北京邮电大学 2015—2016 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案（A 卷）

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、单项选择题（本题共 20 分，每小题 4 分）

1．设有 10 个人抓阄抽取两张戏票，则第三个人抓到戏票的概率等于（C ）.

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{8}$

2．设在每次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，$q=1-p$，则 n 次独立重复试验中，事件 A 至少发生一次的概率是（D ）.

A. p^n　　B. q^n　　C. $1-p^n$　　D. $1-q^n$

3．设随机变量ξ满足等式 $P\{|\xi-E\xi|\geq 2\}=1/16$，则必有（D ）.

A. $D\xi=\frac{1}{4}$　　B. $D\xi>\frac{1}{4}$　　C. $D\xi<\frac{1}{4}$　　D. $P\{|\xi-E\xi|<2\}=\frac{15}{16}$

4．对于任意两个随机变量 ξ 和 η，若 $E(\xi\eta)=E\xi E\eta$，则有（ B ）.

A. $D(\xi\eta)=D\xi D\eta$　　B. $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

C. ξ 和 η 独立　　D. ξ 和 η 不独立

5．已知总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，样本 (X_1,X_2,X_3)，参数 μ 已知，σ^2 未知，则下面不是统计量的（ C ）.

A. $X_2+2\mu$　B. $\max(X_1,X_2,X_3)$　C. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{3}X_i^2$　D. $|X_3-X_1|$

二、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

1．事件 A，B，C 满足：$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，

则事件 A，B，C 都不发生的概率为 $\frac{3}{8}$.

2．设 X 的分布律为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,且 X 与 Y 独立同分布，则随机变量 Z=max{X,Y}的分布律为

Z	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

.

3．设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{a}{x^2+2x+2}$，a 为常数，则 $P(X\geq 0)=$ ~~3/4~~ 1/4.

4. 设 X_1,X_2 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则 $Y=\left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 服从 $F(1,1)$ 分布.（给出分布类型及参数)

5．测量某冶炼炉内的温度，假定温度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，测量 5 次，可得样本均值 $\overline{X}=1825$，样本标准差 S=7.48，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为

$$\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=\left(\overline{X}-2.78S/\sqrt{5},\overline{X}+2.78S/\sqrt{5}\right)=(1815.72,1834.28).$$

（$t_{0.025}(4)=2.78,t_{0.025}(5)=2.57,\sqrt{5}\approx 2.24$）

三、(12 分）设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，且 Y 与 X 同分布，事件 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 独立，$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，求：(1) a 值；(2) $\dfrac{1}{X^2}$ 的期望.

解：(1) 由 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，且 Y 与 X 同分布，事件 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 独立，可知当 $a<0$ 时

$$P(A)=P(X>a)=\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^0 0dx+\int_0^2\frac{3}{8}x^2dx+\int_2^{+\infty}0dx=\frac{1}{8}x^3\Big|_0^2=1$$

$P(B)=P(Y>a)=\int_a^{+\infty}f(y)dy=1$，即

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=1+1-1\times 1=1$ 与 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$ 相矛盾，因而 $a\geq 0$，即

$P(A)=P(X>a)=\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^2 \frac{3}{8}x^2dx+\int_2^{+\infty} 0dx=\frac{1}{8}x^3\Big|_a^2=\frac{1}{8}(8-a^3)$

$P(B)=P(Y>a)=\int_a^{+\infty} f(y)dy=\frac{1}{8}(8-a^3)$，即

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{1}{8}(8-a^3)+\frac{1}{8}(8-a^3)-\frac{1}{8}(8-a^3)\times\frac{1}{8}(8-a^3)=\frac{3}{4}$

即$(8-a^3)^2-16(8-a^3)+48=0$，即$a=\sqrt[3]{4}$，$a=-\sqrt[3]{4}$（不合题意，舍去）**（6 分）**

（2）$E(\frac{1}{X^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2}\times\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}x\Big|_0^2=\frac{3}{4}$。**（6 分）**

四、**（12 分）**

随机变量X服从区间$(0,a)$上的均匀分布，当观察到$X=x(0<x<a)$时，随机变量Y在区间（x,a)内的任意一个子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比，

求:⑴ (X,Y)的联合密度$f(x,y)$，⑵ Y 的边缘密度$f_Y(y)$，⑶ $E(XY)$.

解：（1）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0<x<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

当$0<x<a$, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{a-x}, & x<y<a\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{a(a-x)}, & 0<x<y<a\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$ **（4 分）**

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{a(a-x)}dx, & 0<y<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{a}\ln\frac{a}{a-y}, & 0<y<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（4 分）

（3） $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_x^a xy\frac{1}{a(a-x)}dy=\int_0^a\frac{x(a^2-x^2)}{2a(a-x)}dx=\frac{5}{12}a^2$

（4分）

五、（12分） 设随机变量 (X,Y) 服从 $N(1,0,3^2,4^2,-\frac{1}{2})$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，试求

（1）Z 的数学期望与方差；

（2）X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

（3）X 与 Z 是否相互独立.

解：（1）由期望和方差的性质

$$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\operatorname{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X,Y)$$

$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$ **（4分）**

（2） $\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=-\frac{1}{2}\times3\times4=-6$

$$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)=0$$

故 $\rho_{XZ}=0$。**（4分）**

（3）因（X,Y）是二维正态随机变量，$\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，（X, Z）是（X,Y）的线性组合，

故(X,Z)也是二维正态随机变量，而他们不相关，故 X 与 Z 独立。**（4分）**

六、（12分） 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta,\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$；

（2）求 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

（3）讨论 $\hat{\theta}$ 是否具有无偏性.

解：（1）对数似然函数

$$\ln(L)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i;\theta)=n\ln 2-2n\overline{X}+2n\theta,\qquad X_i>\theta, i=1,2,\ldots,n$$

$$\because \frac{d\ln(L)}{d\theta}=2n>0,\ \therefore \hat{\theta}=\min\{X_1\ \ \cdots\ \ X_n\}$$ **（4分）**

（2）$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，$\because F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n$.

$$\therefore F_{\hat{\theta}}(x)=1-(1-F(x))^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$ **（4分）**

（3）

$$E\hat{\theta}=\int_{\theta}^{+\infty}x\,dF_{\hat{\theta}}(x)=\int_{\theta}^{+\infty}xn(1-F(x))^{n-1}f(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}$$

所以 $\hat{\theta}$ 不是无偏估计。 **（4分）**

七、（12分）

某化工厂为了提高某种化学药品的得率，提出了两种工艺方案．为了研究哪一种方案好，分别用两种工艺各进行了10次试验，数据如下：

方案甲得率(%)：68.1，62.4，64.3，64.7，68.4，66.0，65.5，66.7，67.3，66.2

方案乙得率(%)：69.1，71.0，69.1，70.0，69.1，69.1，67.3，70.2，72.1，67.3

经过计算样本均值和样本方差为 $\overline{X}_1=65.96, \overline{X}_2=69.43$，$S_1^2=3.35, S_2^2=2.22$

设甲乙两个方案得率相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，μ_1,μ_2，σ_1^2,σ_2^2 均为未知，问方案乙是否比方案甲显著提高得率 $(\alpha=0.01)$?

（即检验（1）H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，（2）H_0：$\mu_1\ge\mu_2$）

解: (1) H_0: $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$, H_1: $\sigma_1^{\ 2}\neq\sigma_2^{\ 2}$.

采用检验统计量 F=$\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_1^{\ 2}}$~F(n$_1$-1, n$_2$-1),

拒绝域:F> $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 F< $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$, **(4分)**

其中 n_1=10, n_2=10, S_1^2=3.35, S_2^2=2.22, 所以

F=$\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_1^{\ 2}}=\dfrac{\mathbf{3.35}}{\mathbf{2.22}}$=1.5066,

$F_{0.005}(9.9)=6.54$

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=\cancel{F_{0.025}(9,9)=4.026}$

$F_{0.995}(9,9)=\dfrac{1}{F_{0.005}(9.9)}=\dfrac{1}{6.54}=0.1529$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=\cancel{F_{0.925}(9,9)=\dfrac{1}{F_{0.025}(9,9)}=\dfrac{1}{4.026}=0.2484}$, 故

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ <F< $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$,

因此应接受原假设. 认为两总体方差相等. **(2分)**

(2) H$_0$: $\mu_1\geq\mu_2$, H$_1$: $\mu_1<\mu_2$

采用检验统计量 T=$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$,其中 $S_W^{\ 2}=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$,

拒绝域:T<－ $t_\alpha(n_1+n_2-2)$, **(4分)**

$\overline{X}_1=65.96$, $\overline{X}_2=69.43$, $\boldsymbol{S_W}^2=\dfrac{9S_1^{\ 2}+9S_2^{\ 2}}{18}$=2.7881, 所以 T= $\dfrac{-3.47}{1.6698\sqrt{\frac{1}{5}}}$=－4.65,

$t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.01}(18)=2.552$,故 T<$-t_{0.01}(18)$,

因此拒绝原假设, 即能认为方案乙比方案甲显著提高得率. **(2分)**

附表: $F_{0.025}(9,9)$=4.026, $\boldsymbol{t_{0.01}(18)=2.552}$, $\sqrt{2.7881}\approx\mathbf{1.67}$, $\sqrt{5}\approx2.24$