💻 Chap 12 · Graphes

Prise de note par Léo BERNARD en MP2I au Lycée du Parc.
Année 2022-2023

Adapté du poly de M. Rebout :
http://informatique.rebout.fr/MP2I/Cours/12_Introduction_aux_graphes.pdf

---

I. Motivations à travers des exemples classiques

Les **graphes** sont des dessins fondamentalement très simples (des points que l'on peut relier par des traits), mais qui offrent une puissance de modélisation très importante, pour toute sorte de problème scientifique, et sur lesquels des études très fines peuvent être menées.

Intuitivement, un **graphe** est un ensemble d'objets (les **sommets**) dont certains sont reliés deux à deux (les **arcs** ou **arêtes**). Les graphes vont permettre de modéliser un grand nombre de situtations. Voici quelques exemples de problèmes apparaissant dans l'étude des graphes.

1.1. L'exemple historique : les ponts de Kœnigsberg

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la théorie des graphes (et de la topologie). Résolu (mais surtout théorisé) par Leonhard Euler en 1736, ce problème mathématique se présente de la façon suivante :

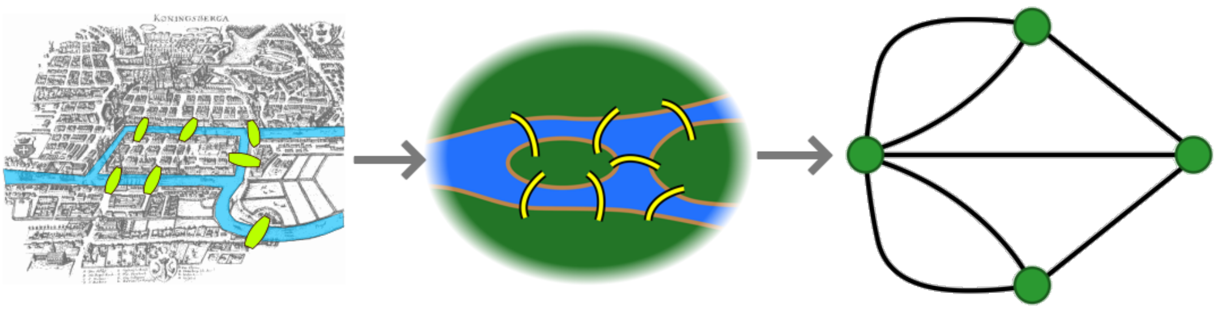


Figure 12.1 – Du plan de la ville à la modélisation (source Wikipedia)

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

De manière générale, un graphe qui possède un tel circuit s'appelle aujourd'hui un **graphe eulérien** (ou **semi-eulérien** si le chemin ne revient pas au point de départ)

👉 **Remarque :** Un problème voisin est de savoir si l'on peut trouver un chemin qui passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe; on parle alors de **graphe hamiltonien**.

1.2. Déplacement en métro

Un réseau de métro se modélise naturellement par un graphe.

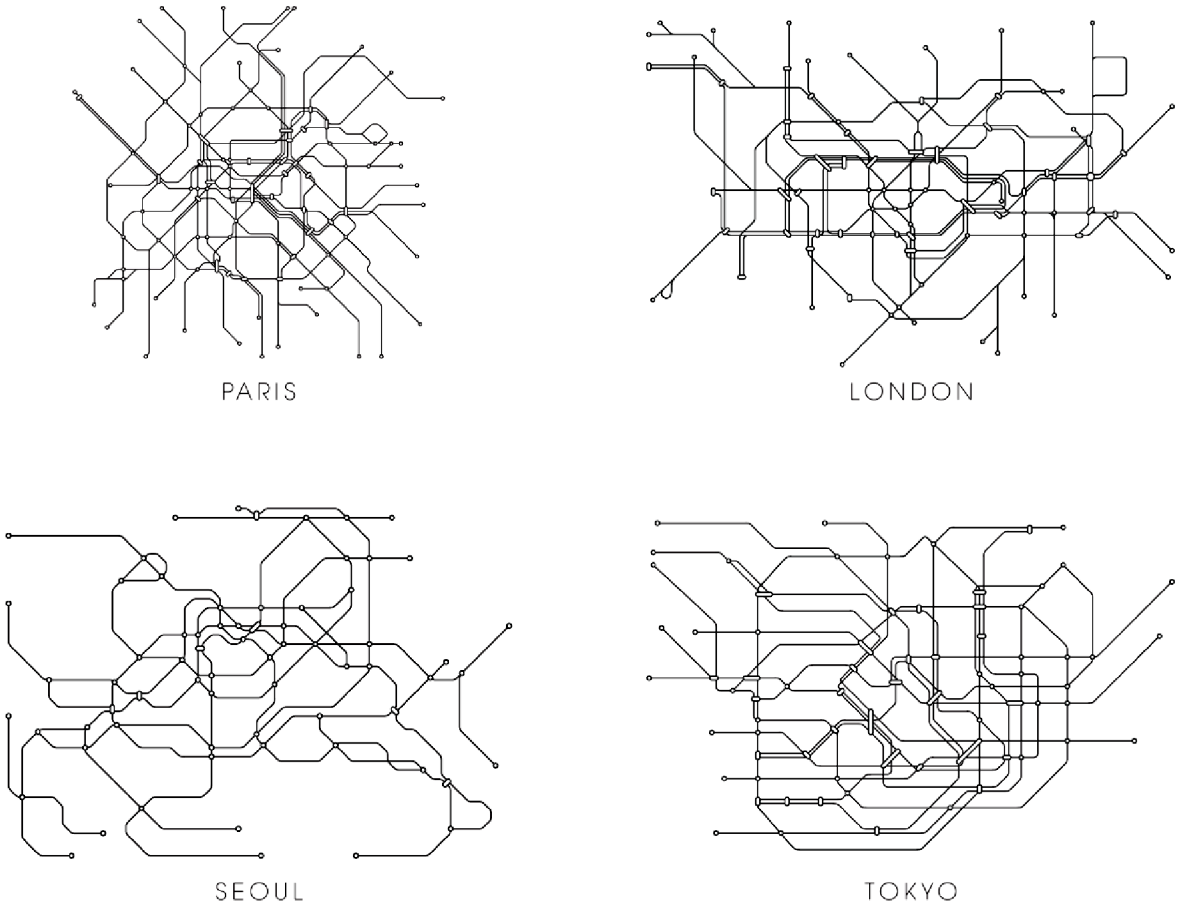
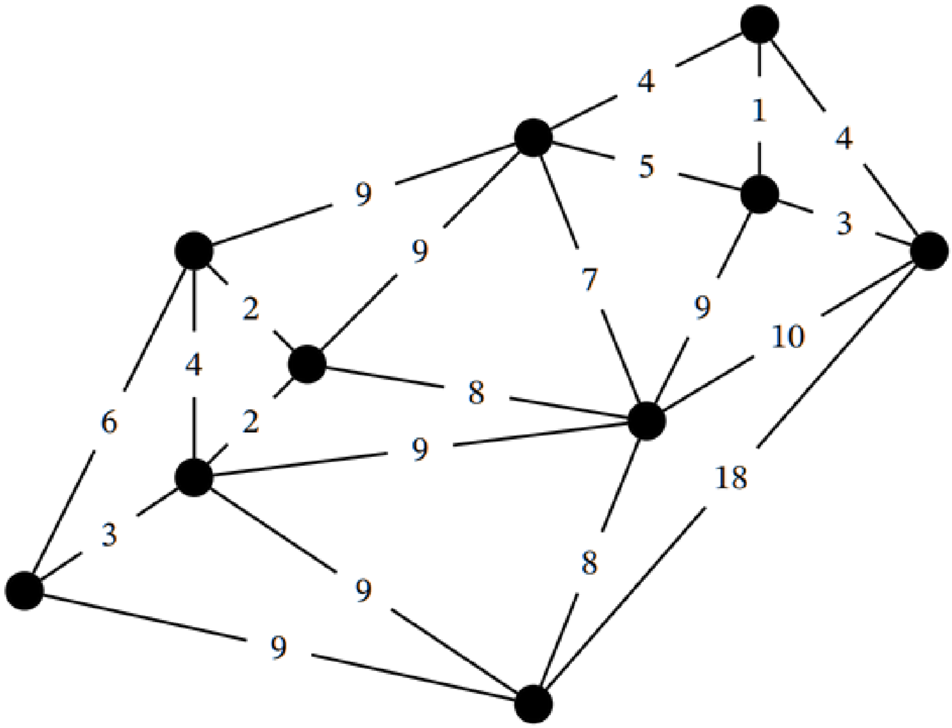


Figure 12.2 – Plans simplifiés du réseau de métro de grandes villes (source iLikeMaps)

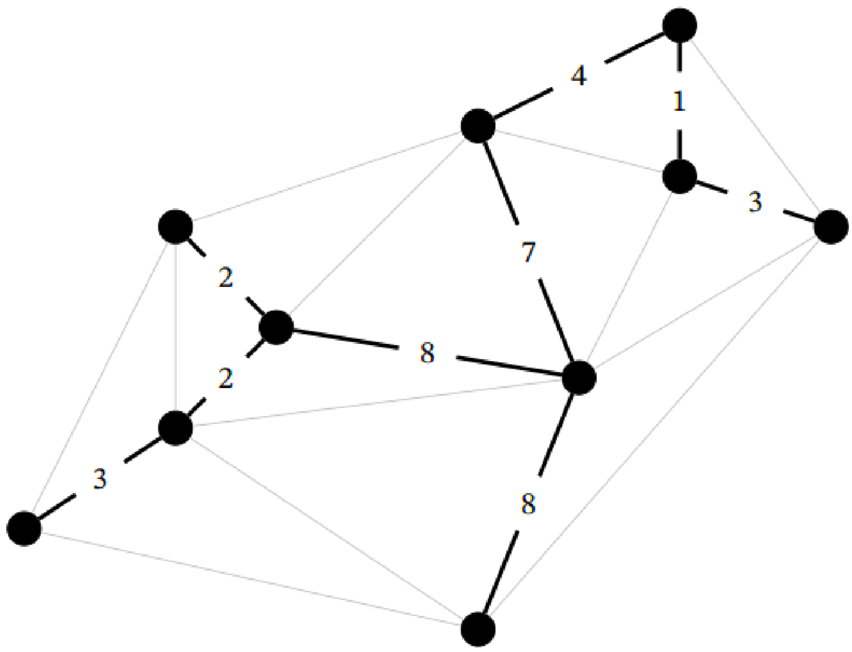
La modélisation complète du réseau comporterait des informations supplémentaires, par exemple, le temps de parcours entre chaque station (on peut penser à d'autres informations comme l'heure du dernier métro…). Une question naturelle que l'on se pose lorsqu'on visite une ville inconnue est : si je suis à la station A et je veux me rendre à la station B, quel chemin dois-je suivre pour y arriver le plus rapidement possible ?

1.3. Construction d'un réseau à moindre frais

On souhaite construire un réseau, par exemple électrique, entre différents points. Une étude préalable indique quels points on peut relier entre eux, et à quel coût :



Pour minimiser la réalisation du réseau, on cherche sur le *graphe un arbre couvrant de poids minimal*, c'est-à-dire un sous-graphe *connexe*, *acyclique* et qui connecte tous les sommets ensemble dont la somme du poids des arêtes est minimale.

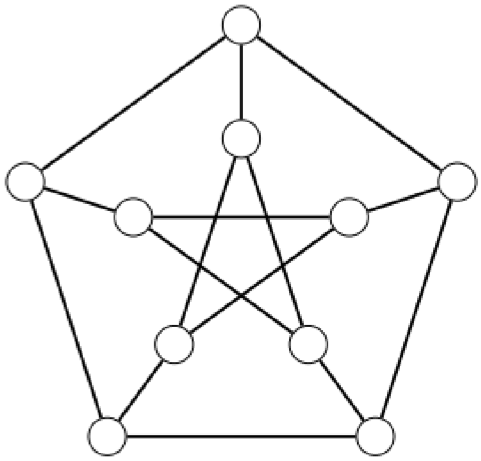
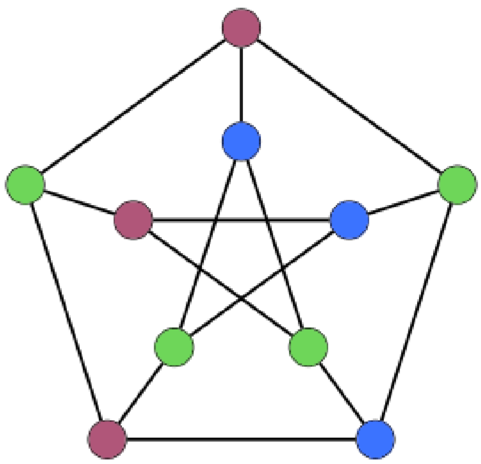


1.4. Attribution de fréquences

Certains réseaux de télécommunication sont composés d'émetteurs émettant chacun sur une fréquence particulière. Lorsque deux émetteurs sont trop proches on ne peut leur allouer la même fréquence à cause des interférences.

On associe un graphe au réseau – chaque sommet est un émetteur et chaque arête spécifie que l'on ne veut pas allouer la même fréquence aux deux émetteurs correspondant à ses deux extrémités—et ainsi déterminer une allocation réalisable avec un minimum de fréquences (dont la licence d'exploitation peut entrainer un coût important).

La coloration de graphe consiste à attribuer une « couleur » à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente. On cherche principalement à utiliser le nombre minimal de couleurs, appelé *nombre chromatique*.

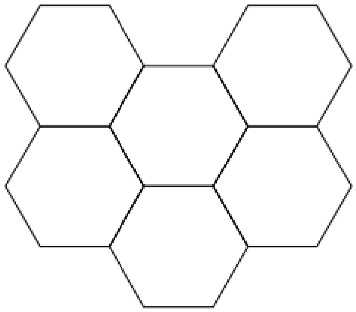
> **Exercice :** Colorier le graphe suivant avec le minimum de couleur.
>
> 
>
> 

Intuitivement, un **graphe** est un ensemble d'objets (les **sommets**) dont certains sont reliés deux à deux (les **arcs** ou **arêtes**). Les graphes vont permettre de modéliser un grand nombre de situtations.

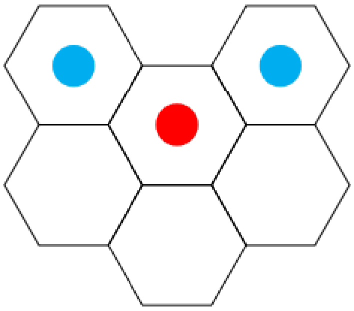
Le jeu de l'ourson est un jeu très simple qui se joue sur le plateau suivant :

1.5. Stratégie gagnante dans un jeu

Le jeu de l'ourson est un jeu très simple qui se joue sur le plateau suivant :



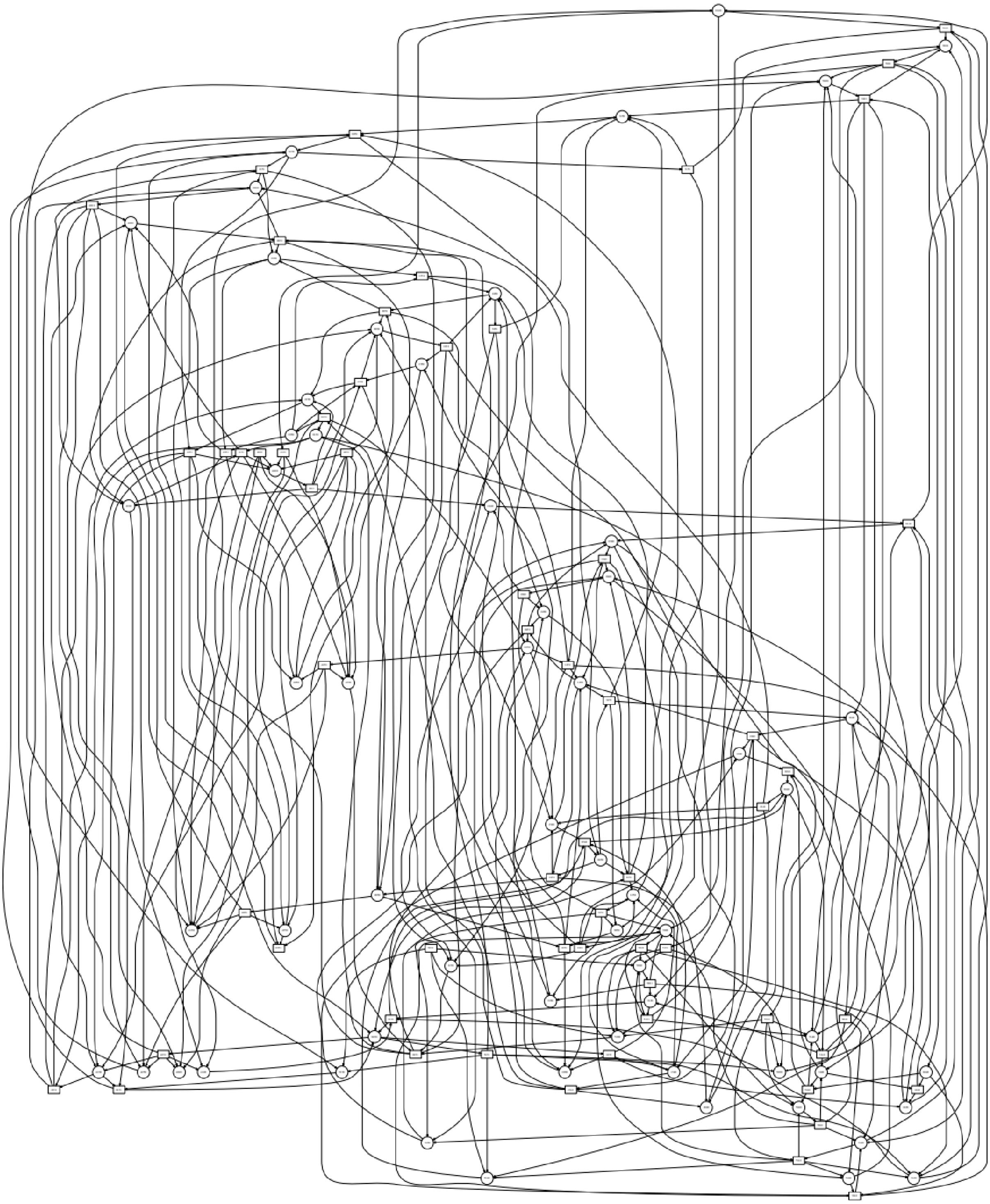
L’un des joueurs (l’*ourson*) dispose d’un pion de couleur rouge et l’autre (les *chiots*) dispose de deux pions bleus indiscernables l’un de l’autre. Au début du jeu, les pions sont disposés ainsi :



Quand c’est au tour des chiots de jouer, ils bougent un seul des pions bleus sur une case adjacente libre. Quand c’est à l’ourson de jouer, il bouge son unique pion sur une case adjacente libre… s’il le peut! En effet le but du jeu pour les chiots est de bloquer l’ourson dans un coin.

Dès que l’ourson est bloqué, les chiots ont gagné. Si au bout de seize mouvements l’ourson n’est toujours pas bloqué, il a gagné. C’est l’ourson qui commence.

En y jouant, on sent vite que les chiots ont un avantage certain sur l’ourson. Peut-on prouver qu’il y a toujours une statégie gagnante pour les chiots ? Pour cela, on peut modéliser toutes les positions possibles dans le jeu par un graphe et raisonner sur celui-ci :



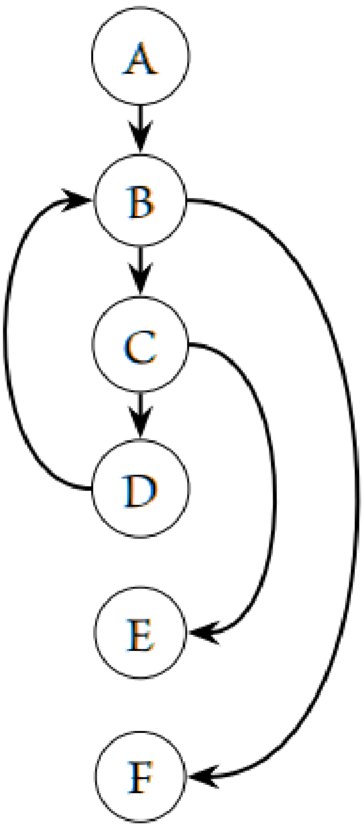
Le graphe des positions du jeu de l'ourson, assimilable à un plat de spaghetti.

1.6. Compilation

Les graphes jouent un rôle central dans la compilation. Les deux graphes les plus importants dans ce contexte sont :

- le *graphe d'appels* (*call graph* en anglais) qui a un sommet pour chaque fonction et un arc de f vers g si f contient un appel à g;
- le *graphe de flot de contrôle* (ou *control flow graph*) qui a un sommet pour chaque bloc de base et un arc de A vers B si l'on peut a priori exécuter B immédiatement après A. Un

bloc de base est une suite d'instructions consécutives ne contenant ni saut ni cible de saut.



(a) un graphe de flot de controle

```
1:  (A)   s := 0
2:  (A)   i := 0
3:  (B)   if i >= len(t) then GOTO 9
4:  (C)   s := s + t[i]
5:  (C)   if s > 10 then GOTO 8
6:  (D)   i := i + 1
7:  (D)   GOTO 3
8:  (E)   return 100
9:  (F)   s := s * s
10: (F)   return s
```

(b) un code en pseudo-assembleur associé

II. Définitions formelles

2.1. Graphes non orientés

Définition : Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arêtes**[1].

Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire (non ordonnée) de sommets distincts, appelés les extrémités de e. Si l'arête $e = \{a, b\}$, on dira que les sommets a et b sont **adjacents** et on notera $e = ab (= ba)$.

👉 Remarques :

- une paire est un ensemble à exactement deux éléments : il n'y a donc jamais d'arête reliant x à lui-même (en fait, il nous arrivera d'autoriser de telles arêtes, appelées **boucles**, mais ce sera précisé explicitement);

- dans le même ordre d'idée, une arête e ne peut apparaître qu'une seule fois dans E (puisque E est un ensemble). On ne peut donc pas modéliser ainsi les problèmes des ponts de Kœnigsberg. On peut néanmoins élargir la définition avec un multi-ensemble pour E, on parle alors de *multi-graphe*;

- rien n'empêche de travailler théoriquement avec des graphes infinis, pour autant on travaillera principalement avec un ensemble fini de sommets. Dans ce cas, on a l'inégalité suivante :

$$|E| \leqslant \binom{|V|}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$$

  On garde bien en mémoire que le nombre d'arêtes est de l'ordre de $|V|^2$ dans le pire des cas...

📖 Vocabulaire

- on appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets $n = |V|$ de ce graphe,
- le **degré d'un sommet** v est le nombre de sommets qui lui sont adjacents, noté $\mathrm{d}(v)$,
- le **degré d'un graphe** est le degré maximum de tous ses sommets.

👉 Remarque : Le degré d'un graphe G est aussi appelé **degré maximal** de G. On définit de manière naturelle les notions de **degré minimal** et **degré moyen** de G.

💡 Proposition : Soit $G = (V, E)$ un *graphe non orienté*. Alors,

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2|E|$$

📚 Exercice :

Montrer qu'un graphe a forcément un nombre pair de sommets de degré impair.

$$2|E| = \sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ pair}}} \mathrm{d}(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ impair}}} \mathrm{d}(v)$$

On passe modulo 2 :

$$\sum_{\substack{v\in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ pair}}} \mathrm{d}(v) + \sum_{\substack{v\in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ impair}}} \mathrm{d}(v) \equiv 0 \mod 2$$
$$\sum_{\substack{v\in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ pair}}} 0 + \sum_{\substack{v\in V \\ \mathrm{d}(v) \text{ impair}}} 1 \equiv 0 \mod 2$$

Or

$$|\{v \in V | \mathrm{d}(s) \text{ impair}\}| \equiv 0 \mod 2$$

Donc le nombre de sommets de degré impair est pair.

2.2. Graphes orientés

On obtient un graphe orienté en ajoutant une flèche sur les arêtes d'un graphe, c'est-à-dire en distinguant l'origine et l'extrémité des arêtes.

📜 **Définition :** Un **graphe orienté** *(en anglais, directed graph)* $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arcs**.

Un arc e de l'ensemble E est défini par un couple (ordonné donc) de sommets distincts. Si l'arête $e = (a, b)$, on dira que le sommet a est l'origine de l'arc et b son extrémité. On notera encore $e = ab$ ou $e = a \to b$, mais on prendra bien garde qu'ici $ab \neq ba$.

👉 **Remarques :**

- on peut toujours obtenir un graphe non orienté à partir d'un graphe orienté en « oubliant » l'orientation des arcs;
- si le graphe est fini, alors on a l'inégalité :

$$|E| \leqslant |V|(|V| - 1)$$

  Ici encore, c'est de l'ordre de $|V|^2$ dans le pire des cas.

📖 **Vocabulaire**

- on appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe,
- le **degré sortant** d'un sommet a, noté $\mathrm{d}^+(a)$, est le nombre d'arcs de la forme (a, b),
- le **degré entrant** d'un sommet a, noté $\mathrm{d}^-(a)$, est le nombre d'arcs de la forme (b, a),
- si $ab \in E$, on dit que b est un **successeur** de a et que a est un prédecesseur de b.

💡 **Proposition :** Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Alors,

$$\sum_{v\in V} (\mathrm{d}^+(v) + \mathrm{d}^-(v)) = 2|E|.$$

2.3. Pondérer un graphe

📜 <u>**Définition :**</u> Pondérer un graphe $G = (V, E)$ (orienté ou non), c'est rajouter à sa définition une fonction p définie sur l'ensemble E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $e \in E$, $p(e)$ s'appelle le <u>**poids**</u> de l'arête.

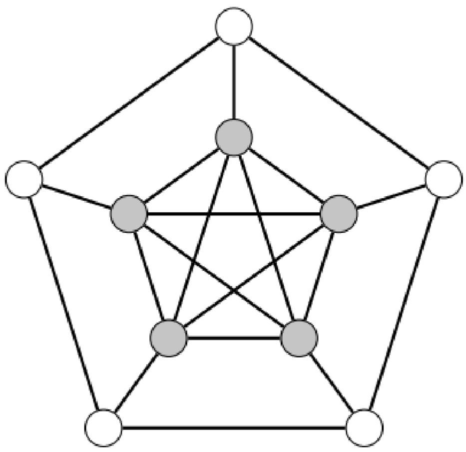
👉 <u>Remarque :</u> Comme vu dans l'introduction, l'exemple classique de pondération est celui d'un reséau de transport, où le poids de chaque arête peut représenter une distance (ou un temps de parcours) entre deux points du réseau. Le poids est alors toujours positif.

2.4. Sous-graphes

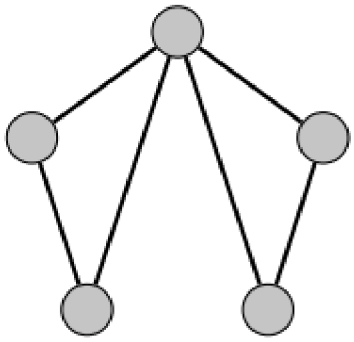
📜 <u>**Définition :**</u> Soit $G = (V, E)$ un graphe (orienté ou non).

- Un <u>**sous-graphe**</u> de G est un graphe $G' = (V', E')$ tel que :
  - $V' \subset V$,
  - $E' \subset E$ (plus précisément, E' doit être inclus dans l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de V', sinon ce que l'on obtient n'est pas un graphe);
- Un <u>**sous-graphe induit**</u> de G est un sous-graphe $G' = (V', E')$ de G tel que E' soit exactement
  l'ensemble des arêtes de G reliant deux sommets de V'.

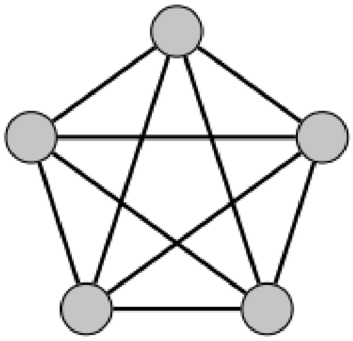
👉 <u>Remarque :</u> Si $G = (E, V)$ un graphe. Étant donné un sous-ensemble E' de E, on peut construire plusieurs sous-graphe de G à partir de ce sous-ensemble de sommets, mais un unique sous-graphe induit.



(a) le graphe initial, en grisé le sous-ensemble de sommets que l'on conserve



(b) un sous-graphe



(c) le sous-graphe induit

Exercice

On considère un graphe G non orienté à n sommets.

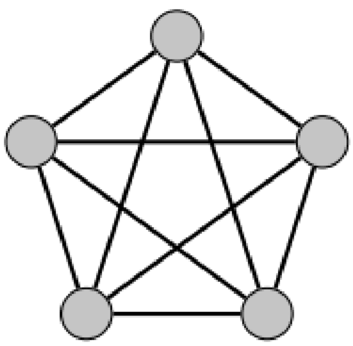
1. Combien G admet-il de sous-graphes induits ?
2. Donner un encadrement le plus précis possible du nombre de sous-graphes de G.

1 - Choisir un sous graphe induit revient à choisir un sous-ensemble de V : 2^n possibilités.

2 -

$$2^{10} \leqslant N \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{\binom{i}{2}}$$

1e inégalité : borne atteinte pour un graph déconnecté à n sommets.
2e inégalité : atteinte pour le graphe complet



i sommets

$\frac{i(i-1)}{2} = \binom{i}{2}$ arêtes

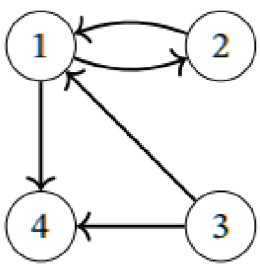
2.5. Matrice d'adjacence

📜 <u>Définition :</u> Soit $G = (V, E)$ un graphe. Étant donnée une numérotation fixée $x_1, \ldots, x_n$ des sommets, la <u>**matrice d'adjacence**</u> $M = (m_{i,j})$ de G est la matrice $n \times n$ définie par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a une arête entre les sommets } x_i \text{ et } x_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

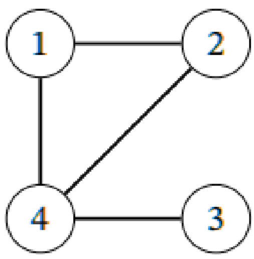
👉 <u>Remarques :</u>

- Si le graphe est orienté, la convention est de mettre un 1 en $m_{i,j}$ s'il y a un arc de x_i vers x_j.
- Le graphe est non orienté si et seulement si la matrice est symétrique.
- Si l'on s'interdit les arêtes bouclant sur un sommet, il n'y a que des zéros sur la diagonale.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 12.5 – Un exemple da matrice d'adjacence pour un graphe orienté.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 12.6 – Un exemple de matrice d'adjacence pour un graphe non orienté

2.6. Graphes isomorphes

📜 <u>Définition : Isomorphisme de graphes</u>

Un <u>isomorphisme</u> entre deux graphes non orientés $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est une bijection $\varphi : V \to V'$ telle que

$$\forall x, y \in V, \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E' \iff \{x, y\} \in E$$

Deux graphes non orientés sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre eux.

👉 **Remarques**

- La définition s'adapte immédiatement au cas des graphes orientés :

$$(\varphi(x), \varphi(y)) \in E' \iff (x, y) \in E.$$

- Essentiellement, deux graphes sont isomorphes s'ils ne diffèrent que par les noms de leurs sommets.
- Comme souvent en mathématiques, onfait généralement comme si deux graphes isomorphes étaient tout simplement *égaux*. Ainsi, la plupart des graphes dessinés depuis le début de ce chapitre l'ont été avec des sommets non étiquetés : cela revient à les considérer *à isomorphisme près*.

📚 **Exemple**

L'application qui envoie le sommet 1 du graphe de gauche sur le sommet a du graphe de droite, 2 sur b, ... est un isomorphisme.

Figure 12.7 – Deux graphes isomorphes.

📚 **Exercice**

1. Montrer que le G_1 est isomorphe à G_2 mais pas à G_3. On pourra s'intéresser à l'image du sommet 3.

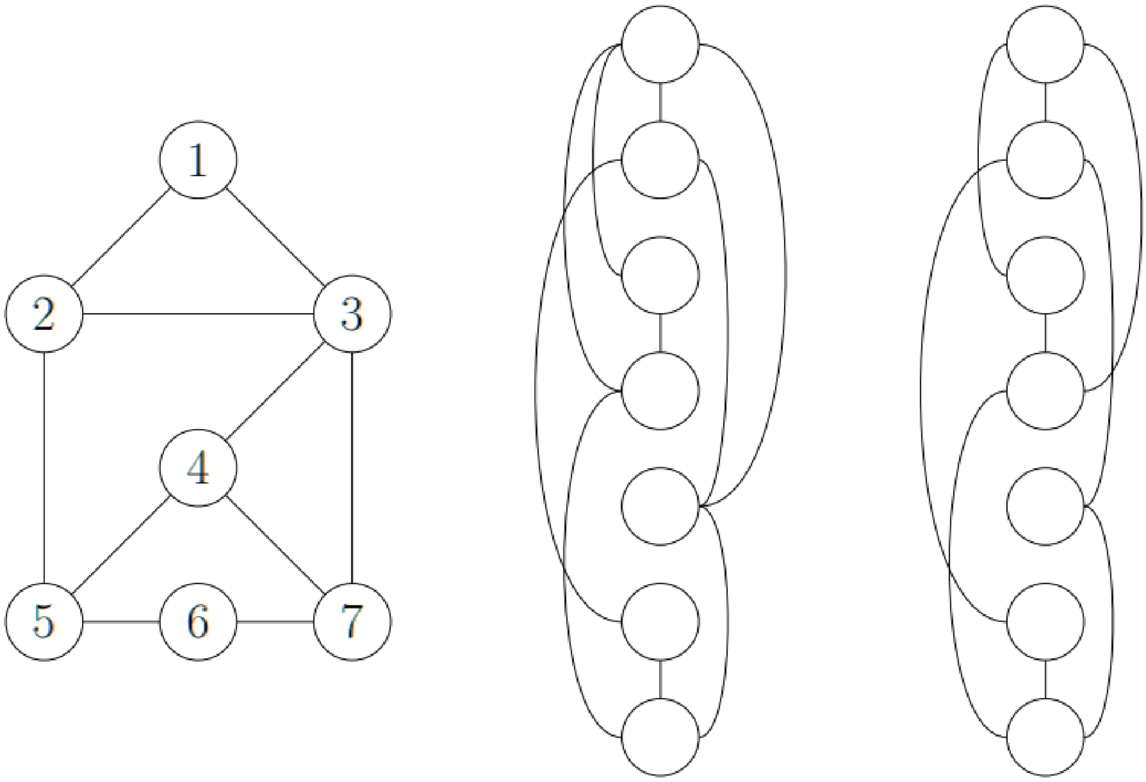


Figure 12.8 – Les graphes G_1, G_2 et G_3

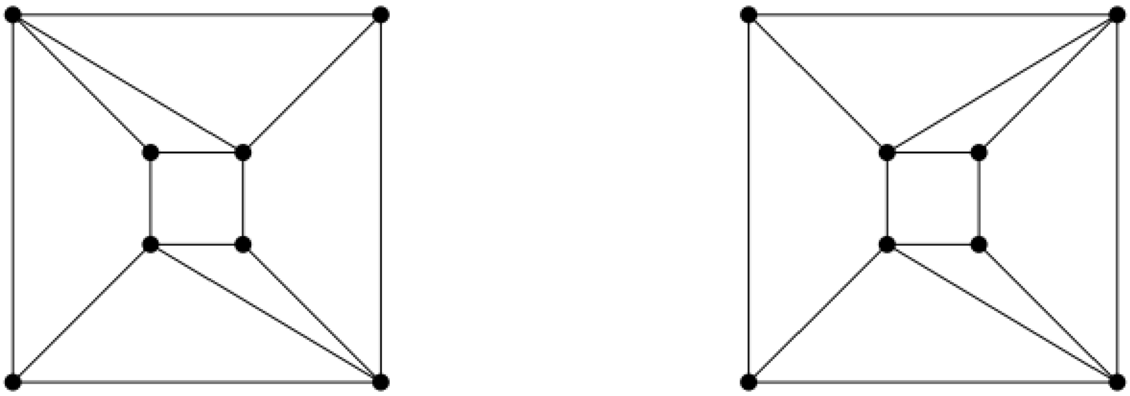
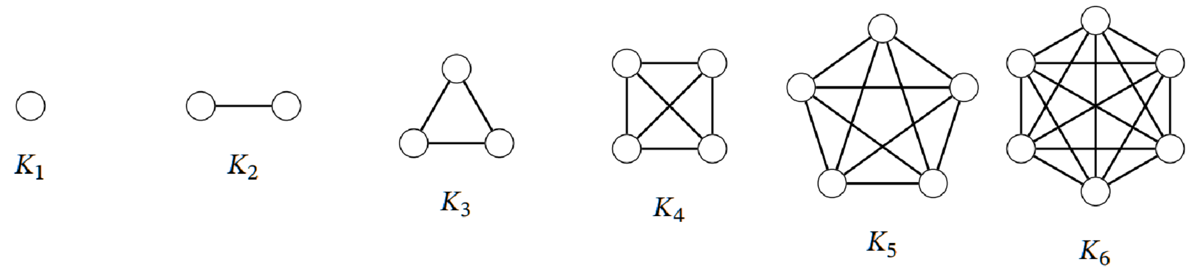


Figure 12.9 – Les graphes H_1 et H_2.

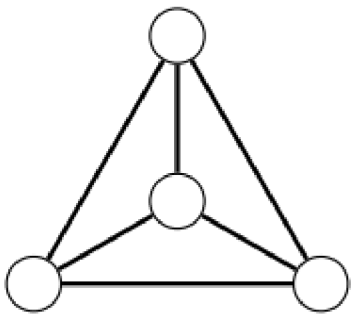
III. Quelques exemples très classiques

Voici quelques exemples très classiques de graphes :

- le **graphe entièrement déconnecté** à n sommets est défini avec $V = \varnothing$;
- le **graphe complet** K_n possède n sommets et une arête entre chaque paire de sommets :

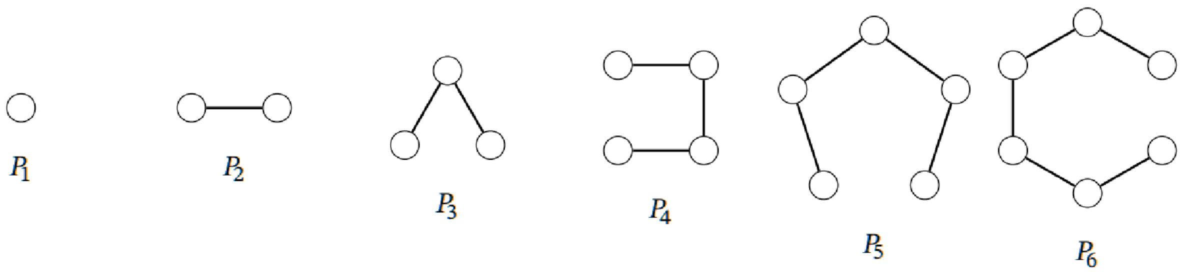


Il est possible de tracer K_4 sans que les arêtes se croisent, mais c'est impossible à partir de K_5 :

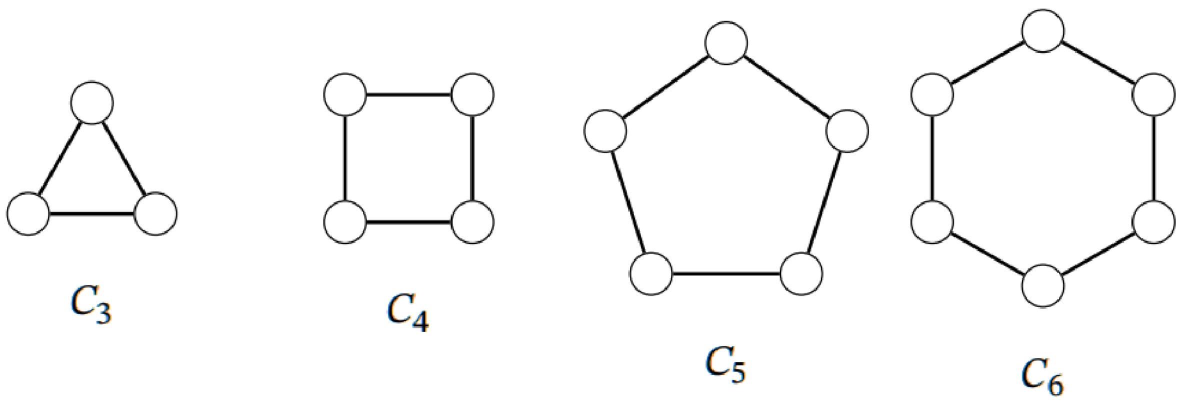


Version planaire de K_4

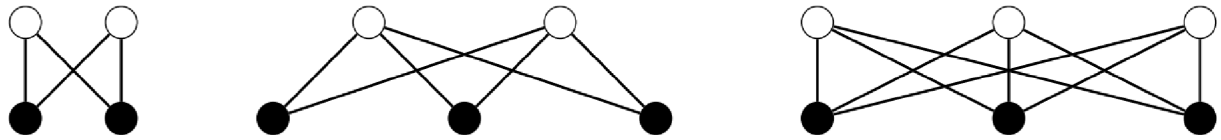
- Le **graphe chemin** P_n possède n sommets numérotés de 0 à $n-1$ et une arête entre i et j si, et seulement si, $j = i + 1$:



- Le **graphe cycle** C_n (avec $n \geqslant 3$) possède n sommets numérotés de 0 à $n-1$ et une arête entre i et j si, et seulement si, $i \equiv j \mod n$:

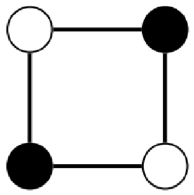


- Le **graphe biparti complet** $K_{n,p}$ possède $n+p$ sommets séparés en deux catégories (disons les noirs "●" et les blancs "○"), l'une de cardinal n et l'autre de cardinal p; et une arête entre chacun des sommets noirs et chacun des sommets blancs :

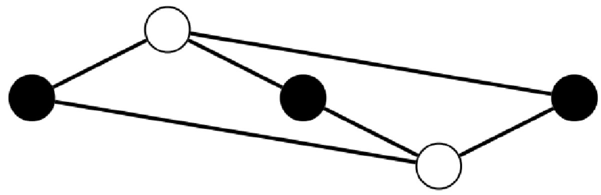


$K_{2,2}$ $K_{3,2}$ $K_{3,3}$

On remarquera qu'il est possible de tracer $K_{2,2}$ et $K_{3,2}$ sans que les arêtes se croisent, mais c'est impossible à partir de i et j supérieurs ou égaux à trois :



Version planaire de $K_{2,2}$



Version planaire de $K_{3,2}$

---

1. en anglais, on parle de *undirected graph*, de *vertex* (pluriel : *vertices*) et de *edge*. ↩