北京邮电大学 2016—2017 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题（A 卷）

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、单项选择题（本题共 20 分，每小题 4 分）

1. 对于任意二事件 A 和 B，下列说法正确的是（C）

（A）若 $AB=\phi$，则 A,B 一定不独立.（B）若 $AB=\phi$，则 A,B 一定独立.

（C）若 $AB\neq\phi$，则 A,B 有可能独立. （D）若 $AB\neq\phi$，则 A,B 一定独立.

2．设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1,$ 且 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$，则必有（ C ）。

（A）$P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$.　　（B）$P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$.　　（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

3．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则概率 $P\{X\le 1+\mu\}$，（D）

（A）随 μ 的增加而变大.　　（B） 随 σ 的增加而不变.

（C）随 μ 的增加而减小.　　（D） 随 σ 的增加而减小.

4．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.1\Phi(x)+0.9\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$（C）

（A） 0.　　（B）0.1.　　（C）0.9 .　　（D）$\sqrt{\pi}$.

5. 设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，

$D(X_1)=\sigma^2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，则（C）

（A）S 是 σ 的无偏估量.　　（B）S 是 σ 的最大似然估计.

（C）S 是 σ 的相合估计量.　　（D） S^2 与 $\overline{X}$ 相互独立.

二、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

1．从数1,2,3,4 中任取一个数，记为X，再从$1,2,\cdots,X$中任取一个数，记为Y，则

$P\{Y=2\}=$___13/48______.

2．设二维随机变量(X,Y)在xOy平面上由曲线$y=x$与$y=x^2$所围成的区域上服从

均匀分布，则概率$P\left\{0<X<\dfrac{1}{2},0<Y<\dfrac{1}{2}\right\}=$________0.5 .

3．设随机变量X的密度函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty,$ 则$EX=$____1,

$DX=$____0.5.

4. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立同服从参数为2的指数分布，即

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad \lambda=2,$$

则当$n\to+\infty$时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于______0.5.

5． 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单样本，其中μ,σ^2未知，记

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,Q^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}\right)^2$, 则假设$H_0:\mu=0$的$t$检验使用统计量

$T=$__$\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$ 或者 ($\dfrac{\overline{X}-\mu}{Q}\sqrt{n(n-1)}$ 或者$\dfrac{\overline{X}}{S}\sqrt{n}$ 给 4 分).

三、(**12 分**）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）试求常数c；

（2）求条件密度函数$f_{Y|X}(y\mid x)$.

解：由联合密度函数的性质，有$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}cx^2ydxdy=\frac{c}{2}\int_{0}^{1}x^4dx=\frac{c}{10}$

所以，$c=10$.　　　　　.............4 分

（2）当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{x}10x^2ydy=5x^4$，所以随机变量$X$的边缘密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}5x^4, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　.................4 分

所以当$0<x<1$时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2y}{x^2}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad ....4 \text{ 分}$$

四、**（14 分）**设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）求$E(X)$，　$E(Y)$，以及$E(XY)$；

（2）分别求出X与Y的边缘密度函数；

（3）判断随机变量X与Y是否相关，是否互相独立？

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3ydy=\frac{21}{8}\int_{-1}^{1}x^3(1-x^4)dx=0$，.......2 分

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2y^2dy=\frac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^6)dx=\frac{7}{9}$; ....2 分

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3y^2dy=\frac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^3(1-x^6)dx=0$; ....2 分

（2）当$-1\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{21}{4}\int_{x^2}^{1}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$; 随机变量$X$的边缘

密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right), & -1\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ....2 分

当 $-1\le y\le 1$ 时，$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\dfrac{21}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2ydx=\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$; 随机变量 Y 的边缘密度函数为

$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ....2 分

（3）由于 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$ 所以 X 与 Y 不相关............2 分

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y), \quad x^2\le y\le 1,$ 所以 X 与 Y 不独立。..................2 分

五、**（12 分）**

(1) 设系统由 100 个互相独立的部件组成，运行期间每个部件损坏的概率为 0.1，至少有 85 个部件是完好时系统才能正常工作，求系统正常工作的概率.

(2) 若上述系统由 n 个部件组成，至少有 80% 的部件完好时系统才能正常工作，问 n 至少多大才能使系统正常工作的概率不小于 0.95.

附录：

$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.66)=0.9525$，其中 Φ 表示正态分布的分布函数.

解：设系统中正常工作的部件个数为 X，则 $X\sim B(100,0.9)$。

（1）由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理知

$$P\{X\ge 85\}=1-P\{X<85\}$$
$$=1-P\left\{\frac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}<\frac{85-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\right\}$$
$$=1-P\left\{\frac{X-90}{3}<-\frac{5}{3}\right\}\approx 1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)$$ ....6 分
$$=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525.$$

$$P\{X \geq 0.8n\} \geq 1 - P\{X < 0.8n\}$$

（2） $$= 1 - P\left\{\frac{X - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}} < \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}}\right\}$$ ....6 分 (酌情给分)

$$\approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95.$$

于是 $\dfrac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645$，即 $n \geq 24.35.$

六（12 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x \geq 0 \\ 0, 其他 \end{cases},$$

其中 $\theta > 0$ 为待估参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解：(1)

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}},$$ . . . . 4 分

所以 $\theta = \dfrac{2}{\pi} \mu_1^2$,

故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\pi} \overline{X}^2;$$ ……2 分

(2)

样本的似然函数为

$$L(\theta) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$$ ....1 分

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\text{ },\text{....................1 分}$$

令

$$\frac{dlnL}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0\text{，}\quad\text{....................2 分}$$

解得

$$\theta=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\text{ },\text{....................1 分}$$

所以θ的最大似然估计为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\text{，}\quad\text{....................1 分}$$

即得θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\text{ .}$$

七、（10 分）

（1）　用仪器间接测量温度 5 次，温度（$^{\circ}C$）值为：1250, 1265, 1245, 1260, 1275. 而用另一种精密仪器测得该温度为 1277$^{\circ}C$（可看做真值），问用此仪器测温度有无系统偏差（测量的温度服从正态分布, 检验水平$\alpha=0.05$）？（6 分）

t分布数值表

$t_{0.9995}(5)=-6.859$，$t_{0.9995}(4)=-8.610$，$t_{0.975}(4)=-2.776$，$t_{0.975}(5)=-2.571$.

解：（I）提出零假设$H_0=\mu=1227$. ....1 分

（II）选择统计量　　$T=\dfrac{\overline{X}-1227}{S/\sqrt{n}}$............2 分

（III）由检验水平$\alpha=0.05$，得$t_{0.975}(4)=2.776$. 否定域为

$$(-\infty,-2.776)\text{或}(2.776,+\infty).\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1\text{分}$$

（Ⅳ）由给定的样本值，计算得

$$\overline{X}=1259,\qquad S^2=\frac{570}{4}\text{，于是}\ \left|\hat{T}\right|=\left|\frac{1259-1277}{\sqrt{570/(4\times 5)}}\right|=3.37\ \ \ldots.1\text{分}$$

（Ⅴ）由于$\left|\hat{T}\right|>2.776$, 从而否定$H_0$，认为$\mu\neq 1277$,即该仪器测温度有系统误差. ...1 分

（2）设连续随机变量X的r绝对矩$E\left(|X|^r\right)$存在（$r>0$），证明对于任意的$\varepsilon>0$，有

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E\left(|X|^r\right)}{\varepsilon^r}.$$

证明：设随机变量的密度函数为$f(x)$，则

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}=\int_{|X|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|X|\geq\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx=\frac{E\left(|X|^r\right)}{\varepsilon^r},$$

即 $P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{E\left(|X|^r\right)}{\varepsilon^r}.$ 每一步正确给 1 分。