矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$$

4、若T有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}\Lambda P$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标　　　　问题c

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标　　　　问题a

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A　　　　$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

4、T不一定有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}BP$　　　　问题b'

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}BP$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设 x_1, x_2为线性空间V一组基， 线性变换 T 在这组基下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

y_1, y_2 为V的另一组基，且

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

（1）求 T 在 y_1, y_2 下的矩阵B.

（2）求 A^k.

解：（1）T在基 y_1,y_2 下的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

（2）由 $B=C^{-1}AC$，有 $A=CBC^{-1}$，

于是 $A^k=CB^kC^{-1}$.

$$\therefore\ A^k=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+1&k\\-k&-k+1\end{pmatrix}.$$

$$A = PJP^{-1}$$

```
A =

    0.5497   -1.1214   -1.2634   -2.5490   -0.2594   -2.1024   -2.6546   -0.6398    1.5405   -0.0475
    0.7098    0.7563   -2.3274   -1.5446    1.5288    0.1720    0.7024    2.8183   -1.4984    0.9692
    0.2331    0.5167    2.2424    1.0065    0.5974    0.5138    0.1723   -0.9179   -1.1064   -0.1172
    0.5496   -1.1691   -1.5726    0.5940    1.3820   -0.8759    0.9734    2.1990   -1.0928    0.6934
    0.4812   -1.6409   -3.4219   -1.8563    4.1556   -1.5136    0.8488    2.5756   -1.5107    0.8272
   -1.0793   -0.8372   -2.8613   -1.5343    0.2862   -0.3219   -0.0468    0.8359    1.1317    0.1760
   -1.6985   -1.0624   -3.0344   -1.8995    1.1969   -1.4285    1.9558   -0.1320    0.6781    0.4526
    0.1602   -0.1269   -2.2926   -0.0846    1.6756   -1.1829    0.3769    2.5131   -1.5842    0.1104
   -1.7184   -3.0421   -6.1512   -3.7613    2.8398   -3.5493    0.0003    1.9476    1.5225    0.5377
    1.6037    2.2475    5.1125    3.7125   -1.1328    3.0115    1.1758   -1.4112   -1.1495    1.0327
```

```
>> norm(A-P*J*invP)

ans =

     0
```

```
invP=inv(P);
```

$$A = PJP^{-1}$$

invP =

-0.0553	0.0110	0.0339	-0.0338	-0.0166	-0.0831	-0.0437	-0.0342	0.0537	-0.0502
-0.0003	-0.0121	0.0583	0.0278	0.0281	0.0614	0.0037	-0.0219	-0.0607	-0.0388
-0.0330	-0.0762	-0.0272	0.0164	0.0505	-0.0285	-0.0060	0.0063	0.0245	-0.0086
0.0067	-0.0487	-0.0955	-0.0119	0.0819	-0.0941	0.0821	0.0374	-0.0488	-0.0015
0.0159	0.0152	0.0474	-0.0099	0.0238	0.0406	0.0025	-0.0325	-0.0067	0.0231
-0.0556	-0.0330	-0.1286	-0.0730	0.0458	-0.0997	-0.0323	-0.0051	0.0129	0.0109
-0.0008	0.0517	0.0590	0.0685	-0.0288	0.0113	-0.0096	-0.0688	0.0099	-0.0306
0.0467	0.0964	0.1536	0.0977	-0.0368	0.1343	0.0480	-0.0054	-0.0834	0.0495
0.0211	-0.0412	-0.1794	-0.0797	0.1137	-0.0961	0.0339	0.0974	-0.0344	0.0131
0.0301	0.0489	0.1690	0.0630	-0.0908	0.0713	-0.0757	-0.0651	0.0037	-0.0163

J =

1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

P =

-6	-4	-4	5	7	-7	3	-8	5	9
5	-1	-3	-7	0	0	8	5	7	-5
7	-1	3	3	4	-3	-6	3	0	3
-3	-3	9	-1	-7	1	8	4	3	2
4	1	8	-5	9	-2	6	3	9	-2
-4	5	-1	-8	1	-2	1	-2	-1	-7
1	-1	-5	6	3	-6	-1	-2	-8	-9
6	-1	5	-6	-9	-5	-5	6	7	-1
2	-7	5	-6	6	-9	5	-3	2	-6
-3	-9	5	3	5	8	-5	6	-3	4

$$A = PJP^{-1} \qquad A^k = PJ^kP^{-1}$$

```
J =

     1     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     2     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     2     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     2     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0    -1     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0    -1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     3     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     3     1
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     3
```

```
>> norm(A-P*J*invP)

ans =

     0
```

```
>> norm(A^10-P*J^10*invP)

ans =

   1.5192e-09
```

```
J10 =

           1          10           0           0           0           0           0           0           0           0
           0           1           0           0           0           0           0           0           0           0
           0           0        1024        5120       11520           0           0           0           0           0
           0           0           0        1024        5120           0           0           0           0           0
           0           0           0           0        1024           0           0           0           0           0
           0           0           0           0           0           1         -10           0           0           0
           0           0           0           0           0           0           1           0           0           0
           0           0           0           0           0           0           0       59049      196830      295245
           0           0           0           0           0           0           0           0       59049      196830
           0           0           0           0           0           0           0           0           0       59049
```

$$A = PJP^{-1}$$

```
clc
clear

A = [-1 1 0;
     -4 3 0;
      1 0 2 ];

[P, J] = jordan(A);
invP = inv(P);

A
P
J
invP
norm(A-P*J*invP)
```

```
A =                    =

    -1     1     0
    -4     3     0
     1     0     2


P =                    J =                    invP =

     0    -2     1          2     0     0         1.0000   -1.0000   -1.0000
     0    -4     0          0     1     1              0   -0.2500         0
    -1     2     1          0     0     1         1.0000   -0.5000         0


>> norm(A-P*J*invP)

ans =

     0
```

1.2 线性变换及其矩阵

```
A=[-1 1 0;-4 3 0;1 0 2];

[P,L]=eig(A)
```

命令行窗口

```
P =

         0    0.4082    0.4082
         0    0.8165    0.8165
    1.0000   -0.4082   -0.4082


L =

     2     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b'

1、求$A=P^{-1}BP$，其中B是三角矩阵

2、求$A=PJP^{-1}$，其中J是Jordan标准形

1.2 线性变换及其矩阵

P_{34} 1.17 定理：任意**n**阶矩阵**A**与三角矩阵相似

1.2 线性变换及其矩阵

Hamilton—Cayley定理 设 $A\in K^{n\times n}$ 其特征多项式

$$\varphi(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^{n}+a_{1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_{n}$$

则 $\varphi(A)=A^{n}+a_{1}A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_{n}I=0.$

1.2 线性变换及其矩阵

Hamilton—Cayley定理 设 $A \in K^{n\times n}$ 其特征多项式

$$\varphi(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则 $\varphi(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0.$

证明:A的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ，即

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

必然存在可逆矩阵 $P_{n\times n}$ ，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\varphi(P^{-1}AP)=(P^{-1}AP-\lambda_1 I)(P^{-1}AP-\lambda_2 I)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & * & \cdots & * \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_2 \end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_3 & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_3 & * & \cdots & * \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_2-\lambda_3 \end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=0$$

即 $P^{-1}\varphi(A)P=0 \quad \Rightarrow \varphi(A)=0$

1.2 线性变换及其矩阵

例: 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

例: 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

解：A的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^3-2\lambda+1$

用$\varphi(\lambda)$去除 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4\lambda=g(\lambda)$, 得

$$g(\lambda)=\varphi(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

$\because\ \varphi(A)=0,$

$\therefore\ 2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I=24A^2-37A+10I$

$$=\begin{pmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

由哈密尔顿一凯莱定理，$\forall A \in K^{n\times n}, \varphi(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是A的特征多项式，则 $\varphi(A) = 0.$

因此，对任定一个矩阵 $A \in K^{n\times n}$，总可以找到一个多项式 $\varphi(x) \in P[x]$，使 $\varphi(A) = 0.$ 此时，也称多项式$\varphi(x)$ 以A为根.

1.2 线性变换及其矩阵

定义：设 $A\in K^{n\times n}$，在数域K上的以A为根的多项式中，次数最低的首项系数为1的那个多项式，称为**A的最小多项式**.常记做 $m(\lambda)$

显然 $m(\lambda)$ 的次数不大于特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的次数

最小多项式的基本性质

定理：矩阵**A**的最小多项式$m(\lambda)$可以整除以**A**为根的任意首**1**多项式 $f(\lambda)$，且 $m(\lambda)$是唯一的.

定理：矩阵**A**的最小多项式$m(\lambda)$与其特征多项式 $\varphi(\lambda)$的零点相同（不计重数）。

定理：相似矩阵具有相同的最小多项式.

定理： 设**n**阶矩阵**A**特征多项式$\varphi(\lambda)$，特征矩阵的$\lambda I-A$的全体$n-1$阶子式的最大公因式为$d(\lambda)$，则**A**最小多项式为

$$m(\lambda)=\frac{\det(\lambda I-A)}{d(\lambda)}$$

例2、求 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的最小多项式.

1.2 线性变换及其矩阵

解：A的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

又 $A-I\neq 0,$

$$(A-I)^2=A^2-2A+I$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore$ A的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$.

最小多项式求法

1、对矩阵A，写出λ矩阵：　$A(\lambda)=\lambda I-A$

2、把λ矩阵$A(\lambda)$写成标准形，并写出不变因子$d_k(\lambda)$

3、最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=d_N(\lambda)$

最小多项式求法

a)定义λ矩阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$

最小多项式求法

$a)$定义λ矩阵，令$A(\lambda)=\lambda I-A$

讨论矩阵的 Jordan 标准形的求法，涉及如下形式的**多项式矩阵**或 **λ - 矩阵**

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (1.2.35)$$

的理论，其中 $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 为数域 K 上的纯量 λ 的多项式. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是数域 K 上的 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.2.36)$$

就是一个特殊的多项式矩阵.

最小多项式求法

λ矩阵示例

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 2 & 3\\ & & 1 & 2\\ & & & 1\end{bmatrix}\qquad \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & -4\\ & \lambda-1 & -2 & -3\\ & & \lambda-1 & -2\\ & & & \lambda-1\end{bmatrix}$$

最小多项式求法

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形，是指使用矩阵的初等变换①将 $\mathbf{A}(\lambda)$ 化为如下形式的多项式矩阵：

$$\mathbf{A}(\lambda) \to \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_s(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.37}$$

其中，，$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$，$d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda)$，…，$d_{s-1}(\lambda) \mid d_s(\lambda)$，$s \leqslant n$，且 $d_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \cdots, s$) 是首 1 多项式(前面的几个 $d_i(\lambda)$ 可能是 1).

可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)$($i=1, 2, \cdots, s$)不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)$($i=1, 2, \cdots, s$)为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子**或**不变因式**．

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\mathbf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形.

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\mathbf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形.

解 计算过程如下：

$$\mathbf{A}(\lambda)\xrightarrow[{[3]+[1]}]{}\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1]\leftrightarrow[3]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow[{(3)-(1)}]{}$$

[]:列

():行

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[2]-(2\lambda-1)[1] \\ [3]+(\lambda-1)[1]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2]\leftrightarrow[3]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{}$$

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix}$$

最后所得矩阵是 $A(\lambda)$ 的标准形，此时，$d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = \lambda$，$d_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda$.

补充：行/列变换矩阵

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形.

[]:列

():行

行变换：矩阵A左乘行变换矩阵P

列变换：矩阵A右乘列变换矩阵Q

行变换:

PA->A2

列变换:

AQ->A2

P和Q都是λ-矩阵

补充：行/列变换矩阵

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形．

[]:列

():行

$$Q_2=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

解 计算过程如下：

$$Q_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[{[3]+[1]}]{AQ_1=}\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1\\ \lambda & \lambda^2 & 0\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[3]}$$

$$AQ_2=\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-(1)}$$

行变换:

PA->A2

列变换:

AQ->A2

补充：行/列变换矩阵

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{P_1A=}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{[2]-(2\lambda-1)[1]\\ [3]+(\lambda-1)[1]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[[2]\leftrightarrow[3]]{AQ_3=}\qquad Q_3=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & 1\\ & 1 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[[3]-\lambda[2]]{AQ_4=}\qquad Q_4=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & -\lambda\\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{(-1)[3]\\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{}$$

补充：行/列变换矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda\end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{AQ_4=} \quad Q_4=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & -\lambda\\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3]\\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda\end{bmatrix}$$

最后所得矩阵是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形，此时，$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda$，$d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$.

1.2 线性变换及其矩阵

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

c)最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda) = d_N(\lambda)$

有$m(A) = 0$

例 1.26改　**求矩阵**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的最小多项式

例 1.26改　求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的最小多项式

解　求 $\lambda I - A$ 的初等因子组．由于

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=d_3(\lambda)$

有$m(A)=0$

补充：行/列变换矩阵

$$Q_1 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

解 求 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的初等因子组．由于

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$AQ_1Q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

补充：行/列变换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda-2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$AQ_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=d_3(\lambda)$

有$m(A)=0$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 的最小多项式

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}$ 的最小多项式

解：

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-2\\-3&\lambda+3&-6\\-2&2&\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-2\\-\lambda^2-2\lambda&0&2\lambda\\-2\lambda&0&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&\lambda-1\\0&2\lambda&-\lambda^2-2\lambda\\0&\lambda&-2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2\lambda&-\lambda^2-2\lambda\\0&\lambda&-2\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-\lambda^2+2\lambda\\0&\lambda&-2\lambda\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

有$m(A)=0$

补充：行/列变换矩阵

$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -(\lambda+3) & 1 & \\ -2 & & 1 \end{bmatrix} \qquad P_2=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

解: $$\lambda I - A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda+3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A = \to\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_2 A =$$

补充：行/列变换矩阵

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

有$m(A)=0$

1.2 作业（第五版）

1、定义：P38 1.19

2、定理：1.17、1.18、1.20、1.21

3、例题：1.20、1.21

4、本ppt例题：P5、P17、P22、P30、P39、P44

5、习题1.2：14

1.2 作业（第三版）

1、定义：P54 1.19

2、定理：1.17、1.18、1.20、1.21

3、例题：1.20、1.21

4、本ppt例题：P5、P17、P22、P30、P39、P44

5、习题1.2：14

下课，谢谢大家！