Carpeta 2, Cuaderno 2

Ejercicio 1 Demostrar que $p(t) = \mathcal{N}(t|0, K + \sigma_\epsilon^2 I_N)$

Se tiene que, $$P(t) = \int P(t|f(x))\, P(f(x))\, df$$

Donde, $t = f(x_n) + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = N(\varepsilon_n | 0, \sigma_\varepsilon^2)$,

La distribucion condicional de t dado $f(x)$ es:

$$P(t|f(x)) = \mathcal{N}(t|f(x), \sigma_\varepsilon^2 I_N)$$

La distribución a priori de $f(x)$ es:

$$P(f(x)) = \mathcal{N}(f(x)|0, K)$$

Ahora, la conjunta de t y $f(x)$ queda como:

$$P(t, f(x)) = P(t|f(x))\, P(f(x))$$

Sustituyendo las distribuciones se tiene:

$$P(t, f(x)) = \mathcal{N}(t|f(x), \sigma_\varepsilon^2 I_N) \cdot \mathcal{N}(f(x)|0, K)$$

Reemplazando en la marginal $P(t)$

$$P(t) = \int \mathcal{N}(t|f(x), \sigma_\varepsilon^2 I_N) \cdot \mathcal{N}(f(x)|0, K)$$

Como t sigue una normal $\mu = f(x)$ y $\sigma = \sigma_\varepsilon^2 I_N$ y $f(x)$ sigue una normal $\mu = 0$ y $\sigma = K$, entonces la marginal de t obtiene la media de $f(x)$ y la varianza es la suma de las varianzas.

$$\mu = 0 \; ; \; \sigma = K + \sigma_\varepsilon^2 I_N$$

Así,

$$\boxed{P(t) = \mathcal{N}(t \mid 0, K + \sigma_\varepsilon^2 I_N)}$$

Ejercicio 2 Demostrar la expresión de la probabilidad condicional

$$P(t_* \mid f(x_*), f(x))$$

Se tiene la distribución normal conjunta:

$$\begin{bmatrix} t \\ t_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K + \sigma_\varepsilon^2 I & K_* \\ K_*^T & K(x_*, x_*) + \sigma_\varepsilon^* \end{bmatrix} \right)$$

Donde: t = datos
t_* = dato nuevo
K = matriz de covarianza
σ_ε^2 = Varianza del ruido
$K_* = [K(x_*, x_i)]_{i=1}^n$ covarianza entre t_* y t
$K(x_*, x_*)$ covarianza de t_*

La distribución condicional es de la forma

$$t_* \mid t \sim \mathcal{N}(\mu_{t_* \mid t}, \Sigma_{t_* t_* \mid t})$$

La media se calcula como:

$$\mu_{t_* \mid t} = \mu_{t_*} + \Sigma_{t_* t} \Sigma_{tt}^{-1} (t - \mu_*)$$

Reemplazando los valores se tiene:

$$\mu_{t_* \mid t} = 0 + K_*^T (K + \sigma_\varepsilon^2 I^{-1}) t$$

La varianza se calcula como:

$$\Sigma_{t_* t_* \mid t} = \Sigma_{t_* t_*} - \Sigma_{t_* t} \Sigma_{tt}^{-1} \Sigma_{t t_*}$$

Reemplazando los valores se tiene:

$$\sigma_{t_* \mid t}^2 = K(x_*, x_*) + \sigma_\varepsilon^2 - K_*^T (K + \sigma_\varepsilon^2 I)^{-1} K_*$$