北京邮电大学 2019-2020 年第一学期

《概率论》期末考试试题

一.填空题（共 44 分，每空 4 分）

1. 设$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，则$P(A\cup B)=$______.

2.将 3 个球随机地放入 3 个盒子中，三个盒子分别编号 1, 2, 3, X 表示 1 号盒子中球的个数，则 X 的分布列为______.

3. 有两箱同类型的零件，每箱都装有 6 个零件，第一箱有 4 个一等品，第二箱有 2 个一等品，现从两箱中任选一箱，然后从该箱中有放回地取零件两次,每次取一只，则（1）两次都取到一等品的概率为_______；（2）在第一次取到一等品条件下，第二次取到一等品的概率为_______.

4.设随机变量$X\sim P(2)$，$X\sim U(0,3)$，且X与Y相互独立，则$D(X+2Y)=$______.

5. 设随机变量$X\sim Ga(\alpha,\lambda)$，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

则X的偏度系数为_______.

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，$X_1$的概率密度为$p(x)=2x,0<x<1$，则(1)当$n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

依概率收敛于_______；（2）利用中心极限定理，$P(46<\sum\limits_{i=1}^{72}X_i<50)$ 的近似值为_______.

7.设(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y},0<x<y<1,\\ 0,其他\end{cases}$$

则$E(X\mid Y)=$_____.

8.设$(X,Y)\sim N(1,0,1,4,-0.5)$,令$Z=2X+Y-1$，则(1) X与Z的相关系数为

_______;(2) $D(|Z|)=$_____.

二.(12 分)

盒子中有 3 个黑球，2 个红球，1 个白球，从中任取 3 球，以X表示取出的黑球数，Y表示取

出的红球数，求（1）(X,Y)的分布列；（2）$X=1$条件下Y的条件分布律；（3）$Cov(X,Y)$.

三．(10 分)

设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2), -1<x<1,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

(1) $D(X)$; (2)对X独立重复观察 4 次，Y表示事件$\{|X|<\frac{1}{2}\}$发生的次数,求$E(Y^2)$.

四．(12 分)

设X,Y相互独立，$X\sim N(0,2)$，Y的分布列为$P(Y=-1)=P(Y=1)=0.5$，令$Z=XY$，

(1) 求Z的概率密度;
(2) X与Z是否不相关?
(3) X与Z是否相互独立?

五．(10)

设X,Y相互独立,且均服从参数为 1 的指数分布,令$U=X+Y, V=\frac{X}{Y}$，

(1)求(U,V)的概率密度;

(2)利用（1）的结果，求V的概率密度.

六．(12 分)

设$X_n\sim\chi^2(n), n=1,2,\cdots$，$X_n$的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-\frac{x}{2}}, x>0,$$

（1）求X_n的特征函数;

（2）利用特征函数证明卡方分布的可加性：设$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_1)$，且X与Y独立,

则$X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$；

（3）证明$\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}$依分布收敛于标准正态变量.

北京邮电大学 2019-2020 年第一学期

《概率论》期末考试试题

一.填空题（共 44 分，每空 4 分）

1. $\frac{1}{3}$

2. $P(X=0)=\frac{8}{27}$，$P(X=1)=\frac{3\times 4}{27}=\frac{12}{27}$，$P(X=2)=\frac{3\times 2}{27}=\frac{6}{27}$，$P(X=3)=\frac{1}{27}$

3. （1）$\frac{5}{18}$，（2）$\frac{5}{9}$.

4. 5

5. $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$

6. (1) $\frac{2}{3}$;(2) $\sum_{i=1}^{72} X_i \sim N(48,4)$, $P(46<\sum_{i=1}^{72} X_i < 50) \approx 2\Phi(1)-1=0.6826$

7. $p(y)=\int_0^y \frac{1}{y}dx=1, 0<y<1$,

$p(x\mid y)=\frac{1}{y}, 0<x<y$,

$E(X\mid Y=y)=\frac{y}{2}, E(X\mid Y)=\frac{Y}{2}$.

8. 0.5，　$D(|Z|)=5-(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/8}-\Phi(-1/2)+\Phi(1/2))^2$

二. (12 分)

解:　（1）$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$，

$P(X=1,Y=1)=\frac{6}{C_6^3}=\frac{6}{20}$，　$P(X=1,Y=2)=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}$，

$P(X=2,Y=0)=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}$，　$P(X=2,Y=1)=\frac{6}{C_6^3}=\frac{6}{20}$，

$P(X=3,Y=0)=\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

(X,Y) 的分布列为

X	Y: 0	1	2

0	0	0	1/20
1	0	6/20	3/20
2	3/20	6/20	0
3	1/20	0	0

……6 分

(2) $P(X=1)=9/20$,

$X=1$ 条件下 Y 的条件分布律为

$P(Y=1|X=1)=\frac{2}{3}, P(Y=2|X=1)=\frac{1}{3}$. ……3 分

(3) $E(X)=\frac{3}{2}, E(Y)=1$,

$E(XY)=1\times\frac{6}{20}+2\times\frac{3}{20}+2\times\frac{6}{20}=1.2$,

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.2-1.5=-0.3$. ……3 分

三．(10 分)

解: (1) $E(X)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)dx=0$, $E(X^2)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx=0.2$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.2$. ……5 分

(2) $P(|X|<\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\int_{-1/2}^{1/2}(1-x^2)dx=\frac{11}{16}$,

$Y\sim B(4,\frac{11}{16})$,

$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=\frac{55}{64}+\frac{484}{64}=\frac{539}{64}$. ……5 分

四．(12 分)

解: (1) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}P(Z\le z)&=P(XY\le z)\\&=P(Y=-1)P(XY\le z\mid Y=-1)+P(Y=1)P(XY\le z\mid Y=1)\\&=\frac{1}{2}[P(X\ge -z)+P(X\le z)]=P(X\le z)=\Phi(\frac{z}{\sqrt{2}}),\end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度为

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}.$$ ……4 分

(2) $E(X)=0, E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=0$,

$Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=0$,

所以 X 与 Z 不相关. ……4 分

(3) $P(0<X<1, 0<Z<1)=P(0<X<1, 0<XY<1)$

$$=P(Y=-1)P(0<X<1,0<XY<1\,|\,Y=-1)+P(Y=1)P(0<X<1,0<XY<1\,|\,Y=1)$$
$$=P(Y=-1)P(0<X<1,0<-X<1+P(Y=1)P(0<X<1,0<X<1)$$
$$=\frac{1}{2}P(0<X<1),$$

$P(0<Z<1)=P(0<X<1)$,

由于$P(0<X<1)\neq\frac{1}{2}$,所以$P(0<X<1,0<Z<1)\neq P(0<X<1)P(0<Z<1)$,故$X$与$Z$不相互独立. ……4 分

五．(10)

解: (1) $\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{x}{y}\end{cases}$ 的反变换为

$$\begin{cases}x=\dfrac{uv}{1+v},\\ y=\dfrac{u}{1+v}\end{cases},$$

雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\\ \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=-\frac{u}{(1+v)^2},$$

(U,V)的概率密度为

$$p(u,v)=p(x(u,v),y(u,v))\,|J|=\begin{cases}\dfrac{u}{(1+v)^2}e^{-u},u>0,v>0,\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$ ……6 分

(2) V的概率密度为

$$p(v)=\int_0^\infty p(u,v)du=\frac{1}{(1+v)^2},v>0.$$ ……4 分

六．(12 分)

解:(1) $\varphi_n(t)=E(e^{itX_n})=\int_0^\infty e^{itx}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dx$

$$=\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{[(1-2it)/2]^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-\frac{1-2it}{2}x}dx$$

$$=\frac{1}{(1-2it)^{n/2}}=(1-2it)^{-n/2}.$$ ……4 分

(2) $X+Y$ 的特征函数为

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-(n_1+n_2)/2}$$

上面特征函数正是分布 $\chi^2(n_1+n_2)$ 的特征函数，所以 $X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$.……4 分

(3) $\dfrac{X_n-n}{\sqrt{2n}}$ 的特征函数为

$$\psi_n(t)=E(e^{it\frac{X_n-n}{\sqrt{2n}}})=e^{i\sqrt{\frac{n}{2}}t}(1-2it/\sqrt{2n})^{-\frac{n}{2}}$$

$$=e^{-i\sqrt{\frac{n}{2}}t}e^{-\frac{n}{2}\ln(1-2it/\sqrt{2n})}=e^{-i\sqrt{\frac{n}{2}}t}e^{\frac{n}{2}(2it/\sqrt{2n}+\frac{i^2t^2}{n}+o(\frac{1}{n}))}\to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

而 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 是标准正态的特征函数,所以 $\dfrac{X_n-n}{\sqrt{2n}}$ 依分布收敛于标准正态变量. ……4 分