北京邮电大学 2019-2020 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(计算机学院，4 学分)

考试注意事项：

学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1.设 $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B-A)=\frac{1}{4}$，则 $P(A\mid A\cup B)=$______ .

2.设随机变量 X 和 Y 相互独立， X 服从参数为 2 的泊松分布, $Y\sim U(0,2)$，则

$E(X(X+Y))=$ _______ .

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2}, P\{X=1\}=\frac{1}{2}$, Y 服从均值为 1 的指数分布,则 $P\{XY>1\}=$_____ .

4. 设 $(X,Y)\sim N(-1,1,4,9,-\frac{2}{3})$, 则 $D(2X+Y)=$ _______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{96}$ 独立同分布， X_1 的概率密度为 $f(x)=1-|x|,-1<x<1$,利用中心极限定理， $P\{|\sum_{i=1}^{96}X_i|<2\}$ 的近似值为_______.

6. 有两箱同类型的零件, 每箱都装有 100 个零件, 第一箱有 80 个一等品, 第二箱有 40 个一等品, 现从两箱中任选一箱, 然后从该箱中有放回地取零件两次,每次取一个, 令 $X_i=\begin{cases}1, \text{第i次取到一等品},\\ 0, \text{否则},\end{cases}$ $i=1,2$， 则 X_1 与 X_2 的相关系数为

_______.

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 X 的样本, 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, 0<x<\theta,\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$,则 $E(T)=$______ .

8. 某种电子产品的某一参数服从正态分布，从这种电子产品中抽取 16 件，测量它们的这一参数，并算得样本方差为 $s^2=1.6$, 则 σ^2 的置信度为95%的置信

区间为_______.

9．设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，若统计量 $T=\dfrac{a(X_1-X_2)}{\sqrt{\sum\limits_{i=3}^{10}X_i^2}}$ 服从 t 分布，则 $a=$ _______，该 t 分布的自由度为_______.

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,则 σ 的无偏估计 $\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$ 的方差为_______. (先确定常数 a ,使之为无偏估计,然后求方差)

二、(12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2), -1<x<1, \\ 0, \quad 其它, .\end{cases}$,

（1）求 X 的方差；（2） X 与 $|X|$ 是否不相关？(3) X 与 $|X|$ 是否相互独立？

三、(10 分)

盒子中有 3 个黑球，1 个红球，先从中任取 2 球, 以 X 表示取出的黑球数,将取出的 2 球放回盒子中,并放进 X 个红球,再从盒子中任取 2 球,以 Y 表示取出的黑球数, 求（1） (X,Y) 的分布律；(2) Y 的分布律；（3） $Y=0$ 条件下 X 的条件分布律.

四、(12 分)

设 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, 0<x<2, \\ 0, 其他\end{cases}$$

在 $X=x(0<x<2)$ 条件下, Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布,求

（1） Y 的概率密度;(2) $E(XY)$;(3) $Z=X-Y$ 的分布函数及概率密度.

五、(10 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\theta}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x>0,\\ 0, \qquad 其它,\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数,

(1) 求θ的最大似然估计量;

（2）θ的最大似然估计量是否为θ的无偏估计？

六、(8 分)

为了比较两种枪弹的速度，在相同条件下进行速度测定，样本量及由测定结果算得样本均值及样本方差如下:

甲种枪：$n_1=8,\ \ \overline{x}=2805$，$s_1^2=160$

乙种枪：$n_2=8,\ \ \overline{y}=2781$，$s_2^2=128$

设甲、乙两种枪的枪弹速度分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

(1) 试检验假设:$H_0:\sigma_1=\sigma_2 \quad H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (检验水平$\alpha=0.1$);

(2) 在检验水平$\alpha=0.05$下，能否认为甲种枪的枪弹平均速度显著地大于乙种枪的枪弹平均速度?

七、(8 分)

为考察某种维尼纶纤维的耐水性能，安排了一组试验，测得其甲醇浓度x及相应的“缩醇化度”y的数据如下：

x	18	20	22	24	26	28	30
y	26.8	28.3	28.7	28.9	29.7	30.1	31.2

经计算得: $\sum_{i=1}^{7}x_i=168$，$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=4144$，$\sum_{i=1}^{7}y_i=203.7$，$\sum_{i=1}^{7}y_i^2=5939.57$，

$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=4924.4$.

(1) 求线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设$H_0:b=0 \quad H_1:b\neq0$ (水平取$\alpha=0.01$).

附: $\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.05}(14)=1.76$，$t_{0.005}(5)=4.0322$，

$\chi^2_{0.025}(15)=25$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，$F_{0.05}(7,7)=3.79$，$F_{0.01}(1,5)=16.3$.

北京邮电大学2019-2020第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院，4学分)

一、填空题（40分，每小题4分）

1. $\frac{2}{3}$，2. 8，3. $\frac{1}{2e}$，4. 9，5. 0.383，6. $\frac{1}{6}$，

7. $\frac{8}{9}\theta$， 8. $(0.96,3.834)$， 9. 2； 8，10. $\frac{\pi-2}{2}\sigma^2$.

二．(12分)

解：（1）$E(X)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)dx=0$，$E(X^2)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx=\frac{1}{5}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{5}$. ……6分

（2）$E(X\cdot|X|)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x|x|(1-x^2)dx=0$，

$Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)=0$，

所以X与$|X|$不相关. ……4分

(3) $P\{X\le\frac{1}{2},|X|\le\frac{1}{2}\}=P\{|X|\le\frac{1}{2}\}\ne P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{|X|\le\frac{1}{2}\}$，

所以X与$|X|$不相互独立. ……2分

注：学生只要找出两个事件$\{X\in I\}$，$\{|X|\in J\}$，然后说明这两事件不独立，那么X与$|X|$不相互独立.都给2分.

三．(10分)

解(1) (X,Y)的所有可能取的数对为$(1,0)$,$(1,1)$,$(1,2)$,$(2,0)$,$(2,1)$,$(2,2)$且

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{20},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{20},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2\}P\{Y=0\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{10}.$$

(X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2
1	$1/20$	$3/10$	$3/20$
2	$1/10$	$3/10$	$1/10$

……4 分

(2) 由(1)可得 Y 的分布律为

Y	0	1	2
P	3/20	3/5	1/4

……4 分

(3) $Y=0$ 条件下 X 的条件分布律为

$$P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{1}{3},P\{X=2\mid Y=0\}=\frac{2}{3}.$$ ……2 分

注：如第一问算错了，而后两问按第一问的结果算出的答案是对的，后二问给一半分。

三．(12)

解: (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x,0<x<2,0<y<x,\\0,\text{其他}\end{cases}$$

(1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx,$

当 $y\in(0,2)$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^2\frac{3}{8}x\mathrm{d}x=\frac{3}{16}(4-y^2),$$

当 $y \notin (0,2)$ 时,

$$f_Y(y) = 0,$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4-y^2), 0 < y < 2, \\ 0, 其他 \end{cases}. \qquad \cdots\cdots 4 分$$

(2) $E(XY) = \int_0^2 dy \int_0^x xy \cdot \frac{3}{8} xdy = \frac{6}{5}$. ……2 分

(3) $Z = X - Y$ 的分布函数记为 $F_Z(z)$,由于 $P\{Z \in (0,2)\} = 1$,因此当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$,当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$.

当 $0 \leq z < 2$ 时,

$$F_Z(z) = P\{X - Y \leq z\}$$

$$= 1 - P\{X - Y > z\}$$

$$= 1 - \int_z^2 dx \int_0^{x-z} \frac{3}{8} xdy = \frac{3}{4}z - \frac{z^3}{16},$$

所以 $Z = X - Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z < 0, \\ \frac{3}{4}z - \frac{z^3}{16}, 0 \leq z < 2, \\ 1, z \geq 2. \end{cases} \qquad \cdots\cdots 4 分$$

$Z = X - Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3z^2}{16}, 0 < z < 2, \\ 0, 其他. \end{cases} \qquad \cdots\cdots 2 分$$

如考生先利用公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x-z)dx$,或 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y, y)dy$ 计算概率出概率密度,然后计算分布函数,那么得出概率密度给 4 分,得出分布函数给 2 分.

四.(10 分)

解: (1)似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}} = (\frac{2}{\pi})^{n/2} \theta^{-n/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2}, \qquad \cdots\cdots 2 分$$

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ ,$$

令 $\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$,

解得 $\theta=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$,所以$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ .\qquad\qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

(2) $E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\theta$.

从而 $E(\hat{\theta})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=E(X^2)=\theta$,

故θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$是θ的无偏估计. ……4 分

五．(8 分)

解:（1）该检验的拒绝域为

$$F\le F_{0.95}(7,7)=\frac{1}{F_{0.05}(7,7)}=\frac{1}{3.79}，\text{或} F\ge F_{0.05}(7,7)=3.79\ ,$$

其中检验统计量 $F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$,

由样本算得 $F=\dfrac{160}{128}=1.25$ ，可见样本没有落入拒绝域，所以不拒绝原假设，即认为两总体方差无显著差异. ……4 分

（2）需检验下假设为

$H_0:\ \mu_1\le\mu_2\qquad H_1:\ \mu_1>\mu_2$,

由（1）的结果，可以认为两总体方差相等.检验的拒绝域为

$$t\ge t_{0.05}(14)=1.76\ ,$$

其中检验统计量 $t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$,

由样本算得 $t=\dfrac{2805-2781}{\sqrt{(7\times160+7\times128)/14}\cdot\sqrt{1/8+1/8}}=4$ ，易见 $t=4\ge t_{0.05}(14)=1.76$,

即样本落入拒绝域，所以拒绝原假设，即在水平 $\alpha = 0.05$ 下，能认为甲种枪的枪弹平均速度显著地大于乙种枪的枪弹平均速度. ……4 分

六．(8 分)

解 (1) $\bar{x} = 24$, $\bar{y} = \dfrac{203.7}{7} = 29.1$,

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} x_i)^2 = 4144 - \frac{168^2}{7} = 112,$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} x_i)(\sum_{i=1}^{7} y_i) = 4924.4 - \frac{168 \times 203.7}{7} = 35.6,$$

$$\hat{b} = \frac{L_{xy}}{L_{xx}} = 0.3179, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x} = 21.4704,$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为

$$\hat{y} = 21.4704 + 0.3179x.$$ ……5 分

(2) $L_{yy} = \sum_{i=1}^{7} y_i^2 - \dfrac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} y_i)^2 = 11.9$, $S_R = \hat{b}L_{xy} = 11.3172$,

$$S_E = L_{yy} - S_R == 0.5828, F = \frac{S_R}{S_E / 5} = 97.09,$$

由于 $F > F_{0.01}(1,5) = 16.3$, 因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分