北京邮电大学 2023—2024 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（3 学分 • A 卷）

考试注意事项	一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。 二、书本、参考资料、书包等物品一律放到考场指定位置。 三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。 四、学生必须将答题内容做在试题答卷上，做在草稿纸上一律无效。

一、填空选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知男性有5%是色盲者，女性有0.25%是色盲者。从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，此人是色盲者的概率为__________。

2. 设 A,B,C 为相互独立的随机事件，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B|C)=$__________。

3. 一个质点在随机外力的作用下，从原点0出发，每次等可能地向左或向右移动一个单位长度，共移动6次。则质点刚好回到原点的概率为__________。

4. 某公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救次数 X 服从参数为 $\frac{t}{2}$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计）。则某天下午12时至下午2时至少收到2次紧急呼救的概率为__________。

5. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim U(0,6)$，$X_2\sim N(1,3)$，X_3 服从指数分布，且 $E(X_3)=\frac{1}{3}$。则 $Y=X_1+2X_2-3X_3$ 的标准差为__________。

6. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{0<x<1,0<y<1\}$ 上服从二维均匀分布，则 $P\{X^2+Y^2\le 1\}=$__________。

7. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中总体 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}cx^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理

可得 $P\{\sum_{i=1}^{80} X_i \le 66\}$ 的近似值为______________。

(A) $\Phi(1)$　　(B) $\Phi(\sqrt{3})$　　(C) $\Phi(\sqrt{6})$　　(D) $\Phi(2\sqrt{3})$

8. 设总体 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	p	$1-2p$	p

其中 $p\,(0<p<1)$ 是未知参数。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。若 $2\overline{X}-kS^2$ 为 p 的无偏估计，则 $k=$____?

9. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\sigma>0$，则当常数 $\alpha=$________时，统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\alpha|X_3|}$ 服从________分布。

(A) $\sqrt{2}$，$F(1,1)$　(B) 2，$F(2,1)$　(C) $\sqrt{2}$，$t(1)$　(D) 2，$t(2)$

10. 设某批矿砂中的镍含量(以%计)服从正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从中任取 n 个样本。其平均镍含量为 $\bar{x}$，标准差为 s。则这批矿砂中镍含量的方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha=0.9$ 的单侧置信下限为______________。

(A) $\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.1}(n-1)$　　(B) $\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.9}(n-1)$

(C) $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.1}(n-1)}$　　(D) $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.9}(n-1)}$

二、计算题（共10分）

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\le x<e,\\ a, & x\ge e.\end{cases}$

(1) 确定常数 a；

(2) 求 $P\{1<X<\sqrt{e}\}$；

(3) 求概率密度 $f(x)$。

三、计算题（共 10 分）

设圆的直径 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布。

(1) 求圆的面积 $Y=\frac{\pi X^2}{4}$ 的概率密度函数；

(2) 求函数的数学期望 $E(2Y+1)$。

四、计算题（共 10 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max(X,Y)=2\}$ 与事件 $\{\min(X,Y)=1\}$ 相互独立。

(1) 确定常数 a 和 b；

(2) 求 Y 的分布律；

(3) 求 $X=1$ 时 Y 的条件分布律。

五、计算题（共 10 分）

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(1,-1;1,4;-\frac{1}{2})$。

(1) $X+Y$ 和 $X-Y$ 分别服从什么分布？给出分布类型和参数取值。

(2) 求 $X+Y$ 和 X 的相关系数 ρ，$X+Y$ 和 X 是否相关？

(3) $X+Y$ 和 X 是否相互独立？为什么。

六、计算题（共 10 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta 2^{\theta} x^{-(\theta+1)}, & x>2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 是未知参数。

$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$x_1,x_2,\dots,x_n$ 为样本观测值。

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$。

七、计算题（共 10 分）

在 20 世纪 70 年代后期人们发现，酿造啤酒时，在麦芽干燥过程中会形成致癌物质亚硝基二甲胺(NDMA)。20 世纪 80 年代初期开发了一种新的麦芽干燥过程。设老过程中形成 NDMA 含量（以 10 亿份中的含量计）服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，新过程中形成 NDMA 含量服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均未知。

技术人员独立地对两种过程中形成 NDMA 含量做抽样测试，测得数据如下：

老过程：$n_1=11$，$\bar{x}_1=5.2$，$s_1^2=0.98$

新过程：$n_2=11$，$\bar{x}_2=1.7$，$s_2^2=1.00$

(1) 在检验水平 $\alpha=0.10$ 下，检验假设：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。

(2) 在检验水平 $\alpha=0.10$ 下，检验假设：$H_0:\mu_1-\mu_2=2$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 2$。

在解题过程中，你可能需要用到数据：$F_{0.05}(10,10)=2.98$、$F_{0.05}(11,11)=2.81$、$t_{0.05}(20)=1.7247$、$t_{0.10}(20)=1.3253$。