Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Малышев И. А.

Группа ИУ7-61Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель: Власов П. А.

Москва — 2022 г.

Задание

Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Постановка задачи

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Вариант выборки

Вариант 13

$\vec{X}$=(-10.82,-9.27,-9.65,-9.36,-9.27,-11.25,-9.89,-9.26,-11.15,-8.90,-11.02,-8.28,-9.18,-10.16,-10.59,-10.82,-9.05,-9.47,-10.98,-11.50,-8.64,-10.86,-10.76,-11.49,-11.09,-9.33,-9.32,-9.66,-8.79,-10.54,-9.12,-10.40,-8.59,-10.22,-9.06,-10.59,-10.60,-10.25,-9.35,-11.44,-9.81,-9.32,-9.95,-9.33,-10.64,-9.45,-10.99,-10.15,-10.39,-10.36,-10.49,-11.67,-10.00,-10.87,-11.11,-9.68,-10.77,-9.13,-8.62,-10.33,-11.36,-10.24,-9.41,-11.05,-10.15,-9.35,-11.45,-9.87,-10.41,-10.11,-10.84,-11.48,-7.77,-10.79,-9.88,-10.70,-9.07,-9.47,-10.15,-9.93,-11.52,-9.04,-10.93,-10.13,-9.56,-11.39,-9.79,-9.19,-11.09,-9.86,-10.67,-10.26,-9.07,-10.53,-11.24,-10.16,-11.33,-8.76,-8.88,-10.53,-10.12,-8.98,-9.84,-9.90,-10.13,-9.32,-9.31,-9.99,-8.55,-11.64,-11.32,-10.51,-11.71,-10.50,-10.50,-12.20,-11.68,-10.45,-7.88,-10.84)

Теоретические сведения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$\overline{X}$ – выборочное среднее;
$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.
Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}} \tag{3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}} \tag{4}$$

$S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

Результаты работы программы

Текст программы

```
function main()
        X = [-10.82,-9.27,-9.65,-9.36,-9.27,-11.25,-9.89,-9.26,-11.15,-8.90,
            -11.02,-8.28,-9.18,-10.16,-10.59,-10.82,-9.05,-9.47,-10.98,-11.50,
        -8.64,-10.86,-10.76,-11.49,-11.09,-9.33,-9.32,-9.66,-8.79,-10.54,-9.12,
        -10.40,-8.59,-10.22,-9.06,-10.59,-10.60,-10.25,-9.35,-11.44,-9.81,
        -9.32,-9.95,-9.33,-10.64,-9.45,-10.99,-10.15,-10.39,-10.36,-10.49,
        -11.67,-10.00,-10.87,-11.11,-9.68,-10.77,-9.13,-8.62,-10.33,-11.36,
        -10.24,-9.41,-11.05,-10.15,-9.35,-11.45,-9.87,-10.41,-10.11,-10.84,
        -11.48,-7.77,-10.79,-9.88,-10.70,-9.07,-9.47,-10.15,-9.93,-11.52,-9.04,
        -10.93,-10.13,-9.56,-11.39,-9.79,-9.19,-11.09,-9.86,-10.67,-10.26,
        -9.07,-10.53,-11.24,-10.16,-11.33,-8.76,-8.88,-10.53,-10.12,-8.98,
        -9.84,-9.90,-10.13,-9.32,-9.31,-9.99,-8.55,-11.64,-11.32,-10.51,-11.71,
        -10.50,-10.50,-12.20,-11.68,-10.45,-7.88,-10.84];

    % Уровень доверия
        gamma = 0.9;
        % Объем выборки
        n = length(X);
        % Точечная оценка мат. ожидания
        mu = mean(X);
        % Точечная оценка дисперсии
        s2 = var(X);

        % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
        muBot = findMuBot(n, mu, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
        muTop = findMuTop(n, mu, s2, gamma);
        % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2Bot = findS2Bot(n, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2Top = findS2Top(n, s2, gamma);

        % Вывод полученных ранее значений
        fprintf('μ (Выборочное среднее) = %.3f\n', mu);
        fprintf('S^2 (Исправленная выборочная дисперсия) = %.3f\n', s2);
        fprintf('μ_Bot (нижняя границадоверительного интервала для математическ
            ого ожидания) = %.3f\n', muBot);
```

```
        fprintf('μ_Top (верхняя границадоверительного интервала для математического ожидания) = %.3f\n', muTop);
        fprintf('S^2_Bot (нижняя граница доверительного интервала для дисперсии) = %.3f\n', s2Bot);
        fprintf('S^2_Top (верхняя граница доверительного интервала для дисперсии) = %.3f\n', s2Top);

        % Создание массивов точечных оценок
        muArray = zeros(1, n);
        s2Array = zeros(1, n);
        % Создание массивов границ доверительных интервалов
        muBotArray = zeros(1, n);
        muTopArray = zeros(1, n);
        s2BotArray = zeros(1, n);
        s2TopArray = zeros(1, n);

        for i = 1 : n
                mu = mean(X(1:i));
                s2 = var(X(1:i));
                % Точечная оценка матожидания
                muArray(i) = mu;
                % Точечная оценка дисперсии
                s2Array(i) = s2;
                % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
                muBotArray(i) = findMuBot(i, mu, s2, gamma);
                % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
                muTopArray(i) = findMuTop(i, mu, s2, gamma);
                % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
                s2BotArray(i) = findS2Bot(i, s2, gamma);
                % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
                s2TopArray(i) = findS2Top(i, s2, gamma);
        end

        % Построение графиков
        plot(1 : n, [(zeros(1, n) + mu)', muArray', muBotArray', muTopArray']);
        xlabel('n');
        ylabel('y');
        legend('$\hat{\mu}(\vec{x}_N)$', '$\hat{\mu}(\vec{x}_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec{x}_n)$', '$\overline{\mu}(\vec{x}_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
        figure;
        plot(1 : n, [(zeros(1, n) + s2)', s2Array', s2BotArray', s2TopArray']);
        xlabel('n');
        ylabel('z');
        legend('$\hat{S}^2(\vec{x}_N)$', '$\hat{S}^2(\vec{x}_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end
```

```
% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для матожидания
function muBot = findMuBot(n, mu, s2, gamma)
        muBot = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для матожидания
function muTop = findMuTop(n, mu, s2, gamma)
        muTop = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Bot = findS2Bot(n, s2, gamma)
        s2Bot = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Top = findS2Top(n, s2, gamma)
        s2Top = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

Результаты расчётов

- μ (Выборочное среднее) = -10.132
- S^2 (Исправленная выборочная дисперсия) = 0.846
- $\underline{\mu}$ (нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания) = -10.271
- $\overline{\mu}$ (верхняя граница доверительного интервала для математического ожидания) = -9.993
- $\underline{S^2}$ (нижняя граница доверительного интервала для дисперсии) = 0.692
- $\overline{S^2}$ (верхняя граница доверительного интервала для дисперсии) = 1.062

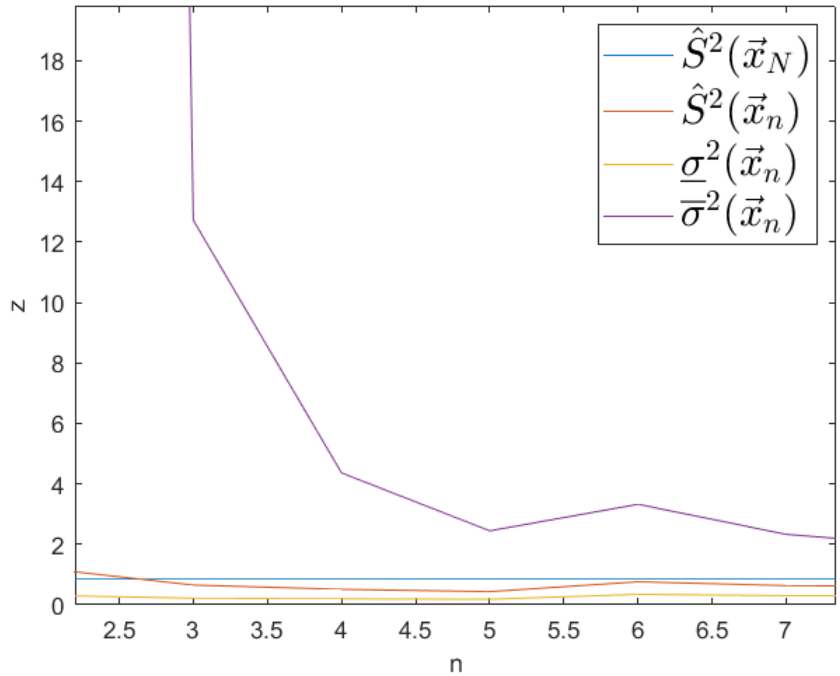

Рис. 1: Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

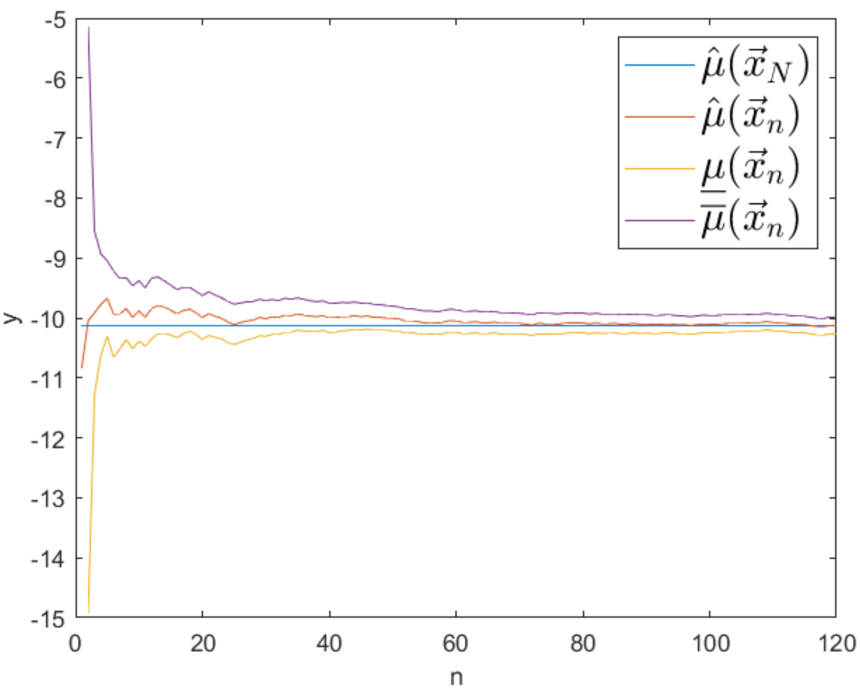

Рис. 2: Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.