

北京邮电大学 2017—2018 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 (A 卷)

考试注意事项: 学生必须将答案内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一、填空题 (本题共 40 分, 每小题 4 分)

1. 从 0 到 9 十个数字中任取三个不同的数字, 事件 $A = \{\text{三个数字中不含 0 或 5}\}$,

则概率 $P(A) = \frac{14}{15}$ 。 或者 $\frac{C_9^3}{C_{10}^3} + \frac{C_9^3}{C_{10}^3} - \frac{C_8^3}{C_{10}^3}$

2. 设在三次独立试验中, 事件 A 出现的概率均相等, 且 A 至少出现一次的概率为

$\frac{19}{27}$, 则在一次试验中事件 A 出现的概率为 $\frac{1}{3}$ 。

3. 设随机变量 $X_1 \sim U[0, 6]$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim \text{泊松分布 } P(1)$, 且 X_1, X_2, X_3 相互独立,

若 $Y = 3X_3 + X_1 - 2X_2$, 则 $D(Y) = 28$ 。

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数

为 -0.5, 则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y| \geq 6\} \leq \frac{1}{12}$ 。

5. 设随机变量 K 服从区间 $[1, 6]$ 上的均匀分布, 则方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率为 0.8。

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9} & x \in [3, 6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 若 K 使得 $P(X \geq K) = \frac{2}{3}$,

则 K 的取值范围是: $[1, 3]$ 。

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(10, (0.02)^2)$, 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,

已知 $\Phi(2.5) = 0.9938$, 则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为 0.9876。

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(0, 1)$, 则随机变量 $Z = 2X - Y + 3$

的概率密度函数 $f(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$ 。

9. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}}$ 服从 $t(2)$ 分布。(给出分布类型及参数)

10. 设零件长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现随机抽取 11 个零件, 测得其长度的样本方差 $S^2 = 1$, 则总体方差 σ^2 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right) = \left(\frac{10 \times 1}{20.48}, \frac{10 \times 1}{3.25} \right) = (0.49, 3.08)。$$

$$(\chi_{0.975}^2(10) = 3.25, \chi_{0.025}^2(10) = 20.48)$$

二、(12 分) 设 D 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $x=1, y=0, x=e^2$ 围成的平面区域, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则

(1) 给出 (X, Y) 的概率密度函数,

(2) 求 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度函数及其在 $x=2$ 处的值,

(3) 求 $E(2X+1)$ 。

解: (1) 由 $S_D = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = 2$, 因为 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布,

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$ 。(4 分)

(2) 当 $1 \leq x \leq e^2$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}$,

则 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & 1 \leq x \leq e^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 。(4分)

$f_X(x)$ 在 $x=2$ 处的值为 $\frac{1}{4}$ 。

(3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$, 则 $E(2X+1) = e^2$ 。(4分)

三、(8分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$, 求 $Z = 2X + Y$ 的概率密度函数。

解: (X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

Z 的分布函数为:

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{2X + Y \leq z\} = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy$

$$= \begin{cases} \iint_{2x+y \leq z} 0 dx dy = 0 & z < 0 \\ \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = \frac{z}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-z} & 0 \leq z < 2 \quad (4 \text{分}) \\ \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} e^{-y} dy = 1 - \frac{1}{2} e^{2-z} + \frac{1}{2} e^{-z} & z \geq 2 \end{cases}$$

从而 Z 的概率密度为: $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-z}) & 0 \leq z < 2 \quad (4 \text{分}) \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-z} & z \geq 2 \end{cases}$

四、(12分) 设一箱装有 100 件产品, 其中一、二、三等品分别为 80、10、10 件,

现从中任取一件, 且 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{抽到 } i \text{ 等品} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $i = 1, 2, 3$ 。求:

(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布,

(2) X_1 与 X_2 的相关系数 ρ ,

(3) X_1 与 X_2 是否独立?

解: 设事件 $A_i = \{\text{从 100 件产品种任取一件是 } i \text{ 等品}\}$, $i = 1, 2, 3$, 据题意可知

$$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = P(A_3) = 0.1$$

(1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布如下:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.8$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(A_1 A_2) = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 关于 X_1 的边缘概率分布如下:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0.8 + 0 = 0.8$$

关于 X_2 的边缘概率分布如下:

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.1 + 0.8 = 0.9$$

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0.1 + 0 = 0.1$$

$$\text{由 (1), 可得 } E(X_1 X_2) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$$\text{因此 } \text{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)]$$

$$= E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2 = 0 - 0.8 \times 0.1 = -0.08$$

$$\text{因此 } \rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.09}} = -\frac{2}{3} \quad (4 \text{ 分})$$

(3) X_1 与 X_2 不是不相关, 故不独立。 (4 分)

(或者利用 (1) 及边缘分布的结果, 用独立的定义判断, 不独立)

五、(12分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$,

(2) 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2 = n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是否是 θ 的无偏估计量,

(3) 判断 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的有效性。

解: (1) 密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \theta.$$

将 $E(X)$ 替换成 \bar{X} , 得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 为 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 。(4分)

(2) 由于 $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$, 所以 $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量。

令 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$$F_Z(z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq z)) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \geq 0 \end{cases}, \text{ 则 } Z \sim E\left(\frac{n}{\theta}\right) \therefore E(Z) = \frac{\theta}{n} \therefore E(nZ) = \theta,$$

所以 $\hat{\theta}_2 = n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 θ 的无偏估计量。(4分)

(3) $\because D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}$, $D(n \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}) = \theta^2$, 所以 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。(4分)

六、(8分) 设总体 X 服从 $[0, \lambda]$ 区间上的均匀分布, 参数 $\lambda > 0$, (X_1, X_2, \dots, X_n)

是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求 λ 的最大似然估计, (2) 若 $\beta = 3\lambda + 2$, 求 β 的最大似然估计。

解: (1) $X \sim f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

所以, 似然函数为 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n} & 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \lambda \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

考虑 L 的取值, 要使 L 取值最大, λ 应最小。

当 $\lambda = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 时, L 取值最大,

所以, 最大似然估计为 $\hat{\lambda} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。 (5 分)

(2) 由极大似然估计的不变性,

因此, β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta} = 3\hat{\lambda} + 2 = 3\max(x_1, x_2, \dots, x_n) + 2$ 。 (3 分)

七、(8 分) 设考生的某次考试成绩服从正态分布, 从中任取 36 位考生的成绩, 其平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分, 问在 0.05 的显著性水平下, 可否认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分, 给出检验过程。

附表: t 分布数值表

$$t_{0.025}(35) = 2.0301, \quad t_{0.025}(36) = 2.0281, \quad t_{0.05}(35) = 1.6896, \quad t_{0.05}(36) = 1.6883$$

解: 要检验的假设为 $H_0: \mu = \mu_0 (\mu_0 = 70), H_1: \mu \neq \mu_0$

$$\text{检验用的统计量 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$\text{拒绝域为 } |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = t_{0.025}(35) = 2.0301, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{而观测值为 } |t| = \frac{|66.5 - 70|}{15 / \sqrt{36}} = 1.4, \quad |t| = 1.4 < t_{0.025}(35) = 2.0301, \text{ 没落在拒绝域内,}$$

所以接受 H_0 , 故可认为全体考生这次考试的平均成绩为 70 分。 (4 分)