北京邮电大学 2020-2021 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(计算机学院，4 学分，A)

考试注意事项：

学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 A,B 为两事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，则

$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______.

2.设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim b(1,p)$，$Y\sim b(2,p)$（$p\in(0,1)$），则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为_______.

3.设随机变量 X 服从均值为 $\frac{1}{3}$ 的指数分布，则 $D(\mathrm{e}^X)=$____.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，X_1 的分布律为 $P\{X_1=k\}=\frac{k+1}{10},k=0,1,2,3$，则 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_______.

5.有两箱同类型的零件, 每箱都装有 8 个零件, 第一箱中有 4 个一等品, 第二箱有 6 个一等品, 现从两箱中任选一箱, 然后从该箱中不放回地取零件两次,每次取一个, 则在第一次取到一等品条件下, 第二次取到一等品的条件概率为_______.

6.设随机变量 X_1,X_2 独立同分布,且 X_1 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}, x\ge 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$$

则 $Z=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$______.

7. 设 $(X,Y)\sim N(0,1,4,1,-\frac{1}{2})$, 则 $X-2Y+1$ 服从正态分布

A. $N(-1,4)$　　　　B. $N(-1,8)$

C. $N(1,10)$　　　　D. $N(-1,12)$

8. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $E(\bar{X}^2)=$

A. λ　　　B. λ^2　　　C. $\lambda^2+\frac{\lambda}{n}$　　　D. $\lambda^2-\frac{\lambda}{n}$

9. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. s^2 为样本方差, 则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $(\frac{ns^2}{\chi^2_\alpha(n)},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)})$　　　B. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_\alpha(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)})$

C. $(\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)})$　　　D. $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

10. 设 $X\sim\chi^2(n)$, 则由中心极限定理知, 当 n 充分大时, 下列随机变量中近似服从标准正态分布的是

A. $\frac{X-n}{2n}$　　　B. $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$　　　C. $\frac{X-2n}{n}$　　　D. $\frac{X-2n}{\sqrt{n}}$

二(12 分)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{200}{x^3}, x\geq 10,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$,

(1) 求 X 的期望 $E(X)$; (2) 求 X 的分布函数; (3) 求 $Y=\ln X$ 的概率密度.

三(12 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$, $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y\sim N(0,1)$,令 $Z=XY$,

(1) 求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$；(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 证明：事件 $\{Y\leq 0\}$ 与事件 $\{Z\leq 0\}$ 相互独立, 而事件 $\{|Y|\leq 1\}$ 与事件 $\{|Z|\leq 1\}$ 不独立.

四(8 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6y, 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, \quad 其它,\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y<1\}$；(2)求在 $Y=y\ (0<y<1)$ 的条件下, X 的条件概率密度.

五(8 分) 一项研究比较两种不同复合材料制造的发动机轴承.两种类型的轴承各取

10 个进行使用寿命(以百万圈为单位)的测试,由试验结果算得样本均值、样本方差如下:

类型 1 $\bar{x}=19.5$ $s_x^2=9.5$

类型 2 $\bar{y}=16.5$ $s_y^2=8.5$

假设类型 1,类型 2 轴承的使用寿命分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

(1)在水平 $\alpha=0.1$ 下,检验假设 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 对 $H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$;

(2)能否认为类型 1 轴承的平均寿命显著地大于类型 2 轴承的平均寿命(检验水平取 $\alpha=0.05$).

六(12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0,\\ 0, \qquad 其它,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是否是 θ 的无偏估计?

(3) 确定 a,使得 $E(a\hat{\theta}-\theta)^2$ 最小.

七(8 分) 测量了 10 名 5～8 岁儿童的体重 x（单位: kg)和体积 Y (单位: dm^3),

得数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$, 并算得: $\sum_{i=1}^{10}x_i=144$, $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2136.84$, $\sum_{i=1}^{10}y_i=141.2$,

$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=2065.08$, $\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2095.42$.

(1) 求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$;

(2) 对回归方程作显著性检验,即检验假设 $H_0:b=0$ 对 $H_1:b\neq 0$. (水平取 $\alpha=0.01$)

附: $t_{0.05}(18)=1.734$, $F_{0.05}(9,9)=3.18$, $F_{0.01}(1,8)=11.3$, $t_{0.005}(8)=3.355$.