Instituto Tecnológico de Costa Rica **Escuela de Computación** Programa en Ciencias de Datos **Curso: Estadistica** Profesor: Ph. D. Saúl Calderón Ramírez	QUIZ 0 Entrega: Domingo 14 de Abril, a través del TEC digital Debe subir un *pdf* con la respuesta, generado con latex (adjunte los archivos .tex asociados). Valor: 100 pts. Puntos Obtenidos: ____________ Nota: ________________

Nombre del (la) estudiante: Yoksan Varela Cambronero

Cédula: 206100530

1. **(60 puntos)** Demuestre que el *skew* o la inclinación de una función de densidad exponencial:

$$p\,(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

es siempre $\gamma = 2$, tomando en cuenta que $\mathbb{E}\left[X^3\right] = \frac{6}{\lambda^3}$.

Solución Pregunta 1: Para la función de densidad Exponencial se conocen 2 momentos estadísticos:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{1}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2}$$

De 2 se puede calcular la desviación estándar:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

También se sabe que en términos generales:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \tag{4}$$

Si se iguala 4 con 2 y se sustituye 1, se obtiene la siguiente relación que será de utilidad más adelante:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\mathbb{E}(X^2) - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \tag{5}$$

Ya con estas funciones establecidas, se procede a simplificar la función del sesgo, que está dada por:

$$\gamma(X) = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^3\right]}{\sigma^3} \tag{6}$$

Primero, se usa 3 para sustituir en el denominador y dejarlo en términos de λ, y replantear el numberador como el desarrollo de una diferencia de dos factores al cubo:

$$\gamma(X) = \frac{\mathbb{E}\left[X^3 - 3X^2\mathbb{E}(X) + 3X\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)^3\right]}{(\frac{1}{\lambda})^3}$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\mathbb{E}\left[X^3 - 3X^2\mathbb{E}(X) + 3X\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)^3\right]$$

Se sustituye 1 en tres elementos de la ecuación anterior y se aplica las propiedades de superposición y sacar los escalares de la Esperanza para obtener lo siguiente:

$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}\left(\frac{3X^2}{\lambda}\right) + \mathbb{E}\left(3X\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3\right]$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\mathbb{E}(X^3) - \frac{3}{\lambda}\mathbb{E}(X^2) + \frac{3}{\lambda^2}\mathbb{E}(X) - \frac{1}{\lambda^3}\right]$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\mathbb{E}(X^3) - \frac{3}{\lambda}\mathbb{E}(X^2) + \frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^3}\right]$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\mathbb{E}(X^3) - \frac{3}{\lambda}\mathbb{E}(X^2) + \frac{2}{\lambda^3}\right] \tag{7}$$

En este punto, se sustituyen 5 y la condición mencionada en el enunciado que $\mathbb{E}\left[X^3\right] = \frac{6}{\lambda^3}$ en 7:

$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\frac{6}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda}\left(\frac{2}{\lambda^2}\right) + \frac{2}{\lambda^3}\right]$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\frac{\cancel{6}}{\cancel{\lambda^3}} - \frac{\cancel{6}}{\cancel{\lambda^3}} + \frac{2}{\lambda^3}\right]$$
$$\gamma(X) = \lambda^3\left[\frac{2}{\lambda^3}\right] \tag{8}$$

Para finalizar, se cancelan los λ^3 en 8 y así obtener la siguiente expresión:

$$\gamma(X) = \cancel{\lambda^3}\left[\frac{2}{\cancel{\lambda^3}}\right]$$
$$\gamma(X) = 2$$

Y así demostrar que $\gamma(X) = 2$ para la función de densidad Exponencial.

2. **(40 puntos)** Con pytorch, genere 100 muestras de tamaño N=1000, usando una densidad exponencial. Hagalo para dos valores diferentes de λ a su elección. Para esas muestras, calcule de forma vectorial el sesgo γ, y verifique la demostracion anterior. Adjunte el archivo jupyter con tal codigo.

Solución Pregunta 2: En el archivo adjunto *Quiz0_YoksanVarela.ipynb* hay una sección llamada *Funciones Generales*, en la cual se ha creado una funcion con el nombre **skewness_func**; la cual recibe un atributo solamente: **sample**. La ecuación que resuelve esta funcion es:

$$\gamma(x) = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^3\right]}{\sigma^3} \tag{9}$$

Esta función calcula el skewness en tres partes:

- Se calcula la esperanza del sample que se pasa como atributo.
- Se finaliza el cálculo del numerador usando el sample.
- Se calcula el denominador que es elevar al cubo la desviación estandar del sample.

- Finalmente, se calula la esperanza completa del numerador y se divide entre el denominador. Este resultado es lo que retorna la función.

A continuación se muestra el código implementado:

```python
def skewness_func(sample):
    """
    Esta funcion calcula el Skewness de una funcion de densidad de probabilidad
    Args:
        sample (tensor): Sample de una funcion de distribucion de probabilidad
    """
    esperanza = torch.mean(torch.tensor(sample))
    numerador = torch.tensor(sample-esperanza) ** 3
    divisor = torch.std(torch.tensor(sample)) ** 3

    skew = torch.mean(numerador)/divisor
    return skew
```

Ya con esta función implementada, se procede a crear dos diferentes samples, con N=1000 y 100 muestras cada uno. El primero de estos samples usa un λ=0.6, y el segundo sample usa un λ=1.5. Ambos códigos se presentan a continuación:

```python
    # Creacion de la primera funcion de densidad, con lambda = 0.6 y 100 muestras
    n = 1000
    lambda_dist1 = 0.6
    exponential_dist1 = torch.distributions.exponential.Exponential(lambda_dist1)
    exponential_sample1 = exponential_dist1.sample((n,100)).squeeze()

    # Creacion de la segunda funcion de densidad, con lambda = 1.5 y 100 muestras
    n = 1000
    lambda_dist2 = 1.5
    exponential_dist2 = torch.distributions.exponential.Exponential(lambda_dist2)
    exponential_sample2 = exponential_dist2.sample((n,100)).squeeze()
```

Finalmente, después de ejecutar ambos codigos, se procede a llamar la funcion **skewness_func** pasando como atributo *exponential_dist1* y *exponential_dist2*. Los resultados de muestran a continuación:

```python
    # Calculando el skewness de la primera funcion:
    skewness_1 = skewness_func(exponential_sample1)
    print("Skeness de la primera funcion:\n", skewness_1)
    -- Skeness de la primera funcion:
    tensor(1.9944)

    # Calculando el skewness de la segunda funcion:
    skewness_2 = skewness_func(exponential_sample2)
    print("Skeness de la segunda funcion:\n", skewness_2)
    -- Skeness de la segunda funcion:
    tensor(1.9753)
```

Conclusión: Con los resultados obtenidos queda verificada la demostración en la solución de la pregunta 1.