

北京邮电大学 2018—2019 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 填空题 (每空 4 分, 共 40 分)

1. 设 A, B 为两事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P\{X > 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$. (先确定常数 a , 再计算 $P\{X > 1\}$)

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 3)$, $Y \sim N(0, 4)$, 则 $2X - Y$ 与 $2X + Y$ 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim U(0, 2)$, Y 的分布律为

$$P\{Y = k\} = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \quad \text{则 } P\{X + Y \leq 2\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 某种型号器件的寿命 X (单位: 小时) 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2}, & x > 1000, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现有一大批此种器件, 从中任取 10 件, Y 表示 10 件器件中寿命大于 2000 小时的件数, 则 $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_{48} 独立同分布, 且 $X_1 \sim U(-1, 1)$, 利用中心极限定理可得

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{48} X_i\right| < 2\right\} \approx \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 设 X 服从参数为 2 的泊松分布, 则 $E(e^X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本, 算得样本均值为 $\bar{x} = 14.68$, 样本标准差为 $s = 2.4$, 则 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为 _____.

9. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $b(1, p)$ 的样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $D(\bar{X}) =$ _____.

10. 设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 若统计量

$\frac{cX_1}{(X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)^{1/2}}$ 服从 t 分布, 则 $c =$ _____.

二. (10 分) 一袋中有 5 个球, 其中 2 个红球、3 个白球. 从中不放回地任取 3 个球, 以 X 表示取出的 3 球中的红球数, 求

(1) X 的分布律; (2) $E(X)$; (3) X 的分布函数.

三. (10 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布, 求

(1) $P\{X > 2Y\}$; (2) $Z = \min(X, Y)$ 的分布函数; (3) $U = X + Y$ 的概率密度.

四. (10 分) 设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4} x^2 y, & x^2 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) $\text{Cov}(X, Y)$; (2) $Y = y (0 < y < 1)$ 的条件下, X 的条件概率密度.

五. (10 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$; (2) 证明 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

六. (10 分) 有甲、乙两台机器生产同种类型的金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各抽取一个容量均为8的样本, 测量部件的重量(单位:kg), 经计算得样本均值和样本方差如下:

$$\text{甲机器: } \bar{x} = 12.68, \quad s_1^2 = 5.06,$$

$$\text{乙机器: } \bar{y} = 10.45, \quad s_2^2 = 2.94,$$

设甲、乙两台机器生产的金属部件的重量分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

(1) 试检验假设: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ (显著性水平 $\alpha = 0.1$);

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为甲机器生产的部件的重量比乙机器生产的部件的重量大?

七. (10 分) 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中, 得到以下数据:

碳含量 $x(\%)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
电阻 $y(\mu\Omega)$	15	18	19	21	23	25	26

并计算得 $\sum_{i=1}^7 x_i = 2.8$, $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 1.4$, $\sum_{i=1}^7 y_i = 147$, $\sum_{i=1}^7 y_i^2 = 3181$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 63.9$,

(1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$;

(2) 在显著水平 $\alpha = 0.01$ 下, 检验回归方程的显著性, 即检验假设

$$H_0: \beta_1 = 0, H_1: \beta_1 \neq 0$$

附: $\Phi(0.5) = 0.6915$, $t_{0.025}(15) = 2.13$, $t_{0.05}(14) = 1.76$, $F_{0.05}(7, 7) = 3.79$,

$$F_{0.01}(1, 5) = 16.3.$$