北京邮电大学 2022--2023 学年第一学期

《概率论与数理统计》试题（A 卷, 4 学时）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一. 填空题与选择题（每小题 4 分，共 4 0 分）

1.设事件 A 和 B 相互独立，且 $P(A)=0.5$， $P(A-B)=0.2$, 则 $P(A\cup B)=$______ .

2. 将 2 个球随机地放入 3 个盒子中，3 个盒子分别编号为 1, 2, 3, 已知 2 个球放入了不同盒子中, 则 1 号盒子中有球的概率为_______ .

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, 0<x<2, \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$$

则 $D(X)=$______ .(先确定常数 a ,再计算 $D(X)$)

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X\sim N(0,4)$， Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=\dfrac{1}{2}$，$k=1,2$，则 $P\{XY\le 2\}=$_______ .（用标准正态分布函数 $\Phi(z)$ 表示结果）

5. 某种型号器件的寿命 X（单位：小时）的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3\times 1000^3}{x^4}, x>1000, \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$$

现有一大批这种器件，从中任取 3 件，Y 表示 3 件器件中其寿命大于 1500 小时的件数，则 $E(Y)=$______ .

6. 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(1,1,2,8,0.5)$,则 $E(XY)=$_______ .

7. 设随机变量 $X\sim N(-1,1)$,则 $Y=2X+1\sim$

(A) $N(-1,2)$　　(B) $N(-1,4)$　　(C) $N(3,2)$　　(D) $N(3,4)$

8. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\bar{X}$,S^2为样本均值和样本方差，

则下列统计量中为μ^2的无偏估计的是

(A) $\bar{X}^2$　　(B) S^2　　(C) $\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$　　(D) $\bar{X}^2+\frac{1}{n}S^2$

9. 从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取容量为n的样本，样本均值和样本标准差分别为

$\bar{x}$, s, 则总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

(A) $\left(\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\frac{\sqrt{n-1}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$　　(B) $\left(\frac{\sqrt{n}s}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n)}},\frac{\sqrt{n}s}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}}\right)$

(C) $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$　　(D) $\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$

10. 设总体X的期望和方差分别为μ和σ^2, $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自该总体的样本，

则由中心极限定理，当样本量n足够大时，样本均值$\bar{X}$近似服从

(A) $N(\mu,\sigma^2)$　　(B) $N(\frac{\mu}{n},\frac{\sigma^2}{n})$　　(C) $N(\frac{\mu}{n},\sigma^2)$　　(D) $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

二(10分) 设随机变量X的分布律为$P\{X=0\}=\frac{1}{2},P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，令

$Y=X^2$,

(1)求Y的分布律;

(2) X与Y是否不相关？是否相互独立？

三(10分) 设随机向量(X,Y)在区域$D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$上服从均匀分布，令

$$X_1=\begin{cases}1, X<0,\\0, X\ge 0,\end{cases}\quad X_2=\begin{cases}1, X-Y<0,\\0, X-Y\ge 0,\end{cases}$$

求(1) (X_1,X_2)的分布律;

(2) X_1 与 X_2 的相关系数.

四(10 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，在 $X=x(x>0)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-x)}, & y>x,\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

（1）求 (X,Y) 的概率密度;

(2）求 Y 的概率密度;

（3）求 $Z=Y-X$ 的分布函数及概率密度.

五(12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi\theta x}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln^2 x}{\theta}}, x>0,\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本,

(1) 求 θ 的最大似然估计量;

(2) θ 的最大似然估计量是否是 θ 的无偏估计?

六、(10 分) 用两种方法（A 和 B）测定冰自 $-0.7^0\mathrm{C}$ 转变为 $0^0\mathrm{C}$ 的水的融化热(单位:cal/g),每种方法各测了 8 次,由测得的数据得到样本均值和样本方差如下:

A 方法：$\overline{x}=80.02$, $s_1^2=0.00052$,

B 方法：$\overline{y}=80.08$, $s_2^2=0.00038$,

设 A 和 B 两种方法的测定结果分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1) 试检验假设: $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (显著性水平取 $\alpha=0.1$);

(2) 在显著水平 $\alpha=0.05$ 下,能否认为两种方法的测定结果的均值有显著差异?

七、(8 分)

为考察某种维尼纶纤维的耐水性能，安排了一组试验，测得其甲醇浓度 x 及相应的“缩醇化度” y 的数据如下：

x	18	20	22	24	26	28	30
y	26.8	28.3	28.7	28.9	29.7	30.1	31.2

经计算得: $\sum_{i=1}^{7} x_i = 168$， $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 4144$， $\sum_{i=1}^{7} y_i = 203.7$， $\sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 5939.57$，

$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 4924.4$.

(1) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$；

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设 $H_0: b = 0 \quad H_1: b \neq 0$ (水平取 $\alpha = 0.01$).

附: $t_{0.05}(14) = 1.76$, $t_{0.005}(5) = 4.0322$, $F_{0.01}(1,5) = 16.3$

$\chi^2_{0.025}(15) = 25$, $\chi^2_{0.975}(15) = 6.26$, $F_{0.05}(7,7) = 3.79$, $t_{0.025}(14) = 2.1448$