北京邮电大学 2018-2019 学年

《概率论与数理统计》4 课时

期末考试试题答案（B）

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上，写在试题纸上一律无效

一．填空与选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知 10 件产品中有 2 件次品，从该产品中任意取 3 件，则恰好取到一件次品的概率等于$\frac{7}{15}$.

2. 设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)>0$，则 $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

3. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}Ax^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则常数 A=__3__.

4. 设泊松分布随机变量 $X\sim P(\lambda)$，且 $P\{X=0\}=e^{-1}$，则 $E(X)=$_1__.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G：$0\le x\le 2$，$0\le y\le 2$ 上的均匀分布，则 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=$__0.25__.

6. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$ 都存在，且有 $E(X)=10$，$E(X^2)=109$，由切比雪夫不等式估计 $P\{|X-10|\ge 6\}\le$__0.25__.

7. 设来自总体 $N(0,1)$ 的样本 $X_1,\cdots,X_6$，则常数 $C=\frac{1}{3}$使得 $CY\sim\chi^2$ 分布，其中 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$.

8. 设总体 $X\sim N(1,4)$，x_1，x_2，…，x_{10} 为来自该总体的样本，$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i$，则 $D(\bar{x})=$__0.4__.

9. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是（ C ）

A. $F_1(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　B. $F_2(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

C. $F_3(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$　　D. $F_4(x)=\begin{cases}0, & 0<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 2, & x\ge 1.\end{cases}$

10.设$X1$，$X2$来自任意总体X的一个容量为2的样本，则在下列$E(X)$的无偏估计量中，最有效的估计量是（　D　）

A. $\frac{2}{3}X1+\frac{1}{3}X2$　　B. $\frac{1}{4}X1+\frac{3}{4}X2$

C. $\frac{2}{5}X1+\frac{3}{5}X2$　　D. $\frac{1}{2}X1+\frac{1}{2}X2$

二（8分）．设随机变量X服从参数为1的指数分布，概率密度函数为

$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求$Y=X^2$的概率密度函数。

解：

$$Y\sim F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})=P(X\le\sqrt{y})-P(X\le-\sqrt{y})$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}dx+0=1-e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}\qquad（6分）$$

$$\therefore\quad Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0.\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\qquad（2分）$$

三（12分）．设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<+\infty\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）试确定常数 b，（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，

（3）求函数 $U=\max(X, Y)$的分布函数。

解：（1）$1-\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,dx-\int_0^1\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy\,dx-b[1-e^{-1}]$

$\therefore\quad b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$ （4 分）

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}0 & x\le 0\text{或}x\ge 1\\ \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1\end{cases}\quad（2 分）$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}0 & , \quad y\le 0\\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & \quad y>0\end{cases}\quad（2 分）$$

（3）$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u, Y\le u\}$

$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x,y)dx\,dy$

$u<0$, $F_U(u)=0$

$0\le u<1$, $F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\dfrac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$

$u\ge 1$, $F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$ （4 分）

四（10 分）设(X,Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3
−1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

（1）求 X，Y 的边缘分布律，

（2） $E(X)$，$E(Y)$，

（3） 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$．

解：(1)由 X，Y 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
－1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

（4 分）

(2)

$E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=0.4+0.4+1.2=2.$

$E(Y)=(-1)\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$ （4 分）

(3) Z 的分布律

$Z=Y/X$	－1	－1/2	－1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)=(-1)\times0.2+(-0.5)\times0.1+(-1/3)\times0+0\times0.4+1/3\times0.1+0.5\times0.1+1\times0.1$

$=(-1/4)+1/30+1/20+1/10=(-15/60)+11/60=-1/15.$ （2 分）

五(8 分)．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X，Y 相互独立，求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数（其中 α,β 是不为零的常数）．

解：由于 X，Y 相互独立

$Cov(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)$

$=E[(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)]-(\alpha E(X)+\beta E(Y))(\alpha E(X)-\beta E(Y))$

$=\alpha^2E(X^2)-\beta^2E(Y^2)-\alpha^2(E(X))^2+\beta^2(E(Y))^2$

$=\alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$ （4 分）

$D(Z_1)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$, $D(Z_2)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$,

故$\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)}$ （4 分）

六（12 分） 设总体 $X\sim b(1,p)$，X_1，X_2，…，X_n 是来自 X 的样本，

（1）求 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律，

（2）求参数 p 的极大似然估计量，

（3）求参数 p 的矩估计量，并判断它是否为无偏估计.

解：（1）由二项分布可加性 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$，若记 $\sum_{i=1}^{n} X_i = Y$，则

分布律为 $P(Y=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$. （2 分）

（2） **设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值，X 的分布律为** $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1,$

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}=0,$$

p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X}.$

（6 分）

（3）$E(X)=p$，p 的矩估计量是 $\bar{X}$.

因为 $E(\bar{X})=E(X)=p$，故它是无偏估计. （4 分）

七（10 分）. 某矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定为 3.25，3.27，3.24，3.26，3.24（单位%），设测定值总体 X 服从正态分布 N（μ，σ^2）。

（1）求 μ 的置信水平为 0.99 的双侧置信区间？

（2）在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，这批矿砂的含镍量的均值 μ 是否为 3.25？

计算可得：样本均值 $\bar{X}=3.252, S=0.01304, \sqrt{5}=2.236$

附表：$t_{0.005}(5)=4.0322$，$t_{0.01}(5)=3.3649$，$t_{0.005}(4)=4.6041$，$t_{0.01}(4)=3.7469$

解：（1）测定值总体 $X\sim N$（μ，σ^2），σ^2 未知时，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间为 $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

n=5，$\alpha=0.01$，$t_{0.005}(4)$=4.6041，计算可得（3.225，3.278）。（4 分）

（2）测定值总体 $X\sim N$（μ，σ^2），σ^2 未知

$$H_0: \mu=3.25; \quad H_1: \mu\neq 3.25$$

检验统计量为$t=\dfrac{\bar{X}-3.25}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域为$|t|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$.

n=5，$\alpha=0.01$，$t_{0.005}(4)$=4.6041，

代入样本值有 $|t|=\left|\dfrac{3.252-3.25}{0.01304/\sqrt{5}}\right|=0.343<t_{\alpha/2}(n-1)$

故在$\alpha=0.01$下，接受假设 H_0，认为这批矿砂的含镍量的均值μ为 3.25。（6 分）