北京邮电大学 2022-2023 第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题(4 学分，B)

考试注意事项：
学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效.

一、填空题与选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.设 A，B 为两随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(B\mid A)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ ________.

2.一批电子产品由甲、乙、丙三个车间生产.甲、乙、丙三个车间的产品件数分别占这批产品的50%,30%和20%,甲、乙、丙三个车间的产品的良品率分别为80%,60%和50%,从这批产品中任取一件,在取出的产品为良品的条件下,该产品是甲车间生产的概率为________.

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 4 的泊松分布,则 X 与 $X+Y$ 的相关系数为 ________.

4. 设 $(X,Y)\sim N(1,0,1,1,\frac{1}{4})$，则 $P\{2X-Y>1\}=$ ________.（结果用标准正态分布函数 $\Phi(z)$ 表示).

5. 设随机序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，X_1 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}(2-x),0<x<2$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 ________.

6.设总体 X 的分布律为 $P\{X=0\}=\theta$，$P\{X=1\}=\frac{1}{2}-\frac{2\theta}{3}$，$P\{X=2\}=\frac{1}{2}-\frac{\theta}{3}$,从该总体中抽样了一个样本,并得样本均值为 $\bar{x}=1.1$,则参数 θ 的矩估计值为________.

7.设 A,B 为两事件,且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则下列命题中为假命题的是

A. 若 $P(B\mid A)=P(B)$,则 $P(B\mid\bar{A})=P(B)$.

B. 若 $P(B\mid A)>P(B)$,则 $P(B\mid\bar{A})>P(B)$.

C. 若 $P(B\mid A)=P(B\mid\bar{A})$,则 $P(\bar{B}\mid A)=P(\bar{B}\mid\bar{A})$.

D. 若 $P(B\mid A)>P(A\mid B)$,则 $P(A)<P(B)$.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,总体 X 的方差为 σ^2，则 σ^2 的无偏估计是

A $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　B $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

C $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　D $\frac{1}{n+2.}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

9. 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 n 的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. $\bar{x}$，s 分别为样本均值和样本标准差，则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

A. $(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1), \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1))$　　B. $(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n), \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n))$

C. $(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$　　D. $(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n), \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n))$

10. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本,则 $T=\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2+X_4^2}$ 的分布为

A. $F(1,1)$　　B. $F(2,1)$　　C. $F(1,2)$　　D. $F(2,2)$

二（10 分） 设 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{1}{5}$，$k=-2,-1,0,1,2$，令 $Y=\cos(\frac{\pi}{2}X)$，

（1）求 Y 的分布律及分布函数;

（2）X 与 Y 是否相互独立？是否不相关？

三 (10 分) 设随机变量 X, Y 独立同分布,且 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, 0<x<2,\\ 0, \text{其他}\end{cases},$$

（1）求 $P\{X>2Y\}$，（2）求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的概率密度.

四 (10 分) 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, 0<y<x<1,\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

（1）求 $E(XY)$;

（2）求 X 的边缘概率密度,及 $X=x\ (0<x<1)$ 条件下 Y 的条件概率密度.

五(12 分)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x>0,\\ 0, \quad \text{其它},\end{cases}$$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数,

（1）求 θ 的最大似然估计量；

（2）θ 的最大似然估计量是否为 θ 的无偏估计？

（3）确定 a，使得 $E(a\hat{\theta}-\theta)^2$ 最小，其中 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计量.

六 (10 分)砖瓦厂有两座砖窑，从甲、乙两窑生产的砖中各抽取 6 块砖，测其抗折强度（单位：kg），并计算得样本均值和样本方差如下:

甲窑：$\overline{x}=36.3$， $s_1^2=10.6$

乙窑：$\overline{y}=41.8$， $s_2^2=13.4$

设甲、乙两砖窑的砖的抗折强度分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

（1）试检验假设: $H_0:\sigma_1=\sigma_2 \quad H_1:\sigma_1\neq\sigma_2$ (检验水平 $\alpha=0.1$)；

（2）在检验水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为甲、乙两窑的砖的抗折强度有显著差异.

$F_{0.05}(5,5)=5.05$，$t_{0.025}(10)=2.228$

七 (8 分) 在合金钢的强度 y（单位：10^7 Pa）与合金钢碳含量 x（单位：%）的研究中，安排了 10 次试验，得到数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$，并计算得

$$\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=0.175,\quad \overline{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=48.125,\quad S_{xx}=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=0.018,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=2.3868,\quad S_{yy}=\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2=345.06$$

（1）求线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$；

（2）在显著水平 $\alpha=0.01$ 下，检验回归方程的显著性，即检验假设

$H_0:b=0,H_1:b\neq0$.

$t_{0.0025}(24)=2.64$，$t_{0.05}(18)=1.734$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$，$F_{0.01}(1,8)=11.26$