Carpeta 4, Cuaderno 2

Ejercicio 1 Demuestre el resultado de la expresión de la frontera de decisión para el clasificador Bayesiano mediante gaussiana multivariada

Sea una Gaussiana multivariada

$$\hat{P}(x|A_c) = \frac{1}{2\pi^{P/2} |\Sigma_c|^{1/2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu_c)^T \Sigma_c^{-1} (x-\mu_c)}{2}\right)$$

La frontera se define como:

$$P(A|x) = P(B|x)$$

En terminos de probabilidades marginales y verosimilitudes.

$$\frac{P(x|A)P(A)}{P(x|B)P(B)} = 1 \quad \Rightarrow P(x|A)P(A) = P(x|B)P(B)$$

Se aplica logaritmo a ambos terminos

$$\log(P(x|A)P(A)) = \log(P(x|B)P(B))$$

$$\log(P(x|A)) + \log(P(A)) = \log(P(x|B)) + \log(P(B))$$

Se reemplaza la forma de Gaussiana multivariada

$$\log\left(\frac{1}{2\pi^{P/2}|\Sigma_A|^{1/2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu_A)^T \Sigma_A^{-1} (x-\mu_A)}{2}\right) . P(A)\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2\pi^{P/2}|\Sigma_B|^{1/2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu_B)^T \Sigma_B^{-1} (x-\mu_B)}{2}\right) . P(B)\right)$$

Por propiedades de logaritmos se simplifica a:

$$-\frac{1}{2}(x-\mu_A)^T \Sigma_A^{-1} (x-\mu_A) + \frac{1}{2}\log|\Sigma_A| - \frac{1}{2}(x-\mu_B)^T \Sigma_B^{-1} (x-\mu_B)$$
$$+ \frac{1}{2}\log|\Sigma_B| = \log P(B) - \log P(A)$$

Reescribiendo se tiene $R(x)$ como:

$$\boxed{R(x) = \frac{1}{2}\left[(x-\mu_B)^T \Sigma_B^{-1} (x-\mu_B) - (x-\mu_A)^T \Sigma_A^{-1} (x-\mu_A)\right] + \frac{1}{2}\left[\log|\Sigma_B| - \log|\Sigma_A|\right] + \log\frac{P(A)}{P(B)}}$$

Ejercicio 3 Demuestre las expresiones de clasificador Bayes lineal y diferencia entre medias desde el modelo cuadratico

Clasificador lineal Bayesiano

Cuando: $\Sigma_A = \Sigma_B = \Sigma$

Del ejercicio anterior, se reempla en Σ

$$R(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu_A)^T \Sigma^{-1}(x-\mu_A) + \frac{1}{2}(x-\mu_B)^T \Sigma^{-1}(x-\mu_B) + cte$$

Se expande como:

$$R(x) = \frac{1}{2}\Big[-x^T\Sigma^{-1}x + x^T\Sigma^{-1}\mu_A + \mu_A{}^T\Sigma^{-1}x - \mu_A{}^T\Sigma^{-1}\mu_A$$

$$+ x^T\Sigma^{-1}x - x^T\Sigma^{-1}\mu_B - \mu_B{}^T\Sigma^{-1}x + \mu_B{}^T\Sigma^{-1}\mu_B\Big] + cte$$

Agrupando terminos:

$$R(x) = \frac{1}{2}\Big[2\mu_A{}^T\Sigma^{-1}x - 2\mu_B^T\Sigma^{-1}x - \mu^T_A\Sigma^{-1}\mu_A + \mu_B^T\Sigma^{-1}\mu_B\Big] + cte$$

$$R(x) = \frac{1}{2}\Big[2[\mu_A - \mu_B]^T\Sigma^{-1}x - \mu_A^T\Sigma^{-1}\mu_A + \mu_B^T\Sigma^{-1}\mu_B\Big] + cte$$

Finalmente queda:

$$\boxed{R(x) = [\mu_A - \mu_B]^T\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}\mu_A^T\Sigma^{-1}\mu_A + \mu_B^T\Sigma^{-1}\mu_B + cte}$$

Clasificador lineal Bayesiano por diferencia entre medias

Cuando: $\Sigma_A = \Sigma_B = \sigma^2 I$

Se reemplaza $\sigma^2 I$ en el termino lineal

$$\boxed{R(x) = \frac{1}{\sigma^2}[\mu_A - \mu_B]^T x + cte}$$

Ejercicio 4 Demostrar las expresiones para clasificador regresor logístico

La frontera se define como:

$$L(x) = \frac{P(A|x)}{P(B|x)} = \frac{P(x|A)}{P(x|B)} > \frac{P(B)}{P(A)}$$

$$L(x) = \frac{P(A|x)}{P(B|x)} = \frac{P(x|A).P(A)}{P(x|B)\,P(B)}$$

Se aplica logaritmo a ambos terminos.

$$\log(L(x)) = \log\left(\frac{P(A|x)}{P(B|x)}\right) = \log\left(\frac{P(x|A)\,P(A)}{P(x|B)\,P(B)}\right) = \boxed{w^T x + w_0}$$

Se asume modelo lineal en $\log(L(x))$

En biclase $\boxed{P(A|x) + P(B|x) = 1}$ $x \in A$ o $x \in B$

$$Y(x) = [P(A|x) \quad P(B|x)] = [0.8, 0.2]$$

$$L(x) = \frac{P(A|x)}{P(B|x)} = \frac{P(x|A)\;P(A)}{P(x|B)\;P(B)} = e^{w^T x + w_0}$$

$$P(B|x) = 1 - P(A|x) \;;\; P(A|x) + P(B|x) = 1$$

$$P(A|x) = \frac{(1 - P(A|x))\,P(x|A)\,P(A)}{P(x|B)\,P(B)}$$

$$P(A|x) = \frac{P(x|A)\,P(A)}{P(x|B)\,P(B)} - \frac{P(A|x)\;P(x|A)\;P(A)}{P(x|B)\,P(B)}$$

Sustituyendo $e^{w^T x + w_0}$

$$P(A|x) = e^{w^T x + w_0} - P(A|x)\,e^{w^T x + w_0}$$

Se reescribe como:

$$P(A|x)\,[1 + e^{w^T x + w_0}] = e^{w^T x + w_0}$$

$$P(A|x) = \frac{e^{w^T x + w_0}}{1 + e^{w^T x + w_0}}\left(\frac{e^{-(w^T x + w_0)}}{e^{-(w^T x + w_0)}}\right)$$

$$\boxed{P(A|x) = \frac{1}{1 + e^{-(w^T x w_0)}}}$$ Función Sigmoide