1. [12 points]Let R and S be relations on the set A, where A={1,2,3,4,5}, R={(1,2),(2，2),(2,4) ,(4,3),(3,3),(3,5)}, S={(2,2),(3,5),(5,3)}.

   a) Find the symmetric closure of $R \circ S$

计算问题， 矩阵的布尔积运算

   b) Find the following relations, and determine whether it is reflexive, symmetric, asymmetric, antisymmetric, and/or transitive?

   (1)R-S *性质判定， 记不清楚，*

   (2) S-R

   (3) $(R \cap S)^{-1}$

Inverse, 作业中定义， 就是把序偶倒过来。{(2,2),(5,3)}

(4) R^2

2. [8 points]Use Warshall's algorithm to find the transitive closure of R , where the zero–one matrix of R is

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. [3 points] Find the smallest equivalence relation on the set {1, 2, 3, 4, 5,6} containing the relation {(1, 2), (2, 3),(4,5)}.

3. [3 points] Find the smallest equivalence relation on the set {1, 2, 3, 4, 5,6} containing the relation {(1, 2), (2, 3),(4,5)}.

① $r(R) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,3), (4,5)\}$

② $s(r(R)) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (2,3), \cancel{(4,5)} (3,2), (4,5), (5,4)\}$

③ $tsr(R) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4), (1,3), (3,1)\}$

①②③每个一分，若直接写出正确答案直接给3分。但若无过程直接写结果且结果错误则不得分。

4. [7 points] Let R be the relation on the set of ordered pairs of positive integers such that ((a, b), (c, d)) ∈ R if and only if a + d = b + c.

a) Show that R is an equivalence relation.

b) What are the equivalence classes of R?

a) ①自反：(2分) $\forall$ ~~(a,b), (a,b)~~ $a, b \in Z^+$

则有 $a+b = b+a$，即 $((a,b),(a,b)) \in R$.

②对称：(2分) $\forall ((a,b),(c,d)) \in R$.

则 $a+d = b+c$，即 $c+b = d+a$

$((c,d),(a,b)) \in R$

③传递：(2分) $\forall ((a,b),(c,d)) \in R$，$((c,d),(e,f)) \in R$

则 $\begin{cases} a+d = b+c \\ c+f = d+e \end{cases}$ 得：$a+f = b+e$

即 $((a,b),(e,f)) \in R$.

综上，R是等价关系。

Page 3 of 8

b) (1分) 故 R的等价类为 $[(a,b)] = \{(x,y) \mid x-y = a-b,\ x \in Z^+,\ y \in Z^+\}$

5. [7 points] Set A= {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 24}.R is the divisibility on the set A.

a) Draw the Hasse diagram for the poset <A,R>.

b) Subset B={ 3, 4, 6}. Find the minimal elements, least element and least upper bound of B.

6. [3 points] Posets $<L,R>$ consisting of the following sets L, Where R is defined as: let $n_1, n_2 \epsilon L$, $n_1 R n_2$ if and only if n_1 is a factor of n_2. Which posets are lattices?
   a) L={1,2,3,4,6,12}

   b) L={1,2,3,4,6,8,12,14}

   c) L={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

7. [3 points] Complete the operational table so that * is a commutative binary operation.

*	a	b	c
a		c	a
b			
c		b	c

8. [7 points] Let $(S_1,*_1)$, $(S_2,*_2)$, and $(S_3,*_3)$ be semigroups and f: $S_1 \rightarrow S_2$ and g: $S_2 \rightarrow S_3$ be homomorphisms. Prove that g°f is a homomorphism from S_1 to S_3.

9. [10 points] S = Z with ordinary addition and R defined by a R b if and only if a $\equiv$ b(mod 3).
   a) Prove the relation R on the semigroup (S,+) is a congruence relation.
   b) Write the operation table of the quotient semigroup S/R.

10. [10 points] Let R* =R-{0},
   a) Show the (R*, ×) be a group. × is ordinary multiplication.
   b) Determine whether the function $f: R^* \rightarrow R^*$ defined by $f(x) = x^2$, for $x \in R^*$, is a homomorphism. and give your reason.

11. [10 points] Write the multiplication table for the group $Z_2 \times Z_3$. And find all the normal subgroups.

Arithmetic Modulo *m*

Definitions: Let $\mathbf{Z}_m$ be the set of nonnegative integers less than m: $\{0,1, \ldots, m-1\}$
- The operation $+_m$ is defined as $a +_m b = (a + b)$ **mod** m. This is *addition modulo m*.
- The operation $\cdot_m$ is defined as $a \cdot_m b = (a * b)$ **mod** m. This is *multiplication modulo m*.
- Using these operations is said to be doing *arithmetic modulo m*.

Example: Find $7 +_{11} 9$ and $7 \cdot_{11} 9$.
Solution: Using the definitions above:
- $7 +_{11} 9 = (7 + 9) \bmod 11 = 16 \bmod 11 = 5$
- $7 \cdot_{11} 9 = (7 \cdot 9) \bmod 11 = 63 \bmod 11 = 8$

p243,上学期给了定义， 本学期只是使用。

Table 9.10 Multiplication Table of $Z_2 \times Z_2$

	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar0,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$
$(\bar1,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$
$(\bar0,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar0,\bar0)$	$(\bar1,\bar0)$
$(\bar1,\bar1)$	$(\bar1,\bar1)$	$(\bar0,\bar1)$	$(\bar1,\bar0)$	$(\bar0,\bar0)$

Arithmetic Modulo *m*

Definitions: Let $\mathbf{Z}_m$ be the set of nonnegative integers less than m: $\{0,1, \ldots, m-1\}$
- The operation $+_m$ is defined as $a +_m b = (a + b)$ **mod** m. This is *addition modulo m*.
- The operation $\cdot_m$ is defined as $a \cdot_m b = (a * b)$ **mod** m. This is *multiplication modulo m*.
- Using these operations is said to be doing *arithmetic modulo m*.

Example: Find $7 +_{11} 9$ and $7 \cdot_{11} 9$.
Solution: Using the definitions above:
- $7 +_{11} 9 = (7 + 9) \bmod 11 = 16 \bmod 11 = 5$
- $7 \cdot_{11} 9 = (7 \cdot 9) \bmod 11 = 63 \bmod 11 = 8$

$Z_2 \times Z_3$={0， 1}×{0， 1， 2}

	（0， 0）	（0， 1）	（0， 2）	（1， 0）	（1， 1）	（1， 2）
（0， 0）	（0， 0）	（0， 1）	（0， 2）	（1， 0）	（1， 1）	（1， 2）
（0， 1）	（0， 1）	（0， 2）	（0， 0）	（1， 1）	（1， 2）	（1， 0）
（0， 2）	（0， 2）	（0， 0）	（0， 1）	（1， 2）	（1， 0）	（1， 1）
（1， 0）	（1， 0）	（1， 1）	（1， 2）	（0， 0）	（0， 1）	（0， 2）
（1， 1）	（1， 1）	（1， 2）	（1， 0）	（0， 1）	（0， 2）	（0， 0）
（1， 2）	（1， 2）	（1， 0）	（1， 1）	（0， 2）	（0， 0）	（0， 1）

1　最小的{（0， 0）}

2　最大的{

（0， 0）	（0， 1）	（0， 2）	（1， 0）	（1， 1）	（1， 2）

}

3 三阶群

（0， 0）	（0， 1）	（0， 2）

4 二阶群

{（0， 0），（1， 0）}

12. [8 points] Consider the (2,5) encoding function e: $B^2 \to B^5$ defined by

$e(00) = 00000 \quad e(01) = 01100 \quad e(10) = 10101 \quad e(11) = 11001$

a) Show that the (2,5) encoding function e is a group code.

b) Find the minimum distance of the (2, 5) encoding function e.

c) Determine the number of errors that e will **detect** and its associated decoding function will **correct**.