



MASTER 1 PHYSIQUE

PROJET CHAOS SEMESTRE 1 - 2018/2019

---

## **Système à trois corps restreints.**

---

VACHER Léo

VEYRAT DE LACHENAL Lou-Anne

# 1 Introduction

L'objectif de ce court projet est la mise en évidence du chaos dans le problème à trois corps restreint. Le format étant relativement court il n'a pas vocation à être révolutionnaire ou exhaustif. L'idée sera avant tout de maîtriser et de s'approprier le sujet en reprenant ce qui a déjà été fait.

## 2 Poincaré et la naissance du Chaos

La découverte du chaos ne remonte aux années 1990 comme l'ont laissé penser la majorité des ouvrages de vulgarisations publiés au cours de notre siècle.

L'astronomie est peut être la plus vieille des sciences et a été une grande source d'inspiration et de progrès pour la physique moderne. Il suffit de citer les noms de Galilée, Kepler, Laplace ou Newton pour s'en convaincre. Il est cependant moins connu que c'est aussi d'elle qu'à émergé l'étude des systèmes chaotiques venant bouleverser la réputation impeccable de précision donnée par Newton au mouvement des astres semblable à une horloge cosmique.

La recherche d'une solution analytique pour le problème à trois corps ou plus a commencé dès la publication de *Philosophiae naturalis Principia mathematica* par Newton en 1687. La priorité étant notamment l'étude du système Terre-Soleil-Lune et des interactions planète-planète dans le système solaire. Le problème est épineux et l'idée de trouver une solution explicite est peu à peu abandonner pour l'étude par développements en séries. L'astronome Delauney consacra vingt ans de sa vie au calcul d'une série de 320 termes le conduisant à des résultats précis à la seconde d'arc près !

. L'apparition à la fin du XVIIIème siècle de la mécanique analytique donnera un nouveau souffle à l'étude des mouvements astronomiques et le problème sera étudié par de très nombreux physiciens tels Lagrange, Laplace, Euler et Poisson. De nombreuses percées sont ainsi réalisées dans la recherche de solutions particulières notamment par Gylden, Lindstedt et Hill.

En 1859, peu avant sa mort, Lejeune-Dirichet confie avoir trouvé des solutions analytiques stables au problème à N corps mais aucune trace n'en sera retrouvée dans ses écrits. Cette nouvelle laissera présager l'existence d'une méthode d'intégration simple et élégante pour les orbites des corps.

En 1885, le roi de Suède et de Norvège Oscar II organise un prix de science . Il accorde 3 ans aux participants pour rédiger un mémoire anonyme. l'auteur de celui qui sera jugé le plus révolutionnaire scientifiquement sera récompensé d'une somme de 2500 couronnes soit environ le tiers du salaire annuel d'un chercheur. Le prix est très prestigieux et il attendu à ce que le mathématicien physicien et philosophe Henri Poincaré y participe. C'est ce qu'il fait en envoyant son mémoire de 158 pages le 21 janvier 1889 intitulé "Rien ne dépasse la limite des étoiles". Il traite d'une version simplifiée du problème à trois corps : le problème à trois corps restreints présenté dans le corps de ce rapport. Poincaré démontre la stabilité poissonnienne des orbites périodiques possibles et gagne le prix. Le mémoire est publié dans la célèbre revue *Acta Mathematica* et lance la carrière de Poincaré qui sera un des plus grand mathématiciens de tous les temps.

Lors de la relecture du dis mémoire, Poincaré réalise qu'il n'a pas pris en compte l'interaction transversale des variétés stable et instable ce qui l'amène à des solutions chaotiques faisant de lui le premier à étudier ces phénomènes. Il republie alors une nouvelle version augmentée passant de 158 à 270 pages traitant de la question et il remboursa le coût d'impression du volume original, 3 585 couronnes et 63 öre, une somme significativement plus importante que le montant du prix obtenu. La droiture de Poincaré est remarquable et une de ses erreurs à permis l'ouverture d'un tout nouveau champs de la physique et des mathématiques modernes.

### 3 Position du problème

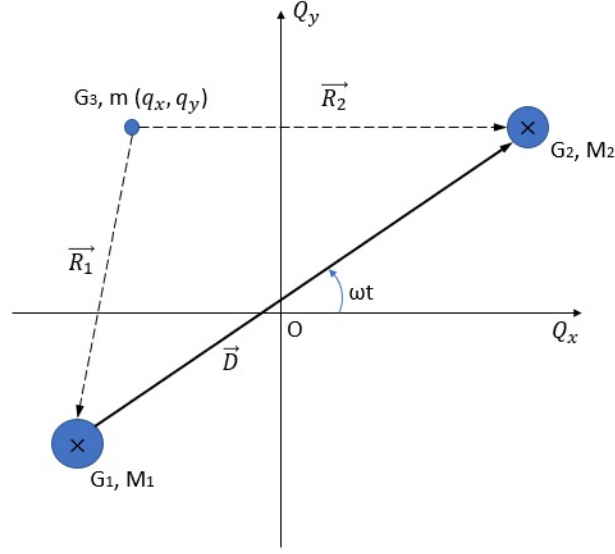


FIGURE 1 – Schéma

On étudie le mouvement de deux étoiles massives  $G_1$  et  $G_2$  de masses  $M_1$  et  $M_2$  en mouvement circulaire l'une par rapport à l'autre à vitesse angulaire constante  $\omega$ . On se place dans le référentiel galiléen  $(O, Q_x, Q_y)$  où  $O$  est le barycentre du système défini par :

$$M_1 O\vec{G}_1 + M_2 O\vec{G}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

Les deux étoiles sont séparées par la distance  $\vec{D}$  telle que, d'après la relation de Chasles :

$$\vec{D} = G_1\vec{G}_2 = G_1\vec{O} + O\vec{G}_2 \quad (2)$$

On ajoute alors un troisième corps "test"  $G_3$  (typiquement une planète) de masse  $m$  dont l'influence sur les deux autres astres pourra être négligée. On choisit de le faire partir dans le plan où il restera tout au long de son mouvement par conservation du moment cinétique total. Il serait possible d'étudier le problème en trois dimensions mais cela compliquerait lourdement la tâche. On repère alors  $G_3$  dans le plan par son vecteur position  $O\vec{G}_3 = \vec{q} = (q_x, q_y)$ .

On définit :

$$\vec{R}_1 = G_1\vec{G}_3 \quad \text{et} \quad \vec{R}_2 = G_2\vec{G}_3$$

Chasle nous donne encore (cf schéma) :

$$\vec{R}_1 = \vec{q} - O\vec{G}_1 \quad \text{et} \quad \vec{R}_2 = \vec{q} - O\vec{G}_2 \quad (3)$$

et la masse réduite du couple d'étoiles  $\mu$  comme :

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \leftrightarrow \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{M_1}{M_2}$$

En combinant (1) et (2) on obtient alors :

$$\vec{D} = -\left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right) O\vec{G}_1 \leftrightarrow O\vec{G}_1 = -\mu\vec{D}$$

$$\vec{D} = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right) O\vec{G}_2 \leftrightarrow O\vec{G}_2 = (1 - \mu)\vec{D}$$

Puis, en utilisant (3) et en projetant sur les axes :

$$R_1 = ((q_x + \mu D \cos(\omega t))^2 + (q_y + \mu D \sin(\omega t))^2)^{1/2}$$

$$R_2 = ((q_x - (1 - \mu) D \cos(\omega t))^2 + (q_y - (1 - \mu) D \sin(\omega t))^2)^{1/2}$$

On notera également que  $D$  et  $\omega$  sont liés par la troisième loi de Kepler appliquée au mouvement circulaire :

$$\frac{(2\pi/\omega)^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Soit :

$$D^3 \omega^2 = G(M_1 + M_2) \quad (4)$$

## 4 Hamiltonien du système

Le Lagrangien de notre planète est défini par  $L = T - V$  où  $V$  est l'énergie potentielle d'interaction de  $G_3$  avec  $G_1$  et  $G_2$  :

$$V = V_1 + V_2 = -G \left( \frac{M}{R} + \frac{M'}{R'} \right)$$

D'où :

$$L = \frac{m|\dot{\vec{q}}|^2}{2} + G \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right)$$

Les coordonnées du vecteur d'impulsion généralisée sont définies par :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m\dot{q}_k$$

On dérive alors le Hamiltonien  $H$  comme :

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - Gm \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right)$$

## 5 Référentiel tournant

On peut simplifier l'étude du mouvement en se plaçant dans le référentiel tournant (O,x,y) dans lequel les deux étoiles sont fixes. La disparition explicite en temps va ainsi disparaître. On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = q_x \cos(\omega t) + q_y \sin(\omega t) \\ y = q_y \cos(\omega t) - q_x \sin(\omega t) \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{cases} q_x = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) \\ q_y = y \cos(\omega t) + x \sin(\omega t) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \dot{q}_x = \cos(\omega t)(\dot{x} - \omega y) - \sin(\omega t)(\dot{y} + \omega x) \\ \dot{q}_y = \cos(\omega t)(\dot{y} + \omega x) + \sin(\omega t)(\dot{x} - \omega y) \end{cases}$$

On peut également réécrire :

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{(x + \mu D)^2 + y^2} \\ R_2 = \sqrt{(x - (1 - \mu)D)^2 + y^2} \end{cases}$$

Soit finalement, le Lagrangien dans le référentiel tournant :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x} - \omega y)^2 + \frac{m}{2}(\dot{y} + \omega x)^2 + Gm \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right)$$

On en tire les expressions des quantités de mouvements :

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y) \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x) \end{cases}$$

D'où l'expression finale de notre Hamiltonien dans le référentiel tournant :

$$\begin{aligned} H &= \sum_k p_k \dot{x}_k - L = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - L \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 y^2 - \omega^2 x^2) - Gm \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \omega p_x y - p_y x \omega - Gm \left( \frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} \right) \end{aligned}$$

On remarque que celui ci ne dépend plus explicitement du temps ce qui était notre objectif. On sait que les mouvements dans un champ de gravitation ne dépend pas de la masse du corps, c'est pourquoi on pose  $m=1$ . De plus, on peut réécrire en utilisant (4) :

$$\begin{aligned} -G \left( \frac{M_1}{R_1} \right) &= -G(M_1 + M_2) \frac{1 - \mu}{R_1} = -D^3 \omega^2 \frac{1 - \mu}{R_1} \\ -G \left( \frac{M_2}{R_2} \right) &= -G(M_1 + M_2) \frac{\mu}{R_1} = -D^3 \omega^2 \frac{\mu}{R_2} \end{aligned}$$

On réécrit alors :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \omega p_x y - p_y x \omega - D^3 \omega^2 \left( \frac{1 - \mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \right)$$

## 6 Équations du mouvement

On peut désormais dériver les équations du mouvement de notre planète en utilisant les équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = p_x + \omega y \\ \dot{y} = p_y - \omega x \\ \dot{p}_x = p_y \omega - D^3 \omega^2 \left( \frac{(x+\mu)(1-\mu)}{R_1^3} + \frac{(x+\mu-1)}{R_2^3} \right) \\ \dot{p}_y = -p_x \omega - D^3 \omega^2 \left( \frac{(1-\mu)y}{R_1^3} + \frac{\mu y}{R_2^3} \right) \end{array} \right.$$

## 7 Évolution Hamiltonienne

Notre corps aura donc une et une seule orbite entièrement déterminée sur l'espace des phases pour une condition initiale donnée . Celle ci sera déterminée par le champ de vecteur ou flot Hamiltonien défini en chaque point de la variété symplectique quadridimensionnelle formée par l'espace des phases. Le flot Hamiltonien est conservatif : l'énergie totale est conservée et chaque orbite se situe sur une couche d'énergie constante. Cette condition rajoute une contrainte et notre mouvement a lieu sur une couche tridimensionnelle. On peut alors réduire notre étude à celle du mouvement dans l'espace des phases réduit  $(x, y, p_x)$ .

## 8 Orbites des planètes

On crée alors un programme déterminant la trajectoire de notre corps dans l'espace des phases réduit. On se place dans les conditions précises  $\omega = D = 1$  afin de simplifier au maximum nos équations du mouvement et afin que  $\mu$  soit notre seul paramètre tel que  $\mu \in [0, 1]$  On trace d'abord une trajectoire à un seul astre ( $\mu = 0$  ou  $1$ ) pour tester notre programme et nos équations du mouvement.

On retrouve bien une ellipse caractéristique d'un mouvement keplerien à deux corps avec  $p_x$  maximum au périhélie suivant la loi des aires :

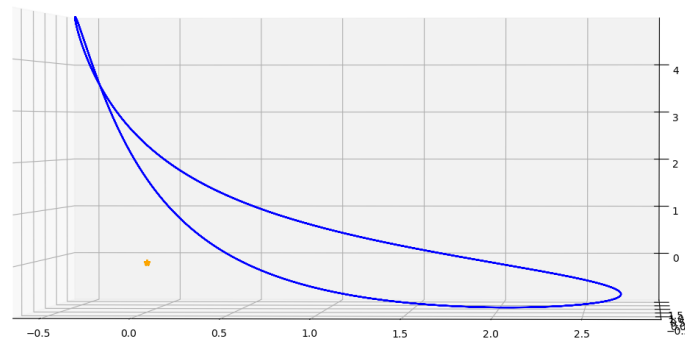


FIGURE 2 – Ellipse dans l'espace des phases

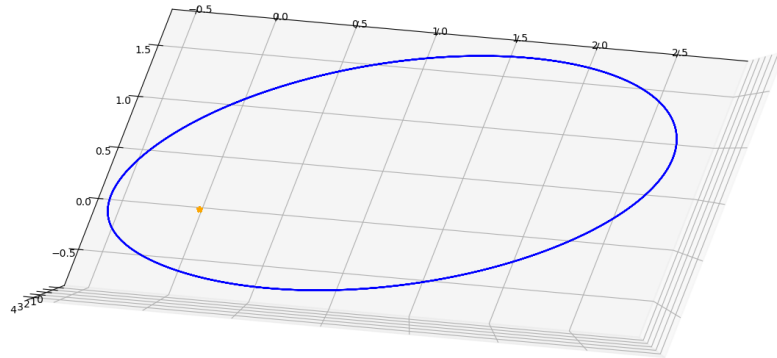


FIGURE 3 – Ellipse dans l'espace réel

Ainsi préparé, nous pouvons faire varier  $\mu$  entre 0 et 1 afin d'étudier le comportement de la planète dans le référentiel tournant. Notons qu'il suffit d'ajouter une rotation générale de la figure obtenue pour se placer dans le référentiel galiléen.

Quelque soit la valeur de  $\mu$ , on observe des mouvements caractéristiques suivant les conditions initiales.

Pour certaines valeurs initiales, proche de l'un des deux astres le mouvement se stabilise autour d'une des deux étoiles en suivant une trajectoire quasi-elliptique. L'attraction du second astre est alors quasi négligeable :

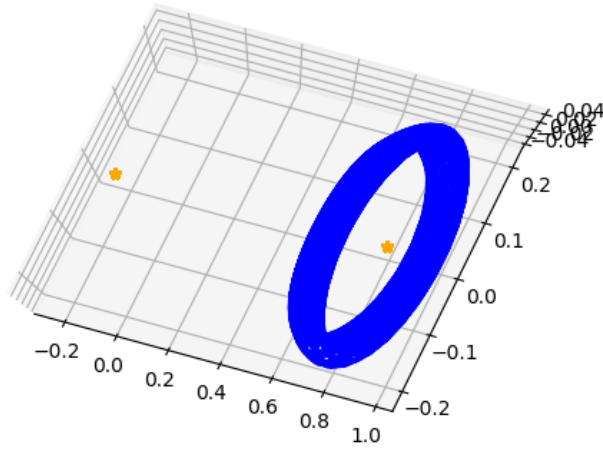


FIGURE 4 – Mouvement quasi elliptique

Pour d'autres conditions intermédiaires, la trajectoire devient complètement chaotique et échappe à toute prédiction. On devine d'ailleurs que certaines de ces trajectoires finissent par s'écraser sur un des astres . On notera que pour deux conditions initiales très proches le comportement est totalement différent. On met alors en évidence la sensibilité aux conditions initiales caractéristique des systèmes chaotiques.

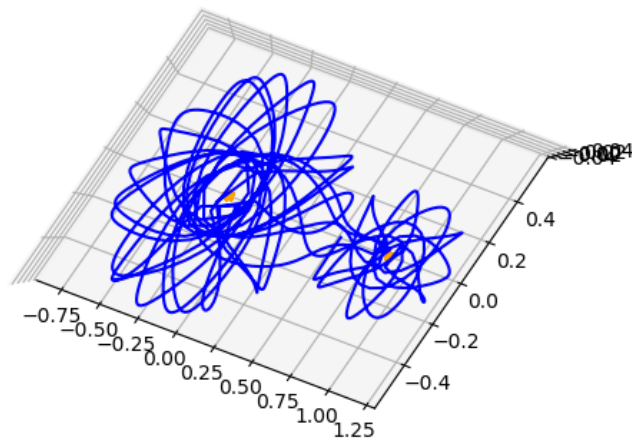


FIGURE 5 – Mouvement chaotique



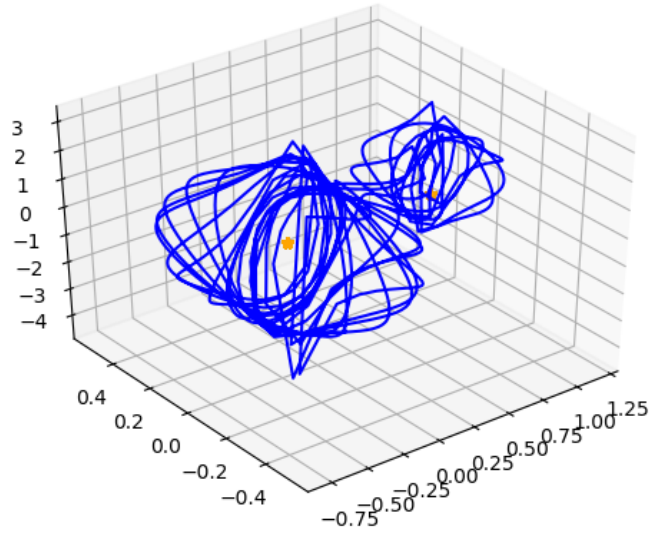


FIGURE 6 – Mouvement chaotique

La nature de la trajectoire peut complètement basculer d'un régime à un autre pour des petites variations. En effet, les figures 4 et 5 partent avec une différence  $\delta x = 0.01$ .

On notera également que l'influence du second astre peut entraîner une précession ou quasi-précession autour du premier. Ainsi que de nombreuses trajectoires oscillantes :

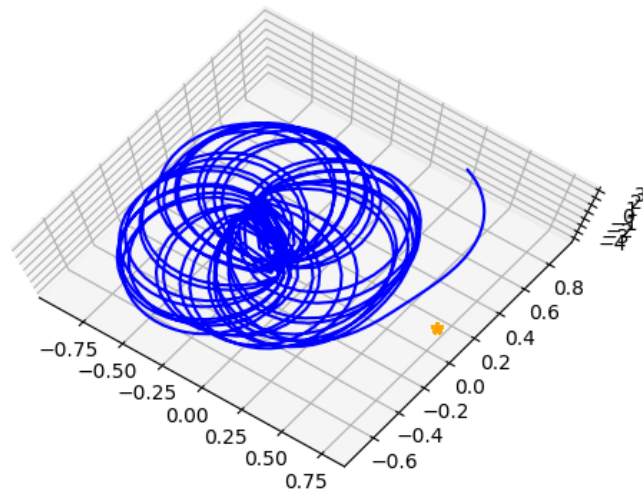


FIGURE 7 – Précession autour d'un astre

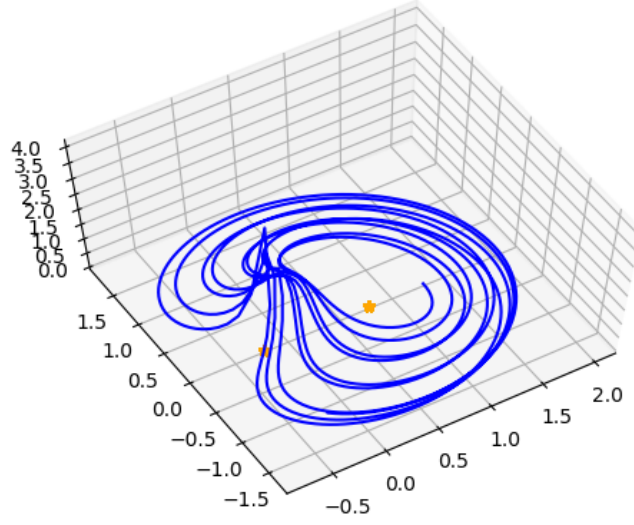


FIGURE 8 – Oscillations

## 9 Points de Lagrange

On cherche les points fixes de notre systèmes également appelés "points de Lagrange" en l'honneur de Joseph-Louis Lagrange. Ils sont aux nombres de cinq. On ne les présente plus en astronautique où on y place régulièrement des satellites lors des missions spatiales.

## 10 Positions et stabilité

On trouve la position de ces cinq points en résolvant l'équation aux points fixes de notre système dynamique i.e. en annulant nos équations du mouvement. En gardant  $D = \omega = 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x + y = 0 \\ p_y - x = 0 \\ p_y - \left( \frac{(x+\mu)(1-\mu)}{R_1^3} + \frac{(x+\mu-1)}{R_2^3} \right) = 0 \\ -p_x - \left( \frac{(1-\mu)y}{R_1^3} + \frac{\mu y}{R_2^3} \right) = 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \\ R_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2} \end{array} \right.$$

On commence par chercher les solutions en  $y = 0$ , on doit alors résoudre :

$$x = -\frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x+\mu-1)^2}$$

Par dichotomie [4] on peut obtenir les trois premiers points qui sont alignés dans l'axe des deux étoiles parfois appelés points d'Euler en l'honneur de Leonhard Euler :

$$L1 : (x_1, y_1) = \left(1 - \left(\frac{\mu^{1/3}}{3}\right) + o(\mu^{1/3}), 0\right)$$

$$L2 : (x_2, y_2) = \left(1 + \left(\frac{\mu^{1/3}}{3}\right) + o(\mu^{1/3}), 0\right)$$

$$L3 : (x_3, y_3) = \left(-1 - \left(\frac{5\mu}{12}\right) + o(\mu), 0\right)$$

Il n'y a pas de solutions en  $x = 0$ . On trouve deux autres solutions plus difficiles à obtenir. On peut utiliser le calcul symbolique pour les dériver ou les propriétés géométriques du système. En effet ils se trouvent au sommet de triangles équilatéraux de base G1G2 :

$$L4 : (x_4, y_4) = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$L5 : (x_5, y_5) = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Les corps placés en L4 et L5 sont appelés troyens. Les troyens les plus notables du système solaire sont les astéroïdes troyens du système soleil-Jupiter.

On peut alors dessiner ces cinq points :

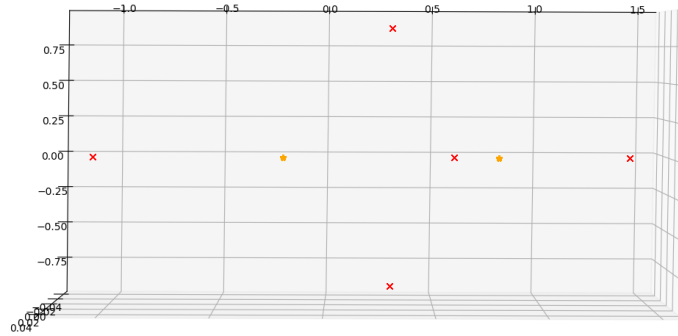


FIGURE 9 – Points de Lagrange

Il est amusant de noter que L3 a souvent été source d'inspiration pour la science fiction avec l'idée d'une "anti-terre" constamment cachée par le Soleil. La dérivation de la position des points de Lagrange est seulement valable pour un troisième corps de masse négligeable et L3 étant instable, l'existence d'un tel astre est cependant impossible.

La stabilité des points fixes s'étudie en analysant les valeurs propres de la Jacobienne du système d'équation en ces points. Un tel calcul n'est pas aisé dans notre cas. Une autre manière de faire consiste à étudier la trajectoire d'un point en  $(x_i + \delta x, y_i + \delta y)$ .

## 11 Tests

Du à leur instabilité, il est délicat de rester en L1 et L2. On peut cependant observer des trajectoires qui s'y maintiennent :

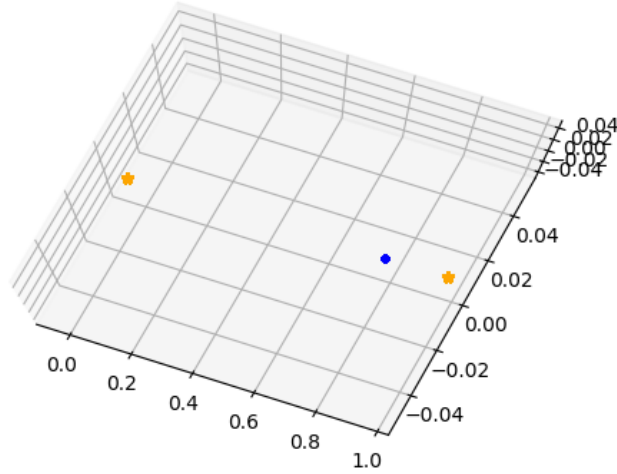


FIGURE 10 – L1

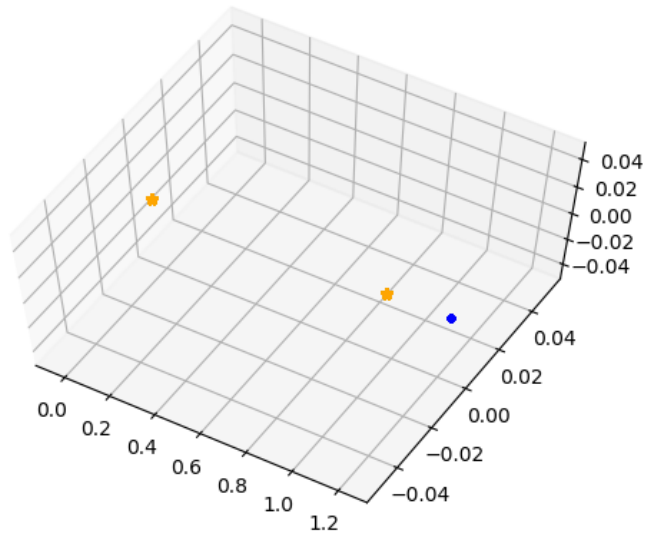


FIGURE 11 – L2

On remarque que près des points fixes la particule test a tendance à être éjectée du système d'étoiles duquel elle va progressivement s'éloigner en spirale dans le référentiel tournant, qui correspond à une ligne droite dans le référentiel galiléen :

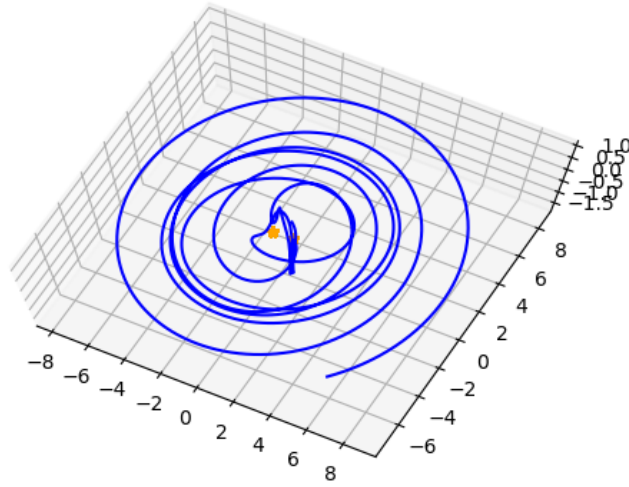


FIGURE 12 – près de L4

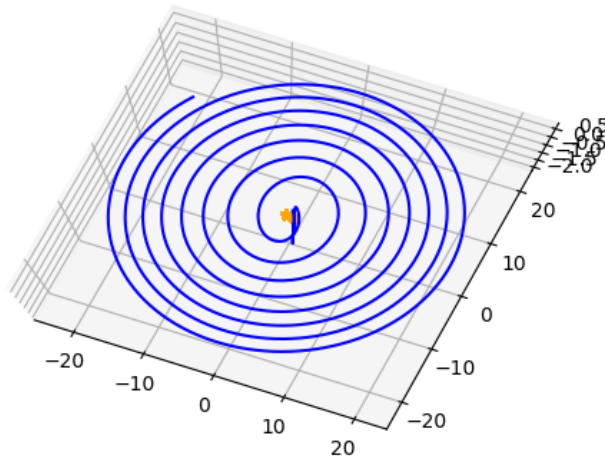


FIGURE 13 – éloignement en spirale

## 12 Section de Poincaré

On souhaite mettre en avant les propriétés chaotiques du système en traçant sa section de Poincaré. On pourra alors voir, pour différentes conditions initiales, l'apparition ou non du chaos. L'idée générale étant de réduire notre problème à deux dimensions en analysant les traversées du corps test d'une surface donnée de l'espace des phases.

On se fixe  $y = 0$ . On analysera alors le remplissage de la surface  $(x, p_x)$  pour différentes conditions initiales.

Les orbites périodiques traverseront cette surface en seulement deux points. Les trajectoires quasi-périodiques vont impacter la surface de manière régulière alors que les trajectoires chaotiques, elles, vont moucheter la surface de manière totalement imprévisible.

Pour réaliser la simulation numérique on utilise un code réalisant une section de Poincaré de l'attracteur de Lorentz (qui nous a été fourni au début du travail). On l'adapte à notre problème de trois corps restreints en rajoutant une condition initiale au programme ( $p_y$ , dépendante de l'énergie  $E$  et des autres conditions initiales  $x, y, e, p_x$ ). Malheureusement, ce programme ne nous permet d'afficher et de calculer la trajectoire que d'une condition initiale. Il est donc impossible de faire apparaître des comportements périodiques ou chaotiques.

Il serait possible d'utiliser d'autre code pour générer un grand nombre de conditions initiale sur tout l'espace mais la puissance de nos ordinateurs sont trop faibles pour de tels codes. Nous nous permettons alors de commenter une section de Poincaré sur ce sujet obtenue sur le site de M.FAURE.(Figure 14)

### 13 Théorie KAM, stabilité des orbites

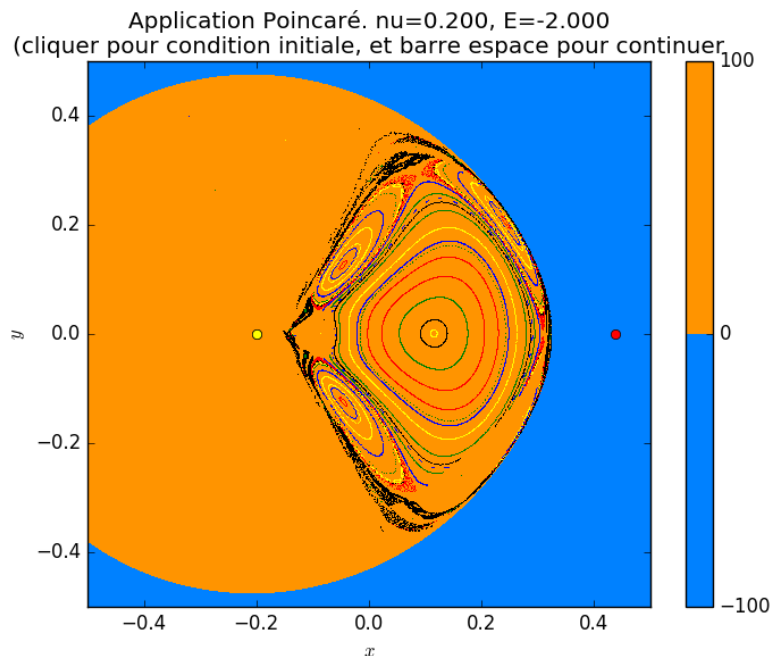


FIGURE 14 – Section de Poincaré

On voit se dessiner différentes zones. Les différents types de comportements du système sont regroupés dans des zones aux conditions initiales proches. Les zones circulaires correspondent aux orbites stables (périodiques et pseudo-périodiques) et les zones mouchetées de points disposés aléatoirement aux orbites chaotiques. On voit également les points de Lagrange décrits plus haut.

Le problème à trois corps restreint nous offre alors un exemple typique d'évolution chaotique Hamiltonienne. L'espace des phases est une variété munie d'une forme symplectique donnée par les équations canoniques de Hamilton. Ces systèmes obéissent au théorème Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) démontrant l'existence d'orbites pseudo-périodiques et ont des sections de Poincaré avec cette forme caractéristique.

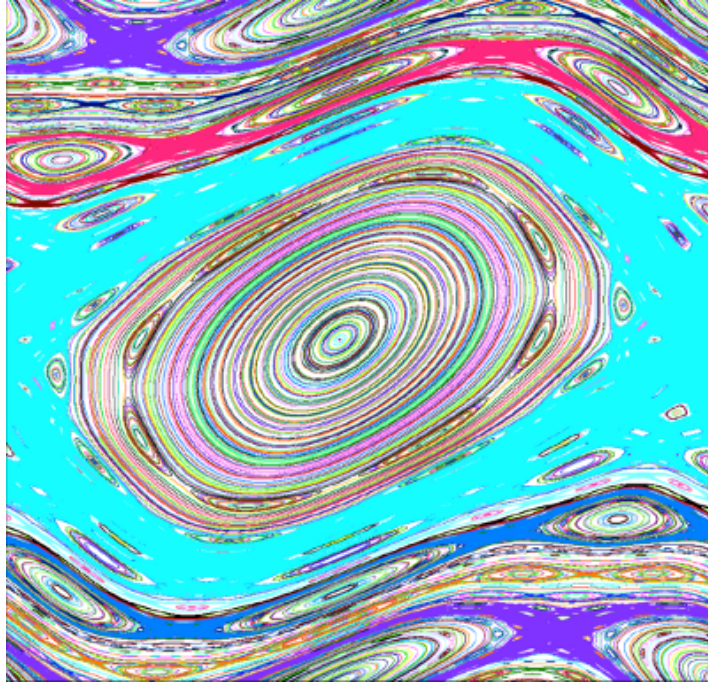


FIGURE 15 – Allure typique en géométrie symplectique

## 14 Annexes

### 14.1 bibliographie et webographie

1. Histoire des sciences :

<https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mai13/06-Poincare.pdf>

2. Résolution analytique :

[https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/enseignement/projets\\_simulation/rapport\\_3\\_corps\\_restreint.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/enseignement/projets_simulation/rapport_3_corps_restreint.pdf)

3. compléments :

Autour du problème des trois corps  
Benjamin Renaud

4. Points de Lagrange :

[http://www.astrosurf.com/rondi/3c/etude.htm?fbclid=IwAR0In56ivN\\_eWIbanVRvmjFBpJ6OaVzzZzzq\\_NkBRArQzQdO7cfjqGSDsPY](http://www.astrosurf.com/rondi/3c/etude.htm?fbclid=IwAR0In56ivN_eWIbanVRvmjFBpJ6OaVzzZzzq_NkBRArQzQdO7cfjqGSDsPY)

5. codage en python :

Frédéric Faure - TP systèmes dynamique attracteur de Lorenz et Problème à trois corps restreints.

<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/>

6. Théorie KAM :

<https://mathinstitutes.org/highlights/symplectic-dynamics/>