



Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 4

Тема Построение и программная реализация алгоритма наилучшего
среднеквадратичного приближения.

Студент Малышев И. А.

Группа ИУ7-41Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2020 г

Цель работы. Получение навыков построения алгоритма метода наименьших квадратов с использованием полинома заданной степени при аппроксимации табличных функций с весами.

1 Исходные данные

1. Таблица функции с весами ρ_i с количеством узлов N.
2. Степень аппроксимирующего полинома – n.

2 Код программы

Код программы представлен на ЯП C#

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Windows.Forms;

namespace Lab_04
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
        }

        public struct Point
        {
            public double x, y, p;

            public Point(double x, double y, double p)
            {
                this.x = x;
                this.y = y;
                this.p = p;
            }
        }

        public static List<Point> ReadFromGrid(DataGridView data)
        {
            List<Point> points = new List<Point>();

            foreach (DataGridViewRow row in data.Rows)
            {
                try
                {
                    if (!row.IsNewRow)
                        points.Add(new Point(double.Parse(row.Cells[0].Value.ToString(),
                            System.Globalization.CultureInfo.InvariantCulture),
                            double.Parse(row.Cells[1].Value.ToString(),
                            System.Globalization.CultureInfo.InvariantCulture),
                            double.Parse(row.Cells[2].Value.ToString(),
                            System.Globalization.CultureInfo.InvariantCulture)
                            ));
                }
                catch (Exception Ee)
                {
                    MessageBox.Show(Ee.ToString(), "Ошибка чтения таблицы");
                    break;
                }
            }
        }
    }
}
```

```

        }

        return points;
    }
}

public static List<double> Gauss(double[,] matrix, int power)
{
    double[] a = new double[power];

    for (int k = 1; k < power; k++)
        for (int j = k; j < power; j++)
        {
            double m = matrix[j, k - 1] / matrix[k - 1, k - 1];

            for (int i = 0; i < power + 1; i++)
                matrix[j, i] -= m * matrix[k - 1, i];
        }

    for (int i = power - 1; i >= 0; i--)
    {
        a[i] = matrix[i, power] / matrix[i, i];

        for (int c = power - 1; c > i; c--)
            a[i] -= matrix[i, c] * a[c] / matrix[i, i];
    }

    return a.ToList();
}

public static List<double> LeastSquares(List<Point> points, int power)
{
    int n = points.Count;
    double[,] matrix = new double[power + 1, power + 2];

    for (int k = 0; k <= power; k++)
    {
        double sum = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++)
            sum += points[i].p * Math.Pow(points[i].x, k) * points[i].y;
        matrix[k, power + 1] = sum;

        for (int m = 0; m <= power; m++)
        {
            sum = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++)
                sum += points[i].p * Math.Pow(points[i].x, k + m);
            matrix[k, m] = sum;
        }
    }

    return Gauss(matrix, power + 1);
}

```

```

coefs) public static List<(double, double)> GenPolynome(List<Point> points, List<double>
{
    double CanonPolynome(double x)
    {
        double sum = 0;

```

```

        for (int i = 0; i < coefs.Count; i++)
            sum += coefs[i] * Math.Pow(x, i);

        return sum;
    }

    double x_min = points[0].x;
    double x_max = points[0].x;
    foreach (Point p in points)
    {
        x_min = Math.Min(x_min, p.x);
        x_max = Math.Max(x_max, p.x);
    }

    double step = Math.Abs(x_max - x_min) / 100;
    List<(double, double)> polypts = new List<(double, double)>();
    for (double curr = x_min; curr <= x_max; curr += step)
        polypts.Add((curr, CanonPolynome(curr)));

    return polypts;
}

private void buttonAction_Click(object sender, EventArgs e)
{
    foreach (var p in chart1.Series)
        p.Points.Clear();

    List<Point> points = Point.ReadFromGrid(dataGridView);

    foreach (Point p in points)
        chart1.Series[0].Points.AddXY(p.x, p.y);

    for (int n = 1; n < 4; n++)
    {
        List<double> a = LeastSquares(points, n);

        List<(double, double)> polynome_points = GenPolynome(points, a);

        foreach (var p in polynome_points)
            chart1.Series[n].Points.AddXY(p.Item1, p.Item2);
    }

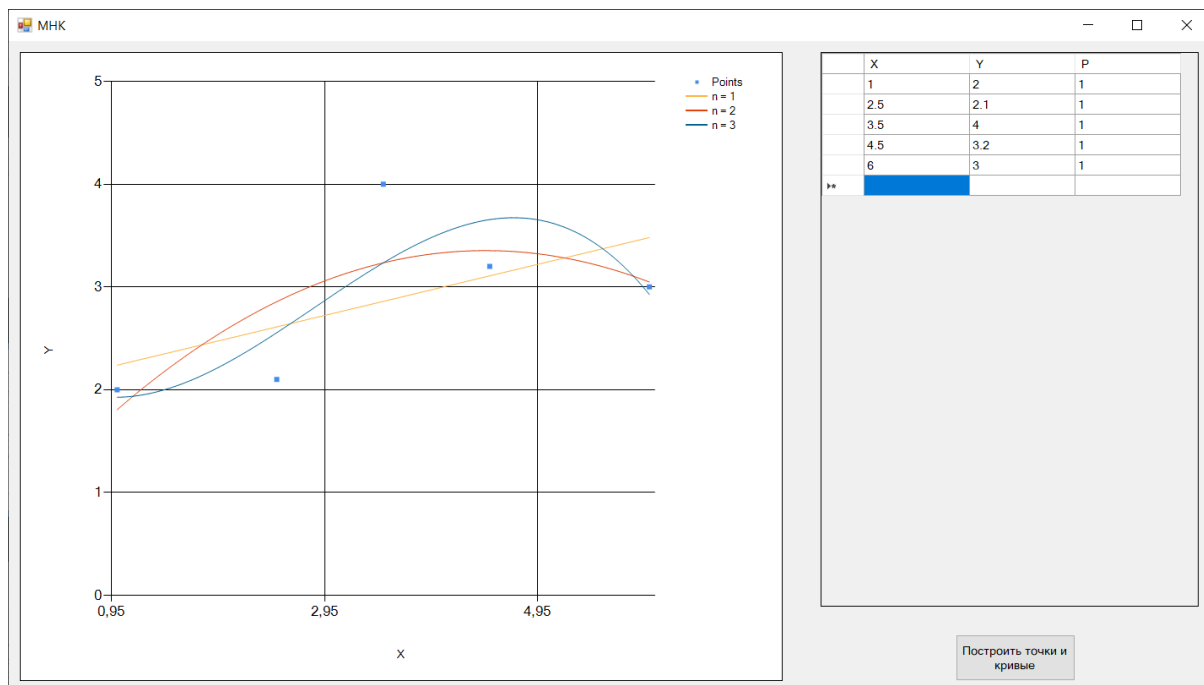
    chart1.Show();
}
}
}

```

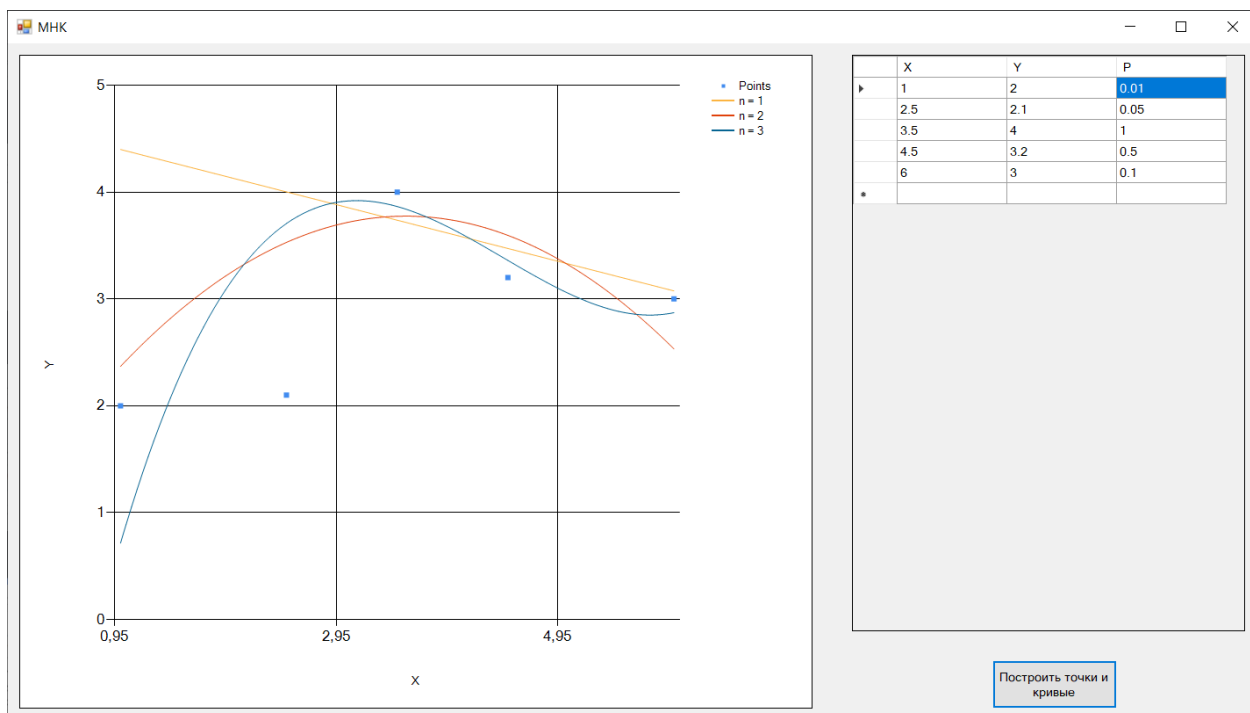
3 Результат работы

Графики, построенные на основе табличных данных: точки - заданная табличная функция, кривые- найденные полиномы.

1. Веса точек одинаковы и равны единице



2. Веса точек разные. Изменён угловой коэффициент прямой



4 Вопросы при защите лабораторной работы

1. Что произойдет при задании степени полинома $n=N-1$ (числу узлов таблицы минус 1)? В таком случае полином n -ой степени будет совпадать с полиномом $n-1$ степени, проходя через те же точки.

2. Будет ли работать Ваша программа при $n \geq N$? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?

Формально программа работать не будет, если не предусмотреть условие $n < N$, так как при $n \geq N$ определитель будет равен нулю, а потому коэффициенты не могут быть определены однозначно. На практике программа может выдавать результат из-за вычислений с числами с плавающей точкой, но при определённых данных она в любом случае завершится аварийно.

3. Получить формулу для коэффициента полинома a_0 при степени полинома $n=0$. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?

$$(x_0, x_0) a = (y, x_0)$$

$$\sum p_i \cdot a = \sum p_i \cdot y_i$$

$$a = \sum p_i \cdot y_i / \sum p_i, \quad 0 \leq i < N$$

p_i – вес точки, N – количество точек

Коэффициент представляет собой математическое ожидание.

4. Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома для случая, когда $n=N=2$. Принять все $p_i = 1$.

x_i	y_i	p_i
x_0	y_0	$p_0=1$
x_1	y_1	$p_1=1$

$$\begin{cases} (x^0, x^0) a_0 + (x^0, x^1) a_1 + (x^0, x^2) a_2 = (y, x^0) \\ (x^1, x^0) a_0 + (x^1, x^1) a_1 + (x^1, x^2) a_2 = (y, x^1) \\ (x^2, x^0) a_0 + (x^2, x^1) a_1 + (x^2, x^2) a_2 = (y, x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^2 p_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^2 \right) a_2 = \sum_{i=0}^2 p_i y_i \\ \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^3 \right) a_2 = \sum_{i=0}^2 p_i y_i x_i \\ \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^2 \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^3 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^2 p_i x_i^4 \right) a_2 = \sum_{i=0}^2 p_i y_i x_i^2 \end{cases}$$

Упростим ($p_i = 1$):

$$\begin{cases} 2a_0 + (x_0 + x_1) a_1 + (x_0^2 + x_1^2) a_2 = y_0 + y_1 \\ (x_0 + x_1) a_0 + (x_0^2 + x_1^2) a_1 + (x_0^3 + x_1^3) a_2 = y_0 x_0 + y_1 x_1 \\ (x_0^2 + x_1^2) a_0 + (x_0^3 + x_1^3) a_1 + (x_0^4 + x_1^4) a_2 = y_0 x_0^2 + y_1 x_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x_0 + x_1 & x_0^2 + x_1^2 \\ x_0 + x_1 & x_0^2 + x_1^2 & x_0^3 + x_1^3 \\ x_0^2 + x_1^2 & x_0^3 + x_1^3 & x_0^4 + x_1^4 \end{vmatrix} = 2(x_0^2 + x_1^2)(x_0^4 + x_1^4) + (x_0 + x_1)(x_0^3 + x_1^3)(x_0^2 + x_1^2) +$$

$$+ (x_0^2 + x_1^2)(x_0 + x_1)(x_0^3 + x_1^3) - (x_0^2 + x_1^2)^3 - 2(x_0^3 + x_1^3)^2 - (x_0^4 + x_1^4)(x_0 + x_1)^2 =$$

$$= 0 \Rightarrow \text{решений нет}$$

5. Построить СЛАУ при выборочном задании степеней аргумента полинома $\varphi(x) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^n$, причем степени n и m в этой формуле известны.

$$\begin{cases} (x^0, x^0) a_0 + (x^0, x^m) a_1 + (x^0, x^n) a_2 = (y, x^0) \\ (x^m, x^0) a_0 + (x^m, x^m) a_1 + (x^m, x^n) a_2 = (y, x^m) \\ (x^n, x^0) a_0 + (x^n, x^m) a_1 + (x^n, x^n) a_2 = (y, x^n) \end{cases}$$

6. Предложить схему алгоритма решения задачи из вопроса 5, если степени n и m подлежат определению наравне с коэффициентами a_k , т.е. количество неизвестных равно 5.

Для каждой пары n и m (при условии, что степень полинома меньше количества точек) вычислить коэффициенты a_0, a_1, a_2 функции φ , а затем выбрать ту пару, для которой справедливо:

$$\sum_{i=1}^N \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \min$$