北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院，4 学分)

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 0.25　2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　3. $\frac{3}{4}$　4. 5　5. $\frac{3}{5}$　6. $f_{Z.}(z)=\begin{cases}\frac{4z}{(1+z^2)^3}, z>0,\\ 0, z\le 0\end{cases}$

7. D　8. C　9. D.　10. B

二、(12 分)

解:(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{10}^{\infty}\frac{200}{x^2}dx=20$.　……4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{10}^{x}\frac{200}{t^3}dt, x\ge 10\\ 0, x<10\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{100}{x^2}, x\ge 10,\\ 0, x<10\end{cases}$.　……4 分

(3) $y=\ln x$ 的反函数为 $x=\mathrm{e}^y$，且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^y$，所以 $Y=\ln X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=f(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y=\begin{cases}200\mathrm{e}^{-2y}, y>\ln 10,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$　……4 分

三、(12 分)

解 (1) $E(Y)=0, E(YZ)=E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=0$,故

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)=0$.　……4 分

(2) Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{XY\le z\}$$

$$=P\{X=-1\}P\{XY\le z\mid X=-1\}+P\{X=1\}P\{XY\le z\mid X=1\}$$

$$=\frac{1}{2}[P\{Y\ge -z\}+P\{Y\le z\}]$$

$$=\frac{1}{2}[1-\Phi(-z)+\Phi(z)]$$

$$=\Phi(z),$$

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\Phi'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$ ……4 分

(3) $P\{Y\le 0,Z\le 0\}=\frac{1}{2}[P\{Y\le 0,XY\le 0\mid X=-1\}+P\{Y\le 0,XY\le 0\mid X=1\}]$

$=\frac{1}{2}[P\{Y\le 0,Y\ge 0\}+P\{Y\le 0,Y\le 0\}]$

$=\frac{1}{4}.$

又 $P\{Y\le 0\}=P\{Z\le 0\}=\frac{1}{2}$,从而 $P\{Y\le 0,Z\le 0\}=P\{Y\le 0\}P\{Z\le 0\}$,故事件 $\{Y\le 0\}$ 与事件 $\{Z\le 0\}$ 相互独立.

$P\{|Y|\le 1,|Z|\le 1\}=P\{|Y|\le 1,|XY|\le 1\}=P\{|Y|\le 1\}\ne P\{|Y|\le 1\}P\{|Z|\le 1\}$,所以 Y 与 Z 不相互独立. ……4 分

四、(8 分)

解:(1) $P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{1-y}6ydx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6y-12y^2)dy$

$=\frac{1}{4}.$ ……4 分

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}6y(1-y),0<y<1,\\0,其他\end{cases},$

在 $Y=y\ (0<y<1)$ 的条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-y},y<x<1,\\0,其他\end{cases}.$$ ……4 分

五、(8 分)

解:(1)检验的拒绝域为

$F\le F_{0.95}(9,9)=\frac{1}{3.18}$,或 $F\le F_{0.05}(9,9)=3.18$,

其中检验统计量$F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}$,

由样本算得$F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}=\dfrac{9.5}{8.5}$=1.118,易见 $F_{0.95}(9,9)<F=1.118<F_{0.05}(9,9)$,样本没有落入拒绝域,所以不拒绝原假设,即认为两总体的方差无显著差异. ……4 分

(2)需检验假设

$$H_0:\mu_1\le\mu_2 \qquad H_1:\mu_1>\mu_2$$

检验的拒绝域为

$$t\ge t_{0.05}(18)=1.734$$

其中检验统计量$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}}$,

由样本算得

$$t=\frac{19.5-16.5}{3\sqrt{1/5}}=\sqrt{5},$$

易见$t=\sqrt{5}\ge 1.734$,从而样本落入拒绝域,所以拒绝原假设,即认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命.

……4 分

六、(12 分)

解:（1）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\frac{x_1\cdots x_n}{\theta^{2n}}\ e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{-2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得

$$\theta=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

所以θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.　　　　　　　　　　　　……4 分

(2) $E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta$,

所以

$$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2n}E[\sum_{i=1}^{n}x_i]=\frac{1}{2}E(X)=\theta,$$

因此θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是$\theta$的无偏估计.　　　　　　……4 分

(3) $E(X^2)=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=3\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=6\theta^2$,

$$D(X)=6\theta^2-(2\theta)^2=2\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta})=\frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\theta^2}{2n},$$

$$\begin{aligned}E(a\hat{\theta}-\theta)^2&=a^2E(\hat{\theta}^2)-2a\theta E(\hat{\theta})+\theta^2\\&=a^2(D(\hat{\theta})+(E(\hat{\theta}))^2)-2a\theta^2+\theta^2\\&=(\frac{2n+1}{2n}a^2-2a+1)\theta^2\end{aligned}$$

当$a=\frac{2n}{2n+1}$时$E(a\hat{\theta}-\theta)^2$最小.　　　　　　　　　　　　……4 分

七、(8 分)

解 (1) $\bar{x}=14.4$， $\bar{y}=14.12$,

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}x_i)^2=2136.84-\frac{144^2}{10}=63.24,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=2095.42-14.4\times141.2=62.14,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=0.9826，\hat{a}=14.12-0.9826\times14.4=-0.0294,$$

所以y关于x的线性回归方程为

$\hat{y} = -0.0294 + 0.9826x$. ……5 分

（2） $S_{yy} = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} y_i)^2 = 2065.08 - \frac{1}{10} \times 141.2^2 = 71.336$，

$S_R = \hat{b} S_{xy} = 0.9826 \times 62.14 = 61.0588$，

$S_E = S_{yy} - S_R = 71.336 - 61.0588 = 10.2772$，

$F = \frac{S_R}{S_E / 8} = 47.53$，

由于 $F > F_{0.01}(1,8) = 11.3$, 因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分

附: $t_{0.05}(18) = 1.734$，$t_{0.005}(8) = 3.355$，$F_{0.05}(9,9) = 3.18$，$F_{0.01}(1,8) = 11.3$.