北京邮电大学 2019-2020 第一学期

《概率论与数理统计》期末试题答案(计算机学院，4 学分)

一、填空题（40 分，每小题 4 分）

1. $\frac{2}{3}$，2. 8，3. $\frac{1}{2e}$，4. 9，5. 0.383，6. $\frac{1}{6}$，

7. $\frac{8}{9}\theta$， 8. $(0.96,3.834)$， 9. 2； 8，10. $\frac{\pi-2}{2}\sigma^2$.

二．(12 分)

解：（1） $E(X)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x(1-x^2)dx=0$， $E(X^2)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx=\frac{1}{5}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{5}$. ……6 分

（2） $E(X\cdot|X|)=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x|x|(1-x^2)dx=0$，

$Cov(X,|X|)=E(X\cdot|X|)-E(X)E(|X|)=0$，

所以 X 与 $|X|$ 不相关. ……4 分

(3) $P\{X\le\frac{1}{2},|X|\le\frac{1}{2}\}=P\{|X|\le\frac{1}{2}\}\ne P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{|X|\le\frac{1}{2}\}$,

所以 X 与 $|X|$ 不相互独立. ……2 分

注：学生只要找出两个事件 $\{X\in I\}$，$\{|X|\in J\}$，然后说明这两事件不独立，那么 X 与 $|X|$ 不相互独立.都给 2 分.

三．(10 分)

解 (1) (X,Y) 的所有可能取的数对为 $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$ 且

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{20},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}=\frac{C_3^1}{C_4^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{20},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2\}P\{Y=0\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{10}.$$

(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2
1	1/20	3/10	3/20
2	1/10	3/10	1/10

……4 分

(2) 由(1)可得Y的分布律为

Y	0	1	2
P	3/20	3/5	1/4

……4 分

(3) $Y=0$条件下X的条件分布律为

$P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{1}{3}, P\{X=2\mid Y=0\}=\frac{2}{3}$. ……2 分

注：如第一问算错了，而后两问按第一问的结果算出的答案是对的，后二问给一半分。

三．(12)

解: (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x, 0<x<2, 0<y<x,\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$,

当$y\in(0,2)$时,

$$f_Y(y)=\int_y^2\frac{3}{8}x\mathrm{d}x=\frac{3}{16}(4-y^2),$$

当 $y \notin (0,2)$ 时,

$$f_Y(y)=0,$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{16}(4-y^2), 0<y<2,\\ 0, 其他\end{cases}. \qquad \cdots\cdots 4 分$$

(2) $E(XY)=\int_0^2 dy\int_0^x xy\cdot\frac{3}{8}xdy=\frac{6}{5}.$ ……2 分

(3) $Z=X-Y$ 的分布函数记为 $F_Z(z)$，由于 $P\{Z\in(0,2)\}=1$，因此当 $z<0$ 时，

$F_Z(z)=0$，当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

当 $0\le z<2$ 时,

$$F_Z(z)=P\{X-Y\le z\}$$

$$=1-P\{X-Y>z\}$$

$$=1-\int_z^2 dx\int_0^{x-z}\frac{3}{8}xdy=\frac{3}{4}z-\frac{z^3}{16},$$

所以 $Z=X-Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0,\\ \dfrac{3}{4}z-\dfrac{z^3}{16}, 0\le z<2,\\ 1, z\ge 2.\end{cases} \qquad \cdots\cdots 4 分$$

$Z=X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}-\dfrac{3z^2}{16}, 0<z<2,\\ 0, 其他.\end{cases} \qquad \cdots\cdots 2 分$$

如考生先利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,x-z)dx$，或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z+y,y)dy$ 计算概率出概率密度，然后计算分布函数，那么得出概率密度给 4 分，得出分布函数给 2 分.

四．(10 分)

解: (1)似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{2\pi\theta}}\ e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}=(\frac{2}{\pi})^{n/2}\theta^{-n/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}, \qquad \cdots\cdots 2 分$$

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\frac{2}{\pi}-\frac{n}{2}\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$,

解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$,所以 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$ ……4 分

(2) $E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=\theta$.

从而 $E(\hat{\theta})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=E(X^2)=\theta$,

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计. ……4 分

五．(8 分)

解:（1）该检验的拒绝域为

$$F\le F_{0.95}(7,7)=\frac{1}{F_{0.05}(7,7)}=\frac{1}{3.79}，\text{或}F\ge F_{0.05}(7,7)=3.79,$$

其中检验统计量 $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$,

由样本算得 $F=\frac{160}{128}=1.25$，可见样本没有落入拒绝域，所以不拒绝原假设，即认为两总体方差无显著差异. ……4 分

（2）需检验下假设为

H_0：$\mu_1\le\mu_2$ H_1：$\mu_1>\mu_2$,

由（1）的结果，可以认为两总体方差相等.检验的拒绝域为

$t\ge t_{0.05}(14)=1.76$,

其中检验统计量 $t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$,

由样本算得 $t=\frac{2805-2781}{\sqrt{(7\times160+7\times128)/14}\cdot\sqrt{1/8+1/8}}=4$，易见 $t=4\ge t_{0.05}(14)=1.76$,

即样本落入拒绝域，所以拒绝原假设，即在水平$\alpha = 0.05$下，能认为甲种枪的枪弹平均速度显著地大于乙种枪的枪弹平均速度.　　　　　　　　　　……4 分

六.（8 分）

解 (1) $\bar{x} = 24$，$\bar{y} = \frac{203.7}{7} = 29.1$，

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} x_i)^2 = 4144 - \frac{168^2}{7} = 112,$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} x_i)(\sum_{i=1}^{7} y_i) = 4924.4 - \frac{168 \times 203.7}{7} = 35.6,$$

$$\hat{b} = \frac{L_{xy}}{L_{xx}} = 0.3179, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 21.4704,$$

所以y关于x的线性回归方程为

$$\hat{y} = 21.4704 + 0.3179x.$$

……5 分

(2) $L_{yy} = \sum_{i=1}^{7} y_i^2 - \frac{1}{7}(\sum_{i=1}^{7} y_i)^2 = 11.9$，$S_R = \hat{b}L_{xy} = 11.3172$，

$$S_E = L_{yy} - S_R == 0.5828, \ F = \frac{S_R}{S_E / 5} = 97.09,$$

由于$F > F_{0.01}(1,5) = 16.3$，因此在显著水平 0.01 下认为回归方程是显著的.

……3 分