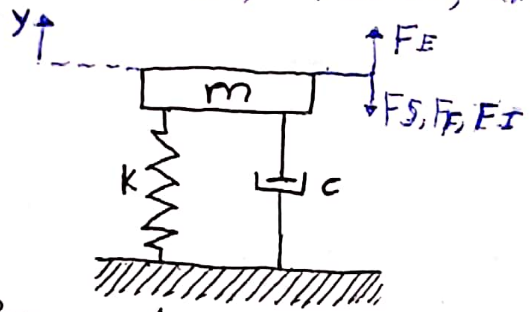
Parcial # 3

Señales y Sistemas

Yonnier Alexander Muñoz Salazar

1. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el Sistema masa, resorte, amortiguador (condiciones iniciales cero)



Analíticamente

- Sistema SLIT
- m = masa
- k = Constante de rigidez
- C = Coeficiente de amortiguamiento
- Movimiento en el eje Y
- Movimiento para $t > 0$

- Por condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} t \leq 0$$

- F_E = Fuerza externa
- F_S = Fuerza del resorte
- F_F = Fuerza de fricción (amortiguador)
- F_I = Fuerza de Inercia (masa)
- $F_E(t)$ Se toma como la entrada del sistema y $y(t)$ la salida, Por lo tanto, $F(t) = \dfrac{y(t)}{F_E(t)}$

Modelación con EDO

Del diagrama de cuerpo libre se tiene:

$$F_E = F_S + F_F + F_I \quad ①$$

Por ley de Hooke Se tiene:

$$F_S = Kx \quad \Rightarrow \quad F_S = K\,y(t) \quad ②$$

La fuerza de fricción se relaciona con la velocidad de desplazamiento

$$V \frac{dx(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad F_F = C\frac{d\,y(t)}{dt} \quad ③$$

La Fuerza inercial por segunda ley de newton: $F = ma$.

$$a = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad F_I = m\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad ④$$

Reemplazando ②, ③, ④ en ①, Se tiene la EDo del sistema

$$F_E(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + K\,y(t) \quad ⑤$$

Conociendo: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n x(s)$, y Por linealidad la constante sale de la transformada y queda igual.

Aplicando esto a la ecuación ⑤, Se tiene:

$$\mathcal{L}\{F_E(t)\} = m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + c\,\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + k\,\mathcal{L}\{y(t)\}$$

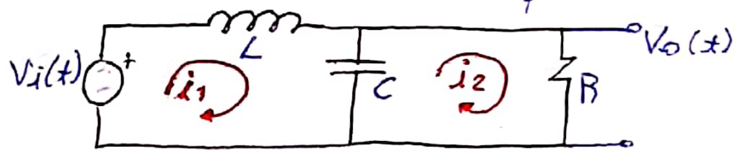
$$F_E(S) = ms^2\,Y(S) + cs\,Y(s) + K\,Y(s)$$

Reescribiendo como $Y(s)/F_E(s)$

$$F_E(s) = Y(s)(ms^2 + cs + k)$$

$$⑥ \quad \boxed{\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + K}}$$ Función de transferencia del Sistema

Encuentre el sistema equivalente a partir del circuito eléctrico



Aplicando Ley de ohm y LaPlace, Se tiene:

$$\mathcal{L}\{V_c(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)\,d\tau\right\} \qquad \mathcal{L}\{V_L(t)\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{dI_L(t)}{dt}\right\} \qquad \mathcal{L}\{V_R(t)\} = \mathcal{L}\{R\,I_R(t)\}$$

$$V_c(s) = \frac{I_c(s)}{Cs} \qquad V_L(s) = Ls\,I_L(s) \qquad V_R(s) = R\,I_R(s)$$

$$Z_c = \frac{1}{Cs} \qquad Z_L = Ls \qquad Z_R = R$$

Se reescriben los componentes RLC como:

$$R = R \quad ; \quad C = \frac{1}{Cs} \quad ; \quad L = Ls$$

Para hallar $V_o(t)$, Se simplifica el circuito y se aplica un divisor de tensión, así:

Paralelo entre C y R

$$Z_P = C \parallel R = \frac{R \times \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{R}{Cs}}{\frac{RCs+1}{Cs}} = \frac{RCs}{Cs(RCs+1)} = \frac{R}{RCs+1}$$

Ahora, impedancia total

$$Z = \frac{R}{RCs+1} + Ls$$

Se aplica un divisor de tensión sobre Z_P

$$V_o(s) = \frac{\frac{R}{RCs+1}}{\frac{R}{RCs+1} + Ls} \times V_i(s) = \frac{R\cancel{(RCs+1)}}{(RLCs^2 + Ls + R)\cancel{(RCs+1)}} \times V_i(s)$$

Se reescribe como $V_o(s)/V_i(s)$ y se divide por R para igualar la estructura de la función de transferencia de la ecuación 6

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R}{R}}{\frac{RLCs^2}{R} + \frac{Ls}{R} + \frac{R}{R}} = \boxed{\frac{1}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}} \quad (7)$$

Función de transferencia del circuito

Comparando 6 y 7

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad ; \quad \frac{1}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Se igualan los coeficientes de ambas ecuaciones

$$\boxed{m = LC \quad ; \quad c = \frac{L}{R} \quad ; \quad K = 1}$$

Se proponen valores de m, c, k y sus equivalentes R, L, C para sistemas subamortiguado, sobreamortiguado y amortiguamiento crítico.

Se sabe que:

Subamortiguado: 2 Polos Complejos Conjugados $(0 < \zeta < 1)$

Críticamente amortiguado: 2 Polos iguales $(\zeta = 1)$

Sobreamortiguado: 2 Polos reales $(\zeta > 1)$

Como se necesita hallar los polos, se lleva la funcion de transferencia a su forma canonica

$$H(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad ; \quad \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{m s^2 + C s + K}$$

Por lo tanto, $a_2 = m$; $a_1 = c$; $a_0 = K$

En terminos de frecuencia y factor de amortiguamiento

(8) $$H(s) = K \frac{w_n^2}{s^2 + 2 \zeta w_n s + w_n^2} \quad ; \quad \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{m s^2 + C s + K}$$

Se divide por m para dejar libre a s^2

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{m s^2}{m} + \frac{C s}{m} + \frac{K}{m}} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{C s}{m} + \frac{K}{m}}$$

De esta forma se tiene:

$$K = \frac{1}{K} \quad ; \quad w_n^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$2 \zeta w_n = \frac{C}{m} \Rightarrow \zeta = \frac{C}{2 m w_n} = \frac{C}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{C\sqrt{m}}{2m\sqrt{K}} = \boxed{\frac{C}{2\sqrt{Km}}}$$

Aplicando la formula del estudiante en (8)

$$S_{1,2} = \frac{-2 \zeta w_n \pm \sqrt{4 \zeta^2 w_n^2 - 4(1)(w_n^2)}}{2(1)} = \frac{-2 \zeta w_n \pm \sqrt{4 w_n^2 (\zeta^2 - 1)}}{2}$$

$$S_{1,2} = \frac{-\cancel{2} \zeta w_n}{\cancel{2}} \pm w_n \sqrt{\frac{\cancel{4}(\zeta^2 - 1)}{\cancel{2^2}}} = - \zeta w_n \pm w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Se tiene que los polos se pueden hallar a partir de:

$$\boxed{S_{1,2} = - \zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (9)$$

- Para Subamortiguado, se fija $\boxed{K=1}$, $\boxed{m=4}$

$$0 < \frac{C}{2\sqrt{Km}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{C}{2\sqrt{4}} < 1 \Rightarrow C < 4 \; ; \boxed{C=3}$$

Reemplazando en (9)

$$S_{1,2} = -\frac{3}{2\sqrt{(1)(4)}}\sqrt{\frac{1}{4}} \pm j\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{(1)(4)}}\right)^2} = \boxed{-0{,}375 \pm j\,0{,}331} \text{ Polos}$$

Valores equivalentes R, L y C

$LC = 4 \Rightarrow \boxed{L=2}$; $\boxed{C=2}$; $\frac{L}{R} = 3 \Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{3}}$

- Ahora, Para críticamente amortiguado, $\boxed{K=1}$, $\boxed{m=4}$

$$\zeta = 1 \Rightarrow \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1 = \frac{c}{2\sqrt{(1)(4)}} = \frac{c}{4} \Rightarrow \boxed{c=4}$$

Reemplazando c, m y K en (9)

$$S_{1,2} = -\frac{4}{2\sqrt{(1)(4)}}\sqrt{\frac{1}{4}} \pm j\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\left(\frac{4}{2\sqrt{(1)(4)}}\right)^2} = \boxed{-0.5} \text{ Polos}$$

Valores equivalentes R, L y C

$Lc = 4 \Rightarrow \boxed{L=2}$; $\boxed{C=2}$; $\frac{L}{R} = 4 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}}$

- Finalmente, Para sobre amortiguado, $\boxed{K=1}$, $\boxed{m=4}$

$$\zeta > 1 = \frac{c}{4} > 1 \Rightarrow c > 4 \therefore \boxed{c=5}$$

Reemplazando c, m y K en (9)

$$S_1 = -\frac{5}{2\sqrt{4}}\sqrt{\frac{1}{4}} + j\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\left(\frac{5}{2\sqrt{4}}\right)^2} = \boxed{-1}$$

polos

$$S_2 = -\frac{5}{2\sqrt{4}}\sqrt{\frac{1}{4}} \quad j\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\left(\frac{5}{2\sqrt{4}}\right)^2} = \boxed{-0,25}$$

Valores equivalentes en R, L y C

$Lc = 4 \Rightarrow \boxed{L=2}$; $\boxed{C=2}$; $\frac{L}{R} = 5 \Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{5}}$

El factor de amortiguamiento es ta dado por: ζ

la Frecuencia Natural amortiguada es: w_n

la frecuencia natural no amortiguada es: $w_d = jw_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Tiempo Pico $= \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} = t_p$

Tiempo de levantamiento: t_u : 10% a 90%. ó 0% al 100% de t_p

Tiempo de establecimiento: (Permanecer ±5% del valor de equilibrio)

$t_s = \frac{3}{\zeta w_n}$

Reemplazando los valores en cada caso, se tiene:

Sub Amortiguado	Criticamente amortiguado	Sobre Amortiguado
$\zeta = 0,75$	$\zeta = 1$	$\zeta = 1.25$
$w_n = 0.5$	$w_n = 0.5$	$w_n = 0.5$
$w_d = 0.331$	$w_d = 0.5 = w_n$	$w_d = 0,375$
$t_p = 9,4992$ seg	$t_p = 6.28$	$t_p = 8,377$ seg
$t_u = t_{90\%} - t_{10\%}$	$t_u =$	$t_u =$
$t_s = 8$ seg	$t_s = 6$ seg	$t_s = 4.8$ seg

Función de transferencia en lazo cerrado.

Se da cuando el sistema tiene un lazo de retroalimentación

Se da a partir de: $H_{LC}(s) = \dfrac{H(s)}{1 + A(s)\,H(s)}$

Asumiendo $A(s) = 1$, $H_{LC}(s) = \dfrac{H(s)}{1 + H(s)}$

Reemplazando la función de transferencia $\dfrac{Y(s)}{F_E(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + Cs + K}$

$$H_{LC}(s) = \frac{\frac{1}{ms^2 + Cs + K}}{1 + \frac{1}{ms^2 + Cs + K}} = \frac{\cancel{\frac{1}{ms^2 + Cs + K}}}{\frac{ms^2 + Cs + K + 1}{\cancel{ms^2 + Cs + K}}} = \boxed{\frac{1}{ms^2 + Cs + K + 1}}$$