北京邮电大学 2019-2020 年第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案（经管院，4 学分）

一、填空题（每小题 4 分,共 40 分）

1. $\frac{2}{3}$

2. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y+1)^2}{8}}$

3. 5
4. 3
5. 0.6826
6. $\frac{1}{9}$

7. $(49.12,57.64)$

8. $\frac{1}{2}$

9．4，$(2,8)$

10. $\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$

二、(12 分)

解：（1）$E(X)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x\cdot x^2dx=0$，$E(X^2)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^2dx=\frac{3}{5}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{5}$.　　　　……6 分

（2）$E(X\cdot|X|)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x|x|\cdot x^2dx=0$，

$Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)=0$,　　　　……4 分

所以 X 与 $|X|$ 不相关.

(3) $P\{X\le\frac{1}{2},|X|\le\frac{1}{2}\}=P\{|X|\le\frac{1}{2}\}\ne P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{|X|\le\frac{1}{2}\}$,

所以 X 与 $|X|$ 不相互独立.　　　　……2 分

注：学生只要找出两个事件 $\{X\in I\}$，$\{|X|\in J\}$，然后说明这两事件不独立，那么 X 与 $|X|$ 不相互独立.都给 4 分.

三、（10 分）

解： （1）(X,Y)的所有可能取的数对为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2)$,且

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},$$

(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/3	1/3	0
1	1/18	2/9	1/18

……4 分

(2) 由(1)可得Y的分布律为

Y	0	1	2
P	7/18	5/9	1/18

……4 分

(3)

$Y=1$条件下X的条件分布律为

$$P\{X=0\mid Y=1\}=\frac{1/3}{5/9}=\frac{3}{5},P\{X=1\mid Y=1\}=\frac{2/9}{5/9}=\frac{2}{5}.$$ ……2 分

注：如第一问算错了，而后两问按第一问的结果算出的答案是对的，后二问给一半分。

四、（12 分）

解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$,

当$0<x<2$时，

$$f_X(x)=\int_0^{2-x}\frac{3}{8}(x+y)dy=\frac{3}{16}(4-x^2),$$

当$x\notin(0,2)$时，$f_X(x)=0$，

所以X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{16}(4-x^2),0<x<2,\\0,其他.\end{cases}$$ ……4 分

（2）$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}\frac{3}{8}(x+y)dx$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^1(1-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{2}$$ ……4 分

（3）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$，

当$0<z<2$时，$f_Z(z)=\frac{3}{8}\int_0^z zdx=\frac{3z^2}{8}$，

当$z\notin(0,2)$时，$f_Z(z)=0$，

所以$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3z^2}{8},0<z<2,\\0,其他.\end{cases}$$ ……4 分

五、(10 分)

解：（1）似然函数为

$$L(\theta)=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i},$$ ……2 分

$$\ln L(\theta)=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i,$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i=0,$$

解得$\theta=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i$，所以$\theta$的最大似然$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i$. ……4 分

（2）$E(\hat{\theta})=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{E(X)}{2}$,

而$E(X)=\int_0^{\infty}x\cdot\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\dfrac{2}{\theta}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta$,从而

$E(\hat{\theta})=\dfrac{E(X)}{2}=\theta$,

所以θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$为θ的无偏估计. ……4 分

六、(8 分)

解（1）该假设检验的拒绝域为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\le F_{0.95}(7,7)=\frac{1}{3.79}，\text{或}F=\frac{s_1^2}{s_2^2}\ge F_{0.05}(7,7)=3.79，$$

由样本算得检验统计量的观察值为

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{10.8}{7.2}=1.5$$

由于$F_{0.95}(7,7)<F=1.5<F_{0.05}(7,7)$,故不拒绝原假设,即认为 $\sigma_1=\sigma_2$.

……4 分

(2) 需检验假设

H_0：$\mu_1=\mu_2$ H_1：$\mu_1\ne\mu_2$

该假设检验的拒绝域为

$$|t|=\frac{|\overline{x}-\overline{y}|}{s_w\sqrt{1/8+1/8}}\ge t_{0.025}(14)=2.1448，$$

由样本得

$$s_w^2=\frac{7s_1^2+7s_2^2}{14}=9，$$

$$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{87.8-83.6}{\sqrt{9}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.8,$$

由于$|t|=2.8>t_{0.025}(14)$,故拒绝原假设,即认为两台机床加工零件的内径的均值有显著差异 ……4 分

七、(8 分)

解 $L_{xx}=199-\frac{33^2}{6}=17.5$， $L_{xy}=2112-\frac{33\times 360}{6}=132$， $\hat{b}=\frac{132}{17.5}=7.5429$，

y 关于 x 的一元线性回归方程为

$$\hat{y}=\frac{360}{6}+7.5429(x-\frac{33}{6})=7.5429x+18.5141,$$

即 $\hat{y}=7.5429x+18.5141$ ……5 分

（2） $L_{yy}=22610-\frac{360^2}{6}=1010,$

$$S_R=\hat{b}L_{xy}=7.5429\times 132=995.6628,$$

$$S_E=L_{yy}-S_E=1010-995.6628=14.3372，$$

$$F=\frac{S_R}{S_E/4}=277.7844,$$

由于 $F>F_{0.01}(1,4)=21.2$, 所以拒绝原假设, 即认为回归方程是显著的.

……3 分