

# 北京邮电大学 2023—2024 学年第二学期

## 《离散数学》期末考试试题（B 卷）

考 试 注 意 事 项	<p>一、学生参加考试须带学生证或学院证明，未带者不准进入考场。学生必须按照监考教师指定座位就坐。</p> <p>二、书本、参考资料、书包等物品一律放到考场指定位置。</p> <p>三、学生不得另行携带、使用稿纸，要遵守《北京邮电大学考场规则》，有考场违纪或作弊行为者，按相应规定严肃处理。</p> <p>四、学生必须将答题内容做在试题答卷上，做在草稿纸上一律无效。</p>
----------------------------	---

### 1. Find the number of non-negative integer solutions to the inequality.

确定不等式的非负整数解数量。(10 分)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 16$$

$$x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 1$$

### 2. For primitive statements $p, q, r$ , prove that $((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge r))$ is a tautology.

对于简单命题  $p, q$ , 求证  $((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge r))$  为重言式。(10 分)

### 3. Let $S = \{(-4, -20), (-3, -9), (-2, -4), (-1, -11), (-1, -3), (1, 2), (1, 5), (2, 10), (2, 14), (3, 6), (4, 8), (4, 12)\}$ , and the relation $R$ on $S$ is defined as : If $ad=bc$ , then there is $(a, b) R (c, d)$

设  $S = \{(-4, -20), (-3, -9), (-2, -4), (-1, -11), (-1, -3), (1, 2), (1, 5), (2, 10), (2, 14), (3, 6), (4, 8), (4, 12)\}$ , 定义  $S$  上的关系  $R$  为: 如果  $ad=bc$ , 则有  $(a, b)R(c, d)$ 。

#### a) Prove that $R$ is a equivalent relation on $S$ .

证明  $R$  是  $S$  上的等价关系。(5 分)

#### b) Find the equivalence classes $[(2, 14)], [(-3, -9)], [(4, 8)]$ .

确定等价类  $[(2, 14)], [(-3, -9)], [(4, 8)]$ 。(5 分)

### 4. How many 7-digit landline phone numbers (each digit from 0 to 9) meet the digits 1, 5, and 0 at least once?

7 位的座机电话号码 (每位数字都从 0-9), 有多少号码满足数字 1, 5, 0 至少出现一次?  
(10 分)

### 5. Find the sequence of exponential generating functions as follows.

求以下述函数为指数生成函数的序列。(10 分)

$$f(x) = e^{-2x} - \frac{1}{1-x}$$

6. Solve the following recurrence relation:

求解如下递推关系：(10 分)

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1 \\ a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 8 \end{cases}$$

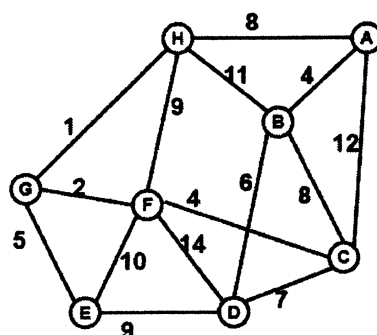
7. Encode given symbols with frequencies using Huffman code, and draw a Huffman tree.

用哈夫曼编码来编码具有给定频率的如下符号，并画出哈夫曼树。(10 分)

A:0.07、B:0.19、C:0.02、D:0.06、E:0.32、F:0.03、G:0.21、H:0.10

8. Find the minimum spanning tree for the following weighted graph. And what is the total weight of the resulting tree?

求下面带权图的最小生成树及权重。(10 分)



9. If  $f: (R, +, \cdot) \rightarrow (S, \oplus, \odot)$  is a ring homomorphism from  $R$  onto  $S$ , where  $|S| > 1$ , then prove:

$f: (R, +, \cdot) \rightarrow (S, \oplus, \odot)$  是从  $R$  到  $S$  的一个环同态，并且是到上的，其中  $|S| > 1$ ，证明：

a) If  $R$  has unity  $u_R$ , then  $f(u_R)$  is the unity of  $S$ ;

如果  $R$  有单位元  $u_R$ ，则  $f(u_R)$  是  $S$  的单位元；(5 分)

b) If  $R$  has unity  $u_R$  and  $a$  is a unit in  $R$ , then  $f(a)$  is a unit in  $S$  and

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}.$$

如果  $R$  有单位元  $u_R$  并且  $a$  是  $R$  中的一个单位，则  $f(a)$  是  $S$  中的一个单位，并且

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}. \quad (5 \text{ 分})$$

10. Let  $s(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ .

a) Prove that  $s(x)$  is irreducible

证明  $s(x)$  是不可约的。(3 分)

b) What is the order of the field  $\mathbb{Z}_2[x]/(s(x))$ ?

域  $\mathbb{Z}_2[x]/(s(x))$  的阶是多少？(3 分)

c) Find  $[x^2 + x + 1]^{-1}$  in  $\mathbb{Z}_2[x]/(s(x))$ .

在  $\mathbb{Z}_2[x]/(s(x))$  中求  $[x^2 + x + 1]^{-1}$ 。(4 分)