I. ベクトル空間

i. 数ベクトル空間

ベクトル空間の公理

空でない集合 V 上に加法およびスカラー倍が定義され、以下の法則が満たされているとき、V を**ベクトル空間**という。

- 加法について
  1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
  2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
  3. V の中に 0 で表せられる 1 つの元があって、V 上の任意の元 v に対して $v+0=v$ が成り立つ
  4. V の任意の元 v に対して、$v+v'=0$ となる元 v' が存在する
- スカラー倍について
  1. $c(u+v)=cu+cv$
  2. $(c+d)v=cv+dv$
  3. $c(dv)=(cd)v$
  4. $1v=v$

V がベクトル空間であるとき、その元を**ベクトル**という。数学では「ある性質を持った集合」のことを**空間**といいます。つまりベクトル空間とは「ある性質を持った集合」でその性質とは集合に対して公理にある性質を満たした加法とスカラー倍が定義されていることです。加法とスカラー倍が定義されているとは、以下の**写像**が存在していることをいいます。集合 V に対して、

- $+:V\times V\ni(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\mapsto\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$
- $*:\mathbb{R}\times V\ni(c,\boldsymbol{a})\mapsto c\boldsymbol{a}\in V$

部分空間

V の部分集合 W は以下の条件を満たすとき、V の**部分空間**であるという。

1. W は V の零元を含む
2. $u,v\in W$ ならば $u+v\in W$
3. $u\in W,c\in\mathbb{R}$ ならば $cu\in W$

例えば、$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。また、原点を通る直線は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である。

線型結合・一次結合

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ を V のベクトルとする。$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を実数として、

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$$

の形で表せられる V のベクトルを $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ の**線型結合**という。

定理 1

V をベクトル空間とし、その元 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ の線型結合で表せられる全てのベクトルの集合を W とする。このとき、W は V の部分空間である。

$$W := \{c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} | c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

証明

V の零元 0 は $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v_1} + 0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n}$ であるから、W は零元を含む。また、$u, v \in W$ とすると、

$$u = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$$
$$v = d_1\boldsymbol{v_1} + d_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + d_n\boldsymbol{v_n}$$

と表せる。このとき、$u + v$ は

$$u + v = (c_1 + d_1)\boldsymbol{v_1} + (c_2 + d_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (c_n + d_n)\boldsymbol{v_n}$$

と表せるので、$u + v \in W$ である。また、$u \in W, c \in \mathbb{R}$ とすると、cu は

$$cu = (cc_1)\boldsymbol{v_1} + (cc_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (cc_n)\boldsymbol{v_n}$$

と表せるので、$cu \in W$ である。以上より、W は V の部分空間である。

線型結合の張る空間

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ を V のベクトルとする。これらのベクトルたちにより生成される$\{\sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{v_i} | c_i \in \mathbb{R}\}$を $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ によって生成される $\mathbb{R}$ の部分空間といい、以下のように書く。

$$< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n} >$$

線形独立と線形従属

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ を V のベクトルとする。$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を実数として、

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

が $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ に限られるとき、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ は**線形独立**であるという。
逆に、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ が線形独立でないとき、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ は**線形従属**であるという。

定理 2

「$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ が一次独立である」ことと、「$\boldsymbol{v_1}, \cdots \boldsymbol{v_n}$ が一次独立かつ $\boldsymbol{v_{n+1}} \notin < \boldsymbol{v_1, \cdots v_n} >$」であることは同値である。

……………………………………………………………………………………

証明

$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ が一次独立であるとする。このとき、$\boldsymbol{v_{n+1}}$ が $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ の線形結合で表せられるとすると、

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} + c_{n+1}\boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{0}$$

を満たす c_i は $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c_{n+1} = 0$ である。よって、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つので、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ は一次独立である。また、$\boldsymbol{v_{n+1}} \in < v_1, \cdots \boldsymbol{v_n} >$ であると仮定すると、$\boldsymbol{v_{n+1}}$ は $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ の線形結合で表せられると仮定する。このとき、$v_{n+1} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$ となり、$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} + (-1)\boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{0}$ となる。よって、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ は一次独立であることに矛盾するため、$\boldsymbol{v_{n+1}} \notin < \boldsymbol{v_1}, \cdots \boldsymbol{v_n} >$ である。
逆に、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ が一次独立かつ $\boldsymbol{v_{n+1}} \notin < \boldsymbol{v_1, \cdots v_n} >$ であるとする。このとき、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ が線形従属であるとすると、, もし $c_{n+1} \neq 0$ であると仮定すると、

$$c_{n+1} = -\frac{c_1}{c_{n+1}}\boldsymbol{v_1} - \frac{c_2}{c_{n+1}}\boldsymbol{v_2} - \cdots - \frac{c_n}{c_{n+1}}\boldsymbol{v_n}$$

となってしまい、家庭と矛盾するよって、$c_{n+1} = 0$ である。よって、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ は一次独立である。

以上の定理より、一次独立なベクトルの組みを作るときは、そのベクトルが生成する空間に含まれないベクトルを選ぶことで、線形独立なベクトルの組みを作ることができる。

一次独立と同値な条件

n 次正方行列 A に関して以下の条件は同値である。

1. A の列ベクトルが一次独立である
2. A が正則である

基底

V をベクトル空間とし、$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ を V のベクトルとする。$v_1, v_2, \cdots, v_n$ が以下の条件を満たすとき、 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ は V の**基底**であるという。

- $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ は V の一次独立なベクトルである
- $V =< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n} >$

定理 3

「$v_1, v_2, \cdots, v_n$ が V の基底である」ことと、「$v_1, v_2, \cdots, v_n$ が一次独立であり、V の任意のベクトルが $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の線形結合で表せられる」ことは同値である。

証明

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ が V の基底であるとする。このとき、$V =< v_1, v_2, \cdots, v_n >$ は明らか。
$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$ となる c_i は $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ であるから、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は一次独立である。
逆に、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $v_1, v_2, \cdots, v_n$ の線形結合で表せられるとする。

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = l_1\boldsymbol{v_1} + l_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + l_n\boldsymbol{v_n}$$

とすると一次独立であるから、$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \cdots, k_n = l_n$ である。よって、$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は V の基底である。

定理 4

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ と $b_1, b_2, \cdots, b_m$ が V の基底であるとする。このとき、$n = m$ である。

証明

まず「$b_{i1} \notin < a_2, a_3, \cdots, a_n >$ となる b_{i1} が存在する。」ことを証明する。b_{i1} がないことを仮定する。

$$b_1, b_2, \cdots, b_m \in < a_2, \cdots, a_n >$$

のようにベクトル b_i は $a_2, \cdots, a_n$ の線形結合で表せられる。また $b_1, b_2, \cdots, b_m$ は基底であるから、

$$< b_1, b_2, \cdots, b_m >= V$$

a_i も V の基底であるから、$a_1 \in < a_2, \cdots, a_n >$ より a_1 が $a_2, \cdots a_n$ の線形結合で表せられるから $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は一次独立であることに矛盾するため、$b_{i1} \notin < a_2, a_3, \cdots, a_n >$ となる b_{i1} が存在する。
定理 2 より、$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_{i1}$ は一次独立である。$b_{1i} \in < a_1, \cdots, a_n >= V$ より、

$$b_{i1} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$$

$c_1 \neq 0$ である。

$$c_1 = \frac{1}{c//} b_{i1} - \frac{c_2}{c_1} a_1 - \frac{c_3}{c_1} a_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1} a_n$$

... まだ続く.

次元

$a_1, \cdot a_n$ が V の基底であるとき、V の**次元**は n であるといい、$\dim V = n$ と書く。

一次独立と行列式

「$a_1. \cdots, a_n$ が一次独立」であることと、「$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の行列式が 0 でない」ことは同値である。

証明

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

について、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が一次独立であるから、$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ である。よって、A の行列式は 0 でない。

$$A = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$$

とすると、A^{-1} が存在する。$|A| = \det(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が一次独立であるとき、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。

証明

この定理より、$\mathbb{R}^n$ の基底は行列式を考えることで簡単に求められる。

部分空間の基底

$V \subset \mathbb{R}^n$ が部分空間であり、$a_1, \cdots, a_r$ が一次独立であるとき、V の基底 $a_1, \cdots, a_r a_{r+1}, \cdots, a_m$ が存在する。

共通部分と和空間

(1) $V_1 \cap V_2 := \{a | a \in V_1$かつ$a \in V_2\}$ を V_1 と V_2 の**共通部分**という。

(2) $V_1 + V_2 := \{a_1 + a_2 | a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$ を V_1 と V_2 の**和空間**という。

$V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

和空間の次元

$V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ のしたとき、

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

直和

$V_1, V_2, \cdots V_m$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間で、任意の $x \in V$ が

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$$

と一意に表せるとき、V は $V_1, V_2, \cdots, V_m$ の**直和**であるという。

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

「$V = V_1; \oplus V_2$」の必要十分条件は、「$V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V = V_1 + V_2$」である。

II. 固有値

III. 対角化

定義 1 行列の対角化

正方行列 A が対角化可能であるとは、ある正則行列 P が存在して、$P^{-1}AP$ が対角行列になることをいう。
正方行列 A が $P = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \cdots \boldsymbol{x_n})$ で以下のように対角化されるとき、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値
- $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ は対応する固有値 λ_i の固有ベクトル

問題 1

以下の行列 A を対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

回答:

まずは行列 A の固有値を求めます。固有値は以下の式を解くことで求めることができます。

$$|\lambda I - A| = 0(I : \text{単位行列})$$

これを解くと、$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$ になります。次に固有ベクトルをそれぞれ求めます。$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$ に固有値を代入してこの方程式を満たすベクトルを求めることで固有ベクトルを求めることができます。よって λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ になります。

したがって、$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすることで、行列 A は以下のように対角化されます。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i.　対角化の応用

1.　ケーリー・ハミルトンの定理

ケーリー・ハミルトンの定理

O_n, I_n をそれぞれ n 次の零行列、単位行列とする。A を n 次正方行列とすると、その固有多項式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ の λ に A を代入したものは零行列に等しい。すなわち、

$$p_A(A) = O_n$$

2.　行列の累乗

IV.　三角化

定義 1 行列の三角化

任意の正方行列 A に対して、ある正則行列 P が存在して、$P^{-1}AP$ が上三角行列になる。対角成分 $a_{11}, a_{22} \cdots a_{nn}$ は A の固有値である。このように上三角行列に変換することを**三角化**という。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

V.　二次形式

定義 2 二次形式

実数係数の多項式ですべての項が 2 次のものを**二次形式**という。
二次形式は対称行列 A を用いて以下のように表せる。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

具体例

(1) 二次形式の例

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 5x_1x_3 + 6x_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 2 & 3 \\ -\frac{5}{2} & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

行列 A は対称行列であることに注意すると、A の要素は $i = j$ のときは x_i^2 の係数、$i \neq j$ のときは $\frac{1}{2}x_ix_j$ の係数となる。

(2) 二次形式のでない例

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1$$