1 课题研究以及研究的目的和意义

1.1 课题背景

在1967年，Langlands写给了Weil17封信件，在这些信件中首次简要的阐释了Langlands纲领的想法。也正是这些信件的探讨的深刻深刻想法为数论学家，代数学家，甚至几何学家等等众多领域的研究者提供了宏伟的研究纲领 [Ref. 1]。通过下图简要的解释一下Langlands纲领和该课题研究的内容。L函数是通过Euler乘积下的Dirichlet级数来研究素数密度问题，L函

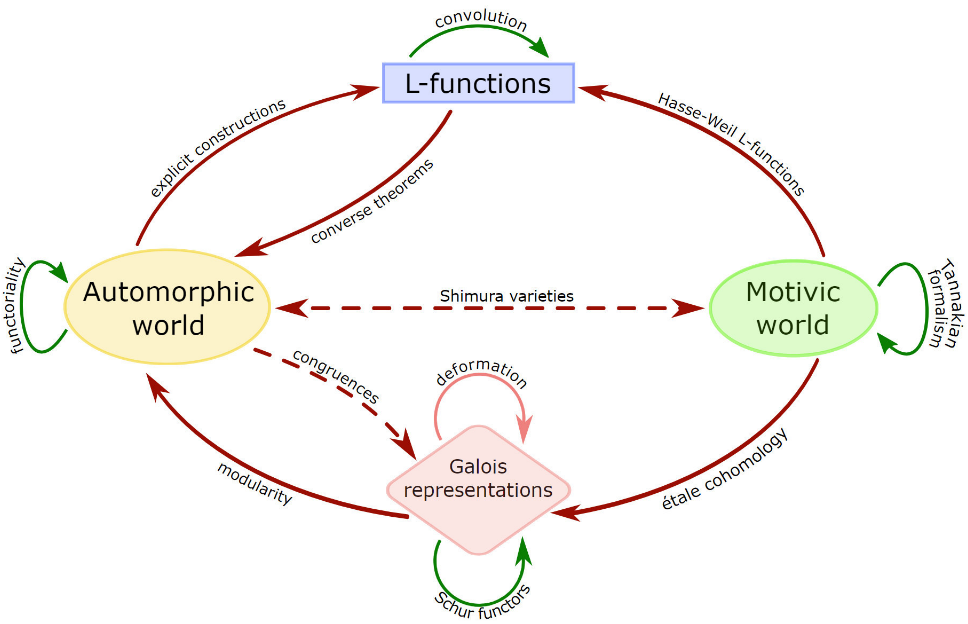

图 1: Langlands纲领简要

数是著名的黎曼 ζ 函数推广;自守形式世界是赋值向量环(adéle) $G(\mathbb{A}(F))$ 在自守形式空间上的表示。在经典模形式理论会构造很多自守表示，比如Siegel形式和Maass形式；Motivic世界是指Motives是概形的上同调的和，通过他们构造绝对Motivic Galois群表示的范畴；Galois表示即为全局域上Galois群的连续表示，比如 l -adic Galois表示。

1.2 研究目的和意义

主要考虑三种情况，E 是一个非Archimedian局部域，或者 $E=\mathbb{F}_q(t)$，或者 E 为 $\mathbb{Q}_q$ 的有限扩张。约定记号 $\mathbb{F}_q$ 是一个剩余域，$n\in\mathcal{O}_E$ 是uniformizer，记 G/E 是对应的约化群，对于本课题中，更加关注局部射有限群的表示，比如当 $G=GL_n$。

定义 1 Γ 是一个局部射有限群，L 是一个域，可以定义 Γ 光滑表示为一个定义在域 L 上的线

性和映射 $\Gamma \to GL(V)$，则对于任意 $v \in V$，其稳定化子$\mathrm{Stab}(v) \subset \Gamma$ 是一个开子群。

在一定程度上，对于 $G(E)$ 的光滑表示的范畴的研究在局部意义上是相似的。Langlands 猜想：对于 $L = \mathbb{C}$ 时，存在自然映射：

$$\mathrm{Irr}(G(E))/\sim \to \mathrm{Hom}(W_E, \tilde{G}(\mathbb{C}))/\tilde{G}(\mathbb{C}) \tag{1}$$

其中 $\tilde{G}$ 是 Langlands 对偶群，W_E 是对应 E 的 Weil 群。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}} \ni \mathrm{Frob} \\
W_E \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

根据Peter Scholze [Ref. 2]证明此猜想的关键点之一是通过某些构造来描述映射 $\pi \mapsto \varphi_\pi$ 的纤维的Hom。这个问题最近相关进展提出了猜想性的结论：范畴$Rep(G(E))$是Artin Stack $\mathrm{Hom}(W_E, \tilde{D})/\tilde{G}$ 的Levi 组成。进而考虑如何将 W_E 和这个表示范畴 $Rep(G(E))$ 联系起来，并且 $\tilde{G}$ 如何出现的，这里的 $\tilde{G}$ 是指任何域上定义的分裂群，它根据相应的根资料 (X, Φ, X^*, Φ^*) 分类。

2 研究内容

此论文主要探究 $G = GL_n$ 时，即 $\tilde{G} = GL_n$，令 $E = \mathbb{Q}_p$，则近现代数学研究中已经清楚的知道了如下左侧实线表示的对应关系，即可以在 $\mathbb{Q}_E$ 的超尖表示和不可约的 n 维一般线性群的表示之间构造等价关系。

$$\begin{tikzcd}
\{\text{supercuspidal irreducible representation of } \mathbb{Q}_E\}/\sim \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \subseteq \mathrm{Irr}(G(E)) \arrow[d, leftrightarrow, dotted] \\
\{\text{irreducible } n\text{-dimensional representation} : V_E \to GL_n(\mathbb{C})\} & \subseteq \mathrm{Hom}(W_E, \tilde{G}(\mathbb{C}))/\simeq
\end{tikzcd}$$

但是当我们知道了超尖表示和不可约表示之间的等价关系后，进一步面对的问题便是如何将这样的等价关系进一步推广到 $G(E)$ 所有的不可约表示和Artin Stack $\mathrm{Hom}(W_E, \tilde{G}(\mathbb{C}))/\sim$ 之间的关系。

Bernshtein在 [Ref. 3]论文中讨论清楚了如何通过尖表示来构造 $GL_n(F)$ 的不可约表示，本论文旨在阐释论文 [Ref. 3]的证明思路并补充其中少数原作者Bernshtein略过的证明。通过下例进一步解释证明的基本想法：

例 1 E'/E 是 n 次扩张，从而有*Dirichlet*特征：$\chi' : W_{E'} \to W_{E'}^{ab} \cong E'^{\times} \mapsto \mathbb{C}^{\times}$。得到*Dirichlet*特征后，构造诱导表示 $\mathrm{Ind}_{W_{E'}}^{W_E} \chi'$，由此找到 $GL_n(E)$ 的超尖表示 π_χ，并且由已知等价关系得到 W_E 的 n 不可约表示 $\pi_\varphi = \pi_\chi$。

$$
\begin{tikzcd}
p-\mathrm{Ind}_{W_{E'}}^{W_E}\chi' \arrow[d, dashed] & \textit{irreducible n-dimensional representation of} W_E \\
\textit{supercuspidal representation of} GL_n(E) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

3 国内外于该方向的研究现状分析

本论文重点探究了Bernshtein在1976年的论文："Representation of $GL_n(F)$, where F is non-Archimedean field" [Ref. 3]的证明思路。该论文发表至今已有40余年，其相关问题早已经发展成熟。早在1977年，Bernshtein发表系列论文："Induced representation of $\mathfrak{P}$-adic reductive groups" [Ref. 4]意图进一步解决退化群的诱导表示相关的问题。对于 $\mathfrak{P}$-adic 诱导表示的高阶情况目前仍然在不断取得重要成果 [Ref. 5]。

进而言之，诱导表示论相关研究对于无数的数学领域有着显著作用，甚至对与量子场论都有着重要的意义。最著名的作用便是Fermat大定理的证明 [Ref. 6]，其中依靠着对于SL_2的表示证明结果。Peter Scholze对于局部Langlands 纲领的几何化通过对Spec(E)的étale上同调和协变范畴的分析 [Ref. 6]，无疑正是依赖着 [Ref. 3]的结果。对于几何Langlands纲领而言，该纲领提供了二维量子场论和四维超杨-Mills流形之间的对应，其证明着对于圈群的表示论结果 [Ref. 7]。

4 拟采取的研究方法和技术路线、进度安排、预期达到的目标

4.1 拟采取的研究方法

表示论在研究中最基本的想法是将抽象的代数结构中元素表示成为线性空间上的线性变换。对于此文章中为了对于 GL_n 的高阶线性空间更加便于处理，将选用 l函数空间来代替一般有限维线性空间。且为了保持简洁仅考虑一般线性群的表示，而不探究更为一般性的$\mathfrak{P}$-adic退化群的表示。首先考虑局部紧的零维的群的表示，进而用Harish-Chandra的方法来分析一般线性群 GL_n 的表示，此方法如上文提到是尖表示诱导构造，其中对于一些有限阶的群情况下的结论早在论文 [Ref. 3]前已经被证明，故此也不再赘述。最后通过Gel'fand-kazhdan方法来进一步分析一般情形下的 GL_n 的表示，这个方法与上述Harish-Chandra方法相反，是将 GL_n 表示限制到子群 P_n 上。

4.2 进度安排

2020 年 09 月– 2020 年 12 月：开始学习Lie代数相关内容，并且在现有有限群表示论的基础上继续深化知识；

2021 年 01 月– 2021 年 02 月：完成原论文 [Ref. 3]研读，并且开始能够自己完成 GL_2 的证明；

2021 年 03 月– 2021 年 04 月：对于原论文 [Ref. 3]中略去的部分证明，结合其他诱导表示相关文章找到自己的证明思路；

2021 年 05 月– 2021 年 06 月：完成证明进一步优化工作，完善其中细节；撰写论文，准备答辩。

4.3 预期达到的目标

2020.9：完备论文相关的资料 [Ref. 3]，掌握Lie代数，根系统和l空间的知识；

2021.3：完成论文 [Ref. 3]整体证明的梳理，并完成引理的初步证明；

2021.5：完善证明细节，仔细推敲并完成论文；

2021.6：论文润色完毕，准备答辩相关材料。

5 研究过程中可能遇到的困难和问题，解决的措施

论文 [Ref. 3]是一篇高水平的开创了新研究方法的文章，在研读论文的过程，可能会面临大量的不熟悉的新知识，并且论文与课本不同，其中会缺少众多细节。并且目前对于局部情况，即 GL_2 的Langlands 纲领有了一定了解，但是处理高阶群表示问题，必然会出现更多更困难的问题。再者对于分析尖表示和超尖表示所需要的根资料等知识目前掌握程度不够。最后即便所有的问题能够想明白，能否严格的完成这样一个复杂问题证明叙述也会是一次挑战。

以上所提到的都可能成为问题研究中的障碍，我会继续不断努力学习，查阅相关文献，进一步完善这方面的知识，同时也积极的向老师同学请教。

6 参考文献

参考文献

[1] Langlands. Letter to andré weil rpl. *Institute of Advanced Study*, 1967.

[2] Peter Scholze. Berkeley lectures on p-adicgeometry. *Annals of Mathematics Studies*, 2020.

[3] I N Bernshtein and A V Zelevinskii. REPRESENTATIONS OF THE GROUPGL(n,f) WHEREFIS a NON-ARCHIMEDEAN LOCAL FIELD. *Russian Mathematical Surveys*, 31(3):1–68, jun 1976.

[4] I. N. Bernstein and Andrei Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. i. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 10(4):441–472, 1977.

[5] Marie-France Vignéras. Existence of supersingular representations of p-adic reductive groups, 2017.

[6] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and fermat's last theorem. *Annals of mathematics*, 141(3):443–551, 1995.

[7] Edward Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*, volume 103. Cambridge University Press, 2007.