北京邮电大学 2018—2019 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 A（4 学时）

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1. 某阵地有甲、乙、丙三门炮，三门炮的命中率分别为 $p_1=0.4$，$p_2=0.3$，$p_3=0.5$。现三门炮同时向同一目标发射一发炮弹，结果有两发炮弹命中，求此时甲炮发射命中的概率 __20/29__。

2. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E\left(Xe^{2X}\right)=$ __$2e^2$__。

3. 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{a}{k(k+1)},\quad k=1,2,\cdots,$$

则 $a=$ __1__。

4. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=-2)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=a$，$P(X=3)=b$。若 $EX=0$，则 $DX=$ __9/2__。

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{X,Y}=1$，则有 __D__。

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

~~(B)~~ C $P\{Y=-2X+1\}=1$　　　　~~(C)~~ D $P\{Y=2X+1\}=1$

6. 设总体 X 服从参数为 2 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛到 __6__。

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的样本，令 $Y=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}$，则 Y 服从

$\underline{F(1,n-1)}$ 分布。

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自参数为λ的泊松分布总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和S^2分别为样本均值和样本方差。若$\frac{1}{2}\overline{X}+kS^2$为$\lambda$的无偏估计量，则$k=\underline{\frac{1}{2}}$。

9. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本，则当$a=\underline{1/20}$，$b=\underline{1/100}$时，统计量$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$服从$\chi^2$分布，其自由度为$\underline{2}$。

10. 设总体X的方差σ^2已知，根据来自X的容量为n的简单样本，测得样本均值为$\cancel{\mu}$ $\overline{X}$，则X的数学期望的置信度近似等于$1-\alpha$的置信区间为$\underline{\left[\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$。

二、**（8分）**已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

试求系数A，$P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}$以及$F(x)$。

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\,|_{-1}^{1}=A\pi$，得出$A=\frac{1}{\pi}$，........4 分

$$P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin x\,|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3};$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\leq x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}\quad \text{.......4 分}$$

三、**（10分）**。设二维随机变量(X,Y)在抛物线$y=x^2$与直线$y=x+2$所围成的区域G

上服从均匀分布。

求（1）(X,Y)的联合概率密度；

（2）X 与 Y 的边缘概率密度；

（3）概率 $P(X+Y\geq 2)$.

解：（1）联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in G, \\ 0, & (x,y)\notin G, \end{cases}$$

C 为常数，则应有

$\iint_G f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}Cdy=1$，.......4 分

所以 $\frac{9}{2}C=1$, 于是 $C=\frac{2}{9}$，所以(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2}{9}, & (x,y)\in G, \\ 0, & (x,y)\notin G。 \end{cases}$$

（2）当 $-1\leq x\leq 2$ 时，有

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{x+2}\frac{2}{9}dy=\frac{2}{9}\left(-x^2+x+2\right);$$

当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时，有 $f_X(x)=0$; 所以 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{9}\left(-x^2+x+2\right), & -1\leq x\leq 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

同理当 $0\leq y\leq 1$ 时，有 $f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{2}{9}dx=\frac{4}{9}\sqrt{y}$;

当 $1\leq y\leq 4$ 时，有 $f_Y(y)=\int_{y-2}^{\sqrt{y}}\frac{2}{9}dx=\frac{2}{9}\left(2+\sqrt{y}-y\right)$, 所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{9}, & 0\le y\le 1,\\ \dfrac{2}{9}\left(2+\sqrt{y}-y\right), & 1\le y\le 4, \\ 0, & 其他。\end{cases}$$ ……4 分

（3） $P(X+Y\ge 2)=\dfrac{2}{9}\left(\int_0^1 dx\int_{2-x}^{x+2}dy+\int_1^2 dx\int_{x_2}^{x+2}dy\right)=\dfrac{13}{27}$. ……2 分

四、（8 分）设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $Z=X+Y$ 的方差。

解：(X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 1-x\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由随机变量期望公式

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

可知

$$EZ=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x+y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1}2(x+y)dx$$

$$=\int_0^1\left(y^2+2y\right)dy=\frac{4}{3},$$ ……4 分

而

$$EZ^2=E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy2\left(x^2+2xy+y^2\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(2y+2y^2+\frac{3}{2}y^3\right)dy=\frac{11}{6}$$

由方差公式 $DZ=EZ^2-(EZ)^2=\dfrac{11}{6}-\dfrac{16}{9}=\dfrac{1}{18}$。……4 分

五、（10 分）利用切比雪夫不等式和中心极限定理，分别确定投掷一枚硬币的次数，使得出现“正面”的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不少于 0.9，其中 $\Phi(1.65)=0.95$。

解：设 X 表示投掷硬币 n 次，出现“正面”的次数，则 $X \sim b\left(n, \frac{1}{2}\right)$

（1）切比雪夫不等式确定 n。$EX = 0.5n, DX = 0.25n$.

次数 n 确定于条件 $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} \geq 0.9$。

由切比雪夫不等式

$$P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} = P\{0.4n < X < 0.6n\} = P\{|X - 0.5n| < 0.1n\}$$

$$\geq 1 - \frac{0.25n}{(0.1n)^2} = 1 - \frac{25}{n}$$

.......3 分

所以 $1 - \frac{25}{n} \geq 0.9$，即 $n \geq 250$. ....2 分

（2）利用中心极限定理

次数 n 确定于条件 $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} \geq 0.9$。

$$P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} = P\{0.4n < X < 0.6n\}$$

$$= P\left\{\frac{0.4n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{X - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{0.6n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right\}$$

$$\geq P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{5} < \frac{X - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} < \frac{\sqrt{n}}{5}\right\}$$

.......3 分

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1$$

所以 $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) - 1 \geq 0.9$，

即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.65)$。

由此可见$\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1.65$，即$n \geq 68.05$。故此时需投掷68次硬币。.......2分

六、(10分) 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leq x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中θ是未知参数（$0<\theta<1$）。$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单样本，记N为样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$中小于1的个数。求

（1）θ的矩估计；

（2）θ的最大似然估计。

解：（1）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1\theta xdx+\int_0^1(1-\theta)xdx=\frac{3}{2}-\theta,$$

令$\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$,解得$\theta=\frac{3}{2}-\overline{X}$，所以参数$\theta$的矩估计为$\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$。.......5分

（3）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N},\text{.......2分}$$

取对数

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$

两边对θ求导数，得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}\text{.......2分}$$

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得$\theta=\frac{N}{\theta}$，所以$\theta$的最大似然估计为$\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.........1分

七、**（8分）**机器包装食盐，假设每袋食盐的净重服从正态分布，规定每袋标准质量为500克，标准差不能超过10克。某天开工后，为检查机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，测其净重为（单位：克）

497，507，510，475，484，524，491，515，488。

问这天包装机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

附表：

$z_{0.025}=1.96$	$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$
$z_{0.05}=1.65$	$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$
$t_{0.025}(8)=2.306$	$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$
$t_{0.025}(15)=2.13$	$\chi^2_{0.95}(5)=1.145$

解： 先建立假设

$H_0^1:\mu=500,\ \ H_1^1:\mu\neq 500$ ......2 分

这里 $n=500,\ \ \mu_0=500$ 。给定 $\alpha=0.05$，查附表 $t_{0.025}(8)=2.306$ 。计算样本

$\bar{x}=499,\ \ s^2=257$，$t_0=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=-0.187$ 。由于 $|t_0|=0.187<t_{0.025}(8)=2.306$，故接受

H_0^1，即认为机器包装没有系统误差。.......2 分

再建立假设

$H_0^2:\sigma\leq 10,\ \ H_1^2:\sigma>10$，......2 分

这里查附表 $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，计算可得

$$\chi_0^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=20.56.$$

由于 $\chi_0^2=20.56>\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，故拒绝 $H_0^2:\sigma\leq 10$，即认为机器工作稳定性不够。.......2 分

八、(**6 分**) 设 $g(x)$ 是正值不减函数，X 是连续型随机变量，且 $E[g(X)]$ 存在，证明 $P\{X\geq a\}\leq\dfrac{E[g(X)]}{g(a)}$，其中 $a\in R$ 。

证明：设 X 有密度函数 $f(x)$，于是

$$P\{X \ge a\} = P\{g(X) \ge g(a)\}$$

$$= \int\limits_{g(X) \ge g(a)} f(x)dx \le \int\limits_{g(X) \ge g(a)} \frac{g(x)}{g(a)} \cdot f(x)dx \qquad \text{.......每步 2 分}$$

$$= \frac{1}{g(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx = \frac{E[g(X)]}{g(a)}.$$