北京邮电大学2020-2021第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(经管院，4学分，A)

一、填空题与选择题（每小题4分，共40分）

1．0.1．

2.$\frac{10}{19}$.

3.1.64

4.$\frac{5}{8}$

5．3．

6.　B

7.　A

8.　B

9.　D

10.　D

二、(12分)

解 (1) $P\{X>1\}=\int_1^2 \frac{1}{2}(2-x)dx=\frac{1}{4}.$ ……4分

(2) $E(X)=\int_0^2 \frac{x}{2}(2-x)dx=\frac{2}{3},$

$E(X^2)=\int_0^2 \frac{x^2}{2}(2-x)dx=\frac{2}{3},$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$ ……4 分

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$

当$x<0$时，$F(x)=0;$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_0^x \frac{1}{2}(2-t)dt=x-\frac{x^2}{4};$

当$x\ge 2$时，$F(x)=1,$

即得X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ x-\dfrac{x^2}{4}, 0\le x<2,\\ 1, x\ge 2.\end{cases}$$ ……4 分

三、(10 分)

解 (1) $E(X)=0, D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1,$

$E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=0, E(Z^2)=E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)=\dfrac{4}{3},$

$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\dfrac{4}{3},$

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=1,$

$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1,$

所以 X 和 Z 的相关系数为

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ……5 分

(2) Z 的分布函数为

$F_Z(z)=P\{XY\le z\}$

$=P\{X=-1\}P\{XY\le z\mid X=-1\}+P\{X=1\}P\{XY\le z\mid X=1\}$

$=\dfrac{1}{2}[P\{Y\ge -z\}+P\{Y\le z\}]$

$$=\begin{cases}0, z<-2,\\ \dfrac{2+z}{4}, -2\le z<2,\\ 1, z\ge 2\end{cases}$$ ……3 分

Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, -2<z<2,\\ 0, \text{其他}\end{cases}.$$ ……2 分

四、(8 分)

解 (1) $P\{Y<X^2\}=\iint\limits_{y<x^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{3}{8}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \frac{3}{16}x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$ ……4 分

(2)当$0<y<2$时,

$$f_Y(y)=\int_y^2 \frac{3}{8}xdx=\frac{3}{16}(4-y^2),$$

$Y=y(0<y<2)$条件下,X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{4-y^2}, y<x<2,\\ 0,其他.\end{cases}.$$ ……4 分

五、(12 分)

解 (1) $E(X)=\int_0^\theta \frac{3x^3}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$,即得$\theta=\frac{4}{3}E(X)$,所以$\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta}_M=\frac{4}{3}\bar{X}.$$ ……4 分

(2)似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3^n x_1^2\cdots x_n^2}{\theta^{3n}}, \theta\ge\max\{x_1,\cdots,x_n\}\\ 0,其他\end{cases},$$

当$\theta=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$时,$L(\theta)$取得最大值,故$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_{MLE}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$ ……4 分

(3)$\hat{\theta}_{MLE}$的分布函数为

$$\begin{aligned}f_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)&=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le \mathrm{z}\}\\&=P\{X_1\le z\}P\{X_2\le z\}\cdots P\{X_n\le z\}\\&=[P\{X\le z\}]^n\\&=\begin{cases}0, z<0,\\ \dfrac{z^{3n}}{\theta^{3n}}, 0\le z<\theta,\\ 1, z\ge\theta\end{cases}\end{aligned}$$

因此$\hat{\theta}_{MLE}$的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}_{MLE}}(z)=\begin{cases}\dfrac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0<z<\theta,\\ 0, 其他,\end{cases}$$

于是

$$E(\hat{\theta}_{MLE})=\int_0^\theta z\cdot\frac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}}dz=\frac{3n\theta}{3n+1},$$

所以$c=\dfrac{3n+1}{3n}$时，$c\hat{\theta}_{MLE}$为θ的无偏估计. ……4 分

六、(10 分)

解：（1）该检验问题的拒绝域为$F\le F_{0.95}(7,7)=\dfrac{1}{3.79}$，或$F\ge F_{0.05}(7,7)=3.79$,

其中检验统计量$F=\dfrac{s_x^2}{s_y^2}$.

由样本数据得检验统计量的观测值为

$$F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=\frac{28.26}{21.74}=1.3,$$

易见 $F_{0.95}(7,7)<F=1.3<F_{0.05}(7,7)$，样本未落入拒绝域，所以接受原假设.

……5 分

（2）需检验假设

$$H_0: \mu_1\le\mu_2 \qquad H_1: \mu_1>\mu_2,$$

该检验问题的拒绝域为$t\ge t_{0.05}(14)=1.76$,其中检验统计量$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}$,

由样本得检验统计量的观测值为

$$t=\frac{73.39-68.27}{\sqrt{\frac{7\times28.26+7\times21.74}{14}}\times\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2.048,$$

由于$t=2.048\ge1.76$，即样本落入了拒绝域，所以拒绝原假设.在检验水平$\alpha=0.05$下，认为镍合金铸件的硬度较铜合金铸件硬度有显著提高.

……5 分

七、(8 分)

解 (1) $\bar{x}=17$，$\bar{y}=26.4$,

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}x_i)^2=2927.2-\frac{170^2}{10}=37.2,$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot\sum_{i=1}^{10}y_i=4557.4-17\times 264=69.4,$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=1.8656，\ \hat{a}=26.4-1.8656\times 17=-5.3135,$$

所以y关于x的线性回归方程为

$$\hat{y}=-5.3135+1.8656x.$$ ……5 分

（2） $S_{yy}=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-\frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10}y_i)^2=7132.6-\frac{1}{10}\times 264^2=163,$

$$S_R=\hat{b}S_{xy}=1.8656\times 69.4=129.47,$$

$$S_E=S_{yy}-S_R=163-129.47=33.53,$$

$$F=\frac{S_R}{S_E/8}=30.89,$$

由于$F>F_{0.01}(1,8)=11.3$, 因此在显著水平0.01下认为回归方程是显著的.

……3 分

附:，$t_{0.05}(14)=1.76$，$t_{0.005}(8)=3.355, F_{0.05}(7,7)=3.79, F_{0.01}(1,8)=11.3.$