f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2-2t+1}$ $(0 \leq t \leq 1)$ が最小値をとる t の値を求めよ。

問題

関数 $g(t) = \sqrt{t^2+1}\sqrt{t^2-2t+2}$ $(t > 1)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

ii. コーシー・シュワルツの不等式

コーシー・シュワルツの不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

コーシー・シュワルツの不等式を利用した問題を数問解いてみよう。

問題

$x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ のとき、以下に答えよ。

1. $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の最小値