



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИУ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА ИУ7 «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:

«Классификация методов наложения теней в
дополненной реальности»

Студент ИУ7-71Б

_____ Малышев И. А.

Руководитель

_____ Кивва К. А.

2022 г.

РЕФЕРАТ

Объем РПЗ составляет 41 страницу, содержит 2 иллюстрации, 1 таблицу, 1 приложение и 26 использованных источников.

Ключевые слова: дополненная реальность, компьютерное зрение, машинная графика, наложение теней, изображение высокого динамического диапазона, RGBD-изображение, восстановление параметров освещения.

В работе были сформулированы цель и задачи работы, изучена предметная область, обоснована актуальность задачи, описаны основные определения дополненной реальности, компьютерного зрения, моделей освещения и наложения теней. Также был проведен обзор существующих методов получения данных о глубине окружения, моделей освещения и способов построения теней, а также были определены основные сложности решения задачи наложения теней в дополненной реальности. Помимо этого был проведен обзор существующих методов наложения теней в дополненной реальности, выбраны критерии сравнения и проведена классификация существующих методов наложения теней в дополненной реальности.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Анализ предметной области	8
1.1 Актуальность задачи	8
1.2 Основные определения	9
1.2.1 Дополненная реальность и компьютерное зрение	9
1.2.2 Данные об окружении	9
1.2.3 Модели освещения	12
1.2.4 Наложение теней	13
1.3 Основные сложности наложения теней в ДР	15
2 Классификация существующих методов	17
2.1 Обзор существующих методов наложения теней в ДР	17
2.1.1 Метод на основе анализа гистограммы изображения окру- жения	17
2.1.2 Метод на основе анализа контуров теней ИС	22
2.1.3 Метод на основе построения теневых объемов	24
2.1.4 Метод с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей	30
2.2 Критерии сравнения	34
2.3 Классификация методов	34
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	37
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	40
ПРИЛОЖЕНИЕ А	41

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

1. ДР – дополненная реальность.
2. ИС – источник света.
3. HDR (high dynamic range или высокий динамический диапазон) – тип изображения, в котором каждый пиксель представлен числом с плавающей точкой.
4. RGBD (red, green, blue, depth или красный, зеленый, голубой, глубина) – тип изображения, в котором каждый пиксель хранит информацию о цвете и глубине.

ВВЕДЕНИЕ

ДР является средством воздействия информационных технологий на окружающую среду [1]. Она позволяет совместить искусственно сгенерированное изображение с изображением реального мира с помощью различных датчиков, получающих информацию об окружающем мире, и специального ПО. Технология ДР предоставляет возможность накладывать элементы виртуальной информации поверх изображений объектов физического мира в реальном времени. Часть виртуальной информации можно представить в виде текстовой информации, графики, звуков, и других. Она используется во множестве сфер деятельности человека: медицина, построение анатомических моделей, образование, туризм и других [2].

Важными условиями реалистичного восприятия виртуальных объектов, вписанных в изображение реального мира, является моделирование свойств текстур и оптических свойств поверхности (отражение, пропускание, преломление света) и способности виртуальных объектов отбрасывать тени в соответствии с условиями освещения. Виртуальные объекты должны визуализироваться таким образом, чтобы поведение виртуальных теней, отбрасываемых виртуальными объектами, соответствовало поведению теней от реальных объектов и не вызывало у пользователя дискомфорта при наблюдении смешанного изображения [3].

В наложении теней участвуют 3 сущности: ИС, объект, отбрасывающий тень, и объект, на который отбрасывается тень. Соответственно, возможны комбинации:

- ИС может быть виртуальным или реальным;
- объект, отбрасывающий тень, может быть виртуальным или реальным;
- объект, на который отбрасывается тень, может быть виртуальным или реальным;

В данной работе рассматривается следующий случай:

- ИС является реальным;
- объект, отбрасывающий тень, является виртуальным;

- объект, на который отбрасывается тень, является реальным;

Цель работы – провести анализ предметной области и классифицировать методы наложения теней в ДР.

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие задачи:

- провести анализ предметной области наложения теней;
- провести обзор существующих методов наложения теней в ДР;
- сформулировать критерии сравнения методов;
- классифицировать существующие методы.

1 Анализ предметной области

В данном разделе изучается предметная область, обосновывается актуальность задачи, описываются основные определения ДР, компьютерного зрения, моделей освещения и наложения теней, проводится обзор существующих методов получения данных о глубине окружения, моделей освещения и способов построения теней, а также определяются основные сложности решения задачи наложения теней в ДР.

Предметная область – наложение теней в ДР.

Объект исследования – методы наложения теней, отбрасываемых виртуальными объектами, на реальные объекты в ДР.

Предмет исследования – способы восстановления модели освещения окружения для наложения теней, отбрасываемых виртуальными объектами на реальные в ДР.

1.1 Актуальность задачи

Совмещение синтезированных изображений объектов с реальными сценами является важным применением компьютерной графики, особенно в области архитектуры и визуальных эффектов. Часто предмет обстановки, реквизит, цифровое существо или актер должны быть плавно перенесены в реальную сцену. Эта сложная задача требует, чтобы взаимодействие света с объектами виртуального окружения было должным образом смоделировано. В частности, объекты должны отбрасывать тени, появляться в отражениях и преломлять, фокусировать и излучать свет точно так же, как это делали бы реальные объекты [4].

Проблема визуализации виртуальных объектов в реальном мире – низкое качество конечного изображения, из-за чего у пользователя не создается ощущение погружения в происходящее. Проблему низкого качества изображения можно разделить на две части: проблема материала и проблема освещения. Однако даже с использованием ультрареалистичных материалов для виртуальных объектов наблюдение за ними без использования системы освещения и отбрасывания теней не способствует реалистичности сцены [1].

Таким образом, использование системы освещения, в частности, наложение теней, отбрасываемых виртуальными объектами, на реальные объекты в ДР, имеет важное значение для высокого качества конечного изображения,

поскольку это уменьшает дискомфорт от восприятия изображений виртуальных объектов в реальном окружении и увеличивает уровень ощущения погружения в происходящее на экране.

1.2 Основные определения

1.2.1 Дополненная реальность и компьютерное зрение

Дополненная реальность – технология интеграции цифровой информации в виде изображений компьютерной графики, текста, видео, и другой информации и изображений объектов действительного (физического) мира в режиме реального времени [2].

Компьютерное зрение – теория и технология создания машин, которые могут производить обнаружение, слежение и классификацию объектов [5].

Технология ДР полагается на теорию компьютерного зрения, а точнее на анализ и обработку изображений. В области ДР алгоритмы компьютерного зрения используются для поиска в видеопотоке специальных маркеров или точек интереса. Алгоритмы компьютерного зрения позволяют выделять ключевые особенности на изображении (границы области, углы), производить поиск объектов в реальном времени и многое другое. После нахождения маркеров или точек интереса в видеопотоке и вычислении их местоположения, появляется возможность построения матрицы проекции и позиционирования виртуальных моделей. С помощью матриц проекции и позиционирования можно наложить виртуальный объект на видеопоток таким образом, что будет достигнут эффект присутствия [2].

1.2.2 Данные об окружении

При наложении теней в качестве исходных данных используются HDR-изображения или RGBD-изображения [4] [6].

HDR – общее название технологий работы с изображениями, диапазон яркости которых превышает возможности стандартных технологий. *Динамический диапазон* – отношение между максимальным и минимальным значением физической величины: для фотографии это отношение между самой яркой и самой темной частями изображения. Фотографической широты современных

камер и пленок не всегда достаточно для того, чтобы передать естественное освещение окружающего мира. Эта проблема решается путем увеличения динамического диапазона самих камер или комбинирования изображений, снятых с разной экспозицией, в результате чего возникает единое изображение, содержащее все детали из всех исходных изображений, как самых тусклых, так и самых ярких. *HDR-изображение* – изображение с расширенным динамическим диапазоном. Информация о цвете каждого пикселя HDR-изображения хранится в виде числа с плавающей точкой, в отличие от цветовой модели RGB, где используется 3 байта для трех основных цветов: красный, зеленый, синий [7].

RGBD-изображение – изображение, в котором каждый его пиксель помимо информации о цвете хранит информацию и о глубине [8]. Существует несколько способов получения информации о глубине точек кадра:

- структурированный свет;
- стереокамера;
- время полета (также Time-of-Flight);
- лидар (также LIDAR или LiDAR);

Структурированный свет

Данный способ полагается на проектор света, который проецирует шаблоны на реальные объекты. В качестве шаблонов могут быть точка, линия, полоса определенной толщины и регулярная сетка. Однако первые три шаблона требуют поворота проектора хотя бы по одной оси для сканирования всей области, поэтому обычно используют регулярную сетку, для которой этого не требуется [9].

Для проектора используется инфракрасный свет для минимизации помех. На основе искажения шаблона можно восстановить информацию о глубине с помощью паралакса, зная положение проектора в системе координат камеры. Большинство датчиков структурированного света не работают под прямыми лучами солнца, поскольку они полагаются на проекцию света в сцене. Поэтому они обычно подходят для использования в помещениях [9].

Стереокамера

Данный способ схож со структурированным светом, но отличается использованием еще одной камеры вместо проектора. Зная положения проекций одной и той же точки на изображения камер, и расстояние между камерами, можно вычислить глубину этой точки на основе паралакса. Стереокамеры работают как в помещении, так и на открытом воздухе. Проблемы же у данного способа возникают при анализе глубины точек гладкой окрашенной стены, так как изображения на обеих камерах эквивалентны. [8].

Время полета

Данный способ основан на оценке расстояния от датчика до наблюдаемого объекта путем измерения времени, необходимого для приема датчиком излучаемого света, отраженного от объекта. Поэтому датчики используют модуляцию излучаемого светового сигнала и сравнивают изменение фазы выпущенного сигнала и отраженного. Концепция практически не отличается от ультразвуковых и радарных датчиков, но здесь в качестве излучаемого сигнала используется свет. При сильном солнечном свете датчик может давать сбои, поэтому данный способ также чаще всего используют в помещениях [8].

Лидар

Данный способ использует идею измерения времени движения света, в течение которого излучаемый свет принимается датчиком, но они полагаются на один или несколько лазерных лучей (концентрированный свет) для измерения глубины точек в сцене. Лидарный датчик полагается на сфокусированные лазерные лучи, которые позволяют проводить измерения расстояния до нескольких километров. Точность измерений обычно не зависит от расстояния, хотя может зависеть от погодных условий: при неблагоприятных условиях, например, густой туман и бурный снегопад, она может падать. Лидарные датчики излучают свет, поэтому они работают в сложных условиях освещения, например, при недостатке освещения. Они подходят для использования в помещениях и на открытом воздухе [8].

1.2.3 Модели освещения

Свет – электромагнитная энергия, воспринимаемая человеческим глазом [10].

Интенсивность отраженного света рассчитывается по Закону Ламберта:

$$I = I_l k_d \cos \theta, \quad (1.1)$$

где I – интенсивность отраженного света, I_l – интенсивность ИС, k_d – коэффициент диффузного отражения ($0 \leq k_d \leq 1$), θ – угол между направлением света и нормалью к поверхности ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Если $\theta > \frac{\pi}{2}$, то источник света расположен за объектом. Коэффициент диффузного отражения k_d зависит от материала и длины волны света, но обычно считается постоянным [11].

ИС бывают:

- направленными – предполагается, что ИС находится бесконечно далеко, так что все направления световых лучей параллельны;
- точечными – ИС расположен в пространстве и излучает свет во всех направлениях;
- прожекторными – ИС имеет местоположение в пространстве, но излучает свет только внутри конуса;
- рассеянными – является источником общего освещения, благодаря которому вся сцена обладает одинаковой интенсивностью света.

Модель освещения – алгоритм расчета освещения сцены [12].

Модели освещения бывают простыми и полными. Простые модели освещения основаны на эстетической и экспериментальной аппроксимациях, в особенности зеркальная компонента отражения. Полные же удаляет внимание распределению энергии падающего света, т. е. вводят зависимость компонентов модели от физических параметров: длина волны света, свойств вещества, шероховатости поверхности, геометрии отражения и т. д. [11].

Среди простых моделей освещения выделяют:

- плоская модель освещения – интенсивность света вычисляется для каждой вершины грани трехмерного объекта, а затем усредняется и присваивается всей грани;
- модель освещения Гуро – происходит интерполяция интенсивности света между вершинами грани;
- модель освещения Фонга – происходит интерполяция нормали к поверхности между вершинами грани;
- модель освещения Блина-Фонга – улучшение модели Фонга, в котором бликовая составляющая света вычисляется отдельно с помощью медианного вектора, который расположен между вектором взгляда и вектором освещенности.

Среди полных моделей освещения выделяют модель освещения Кука-Торренса. В ней интенсивность света в заданной точке зависит от следующих факторов:

- шероховатость поверхности;
- загораживание и затенение;
- коэффициент Френеля.

Также модели освещения могут быть локальными, в которых интенсивность света в заданной точке зависит только от параметров ИС и материала поверхности, и глобальными, в которых интенсивность света в заданной точке зависит и от освещенности соседних объектов [11].

1.2.4 Наложение теней

Тень состоит из двух частей: полутени и полной тени. Полная тень – центральная, темная, резко отчерченная часть, а полутень (или мягкая тень) – окружающая ее более светлая часть. Полная тень образуется при полном отсутствии света, а полутень освещается частью рассеянного света ИС [11].

Существует несколько методов построения теней:

- использование теневой карты;

- построение теневого объема;
- обратная трассировка лучей.

Теневая карта

Теневая карта – объект, хранящий информацию о затененных пикселях буфера кадра. Основная идея использования теневой карты – построение карты глубины с точки зрения ИС и сравнение с картой глубины виртуальной камеры: те пиксели, которые видны с точки зрения камеры, но не видны с точки зрения ИС, являются затененными. Этот процесс называется *теневым тестом*. Такой подход не требователен к вычислительным ресурсам, но требователен к памяти, поскольку теневая карта обладает тем же разрешением, что и конечное изображение, и таких карт может быть несколько в зависимости от количества ИС [13].

Теневой объем

Теневой объем – это область пространства, доступ света в которую закрывает объект. Боковые границы теневого объема образуются четырехугольниками, расположенными от границ объекта, направленных на ИС, до некоторой пересекающейся с тeneвым объемом плоскостью. Границы ближнего к источнику основания четырехугольника образуются так называемыми границами силуэта. Эти границы образуются сторонами треугольников, находящимися на границе затененной и освещенной областей объекта или рядом с ней. В общем случае граница силуэта пролегает по границе между треугольниками, один из которых обращен к источнику света, а другой – в обратную сторону. Чтобы получить теневой объем, нужно найти все границы силуэта и нарисовать четырехугольники для каждой из них. Границы же дальнего основания образуются границами пересечения теневого объема с ближайшей к ИС плоскостью [14].

Освещенность точки определяется следующим образом: от точки местоположения камеры до нее проводится луч, который связан со счетчиком прохождения граней теневого объема. При входе в грань теневого объема счетчик увеличивается, при выходе – уменьшается. В итоге, если счетчик больше нуля, то точка считается затененной, иначе – она освещена.

Такой подход может давать ложные результаты, если камера находится внутри теневого объема. Эта проблема устраняется решением обратной задачи – трассировкой лучей из бесконечности к точке местоположения камеры [14].

Обратная трассировка лучей

Обратная трассировка лучей – это метод оценки освещенности, при котором для каждого пикселя в буфере кадра луч, выпущенный из пикселя, сталкивается с объектами сцены, чтобы определить отраженный цвет объекта. Луч может быть прослежен дальше, после первого столкновения с некоторым объектом, для создания эффектов, подобных зеркалу или стеклу. Тени с трассировкой лучей оцениваются аналогично оценке отражённого объектом света, но вместо оценки столкновения лучей из буфера кадра со сценой проверка столкновения выполняется для лучей от сцены к источнику света. Если луч от текущего пикселя столкнется с каким-либо объектом до того, как достигнет источника света, текущий пиксель окажется в тени, и, таким образом, его цвет будет темнее по сравнению с основным цветом его материала [13].

1.3 Основные сложности наложения теней в ДР

Основные проблемы данной задачи – обеспечение геометрического и светового взаимодействия виртуального и реального миров [6].

Геометрическое взаимодействие подразумевает то, что объекты виртуального мира, находящиеся за объектами реального мира, не должны быть видны [6].

Световое взаимодействие подразумевает обеспечение корректного освещения виртуальных объектов ИС реального мира (включая правильное формирование теней от виртуальных объектов, отбрасываемых на реально существующие предметы) и корректное освещение предметов реального мира виртуальными ИС (включая вторичное освещение, возникающее при переотражении света между объектами реального и виртуального миров). Появление некорректностей в модели освещения виртуальных объектов вызывает дискомфорт восприятия совмещённого изображения, на котором смешаны объекты реального и виртуального миров, что ограничивает время возможного пребывания человека в среде ДР [6].

Вывод

В данном разделе была изучена предметная область, обоснована актуальность задачи, описаны основные определения ДР, компьютерного зрения, моделей освещения и наложения теней, был проведен обзор существующих методов получения данных о глубине окружения, моделей освещения и способов построения теней, а также определены сложности решения задачи наложения теней в ДР.

2 Классификация существующих методов

В данном разделе проводится обзор существующих методов наложения теней в ДР, выбираются критерии сравнения и проводится классификация существующих методов. Для каждого метода описываются его входные данные, этапы, а также приводятся их преимущества и недостатки. Классификация методов приводится в виде таблицы, у которой строки представляют описанные методы, а столбцы – выбранные критерии.

2.1 Обзор существующих методов наложения теней в ДР

2.1.1 Метод на основе анализа гистограммы изображения окружения

В этом методе в качестве исходных данных используется информация о глобальном освещении окружающей среды и любых источниках света, присутствующих вокруг пользователя, из HDR-изображений [1]. Исходные изображения должны обладать следующими свойствами:

- они должны быть всенаправленными, т.е. для каждого направления пространства имеется пиксель, представляющий это направление;
- значения пикселей соответствуют количеству света, поступающего с этого направления.

Метод состоит из 4 основных этапов:

1. захват изображения;
2. обработка изображения;
3. поиск положения источников света;
4. отрисовка теней.

Захват изображения

На основе исходных снимков создается т. н. карта сферы, которая представляет собой сферическое изображение на 360 градусов окружения, где

будут размещены синтетические объекты. Чтобы удовлетворить свойству всенаправленности, наиболее часто используемым методом является фотографирование зеркальной сферы: этот метод позволяет получать свет, исходящий из-за сферы, поскольку лучи за сферой отклоняются и захватываются камерой спереди. Более простой метод состоит в том, чтобы сделать несколько фотографий всего окружения и скомпоновать их вместе, накладывая друг на друга, чтобы сформировать карту сферы [1].

Обработка изображения

Полученную карту сферы конвертируют из RGB-изображения в изображение в оттенках серого для более простого применения порогового значения к значениям цвета пикселей, поскольку в изображении в оттенках серого они варьируются только от 0 до 255. Стоит отметить, что не все RGB-изображения после конвертирования в изображение в оттенках серого имеют пиксели, которые варьируются от 0 до 255. Например, слишком яркие или слишком тусклые изображения.

После преобразования изображения можно применить для него пороговое значение, чтобы удалить все пиксели со значением цвета ниже заданного порога. Этот порог выбирается путем анализа гистограммы изображения [15].

Далее проверяется следующее условие:

$$\frac{Max(PixelValue)}{Average(PixelValue)} \geq 1.5, \quad (2.1)$$

где $PixelValue$ – значение пикселя, $Max(PixelValue)$ – максимальное значение пикселя, $Average(PixelValue)$ – среднее значение пикселя.

Если это условие верно, то это означает, что разница между максимальным значением и средним значением пикселей достаточно, чтобы утверждать, что существует видимая разница между окружающим светом и возможным точечным светом. В ином случае возможно ошибочное отождествление окружающего света с точечным светом, что приводит, во-первых, к слишком высокой плотности белых пикселей и, во-вторых, к неточному расположению света на этапе поиска положения источников света [1].

Далее происходит оценка порогового значения. Если 93% спектра (начиная с 0) покрывают не менее 98% пикселей, то можно отбросить оставшиеся 7%. Этот шаг позволяет обрезать изображение и рассматривать только те

области изображения, которые соответствуют реальным ИС. Полученный результат обрабатывается медианным фильтром размытия в качестве метода шумоподавления, поскольку возможно наличие некоторых областей со значением пикселей выше порогового значения из-за отражений объектов в окружающей среде [1].

Поиск положения источников света

У полученного изображения вычисляются контуры ИС. Из полученных контуров определяются моменты контуров, из которых можно получить центроиды каждого ИС.

Моменты изображения представляют собой средневзвешенное значение интенсивности пикселей изображения, то есть это суммарная характеристика контура, рассчитанная интегрированием (суммированием) всех пикселей контура. Все что необходимо – это вычислить сумму интенсивностей всех пикселей и получить на выходе значение [6].

Из координат центроида на изображении окружения (x_{pixel}, y_{pixel}) можно получить зенит θ и азимут ϕ ИС на сферической карте следующим образом. Координата x_{pixel} пропорциональна зениту, а координата y_{pixel} пропорциональна азимуту, из чего следуют соотношения [1]:

$$\frac{x_{pixel}}{\theta} = \frac{width}{2\pi}$$

$$\frac{height - y_{pixel}}{\phi} = \frac{height}{\pi}, \quad (2.2)$$

где $width, height$ – ширина и высота исходного изображения окружения соответственно. Стоит отметить, что координата r у ИС в сферических координатах постоянна и является радиусом карты сферы. Зная значения координат ИС в сферических координатах, можно их перевести в декартову систему координат:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, становится известно положение ИС в трехмерном пространстве.

Отрисовка теней

Отрисовка теней происходит по алгоритмам машинной графики. Зная местоположение каждого ИС, расставляются их виртуальные аналоги. В итоге происходит синтез и отображение виртуальной сцены с виртуальным объектом, отбрасывающим тень от «реальных» ИС.

Схема метода представлена на рисунке 2.1



Рисунок 2.1 – Схема метода на основе анализа гистограммы изображения окружения

Преимущества и недостатки

Преимущества данного метода являются:

- все вычислительные ресурсы во время наложения теней направлены лишь на отрисовку теней от виртуальных объектов, так как все шаги с расчетом положения ИС уже были проделаны;
- возможность распознавания нескольких ИС.

Недостатками данного метода являются:

- так как метод требует в качестве исходных данных фото на 360 градусов всего окружения, где будет происходить поиск ИС, то динамическая смена окружения не предусмотрена, за исключением случаев применения всеракурсной видеокамеры;
- корректная отрисовка теней происходит только на плоской горизонтальной поверхности, на которой располагается виртуальный объект, нельзя воспроизвести искажение тени, так как нет информации о поверхности, на которую производится проецирование.

2.1.2 Метод на основе анализа контуров теней ИС

В качестве исходных данных используются RGBD-изображения.

Из исходных данных вычисляется следующий набор данных: точки, соответствующие границам объектов, и точки, соответствующие границам теней от объектов. Предполагается, что имеется прямое соответствие между объектами и их тенями на RGBD-изображении. Количество найденных точек практически не сказывается на точности, но они должны быть расположены равномерно по контуру изображения объекта, и отклонение точек от границы контура не должно быть значительным. Количество точек на контурах объектов и их теней не должно быть меньше 3 [16].

Полученные наборы точек используются для нахождения положений ИС следующим образом.

1. Строится набор плоскостей параллельно поверхности земли.
2. Из точек на границах тени выпускают лучи через сопряженные точки на границах объекта. Эти лучи пересекают ранее построенные плоскости, тем самым итеративно получают точки пересечения лучей с плоскостями.

3. Проверяется характер распределения скоплений этих точек пересечения на каждой плоскости. Скопление точек, полученное данным методом, уплотняется при приближении виртуальной плоскости к ИС. На определенном шаге итераций скопление точек перестанет уплотняться и в дальнейшем будет расширяться. Максимальная плотность скопления свидетельствует о том, что следующая плоскость находится дальше от источника, чем текущая. А источник расположен между этой и следующей плоскостями.
4. После этого определяется центры скоплений этих точек. Зная высоту найденной виртуальной плоскости и центры скоплений, можно восстановить положения ИС. При этом абсолютная ошибка определения координаты ИС по высоте не превышает половины шага, с которым чередуются виртуальные плоскости [16].
5. Далее уточняются координаты ИС с помощью билинейной интерполяции между двумя виртуальными плоскостями с максимальной плотностью точек.

Также стоит упомянуть случай, когда не был найден ни один ИС. Это может происходить, например, если объекты и их тени были некорректно согласованы или видимый край объекта не является краем, создающим тень [16].

Поскольку ограничением данного метода является невозможность восстановить интенсивность и диаграмму излучения ИС, то тип найденного ИС устанавливается точечным, а диаграмма излучения – Ламбертовой [16].

Преимущества и недостатки

Преимуществами данного метода являются:

- работа в помещении;
- возможность распознать несколько ИС.

Недостатками данного метода являются:

- зависимость качества его работы от результатов распознавания контуров объектов и теней. Устройство распознавания может распознать только часть контуров, например, распознанная часть тени может не соответствовать обнаруженному контуру объекта.

2.1.3 Метод на основе построения теневых объемов

Данный метод состоит из трех этапов.

1. Обнаружение теней на видео в реальном времени.
2. Построение теневого объема.
3. Отрисовка виртуального объекта и синтез изображения.

В качестве исходных данных используются RGBD-изображения.

В методе текущий, то есть k -й, кадр видео разделяется на две области: область проекции и новую область.

Предыдущий, то есть $k - 1$ -й, кадр видео проецируется на k -й кадр с оцененной позиции камеры и с использованием информации о глубине точек кадра. Область, которая является результатом пересечения двух кадров, называется областью проекции. Новая область – область k -го кадра, не попавшая в область проекции, то есть разность между областью проекции и k -м кадром. Далее фильтруются данные глубины кадра от шумов и оценивается положение камеры. Затем происходит обнаружение граней новых теней в новой области, и грани новых теней добавляются к старым.

На основе обнаруженных граней теней строится теновый объем и уточняется с помощью адаптивной стратегии выборки [17] для достижения плавных эффектов отбрасывания теней.

В итоге происходит синтез и отображение конечного изображения с виртуальным объектом.

Обнаружение теней на видео в реальном времени

Поиск теней происходит в пространстве изображения.

Большая часть теней распределена по всей области проекции. В этой области грани тени кадра k могут быть непосредственно спроецированы из

кадра $k - 1$. Чтобы устранить ошибки проецирования, вызванные зашумленными параметрами камеры и данными о глубине, происходит оптимизация первоначально спроецированных граней тени в области проецирования. Грани тени в новой области обнаруживаются и объединяются с гранями теней из области проекции путем обеспечения плавности перехода между гранями теней из области проекции и гранями теней из новой области [18].

Область проекции. Для оптимизации контуров теней используется алгоритм Кэнни. К полученным результатам применяют фильтрацию среднего сдвига чтобы сгладить контуры теней и избежать влияния мягких теней и шума изображения. Затем пиксель на грани тени, для которого отношение интенсивности двух сторон его направления градиента превышает заданный порог (0.65 от темной стороны к светлой стороне), идентифицируется как находящийся на краю тени. Далее происходит объединение пикселей изначального контура теней с пикселями контуров теней, полученных после оптимизации, путем поиска пикселей граней теней в небольшой окрестности (3 на 3 пикселя) каждого пикселя изначального контура теней. Если в окрестности появляется пиксель контура тени после оптимизации, то он заменяет пиксель изначального контура тени [18].

Новая область. Изображение представляет собой попиксельное произведение освещенности и коэффициента отражения:

$$I(x) = R(x)L(x), \quad (2.4)$$

где $I(x)$ – наблюдаемый цвет RGB в пикселе x , а $L(x)$ и $R(x)$ – освещенность и коэффициент отражения (альбедо). Для пикселей p и q , которые находятся в теневой и не теневой областях соответственно и на небольшом расстоянии от пикселя x (3 на 3 пикселя), интенсивности изображения следующие:

$$\begin{aligned} I(p) &= R(p)(L_{sun} \cos(\theta) + L_{sky}) \\ I(q) &= R(q)L_{sky}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где L_{sun} – интенсивность солнечного света, L_{sky} – интенсивность рассеянного света, то есть неба.

Так как пиксели p и q примыкают к границе тени, то предполагается, что они имеют одинаковую отражательную способность, то есть $R(p) \approx R(q)$,

из чего следует, что:

$$\frac{I(p)}{I(q)} \approx \frac{L_{sun} \cos(\theta) + L_{sky}}{L_{sky}} = 1 + \cos(\theta) \frac{L_{sun}}{L_{sky}}, \quad (2.6)$$

где θ – угол падения между направлением солнечного света и нормалью к поверхности в пикселе p .

Для пикселей с известными нормальными направлениями или плоских пикселей, то есть пикселей без информации о глубине, вычисляется отношение $r = \frac{L_{sun}}{L_{sky}}$. Для каждого пикселя x на гранях тени в области проекции вычисляется $r(x)$. Затем вычисляется усредненное соотношение по всем пикселям на гранях тени в области проекции и обозначается как r_s .

В новой области грани тени вычисляются теми же методами, что и в области проекции, но каждая точка грани подвергается анализу: используется пространственное расстояние между пикселем y и краем тени из области проекции в качестве веса $w(y)$, который управляет балансом двух объектов, который определяется как нормализованное среднее расстояние между y и t ближайшими пикселями на гранях тени из области проекции. На основе чего вычисляется вероятность пребывания точки y в тени [18]:

$$\begin{aligned} p(y) &= (1 - w(y)(1 - S(y)) + w(y)M(y) \\ S(y) &= \frac{r(y)}{(r_s + r(y))} \\ M(y) &= \frac{|T(p) - T(q)|}{\max(T(p), T(q))} \\ T(y) &= \frac{H(y)}{V(y) + 0.01}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $p(y)$ – вероятность пребывания точки y в тени, $S(y)$ – отношение сходства $r(y)$ и r_s , $T(y)$ – отношение оттенка $H(y)$ и значения $V(y)$ точки y в пространстве HSV [19], $M(y)$ – разница соотношений $T(p)$ и $T(q)$.

Объединение граней тени. Перед объединением граней теней новой области и области проекции вершины граней области проекции сортируются по глубине. Затем порядок граничных пикселей используется для соединения вершин. Чтобы избежать чрезмерных соединений, используется согласованность в направлениях градиента для уточнения связанных ребер [18].

Далее выбираются множества соседних вершин $N_j(x)$, где j – порядко-

вый номер вершины. Далее выбирается набор кандидатов $C_j(x)$, где $C_j(x_i)$ – набор пикселей граней тени в новой области в окрестности $N_j(x)$. Для каждого пикселя x в окрестности $N_j(x)$ вычисляется среднее направление градиента g_x по $N_j(x)$. Затем для каждого пикселя x_i в $C_j(x_i)$ вычисляется направление градиента g_{x_i} . Угловая разница выражается так:

$$d(x_i) = \frac{(g_x - g_{x_i})^2}{g_{x_i}^2} \quad (2.8)$$

Если $d(x_i) < \alpha$ (α - некоторое пороговое значение), x_i идентифицируется как край тени.

Построение теневого объема

Приближенное построение. Для построения приближенного теневого объема помимо граней тени используется также информация о направлении падения солнечного света, полученная на основе местоположения пользователя и времени суток при съемке. Для каждого пикселя на краю тени испускается луч вдоль направления солнечного света, длина луча на практике равна максимально возможной величине. Если закрывающий солнце объект виден не полностью, отбрасываемая тень обычно обрезается по крайней мере на одну границу изображения. Соответственно, теневой объем объекта будет естественным образом усечен трехмерными плоскими поверхностями границ изображения. Для полностью видимого объекта, отбрасывающего тень, используется информация о его геометрии для усечения объема тени. Благодаря такому подходу поверхность теневого объема грубо аппроксимируется серией параллелограммов [18].

Уточненное построение. Для более гладкого затенения трехмерных объектов точки тени заменяются на непрерывные кривые. Делается это с помощью кривых Безье. Из-за сложной конфигурации наружных теней прямая подгонка Безье приводит к большим ошибкам. Вместо этого края тени разделяются на кусочно-гладкие сегменты с использованием дискретной кривизны. Затем множества точек границ тени делятся на сегменты. Для каждого сегмента первая точка, а именно P_0 , и последняя точка, а именно P_2 , устанавливаются в качестве контрольных точек. Затем, используя координаты других точек на отрезке, оптимальная точка, а именно P_1 , получается с помощью

подгонки кривой Безье методом наименьших квадратов [18]:

$$B(t) = \sum_{k=0}^2 p_k B_{k,1}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad (2.9)$$

При повторной выборке подогнанных кривых количество выбранных точек должно быть достаточным для создания плавных краев тени и как можно меньшим для поддержания эффективности. Для достижения этой цели используется адаптивная стратегия выборки. Для каждого двумерного сегмента l , обладающего n пикселями, обозначается расстояние между первой и последней точкой сегмента P_{2D}^1 и P_{2D}^n соответственно в виде $d(P_{2D}^1, P_{2D}^n)$, и их трехмерное расстояние $d(P_{3D}^1, P_{3D}^n)$. Их соотношение $\frac{d(P_{2D}^1, P_{2D}^n)}{d(P_{3D}^1, P_{3D}^n)}$ представляет трехмерное расстояние, соответствующее единице пикселя на изображении. Чем меньше соотношение, тем больше точек следует отобрать. Далее, когда края тени находятся далеко от камеры, количество точек выборки следует уменьшить. В противном случае следует его увеличить. Наконец, трехмерное расстояние также определяет количество точек выборки [18].

Конечное количество точек выборки, которое обозначается как m , выражается как:

$$m = \max\left(\frac{d(P_{2D}^1, P_{2D}^n)}{d(P_{3D}^1, P_{3D}^n)} \cdot \frac{d(P_{3D}^1, P_{3D}^n)}{1/n \sum_{i=1}^n d_i}, \epsilon\right), \quad (2.10)$$

где d_i - глубина i -й точки и ϵ - минимальное количество точек выборки, которое экспериментально установлено равным $2n$ [18].

Схема метода изображена на рисунке 2.2.

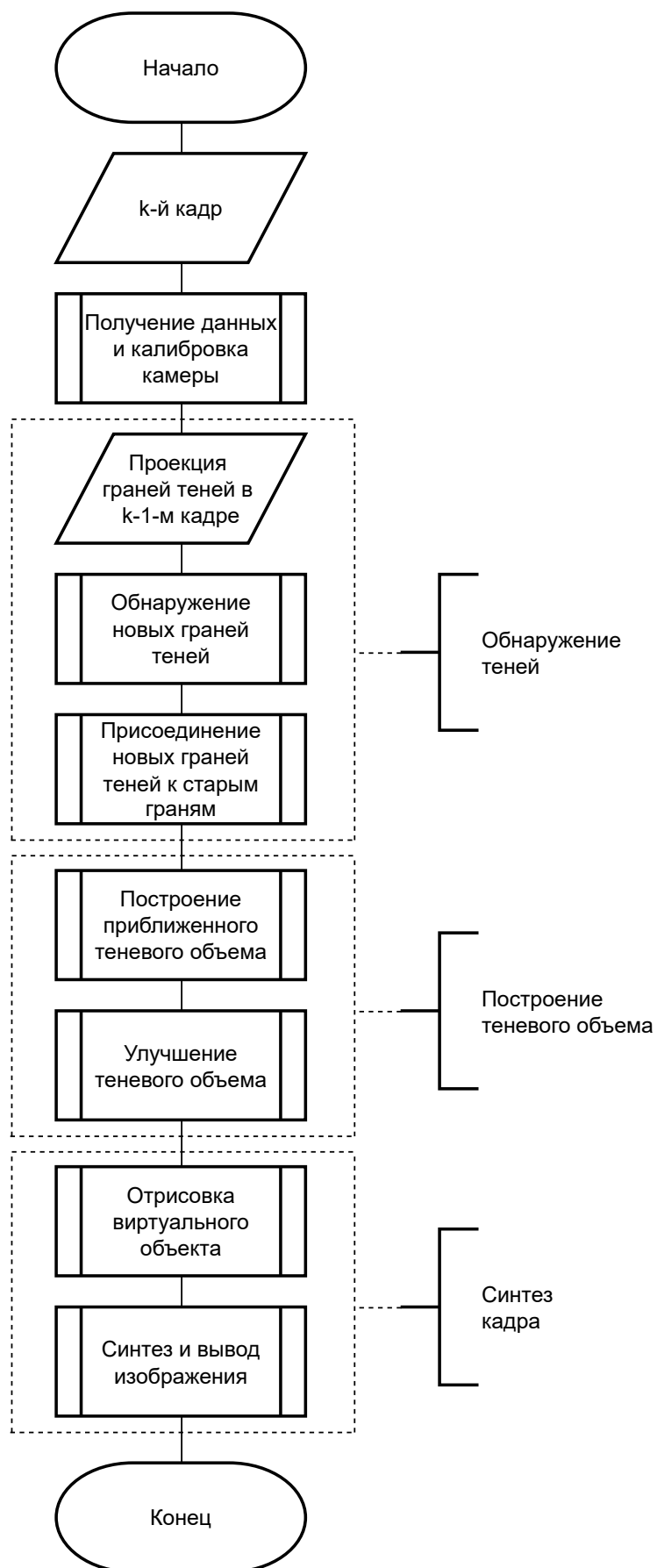


Рисунок 2.2 – Схема метода на основе построения теневого объема

Преимущества и недостатки

Преимущества:

- моделирует систему освещения вне помещения;
- моделирует взаимодействие между тенями реальных и виртуальных объектов.

Недостатки:

- не позволяет моделировать освещение в помещениях;
- работает только со статическими тенями: динамические тени не распознаются, поскольку новые грани тени добавляются к граням предыдущего кадра путем обеспечения согласованности направления градиента края;
- плохо работает с мягкими тенями.

2.1.4 Метод с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей

Суть метода – определить координаты ИС по теням, отбрасываемым объектами. Он основан на предположении, что для небольших ИС тень объекта является изображением центральной проекции этого объекта на поверхности «пола». Следовательно, зная координаты сопряженных точек границ теней и границ объектов, отбрасывающих эти тени, можно восстановить центральную проекцию и найти положение источника света [6].

Однако найти сопряженные точки – задача нетривиальная, особенно для сложных сцен, когда есть много теней от разных ИС, и когда тени не проецируются на плоскую поверхность. Метод основан на формировании пучков лучей, исходящих из точек на границе тени. В этом случае предполагается, что среди пучков лучей, испускаемых из тени к объекту, будет хотя бы один, идущий в направлении источника света. Эти лучи формируются из точек, полученных после определения контуров объектов и теней. В качестве контура объекта рассматривается не только его геометрический контур, но и световой контур, то есть граница света и тени на самом освещаемом объекте. Группа лучей, исходящих из разных точек тени на разные точки объекта,

может сформировать каустику, которая будет находиться вблизи источника света. Центр перетяжки этой каустики в пространстве сцены соответствует положению источника света. Поэтому основная задача метода – найти группу лучей, формирующих каустику [6].

В качестве исходных данных используется RGBD-изображение сцены, не требующее калибровки по реальным значениям яркости.

Данный метод состоит из двух этапов.

1. Обучение сверточной нейронной сети для определения границ объектов и теневых областей RGBD-изображений, полученных устройством ДР.
2. Использование алгоритмов машинного зрения для определения положения источников освещения в сцене.

Более подробно второй этап метода выглядит так.

1. Определяются все теневые области на изображении.
2. Идентифицируются объекты, отбрасывающие тени, и определяются границы объектов, включая световые границы в областях освещаемой и теневой частей объекта. Точки этих границ формируются и сохраняются.
3. Формируются облака точек вероятного пересечения лучей, исходящих из разных точек тени и объекта. Образуются пары несопряженных лучей, то есть лучи должны исходить из разных точек через разные точки одного объекта. Поскольку фактическое пересечение таких лучей невозможно, выполняется поиск точки на отрезке с минимальным расстоянием, соединяющим две эти прямые. Точки позади объекта или за пределами области определения сцены отбрасываются.
4. Точки, полученные в результате пересечения траекторий лучей, помечаются номером объекта, через который прошел луч. Эта маркировка позволяет сортировать сформированные лучи.
5. Происходит анализ областей скоплений точек, которые принимаются за положение источников света. Для каждой области координаты ИС усредняются, и средняя точка берется за точку положения ИС.

6. Для найденных точек проверяется правильность нахождения координат ИС. Для этого от источника света на границе тени испускаются лучи и оценивается отклонение координат соответствующих точек от ближайших точек границ объекта. Если отклонение находится в пределах допуска, то найденная точка принимается за центральную точку ИС, в противном случае источник света считается ложным и отклоняется. Кроме того, близкорасположенные ИС, найденные для различных объектов, объединяются в один ИС [6].

Определение контуров теней и объектов

Изображения в оттенках серого и цветные изображения могут содержать значительный шум, заключающийся в случайных вариациях яркости или цветов точек изображения. Поэтому для определения контуров объектов и теней необходимо сперва устранить шум изображения, для чего используются различные методы фильтрации и алгоритмы компьютерного зрения. Для этого используются алгоритмы Кэнни [20] для обнаружения границ изображения, затем размытие по Гауссу [21] и операция наращивания [22] для устранения шума на границах изображения. Чтобы оставить только контуры границ, используется алгоритм скелетизации [23], который уменьшает бинарные объекты до ширины одной точки изображения.

После определения всех контуров объектов и теней на изображении необходимо найти соответствие между ними. В первую очередь строятся регионы интересов [24] области контуров, и если они соприкасаются, то есть имеют общие границы, то с большой вероятностью контур тени соответствует контуру объекта [6].

Кроме того, используется еще один метод сопоставления контуров, заключающийся в использовании функции, вычисляющей и сравнивающей по заданным регионам интересов «моменты» контуров изображений объектов и теней сцены. Далее в функцию сравнения контуров подаются полученные значения и возвращается метрика, показывающая сходство. Чем ниже результат на выходе функции (чем ближе она к нулю), тем больше соответствие и тем вероятнее, что сравниваемые контуры тени и объекта имеют одно происхождение, то есть тень была сформирована данным объектом [6].

Формирование лучей

После того, как были определены все необходимые координаты на исходном изображении контуров объектов и их теней, начинается процесс формирования лучей. Они формируются с заданным шагом по контуру, например, исходя из соображения, что на контуре изображения и тени не должно быть больше 10 или 20 точек [6]. Исходя из этого на контурах выбираются точки с соответствующим шагом, через которые затем выпускаются лучи, и вычисляются точки, находящиеся на минимальном расстоянии между этими лучами, то есть точки перетяжки лучей. Вычисление точек перетяжки основывается на методе наименьших квадратов, что является стандартным подходом в регрессионном анализе для аппроксимации решения переопределенных систем путем минимизации суммы квадратов, полученных в результатах каждого отдельного уравнения [25].

Далее определяется максимальная плотность точек перетяжки. По найденным точкам в области наибольшей плотности вычисляются моменты и находится средняя точка.

Необходимо отметить, что если в процессе поиска координат источников света использовались два или более объектов сцены, то найденные облака точек, имеющие максимальную плотность и характеризующие источники света от разных групп объектов – теней, можно объединять в один общий источник света, имеющий конечный размер. Это объединение можно делать только в том случае, если облака точек были порождены различными объектами, поскольку один объект, формирующий разные тени, не может создать один источник [6].

Преимущества и недостатки

Преимуществами данного метода являются:

- моделирует систему освещения внутри помещения;
- возможность распознать сложные тени и несколько ИС.

Недостатками данного метода являются:

- высокие требования к производительности системы [26].

2.2 Критерии сравнения

В качестве критериев сравнения методов были предложены следующие:

- восстановление нескольких ИС;
- работа метода в помещении;
- работа метода вне помещения;
- динамическая смена окружения;
- работа с динамическими тенями.

Динамическая смена окружения подразумевает, что метод способен восстановить систему освещения при смене окружения во время своей работы (переход в другое помещение и т. п.).

Работа с динамическими тенями подразумевает, что метод способен восстановить систему освещения, даже если ИС загораются, гаснут, изменяют свое положение или геометрическую форму падающего от него света.

2.3 Классификация методов

В таблице 2.1 приведена классификация методов.

Таблица 2.1 – Классификация методов наложения теней в ДР

	Восстано- вление несколь- ких ИС	Работа метода в помеще- нии	Работа метода вне поме- щения	Динамич- еская смена окруже- ния	Работа с динами- ческими тенями
Метод на осно- ве анализа гисто- граммы изображе- ния окружения	+	+	-	+/-	-
Метод на основе анализа контуров теней ИС	+	+	-	+	+
Метод на основе построения тене- вых объемов	-	-	+	+	-
Метод с исполь- зованием сверточ- ных нейронных се- тей и трассировки теневого лучей	+	+	-	+	+

Для метода на основе анализа гистограммы изображения окружения критерий динамической смены окружения выполняется только в том случае, если для его реализации используется всеракурсная видеокамера.

Вывод

В данном разделе был проведен обзор существующих методов наложения теней в ДР, выбраны критерии сравнения и проведена классификация этих методов. Для каждого метода были описаны его входные данные, этапы, а также приведены их преимущества и недостатки. Классификация методов приведена в виде таблицы, у которой строки представляют описанные методы,

а столбцы – выбранные критерии.

Как видно из результатов сравнения, большинство методов, кроме метода на основе построения теневых объемов, предназначено для работы только внутри помещения, но при этом способны распознавать несколько ИС. Также стоит заметить, что метод на основе анализа контуров теней ИС и метод с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей соответствуют большинству критериев. Выбор того или иного метода зависит от производительности системы: требования к производительности системы у метода с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей выше, чем у метода на основе анализа контуров теней ИС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была изучена предметная область, обоснована актуальность задачи, описаны основные определения ДР, компьютерного зрения, моделей освещения и наложения теней, был проведен обзор существующих методов получения данных о глубине окружения, моделей освещения и способов построения теней, а также определены сложности решения задачи наложения теней в ДР.

Был проведен обзор существующих методов наложения теней в ДР, в частности, на основе анализа гистограммы изображения окружения, на основе анализа контуров теней, на основе построения теневого объема и с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей.

Также были выбраны критерии сравнения методов и проведена их классификация.

По результатам сравнения методов можно сказать, что большинство методов, кроме метода на основе построения теневых объемов, предназначено для работы только внутри помещения, но при этом способны распознавать несколько ИС. Также стоит заметить, что метод на основе анализа контуров теней ИС и метод с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей соответствуют большинству критериев. Выбор того или иного метода зависит от производительности системы: требования к производительности системы у метода с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей выше, чем у метода на основе анализа контуров теней ИС.

Таким образом, цель работы, провести анализ предметной области и классифицировать методы наложения теней в ДР, была достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Osti F., Santi G. M., Caligiana G.* Real time shadow mapping for augmented reality photorealistic rendering // Applied Sciences. — 2019. — Т. 9, № 11. — С. 2225.
2. Технологии дополненной реальности [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologii-dopolnennoy-realnosti/viewer> (Дата обращения 30.09.2022).
3. Эффективный метод восстановления освещения в системах смешанной реальности с использованием HDR-изображения трехмерной сцены / Н. Богданов [и др.] // Графикон-конференции по компьютерной графике и зрению. Т. 29. — 2019. — С. 26—31.
4. *Debevec P.* Rendering synthetic objects into real scenes: Bridging traditional and image-based graphics with global illumination and high dynamic range photography // Acm siggraph 2008 classes. — 2008. — С. 1—10.
5. Компьютерное зрение [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternoe-zrenie> (Дата обращения 5.10.2022).
6. М. И. Сорокин, Д. Д. Жданов, И. В. Валиев, "Восстановление положения источников освещения сцены в системах смешанной реальности с использованием сверточных нейронных сетей и трассировки теневых лучей", Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021, 067, 18 с.
7. Использование HDR-технологии для фотографической фиксации процессуальных действий [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-hdr-tehnologii-dlya-fotograficheskoy-fiksatsii-protsessualnyh-deystviy/viewer> (Дата обращения 8.10.2022).
8. *Lopes A., Souza R., Pedrini H.* A Survey on RGB-D Datasets // arXiv preprint arXiv:2201.05761. — 2022.
9. A comparative survey on invisible structured light [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://fofi.pagesperso-orange.fr/Downloads/Fofi_EI2004.pdf (Дата обращения 10.10.2022).

10. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://bigenc.ru/vocabulary> (Дата обращения 12.10.2022).
11. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. — Рипол Классик, 1989.
12. Eberly D. 3D game engine design: a practical approach to real-time computer graphics. — CRC Press, 2006.
13. Programming vertex, geometry, and pixel shaders / W. F. Engel [и др.]. — Cengage Delmar Learning, 2008.
14. Вольф Д. OpenGL 4. Язык шейдеров. Книга рецептов / пер. с англ. А. Н. Киселева. — М.: ДМК Пресс, 2015. — 368 с.
15. Способы обработки гистограммы телевизионного изображения [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/sposoby-obrabotki-gistogrammy-teplovizionnogo-izobrazheniya> (Дата обращения 15.10.2022).
16. А. Ф. Лемешев, Д. Д. Жданов, Б. Х. Барладян, "Метод восстановления параметров освещения в системах смешанной реальности", Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021, 012, 17 с.
17. Thomasian A. Chapter 8 - Database parallelism, big data and analytics, deep learning // Storage Systems / под ред. А. Thomasian. — Morgan Kaufmann, 2022. — С. 385—491.
18. Simulating shadow interactions for outdoor augmented reality with RGBD data / Н. Wei [и др.] // IEEE Access. — 2019. — Т. 7. — С. 75292—75304.
19. Color image segmentation: advances and prospects / H.-D. Cheng [и др.]. — Elsevier, 2001.
20. Canny, J., A Computational Approach To Edge Detection, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986.
21. Shapiro, L. G. & Stockman, G. C. Computer Vision. Prentice Hall, 2001.
22. Image Analysis and Mathematical Morphology by Jean Serra, ISBN 0-12-637240-3 (1982).

23. Abeysinghe, Sasakthi; Baker, Matthew; Chiu, Wah; Ju, Tao (2008). Segmentation-free skeletonization of grayscale volumes for shape understanding, IEEE Int. Conf. Shape Modeling and Applications (SMI 2008).
24. Ron Brinkmann (1999). The Art and Science of Digital Compositing. Morgan Kaufmann. pp. 184. ISBN 978-0-12-133960-9.
25. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — 2-е изд. — М., 1962. (математическая теория).
26. О некоторых методах визуализации динамических 3D моделей [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-nekotoryh-metodah-vizualizatsii-dinamicheskikh-3d-modeley> (Дата обращения 24.11.2022).

ПРИЛОЖЕНИЕ А