Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Малышев И. А.

Группа ИУ7-61Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель: Власов П. А.

Москва — 2022 г.

Задание

Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Постановка задачи

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Вариант выборки

Вариант 13

$\vec{X}$=(-10.82,-9.27,-9.65,-9.36,-9.27,-11.25,-9.89,-9.26,-11.15,-8.90,-11.02,-8.28,-9.18,-10.16,-10.59,-10.82,-9.05,-9.47,-10.98,-11.50,-8.64,-10.86,-10.76,-11.49,-11.09,-9.33,-9.32,-9.66,-8.79,-10.54,-9.12,-10.40,-8.59,-10.22,-9.06,-10.59,-10.60,-10.25,-9.35,-11.44,-9.81,-9.32,-9.95,-9.33,-10.64,-9.45,-10.99,-10.15,-10.39,-10.36,-10.49,-11.67,-10.00,-10.87,-11.11,-9.68,-10.77,-9.13,-8.62,-10.33,-11.36,-10.24,-9.41,-11.05,-10.15,-9.35,-11.45,-9.87,-10.41,-10.11,-10.84,-11.48,-7.77,-10.79,-9.88,-10.70,-9.07,-9.47,-10.15,-9.93,-11.52,-9.04,-10.93,-10.13,-9.56,-11.39,-9.79,-9.19,-11.09,-9.86,-10.67,-10.26,-9.07,-10.53,-11.24,-10.16,-11.33,-8.76,-8.88,-10.53,-10.12,-8.98,-9.84,-9.90,-10.13,-9.32,-9.31,-9.99,-8.55,-11.64,-11.32,-10.51,-11.71,-10.50,-10.50,-12.20,-11.68,-10.45,-7.88,-10.84)

Теоретические сведения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;
$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

Результаты работы программы

Текст программы

```
X = [−10.82,−9.27,−9.65,−9.36,−9.27,−11.25,−9.89,−9.26,−11.15,−8.90,
    −11.02,−8.28,−9.18,−10.16,−10.59,−10.82,−9.05,−9.47,−10.98,−11.50,
−8.64,−10.86,−10.76,−11.49,−11.09,−9.33,−9.32,−9.66,−8.79,−10.54,−9.12,
−10.40,−8.59,−10.22,−9.06,−10.59,−10.60,−10.25,−9.35,−11.44,−9.81,
−9.32,−9.95,−9.33,−10.64,−9.45,−10.99,−10.15,−10.39,−10.36,−10.49,
−11.67,−10.00,−10.87,−11.11,−9.68,−10.77,−9.13,−8.62,−10.33,−11.36,
−10.24,−9.41,−11.05,−10.15,−9.35,−11.45,−9.87,−10.41,−10.11,−10.84,
−11.48,−7.77,−10.79,−9.88,−10.70,−9.07,−9.47,−10.15,−9.93,−11.52,−9.04,
−10.93,−10.13,−9.56,−11.39,−9.79,−9.19,−11.09,−9.86,−10.67,−10.26,
−9.07,−10.53,−11.24,−10.16,−11.33,−8.76,−8.88,−10.53,−10.12,−8.98,
−9.84,−9.90,−10.13,−9.32,−9.31,−9.99,−8.55,−11.64,−11.32,−10.51,−11.71,
−10.50,−10.50,−12.20,−11.68,−10.45,−7.88,−10.84];
```

Результаты расчётов