



ISSN 1000-4750  
CN 11-2595/O3  
CODEN GOLIEB  
E i 收录期刊

## 基于等几何分析的参数化曲梁结构非线性动力学降阶模型研究

郭玉杰 吴晗浪 李薇 李迎港 吴剑晨

## MODEL ORDER REDUCTION FOR NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF PARAMETERIZED CURVED BEAM STRUCTURES BASED ON ISOGEOOMETRIC ANALYSIS

GUO Yu-jie, WU Han-lang, LI Wei, LI Ying-gang, WU Jian-cheng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2021.04.0285>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

##### 基于等几何方法的压电功能梯度板动力学及主动振动控制分析

ANALYSIS FOR DYNAMIC AND ACTIVE VIBRATION CONTROL OF PIEZOELECTRIC FUNCTIONALLY GRADED PLATES BASED ON ISOGEOOMETRIC METHOD

工程力学. 2020, 37(12): 228–242 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.04.0266>

##### 复杂三维曲梁结构的无闭锁等几何分析算法研究

LOCKING-FREE ISOGEOOMETRIC ANALYSIS OF COMPLEX THREE-DIMENSIONAL BEAM STRUCTURES

工程力学. 2018, 35(11): 17–25 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2017.08.0602>

##### 求解粘弹性问题的时域自适应等几何比例边界有限元法

A TEMPORALLY PIECEWISE ADAPTIVE ISOGEOOMETRIC SBFEM FOR VISCOELASTIC PROBLEMS

工程力学. 2020, 37(2): 23–33 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2019.01.0099>

##### 基于GPU并行计算的地下结构非线性动力分析软件平台开发

DEVELOPMENT ON SOFTWARE PLATFORM FOR NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF UNDERGROUND STRUCTURE BASED ON GPU PARALLEL COMPUTING

工程力学. 2019, 36(2): 53–65, 86 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2017.11.0898>

##### 基于扩展等几何分析和混沌离子运动算法的带孔结构形状优化设计

DESIGN AND SHAPE OPTIMIZATION OF HOLED STRUCTURE BY EXTENDED ISOGEOOMETRIC ANALYSIS AND CHAOTIC ION MOTION OPTIMIZATION

工程力学. 2019, 36(4): 248–256 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2018.03.0119>

##### 基于模型修正的螺栓连接板结构动力学建模方法

STRUCTURAL DYNAMIC MODELING METHOD OF BOLTED JOINT PLATES BASED ON MODEL UPDATING

工程力学. 2021, 38(7): 248–256 <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2020.07.0503>



订阅号：面向读者



订阅号：面向作者

扫码关注微信公众号，获得更多资讯信息

文章编号：1000-4750(2022)08-0031-18

# 基于等几何分析的参数化曲梁结构 非线性动力学降阶模型研究

郭玉杰，吴晗浪，李薇，李迎港，吴剑晨

(南京航空航天大学飞行器先进设计技术国防重点学科实验室，南京 210016)

**摘要：**模型降阶方法通过构造全阶模型的低阶近似模型有效提升了求解效率，同时也保留了原阶模型的主要信息从而保证了较高的计算精度。对于结构非线性以及参数化的模型降阶问题，常需要重复计算刚度矩阵等非线性以及参数依赖项，求解效率较低。此外，当参数化模型的几何形状改变时，往往需要重复进行 CAD 与有限元 (FEA) 模型的转换，这对于复杂结构较为耗时。等几何分析采用描述几何形状的非均匀有理 B 样条 (NURBS) 插值物理场，实现了 CAD 与 FEA 模型的统一，消除了两者之间繁琐的模型转换过程，其具有几何精确、高阶连续等优点，并且几何形状在细化过程中保持不变，非常适合于薄壁类结构的分析以及参数化表达。该研究结合等几何分析、特征正交分解 (POD) 以及离散经验插值方法 (DEIM) 研究参数化的平面曲梁结构的非线性动力学降阶问题。数值结果表明，基于等几何分析的 POD-DEIM 降阶模型能够显著提升平面曲梁结构的非线性动力学计算效率，并且该模型对于参数化以及变载荷等情形显示出了良好的适应性。

**关键词：**等几何分析；模型降阶；非线性动力学；离散经验插值；参数化模型

中图分类号：O342；TB122 文献标志码：A doi: [10.6052/j.issn.1000-4750.2021.04.0285](https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2021.04.0285)

## MODEL ORDER REDUCTION FOR NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF PARAMETERIZED CURVED BEAM STRUCTURES BASED ON ISOGEOMETRIC ANALYSIS

GUO Yu-jie, WU Han-lang, LI Wei, LI Ying-gang, WU Jian-chen

(Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense-Advanced Design Technology of Flight Vehicle,  
College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Model order reduction (MOR) approach generates lower dimensional approximations to the original system while preserving model's essential information and computational accuracy. For nonlinear and parameterized structural problems, where the stiffness matrix is configuration dependent, an iterative solution procedure is inevitable and a revisit to all the elements is essential for updating the stiffness matrix. Considering the difference between CAD and finite element models, a preprocessing step is necessary for each parameterized geometry, which is time consuming for complex geometries. Isogeometric analysis (IGA) utilizes non-uniform rational B-spline (NURBS) basis for both the geometry description and physical field interpolation, thusly eliminates the time-consuming preprocessing step between CAD and finite element models. IGA is a perfect candidate for the analysis and geometry parameterization of thin-walled structures due to its geometrically exact and high order continuous properties. The nonlinear dynamics of the parameterized planar curved beams are

收稿日期：2021-04-16；修改日期：2021-07-05

基金项目：国家自然科学基金面上项目(11972187)

通讯作者：郭玉杰(1986—)，男，江苏人，副教授，博士，主要从事结构计算力学研究(E-mail: [yujielu@nuaa.edu.cn](mailto:yujielu@nuaa.edu.cn))。

作者简介：吴晗浪(1993—)，男，贵州人，硕士生，主要从事等几何分析研究(E-mail: [473807649@qq.com](mailto:473807649@qq.com))；

李薇(1998—)，女，河南人，硕士生，主要从事等几何结构动力学研究(E-mail: [cyona@nuaa.edu.cn](mailto:cyon@nuaa.edu.cn))；

李迎港(1997—)，男，安徽人，硕士生，主要从事结构疲劳寿命研究(E-mail: [liyinggang@nuaa.edu.cn](mailto:liyinggang@nuaa.edu.cn))；

吴剑晨(1997—)，男，安徽人，硕士生，主要从事航天器传热研究(E-mail: [jianchenwu@nuaa.edu.cn](mailto:jianchenwu@nuaa.edu.cn))。

studied based on the isogeometric analysis and their model order reductions are investigated based on the proper orthogonal decomposition and discrete empirical interpolation method (POD-DEIM). Numerical results show that IGA-based POD-DEIM method significantly improves the computational efficiency of the nonlinear dynamic analysis of planar curved beams. Additionally, the proposed method also applies to different external loadings and time step sizes, which demonstrate the adaptivity of the method.

**Key words:** isogeometric analysis; model order reduction; nonlinear dynamic analysis; discrete empirical interpolation method; parameterized models

现代工业及军事装备结构往往较为复杂，因而对设计与分析工具提出较高要求。采用传统数值手段(如有限元法等)进行结构分析时，常需要细密的网格以获得较高精度解，往往会导致维数灾难问题(*curse of dimensionality*)，特别对于需要反复迭代求解的复杂问题，比如非线性动力学、结构多学科优化、多场耦合等仍过于耗时<sup>[1]</sup>。

模型降阶(model order reduction)方法通过构造全阶模型(full order model)的低阶近似模型有效降低了求解问题的维度，同时也保留了原阶模型的主要信息从而保证了较高的计算精度。常见的模型降阶方法包括模态叠加法<sup>[2]</sup>、模态导数法<sup>[3–4]</sup>以及正交分解法<sup>[5–6]</sup>(proper orthogonal decomposition, POD)等，但对于非线性动力学问题，上述常规方法还存在一定问题，比如模态叠加法需要不断更新模态空间，POD方法需要不断更新全阶模型的内力、刚度矩阵等，这显著增加了计算复杂度并降低了计算效率<sup>[7]</sup>。针对这一问题，Astrid等<sup>[8]</sup>提出了一种MPE(missing point estimation, 缺失点估计)方法，其通过计算在预先选定的空间点处的函数值，再利用gappy POD方法将其投影到降维空间以实现计算效率的提升。Rewienski等<sup>[9]</sup>提出了TPWLMOR(trajecotry piecewise linear model order reduction, 轨迹分片线性模型降阶)方法，其在一系列采样点上采用Krylov投射对非线性函数进行降阶，再对降阶模型加权求和从而可以实现非线性函数的逼近，但对于一些复杂非线性函数，采用低阶分片多项式逼近效果不佳。Gaonkar等<sup>[10–11]</sup>在此基础上提出了一种改进的TPWLMOR方法，有效提升了降阶模型在非线性动力学计算方面的精度与效率。满兴博等<sup>[12]</sup>提出了一种非线性Galerkin方法，有效提升了降阶模型精度。Barrault<sup>[13]</sup>及Grepl等<sup>[14]</sup>提出了一种经验插值法(empirical interpolation method, EIM)，其采用一组经验基函数的线性组合来近似非线性项，组合系

数可通过插值求解得到，在此基础上可通过greedy算法选取合适的snapshots作为降阶基函数构造降阶模型<sup>[15]</sup>，但EIM不能扩展到任意非线性函数。Chaturanabut等<sup>[7]</sup>基于EIM提出了一种离散形式的经验插值方法(DEIM)，其采用POD基底作为输入并适用于任意类型的常微分方程，相比于EIM，其离散的变体应用范围更广，且无需施加额外的基底变换，同时两者的计算结果在数学上是等价的，因此受到了广泛关注。

在参数化降阶模型研究方面，传统方法存在与非线性降阶模型类似的困难，即难以实现模型的输入参数与微分算子的解耦，从而对于每个未知输入参数都需要重新计算系统的刚度矩阵等，计算效率不高<sup>[16]</sup>。针对这一问题，许多学者尝试将有限元模型与降阶模型进行解耦，以实现线下/线上的计算模式(offline/online procedure)<sup>[17–19]</sup>。在线下模式中，其计算复杂度及计算量与所求问题的有限元模型相关，但可以预先计算并存储结果，在线上模式中，其计算量以及计算复杂度只与降阶模型有关，结合后验误差估计方法，即可以实现实时、高精度的降阶模型求解。当所求解的模型与输入参数具有仿射关系时，可以将输入参数与微分算子分离，再结合降阶模型方法即可实现线下/线上的计算模式。但通常情况下这种仿射关系并不存在或者难以建立。许多学者<sup>[7, 13–14, 20–21]</sup>通过POD或者EIM/DEIM方法实现了参数化模型的降阶，从而可以进行快速设计与优化。此外，在模型的参数化描述方面(特别是几何形状)，还缺乏统一、高效的手段，并且对于不同的几何形状输入参数，需要重复建立有限元模型，当几何模型较为复杂时，其耗费的网格划分等前处理时间则较为显著<sup>[22–23]</sup>，造成这一问题的根本原因在于CAD与CAE中几何模型的描述方式存在不一致<sup>[23]</sup>。在CAD中，几何模型一般是以非均匀有理B样条(NURBS)或者构造实体几何(CSG)的方式

来描述，而在 CAE 中(比如有限元)，其模型一般是以线性或二次插值的方式来构造，是真实几何的一种近似。

等几何分析<sup>[23]</sup>的基本思想是将 CAD 中描述几何形状的 NURBS 引入到等参有限元中，通过统一的几何描述可以消除产品设计过程中 CAD 与 CAE 之间反复的数据转换过程，从而节省了大量的前处理时间。等几何分析自 2005 年提出以来迅速成为计算力学以及计算几何领域的研究热点<sup>[24-27]</sup>，相比于传统有限元方法，等几何分析其具有几何精确、光顺以及高阶连续等优点，因此特别适合于薄壁类结构的分析、优化等<sup>[28-38]</sup>。在等几何降阶模型研究方面，一些学者考虑了等几何分析在模型几何形状描述、高效的 CAD/CAE 模型转换等方面的优势，将其嵌入到了降阶模型中。宋敏<sup>[39]</sup>研究了带参数椭圆形方程的等几何分析及 POD 模型降阶问题，验证了模型降阶的有效性。Manzoni 等<sup>[40]</sup>结合了等几何边界元以及降阶模型实现了实时的计算流体动力学分析，其对 NACA 翼型采用了参数化描述并利用 EIM 方法近似实现了参数的仿射关系。Salmoiraghi 等<sup>[22]</sup>结合了自由形状变换(free form deformation, FFD)以及等几何分析进行参数化建模，实现了以较少参数描述复杂形状，并且保证了设计模型与分析模型的无缝融合。Ding 等<sup>[41]</sup>采用等几何分析、POD 以及 DEIM 研究了结构动力学问题，其结合了两种时间积分方法，有效抑制了高频振荡。Rinaldi<sup>[20]</sup>采用了 EIM/DEIM 以及等几何分析研究了薄壳结构的参数化模型降阶问题，结果显示只需要少数 DEIM 插值单元以及降阶基函数即可实现高精度、快速的参数化线性静力学分析。此外，一些学者还将等几何降阶模型应用到了结构优化<sup>[42]</sup>、裂纹扩展<sup>[43]</sup>、结构屈曲<sup>[44]</sup>等方面。

综上所述，将等几何分析的思想与降阶模型相结合具有广阔的应用前景，因此许多学者在这方面做了初步探索，但针对参数化的薄壁结构的非线性动力学降阶模型方面的研究还未有涉及。本文拟选取平面曲梁结构作为研究对象，采用等几何分析、POD-DEIM 方法研究其参数化的非线性动力学模型降阶问题。

## 1 NURBS 及几何描述

非均匀有理 B 样条(NURBS)是计算机辅助设

计领域用来表示曲线曲面的标准函数之一，其能够精确描述圆形等圆锥曲线，其定义为：

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi)w_j} \quad (1)$$

式中： $p$  为 NURBS 基函数的阶数； $n$  为基函数的个数； $N_{i,p}(\xi)$  为  $p$  阶 B 样条函数； $w_i$  为对应的权重。阶数为  $p$  的 B 样条函数  $N_{i,p}(\xi)$  可由一给定的单调不减的节点序列  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  并结合 Cox-de-Boor 迭代公式求得：

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_{i,p}(\xi) = & \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \\ & \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

由式(2)和式(3)可知，B 样条函数  $N_{i,p}(\xi)$  只在区间  $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  上非零，即每个 B 样条函数均跨越  $p+1$  个节点区间。同时，每个节点区间上均包含  $p+1$  个非零的 B 样条函数。除此之外，所有 B 样条函数均为非负，满足单位分解性质。B 样条函数在节点处(即单元交界处)具有  $C^{p-k}$  次连续的特性，其中  $k$  为节点的重复度，因此可以通过插入与删除节点操作来调节单元间的连续性。当节点矢量两端的节点重复度均为  $p+1$  次时，其被称为开放型节点向量(open knot vector)。

一条  $p$  次 NURBS 曲线的定义为：

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (4)$$

其中， $\mathbf{P}_i$  为对应于第  $i$  个基函数的控制点。**图 1** 所示为三阶 NURBS 曲线及其对应的 NURBS 基函数，其节点向量为  $\Xi = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\right\}$ ，权重为  $\{w_1, w_2, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}$ 。从图中可以看出，NURBS 曲线具有光滑、连续的特性，并且其控制点除了两端点之外，均落在几何之外，这一特性显著区别于传统有限元模型。

二维 NURBS 曲面以及三维实体可通过张量积的形式构造，具体可参见文献[45]。

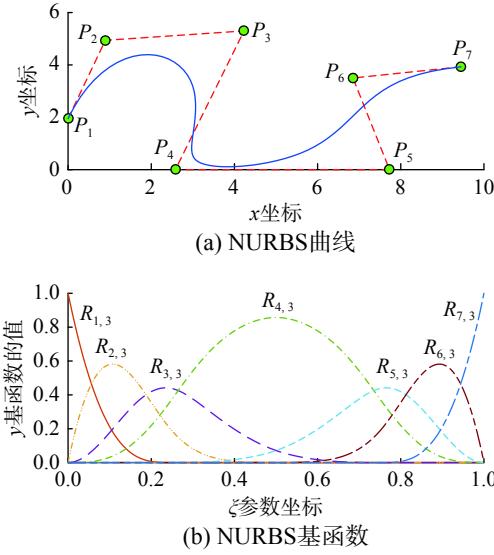


图 1 NURBS 曲线及 NURBS 基函数  
Fig. 1 NURBS curve and NURBS basis functions

## 2 等几何平面曲梁非线性动力学模型

### 2.1 平面曲梁运动学及本构关系

本文所讨论的曲梁模型基于 Euler-Bernoulli 假设，即忽略剪切变形和横截面转动的影响。本文中所有与初始构型 (reference configuration) 相关的参数均用大写字母表示，与变形状态 (deformed configuration) 相关的参数均采用小写字母表示。

图 2 给出了平面曲梁模型示意图，其可由一中性轴和一系列横截面所表示。图中  $\mathbf{X}$  以及  $\mathbf{x}$  为曲梁中性轴的位置向量，且  $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ ， $\mathbf{u}$  为曲梁的位移向量。为了便于计算，需要在中性轴上定义一个活动标架  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ，其中向量  $\mathbf{a}_1$  表示沿中性轴的单位切向量，向量  $\mathbf{a}_2$  及  $\mathbf{a}_3$  是位于曲梁的横截面上并且互相正交的单位向量。单位向量  $\mathbf{a}_1$  可由下式计算得到：

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| \quad (5)$$

式中， $ds$  为中性轴的弧长微分。不失一般性，选取  $\mathbf{a}_3$  为垂直于  $xy$  平面的单位向量，则  $\mathbf{a}_2$  可表示为  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3$ 。

对于二维平面曲梁，其应变关系可由薄膜应变  $\varepsilon$  以及弯曲应变  $\rho$  表示，其表达式分别为：

$$\varepsilon = \frac{ds}{dS} - 1 \quad (6)$$

$$\rho = \kappa - K \quad (7)$$

其中，弧长微分以及曲率可分别表示为：

$$ds = |\mathbf{x}'| d\xi \quad (8)$$

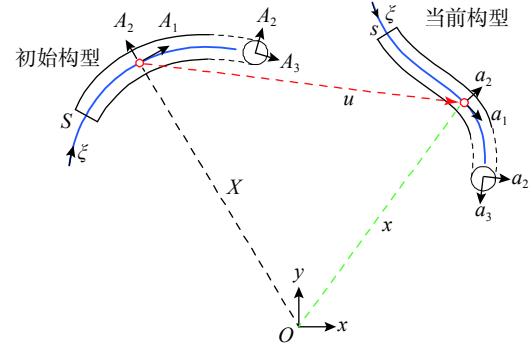


图 2 初始构型与当前构型  
Fig. 2 Reference and current configurations

$$dS = |\mathbf{x}'| d\xi \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|^3} \frac{ds}{dS} \quad (10)$$

$$K = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|^3} \frac{ds}{dS} \quad (11)$$

其中，上标  $(\cdot)'$  以及  $(\cdot)''$  表示对参数坐标的一次和二次导数。根据式 (4) 可得：

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}' + \mathbf{u}' = \mathbf{C}(\xi)' + \mathbf{u}' \quad (12)$$

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{X}'' + \mathbf{u}'' = \mathbf{C}(\xi)'' + \mathbf{u}'' \quad (13)$$

对于弹性问题，基于圣维南原理，薄膜力与薄膜应变、弯矩与弯曲应变有如下关系：

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \rho \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中： $E$  为弹性模量； $A$  为横截面积； $I$  为截面惯性矩。

### 2.2 控制方程及等几何离散

对于几何非线性问题，平面曲梁的动力学控制方程可表示为：

$$\int_S \mathbf{q}_0 \cdot \delta \mathbf{u} ds + \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{u} - \int_S (\mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\rho}) ds = \int_S (\rho_0 A \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}) ds \quad (15)$$

式中： $S$  为曲梁中性轴的长度； $\delta$  为泛函变分； $\rho_0$  为曲梁的密度； $\mathbf{N} = NA_1$ ， $\mathbf{M} = MA_3$  为向量化的薄膜力以及弯矩。此外， $\mathbf{q}_0$  为分布力， $\mathbf{p}_0$  为集中力。

基于等几何分析的思想，采用描述中性轴的 NURBS 基函数插值位移场函数及其变分：

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n R_i \mathbf{U}_i = \mathbf{R}^T \mathbf{U} \quad (16)$$

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n R_i \delta \mathbf{U}_i = \mathbf{R}^T \delta \mathbf{U} \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{U}_i$  为第  $i$  个控制点的位移未知量;  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{U}$  分别为 NURBS 基函数和位移未知量的向量集合。

将式(17)代入式(15), 并利用  $\delta\mathbf{U}_i$  的任意性, 得到半离散的平衡方程:

$$\mathbf{f}_E - \mathbf{f}_I = \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}} \quad (18)$$

式中,  $\mathbf{M}_0$  为平面曲梁的质量矩阵, 可表示为:

$$\mathbf{M}_0 = \int_S \rho_0 A \mathbf{R}^T \mathbf{R} dS \quad (19)$$

式(18)中,  $\mathbf{f}_I$  和  $\mathbf{f}_E$  分别表示曲梁的内力和外力向量, 其表达式为:

$$\mathbf{f}_I = \int_S \left( \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{U}} \right) dS \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_E = \int_S \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{R} dS + \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{R} (\xi = \xi_0) \quad (21)$$

式中,  $\xi_0$  为集中载荷施加位置所对应的参数值。

### 2.3 非线性动力学求解

平面曲梁的半离散平衡方程式(18)为时变、非线性方程, 一般可通过时间积分并结合牛顿迭代进行求解。为便于说明, 式(18)可改写为:

$$\mathbf{f}_E^{t+\Delta t} - \mathbf{f}_I^{t+\Delta t} = \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \quad (22)$$

式中:  $t$  为当前时间步;  $\Delta t$  为时间增量。

为了寻求  $t + \Delta t$  时刻的平衡状态, 可采用 HHT- $\alpha$  时间积分方法, 其需要定义一个动态残余力向量:

$$\mathbf{r}_0^* = (1 + \alpha) \mathbf{f}_E^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{f}_E^t - \mathbf{f}_{I,0}^t - \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \quad (23)$$

式中,  $\alpha$  为时间积分常数, 可以调节系统的数值耗散能力, 通常取  $\alpha = -0.05$ <sup>[46]</sup>。此外, 内力  $\mathbf{f}_{I,0}^t$  的下标 0 表示当前时刻的初始状态。与 Newmark 方法类似, HHT- $\alpha$  方法假设加速度在时间步内线性变化, 因此, 可以推导得出以下关系:

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (24)$$

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{1}{2} \Delta t^2 ((1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{U}}^t + 2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (25)$$

式中:  $\dot{\mathbf{U}}$  为平面曲梁的速度;  $\beta$  和  $\gamma$  为积分常数, 通常情况下为了保证系统具有二阶精度, 可取  $\beta = 0.25(1 - \alpha)^2$ ,  $\gamma = (0.5 - \alpha)$ 。

根据式(25)可求得  $t + \Delta t$  时刻的加速度:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{U} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}^t - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}^t \quad (26)$$

式中,  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t$  为位移增量。

将式(26)代入式(23), 可得:

$$\Delta \mathbf{U}_1 = (\mathbf{K}_{T,0}^*)^{-1} \mathbf{f}_0^* \quad (27)$$

式中,  $\mathbf{K}_{T,0}^*$  及  $\mathbf{f}_0^*$  分别为等效切线刚度矩阵以及等效

载荷向量, 可分别表示为:

$$\mathbf{K}_{T,0}^* = (1 + \alpha) \mathbf{K}_{T,0} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0^* = & (1 + \alpha) \mathbf{f}_E^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{f}_E^t - \mathbf{f}_{I,0}^t + \\ & \mathbf{M}_0 \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{U}}^t \right) \end{aligned} \quad (29)$$

式中,  $\mathbf{K}_T$  为平面曲梁的刚度矩阵, 可由内力向量  $\mathbf{f}_I$  的线性化得到, 具体表达式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T = & \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbf{N} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{U}} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\rho}}{\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{U}} \right) dS \end{aligned} \quad (30)$$

当把平面曲梁位移场  $\mathbf{U}$  设置为当前载荷步的初始位移时, 即可得到  $\mathbf{K}_{T,0}$  以及  $\mathbf{f}_{I,0}$  的表达式。

基于式(27)可得到初始载荷增量  $\Delta \mathbf{U}_1$ , 从而可以更新内力向量、加速度及刚度矩阵等变量, 并进行迭代求解。图 3 所示为采用 HHT- $\alpha$  时间积分方法进行几何非线性动力学分析的算法流程。

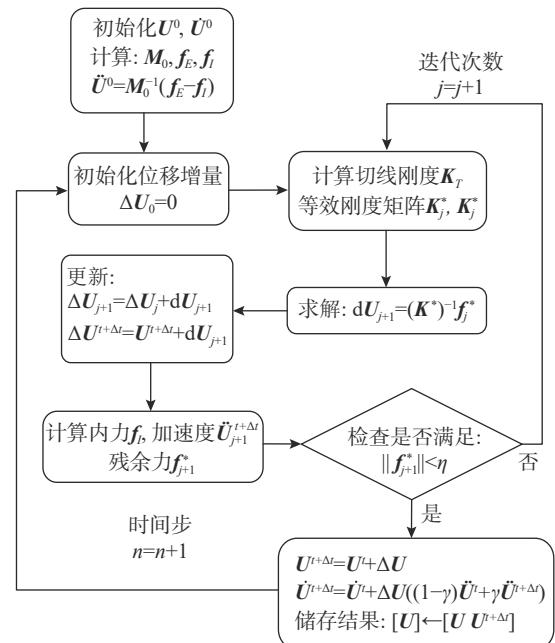


图 3 HHT- $\alpha$  时间积分算法流程图  
Fig. 3 HHT- $\alpha$  time integration scheme for nonlinear dynamic analysis

## 3 POD-DEIM/MDEIM 模型降阶方法

### 3.1 模型降阶简介

假设不考虑平面曲梁的阻尼, 在某一时刻系统平衡方程的离散形式可以表示为:

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_T \mathbf{U} = \mathbf{f}_E \quad (31)$$

其中,  $\mathbf{K}_T, \mathbf{M}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{U}, \mathbf{f}_E \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 。

模型降阶的基本思想为采用一组正交基底  $\bar{\mathbf{V}} = [\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ( $k \ll n$ ), 来近似系统的解  $\mathbf{U}$ , 即:

$$\mathbf{U} \approx \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{v}}_i \bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{U}} \quad (32)$$

其中,  $\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_i$  为广义位移。将式 (32) 代入式 (31) 得到:

$$\mathbf{M}_0 \bar{\mathbf{V}} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_T \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{f}_E + \mathbf{r}_{ROM} \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{r}_{ROM}$  为代入近似公式 (32) 产生的残差向量, 其位于正交基底  $\bar{\mathbf{V}}$  所张空间之外且正交于  $\bar{\mathbf{V}}$ , 因此如下关系式成立:

$$\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{r}_{ROM} = 0 \quad (34)$$

将式 (33) 左乘  $\bar{\mathbf{V}}^T$  可得:

$$\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M}_0 \bar{\mathbf{V}} \ddot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{K}_T \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}_E \quad (35)$$

记  $\bar{\mathbf{M}}_0 = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M}_0 \bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_T = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{K}_T \bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_E = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{f}_E \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ , 可得降阶后的平衡方程:

$$\bar{\mathbf{M}}_0 \ddot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{f}}_E \quad (36)$$

由于降阶后系统维度远小于原阶模型的系统维度 ( $k \ll n$ ), 因此, 可以提升系统求解速度, 但降阶基底  $\bar{\mathbf{V}}$  的选择对于降阶模型的求解精度至关重要。

### 3.2 POD: 降阶模型基底生成

特征正交分解 (POD) 通过搜集不同时刻、不同参数下结构的响应快照 (snapshots), 再通过奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 可获得一系列相互正交的基底向量以及对应的奇异值。

假设结构响应快照集合为:

$$\mathbf{U}_{\text{snap}} = [\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots, \mathbf{U}^{N_s}] \in \mathbb{R}^{n \times N_s} \quad (37)$$

式中,  $N_s$  为所搜集的快照向量个数。对  $\mathbf{U}_{\text{snap}}$  采用 SVD 分解, 得到:

$$[\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots, \mathbf{U}^{N_s}]_{\text{SVD}} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{W}^T \quad (38)$$

式中:  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为 left-hand 矩阵, 包含  $n$  个互相正交的单位向量  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ ;  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$  为 right-hand 矩阵, 包含  $N_s$  个正交向量;  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times N_s}$ , 其包含  $n$  个奇异值  $\sigma_i = (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  每个奇异值  $\sigma_i$  的大小代表对应的基底正交向量  $\mathbf{v}_i$  占整个系统能量的比重。

假设选取前  $k$  ( $k \ll n$ ) 个正交向量作为模型降阶基底, 则其对于快照集在最小二乘意义下的逼近误差可表示为:

$$\sum_{j=1}^{N_s} \left\| \mathbf{U}^j - \sum_{i=1}^k (\mathbf{U}^j \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2 \quad (39)$$

即可以通过剩余的  $n-k$  个奇异值的平方和来估计模型降阶基底的逼近误差。随着所选取的基函数个数  $k$  的增大, 其逼近误差迅速减小, 表明基函数所捕获的能量占快照集总能量的比例迅速提升, 其所捕获的原系统的信息就越丰富。

### 3.3 DEIM/MDEIM 差值算法

对于非线性、参数化问题, 在迭代求解过程中, 往往需要更新结构的刚度矩阵以及内力向量, 以准确捕捉结构的响应, 这显著影响了降阶模型的求解效率。

离散经验插值方法 (DEIM) 提供了一种有效降低非线性函数计算规模的方案, 采用 DEIM 方法, 只需计算少数给定位置的元素, 再通过 DEIM 插值矩阵即可实现非线性项的近似表示, 大大降低了非线性项的计算时间。其基本原理如下。

假设曲梁的内力向量  $\mathbf{f}_I$  所在的  $n$  维空间可由一组正交单位向量  $\mathbf{Z} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  所描述, 且  $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, n)$  按照重要性从大到小排序。与模态叠加法类似, 内力向量  $\mathbf{f}_I$  可由  $\mathbf{Z}$  的前  $m$  ( $m \ll n$ ) 阶基向量近似得到:

$$\mathbf{f}_I \approx \mathbf{Z}_m \mathbf{c} \quad (40)$$

式中:  $\mathbf{Z}_m = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为前  $m$  阶基向量;  $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  为系数向量。

式 (40) 为过约束方程组, 因此需要选择基底  $\mathbf{Z}$  中的  $m$  行进行求解, 其可以通过布尔矩阵  $\mathbf{P}$  实现:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{e}_{\phi_1}, \mathbf{e}_{\phi_2}, \dots, \mathbf{e}_{\phi_m}] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (41)$$

其中,  $\mathbf{e}_{\phi_i} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为单位向量, 且在位置  $\phi_i (1 \leq \phi_i \leq n)$  处为 1, 其余位置均为 0, 式 (40) 左乘  $\mathbf{P}^T$  可得:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}_I \approx (\mathbf{P}^T \mathbf{Z}_m) \mathbf{c} \quad (42)$$

继而可以得到:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{P}^T \mathbf{Z}_m)^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}_I \quad (43)$$

将式 (43) 代入式 (40) 可得:

$$\mathbf{f}_I \approx \mathbf{Z}_m \mathbf{c} = \mathbf{Z}_m (\mathbf{P}^T \mathbf{Z}_m)^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}_I = \mathbf{D} \mathbf{f}_I \quad (44)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{D}$  为 DEIM 插值矩阵。

由式 (44) 可知, 内力向量  $\mathbf{f}_I$  可以由布尔矩阵  $\mathbf{P}$ 、基函数  $\mathbf{Z}_m$  以及特定位置  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  处的内力向量本身近似得到, 因此, 在进行有限

元计算时，只需要计算特定位置  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$  处的内力值，再通过插值矩阵  $D$  即可重构得到完整的内力向量，大大节省了计算时间。

在 DEIM 算法中，基底向量  $Z_m$  以及位置坐标  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$  的选取对于算法的精度及稳定性至关重要，通常  $Z_m$  可以选为由式 (38) 得到的 POD 基底向量  $V$ ，而位置坐标  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$  则可以通过算法 1 实现。

算法 1 中函数  $\max \{\cdot\}$  用于选取向量的最大元素并返回其位置坐标，其通过选取最大误差元素的位置并在下一次迭代中精确插值该位置元素，从而能够实现误差的可控，因此，残差向量  $r_D$  在所选取的位置  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$  处为  $\mathbf{0}$ 。

#### 算法 1. DEIM 算法

##### Algorithm 1 DEIM algorithm

- 1) 输入:  $Z_m = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m]$
- 2) 输出:  $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$
- 3)  $[\rho, \phi_1] = \max \{|\zeta_1|\}$
- 4)  $Z_m = [\zeta_1], P = [e_{\phi_1}], \phi = [\phi_1]$
- 5) 循环:  $i = 2, 3, \dots, m$
- 6) 求解  $c$ :  $(P^T Z_m)c = P^T \zeta_i$
- 7) 计算残差:  $r_D = \zeta_i - Z_m c$
- 8)  $[\rho, \phi_1] = \max \{|r_D|\}$
- 9) 更新:  $Z_m = [Z_m, \zeta_i], P = [P, e_{\phi_i}], \phi = [\phi^T, \phi_i]^T$
- 10) 结束循环

算法 1 可以用于非线性向量的插值近似，而对于刚度矩阵，其排列方式为矩阵形式，因此可以将其按照列向量的形式进行排列，再利用 DEIM 方法进行插值，最后再重新按照矩阵形式进行排列即可得到插值近似的刚度矩阵，该方法可以称为 MDEIM(matrix discrete empirical interpolation method)。

值得注意的是，对于求解带有阻尼的结构动力学问题，当其阻尼矩阵为时变或者非线性变化时，也可通过上述 POD-DEIM/MDEIM 方法进行模型降阶，首先搜集阻尼矩阵的快照集，进行奇异值分解得到一组基底向量  $Z_m$ ，再采用 DEIM/MDEIM 方法生成插值位置坐标向量  $\phi$ ，即可构造阻尼矩阵的插值矩阵  $D$ ，进而实现阻尼矩阵的快速计算。

当获得插值位置向量  $\phi$  之后，需要计算这些位置处的元素值，而每个位置元素均有与之相对应

的控制点，根据 NURBS 几何以及 NURBS 基函数的性质，每个控点均对应一个跨  $(p+1)$  个单元的基函数，因此需要在不同单元上计算该基函数对于非线性项的贡献，基于这一规律，即可以快速地计算出位置  $\phi$  处的值，从而得到整个非线性项的近似表达。

## 4 数值算例

### 4.1 两端固支半圆弧曲梁

如图 4 所示为两端固支半圆弧曲梁模型，其横截面宽度与高度分别为  $b = h = 25.4$  mm，曲梁半径  $R = 1705$  mm，弹性模量  $E = 68\,975$  MPa，密度为  $\rho_0 = 2.6086 \times 10^{-9}$  t/mm<sup>3</sup>。

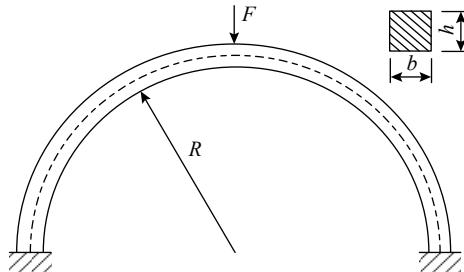


图 4 两端固支半圆弧曲梁模型  
Fig. 4 Half-circle arc with clamped boundary conditions at both ends

首先，研究等几何曲梁单元的收敛特性。该曲梁中部受集中力载荷  $F = 100$  N，分别采用 2、3、4 次 NURBS 单元进行离散，并进行几何非线性静力分析，其中点位移的收敛曲线如图 5 所示。作为对比，图 5 中列出了 ABAQUS 参考值，其采用了包含剪切自由度的 B21 铁木辛柯梁单元，并且采用了缩减积分来控制剪切和薄膜闭锁。对比结果显示，当采用 3 阶和 4 阶 NURBS 单元时，等几何模型收敛速度快于 ABAQUS 梁单元；当阶数较低为 2 阶时，收敛速度较慢。主要原因：本文采用的等几何曲梁单元为无剪切自由度的欧拉-伯努利梁单元，当阶数较低时，存在薄膜闭锁问题，当提升单元阶数时，薄膜闭锁得到显著缓解，因而提升了收敛速度。

对于非线性动力学分析，分别采用 2、3、4 次 NURBS 单元，单元数量为 34，其中部受集中力载荷  $F = 3115$  N，加载时间历程为 0.07 s，时间步长为  $7 \times 10^{-4}$  s，共 100 时间步。在线下 (offline) 计算过程中，首先对曲梁结构进行动力学分析，搜集每个时间步所对应的位移向量与刚度矩阵向

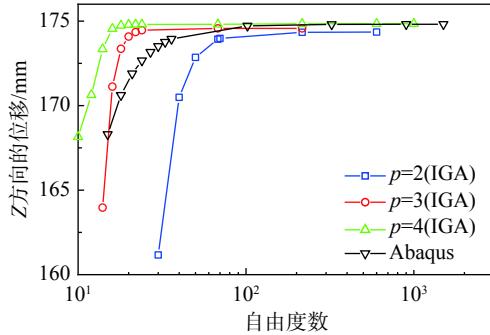
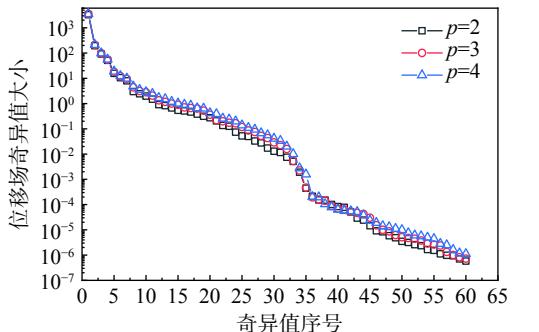


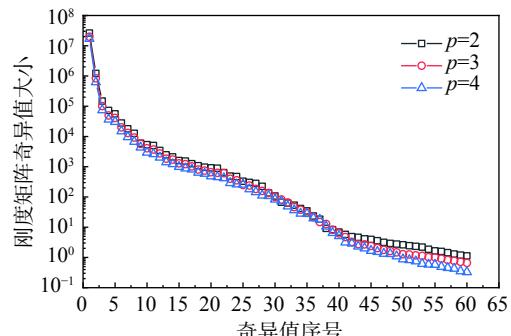
图 5 两端固支半圆弧曲梁位移收敛曲线(几何非线性)

Fig. 5 Convergence studies of the half-circle arc beam(geometrically nonlinear)

量,再对位移以及刚度矩阵向量快照集合 $\mathbf{U}_{\text{snap}}$ 和 $\mathbf{K}_{T_{\text{snap}}}$ 采用奇异值分解,得到基底向量 $\mathbf{Z}^U$ 、 $\mathbf{Z}^K$ 以及对应的奇异值 $\Sigma^U$ 、 $\Sigma^K$ 。图 6 所示为不同阶次 NURBS 单元的位移以及刚度矩阵向量所对应的奇异值分布图,可以看出阶次变化对奇异值影响不大。



(a) 不同阶次NURBS单元位移快照集合的奇异值



(b) 不同阶次NURBS单元刚度矩阵快照集合的奇异值

图 6 两端固支半圆弧曲梁奇异值

Fig. 6 Singular values of displacement snapshots and stiffness matrix snapshots for polynomial degrees 2, 3, 4 for clamped half-circle arc

选取  $k = 20$  阶位移基底向量作为模型降阶基底,选取  $m = 15$  阶刚度矩阵基底向量作为 MDEIM 基底,根据误差估计式(39)计算可得逼近误差为  $10^{-6}\%$  量级,具有足够的精度。

线上(online)计算采用与线下计算相同的载荷步长、加载时间历程及载荷大小,计算结果如图 7 所示。由图可见,当 NURBS 单元为 2 阶时,全阶模型与降阶模型的位移载荷曲线与 ABAQUS 参考值有一定偏差,这主要是由于 2 阶 NURBS 单元存在一定的薄膜闭锁现象,使其刚度偏大,从而导致了偏差,当 NURBS 单元阶数升高为 3 阶、4 阶时,其位移载荷曲线与 ABAQUS 参考值吻合良好,体现了升阶对于消除等几何曲梁单元闭锁的效果,避免了构造无闭锁单元的麻烦。因此本算例采用 3 阶 NURBS 基函数进行后续计算。

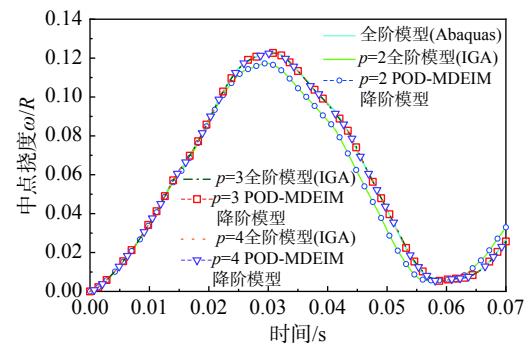


图 7 两端固支半圆弧曲梁载荷-位移曲线  
Fig. 7 Load-displacement response of half-circle arc beam

图 8、图 9 所示为采用全阶以及降阶模型所获得的曲梁中点的运动轨迹对比图以及两者差值的分布图。由于所选模型是左、右对称的,因此其  $x$  方向位移较小,可忽略不计,观察  $y$  方向位移可以发现,降阶模型与原阶模型位移范围基本一致(如图 8 所示),误差范围在  $-1.25 \text{ mm} \sim 0.75 \text{ mm}$ (如图 9 所示),无量纲化后约为  $10^{-4}$  量级,表明降阶模型具有较高的精度。

降阶模型的计算时间对比见表 1。由表可见,当只采用 POD 模型降阶方法时,其计算时间相比

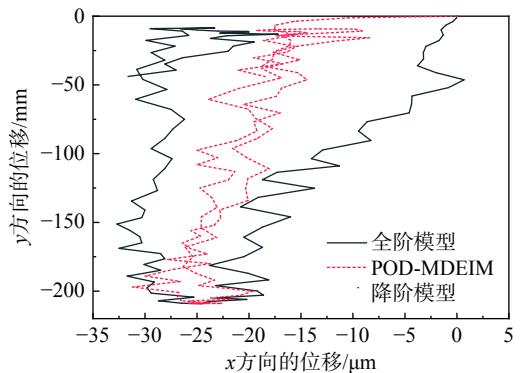


图 8 两端固支半圆弧曲梁中点轨迹对比图

Fig. 8 Comparison of the paths traced by the mid-point of the half-circle arc beam obtained using the FOM and ROM

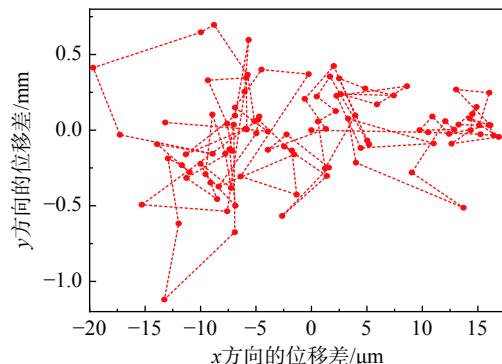


图 9 两端固支半圆弧曲梁降阶与全阶模型位移差值图  
Fig. 9 Difference of mid-point displacement between FOM and ROM for half-circle arc beam

全阶模型提升有限；当只选取前 2 阶基底作为模型降阶基底时，其计算时间加速率(时间比)仅为 1.4，效率提升较为有限。这主要是由于 POD 降阶模型需要重复计算曲梁的刚度矩阵所导致。当采用 POD-MDEIM 降阶模型时，其计算时间加速率为 8.2，显然，MDEIM 方法显著降低了刚度矩阵的计算时间，从而大大提升了降阶模型的求解效率。

表 1 两端固支半圆弧曲梁降阶模型计算时间对比  
Table 1 Comparisons of computational time for reduced order models of half-circle arc beam

计算模型	全阶模型	POD降阶模型				POD-MDEIM 降阶模型 $k=20$ $m=15$
		$k=2$	$k=3$	$k=5$	$k=15$	
计算时间/s	302.9	208.9	212.2	234.3	242.4	36.9
时间比	1	1.4	1.4	1.3	1.2	8.2

表 2 所示为采用 POD-MDEIM 方法所得到的刚度矩阵列向量的插值位置以及包含该位置的单元编号。由表可见，对于两端固支半圆弧曲梁模型，只需计算 15 个位置处的刚度矩阵值即可通过插值矩阵  $\mathbf{D}$  对刚度矩阵列向量进行重构，但由于每个 NURBS 基函数的支撑区域包含  $p+1$  个节点区间，因此所涉及的单元编号数量相比插值位置的个数更多。

图 10 所示为不同单元数量对降阶模型计算效率的影响。可见，降阶模型与全阶模型的计算时间随着单元数量的增大呈线性增长趋势，体现了该降阶模型对于不同模型的适应性。

#### 4.2 一端固支阿基米德螺旋曲梁

如图 11 所示为一端固支的阿基米德螺旋曲梁模型，几何描述为  $r = 5 + 2\theta/m, \theta \in [0, 2\pi]$ ，另一端  $\xi = 1$  处受集中力  $F = 80$  N 载荷，横截面宽度和

表 2 两端简支曲梁刚度矩阵 MDEIM 插值位置  
Table 2 MDEIM Positions for stiffness matrix of simply supported arc beam

位置 $\phi_i$	行 $(i)$	列 $(j)$	单元编号 $e$	位置 $\phi_i$	行 $(i)$	列 $(j)$	单元编号 $e$
223	1	3	1	7057	64	64	19,20,21,22
225	3	3	1	7615	67	69	20,21,22,23
2689	25	25	6,7,8,9	7953	72	72	33,34,35,36
3697	34	34	9,10,11,12	8961	81	81	24,25,26,27
3699	36	34	9,10,11,12	10081	91	91	28,29,30,31
4371	42	40	11,12,13,14	10753	97	97	30,31,32,33
5599	49	51	14,15,16,17	11091	102	100	31,32,33,34
6607	58	60	17,18,19,20	—	—	—	—

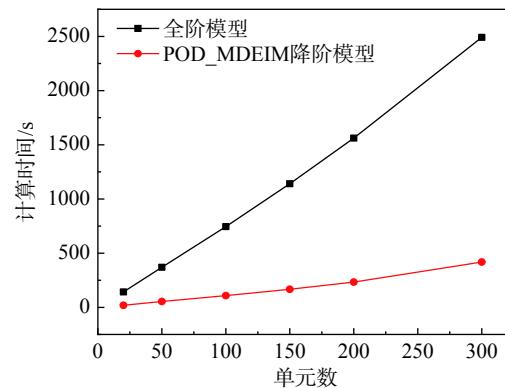


图 10 两端固支半圆弧曲梁降阶、全阶模型计算时间对比  
Fig. 10 Comparison of computational time for different reduced order models of half-circle arc beam

高度分别为  $b=h=0.5$  m，弹性模量  $E = 1.2 \times 10^6$  Pa，密度  $\rho_0 = 1$  kg/m<sup>3</sup>，曲梁模型采用 3 次 NURBS 单元描述，单元数为 40。

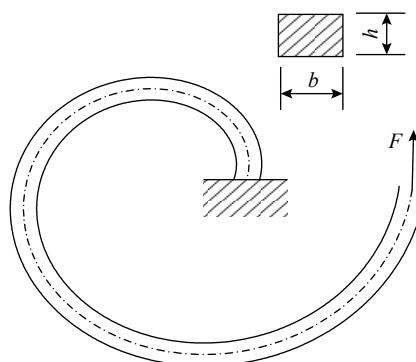


图 11 一端固支阿基米德螺旋梁  
Fig. 11 Archimedes spiral shaped beam with one end clamped

线下计算时，载荷时间历程为 10 s，共 300 个时间步。对位移及刚度矩阵快照集合  $\mathbf{U}_{\text{snap}}$  和  $\mathbf{K}_T \text{ snap}$  进行奇异值分解，得到奇异值分布(图 12)。

选取  $k = 23$  阶位移基底向量作为模型降阶基底，选取前  $m = 30$  阶刚度矩阵基底向量作为

MDEIM 基底。根据误差估计公式(39)可知, 所选取的位移以及刚度矩阵基底的逼近误差分别为  $1.85 \times 10^{-6}\%$  和  $6.81 \times 10^{-5}\%$ , 因此具有足够的精度。

线上(online)计算过程中采用与线下计算相同的载荷步长、加载时间历程及载荷大小, 计算结果如图13所示。降阶模型与全阶模型吻合良好, 表明降阶模型具有较高的精度。在计算时间上, 全阶模型计算时间为460.25 s, 而POD-MDEIM降阶模型计算时间为64 s, 速度提升率为13.8。

图14所示为阿基米德螺旋曲梁端点轨迹对比图, 图15所示为全阶模型与降阶模型曲梁在端点

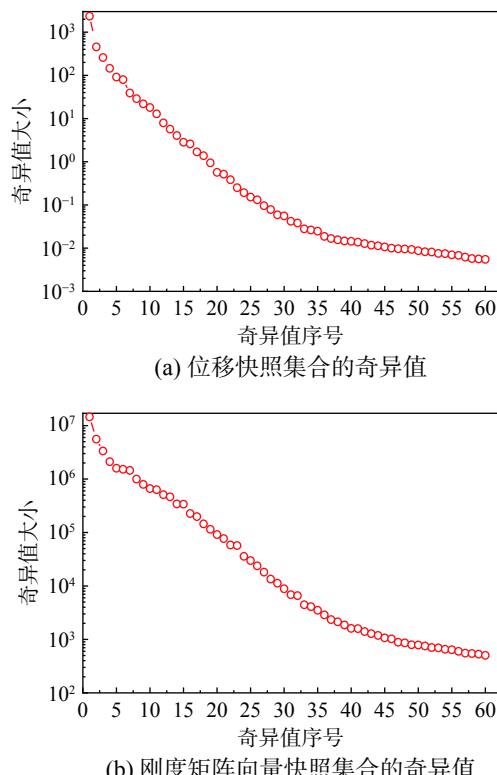


图12 一端固支阿基米德螺旋曲梁奇异值

Fig. 12 Singular values of displacement snapshots and stiffness matrix snapshots for clamped Archimedes spiral beam

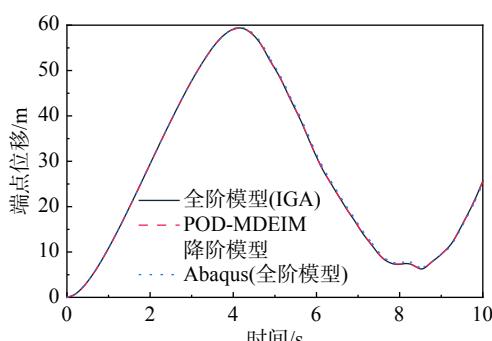


图13 一端固支阿基米德螺旋曲梁载荷位移曲线

Fig. 13 Load-displacement curve of clamped Archimedes spiral arc beam

处的位移差值。由图可见, 降阶模型与全阶模型的位移误差较小,  $x$ 方向位移误差约为  $10^{-5}$  m,  $y$ 方向位移误差约为  $10^{-6}$  m 的水平, 体现了降阶模型的计算精度。

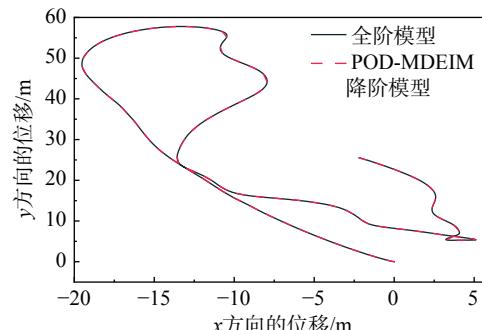


图14 一端固支阿基米德螺旋曲梁端点的轨迹对比图

Fig. 14 Comparison of the paths traced by the end-point of the Archimedes spiral beam obtained using the FOM and ROM

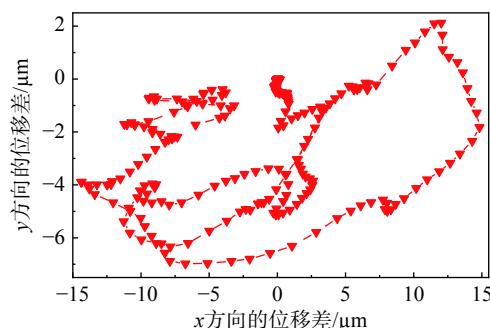


图15 阿基米德螺旋曲梁端点降阶与全阶模型位移差值图

Fig. 15 Difference of end-point displacement between FOM and ROM for the Archimedes spiral beam

#### 4.3 两端简支曲梁

如图16所示为一两端简支曲梁模型, 中点处  $\xi=0.5$  受集中力  $F=800$  N载荷, 其跨度  $L=10$  m, 横截面宽度和高度分别为  $b=h=0.5$  m, 曲梁采用二次NURBS曲线描述, 单元数为1, 因此具有3个控制点, 其中间控制点坐标为  $P_2=(5, 4)$  m。曲梁弹性模量  $E=1.2 \times 10^6$  Pa, 密度  $\rho_0=1$  kg/m<sup>3</sup>, 为了获得较高计算精度, 将曲梁细化为37个单元, 阶数提升为3阶, 基于等几何分析的特点, 对曲梁进行细化不会改变其几何形状。

线下计算时, 载荷时间历程为1 s, 时间步长设为0.01 s, 共100个时间步。对位移以及刚度矩阵快照集合  $\mathbf{U}_{\text{snap}}$  和  $\mathbf{K}_{T\text{ snap}}$  进行奇异值分解, 得到奇异值分布(如图17所示)。

选取  $k=20$  阶位移基底向量作为模型降阶基底, 选取前  $m=15$  阶刚度矩阵基底向量作为MDEIM基底。根据误差估计公式(39)可知, 选取

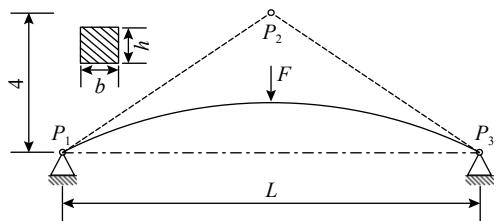
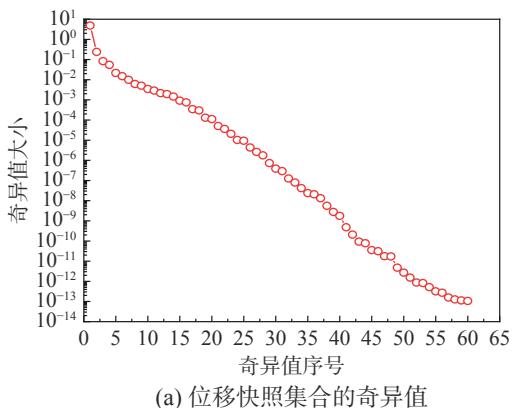
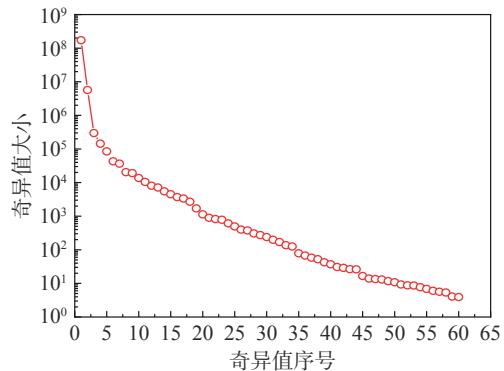


图 16 两端简支曲梁模型

Fig. 16 Arc beam with simply supported boundary conditions at both ends



(a) 位移快照集合的奇异值



(b) 刚度矩阵向量快照集合的奇异值

图 17 两端简支曲梁奇异值

Fig. 17 Singular values of displacement snapshots and stiffness matrix snapshots for simply supported arc beam

的位移及刚度矩阵基底的逼近误差分别为  $1.91 \times 10^{-8}\%$  和  $1.34 \times 10^{-7}\%$ ，因此具有足够的精度。通过 MDEIM 插值算法可以得到插值位置向量  $\phi$ ，继而得到位置向量中每个元素在刚度矩阵中对应的行和列，从而可以得到包含这些特定位置元素的单元编号（见表 3）。

观察表 3 可知，采用 MDEIM 算法，选取前 15 阶插值基底，需要计算 15 个位置处的刚度矩阵值，涉及的单元编号为：1, 8~25, 30~37，共 27 个单元，但在每个单元中，无需计算所有的元素值，只需计算给定位置处的元素，因此，可以显著提升计算效率。

表 3 两端简支曲梁刚度矩阵 MDEIM 插值位置  
Table 3 MDEIM Positions for stiffness matrix of simply supported arc beam

位置 $\phi_i$	行 $i$	列 $j$	单元编号 $e$	位置 $\phi_i$	行 $i$	列 $j$	单元编号 $e$
243	3	3	1	8953	73	75	22,23,24,25
3752	32	32	8,9,10,11	11 738	98	98	30,31,32,33
4237	37	36	10,11,12	12 827	107	107	33,34,35,36
4841	41	41	11,12,13,14	13 795	115	115	36,37
5082	42	43	12,13,14	13 797	117	115	36,37
5814	54	49	15,16,17	14 037	117	117	36,37
7135	55	60	17,18,19	14 158	118	118	37
8108	68	68	20,21,22,23	—	—	—	—

线上 (online) 计算过程中采用与线下计算相同的载荷步长、加载时间历程及载荷大小，计算结果如图 18 所示，降阶模型与全阶模型吻合良好，表明降阶模型具有较高的精度。在计算时间上，全阶模型计算时间为 281.6 s，而 POD-MDEIM 降阶模型计算时间为 33.2 s，速度提升率为 8.5。

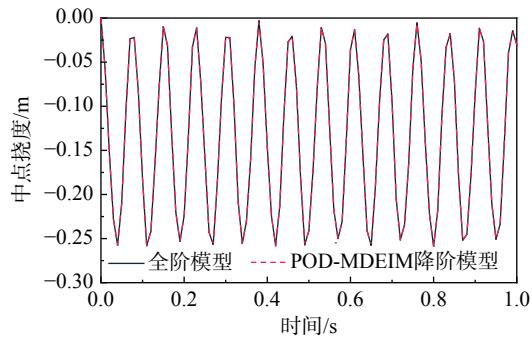


图 18 两端简支曲梁载荷-位移曲线

Fig. 18 Load-displacement curve of simply supported arc beam

图 19 所示为两端简支曲梁中点轨迹对比图，图 20 所示为全阶模型与降阶模型曲梁在中点处的位移差值。由图可见，降阶模型与全阶模型的位移误差较小， $y$  方向位移误差约为  $10^{-6}$  m 的水平，体现了降阶模型的计算精度。

图 21 所示为两端简支曲梁全阶模型与降阶模型的频率响应对比图，频率响应可以通过曲梁模型中点位移的快速傅里叶变换得到。由图可见，在频率范围内，降阶模型与原阶模型亦吻合良好。

保持载荷时间历程及时间步长不变，将外载荷（单位：N）变为  $F = -800 \sin(36t)$ ，通过在线模式进行非线性动力学计算，其载荷位移曲线如图 22 所示。由图可见，变换载荷后，降阶模型所得结果与原阶模型吻合良好，拓展了降阶模型的适用范围。在计算时间上，全阶模型所需计算时间为

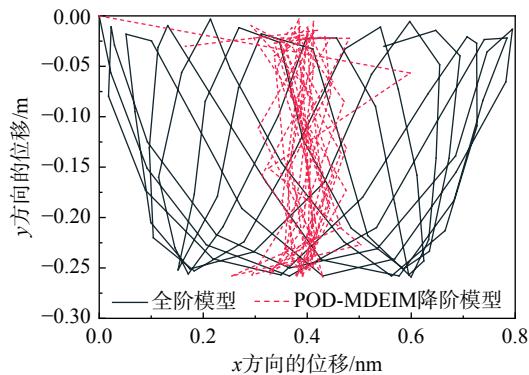


图 19 两端简支曲梁中点的轨迹对比图

Fig. 19 Comparison of the paths traced by the mid-point of the arc beam obtained using the FOM and ROM

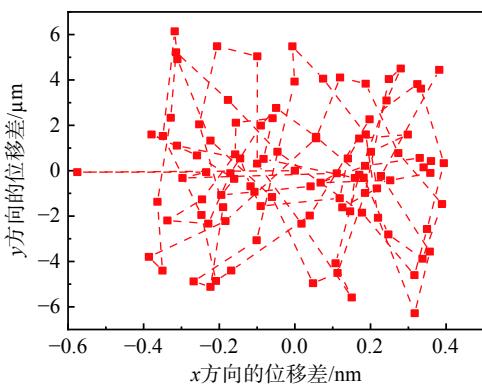


图 20 两端简支曲梁降阶与全阶模型位移差值图

Fig. 20 Difference of mid-point displacement between FOM and ROM for the arc beam

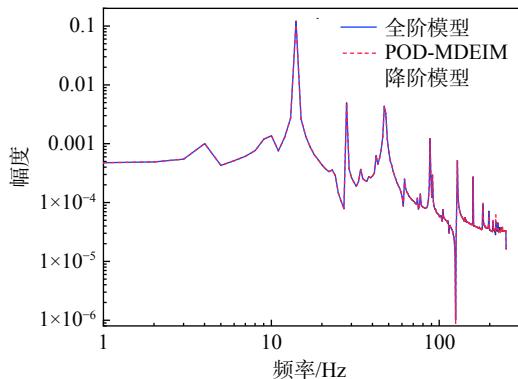


图 21 两端简支曲梁频率响应对比图

Fig. 21 Comparison of frequency response obtained using FOM and ROM

252.9 s, POD-MDEIM 降阶模型计算时间为 33.5 s, 速度提升率为 7.5。

图 23、图 24 分别为曲梁受外载荷  $F = -800 \sin(36t)$  时, 其中点轨迹对比图以及位移差值图, 可以观察到, 降阶模型与全阶模型在  $y$  方向的位移误差约为  $10^{-5}$  m 的水平。如图 25 所示为改变外载荷后, 曲梁全阶模型与降阶模型频率响应

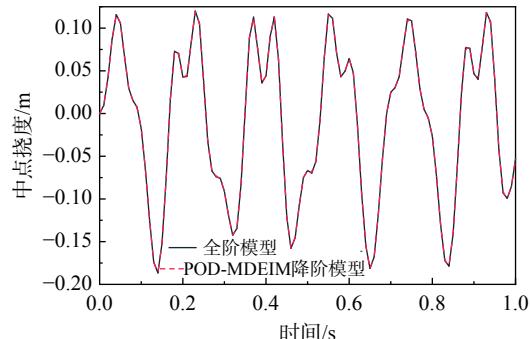
图 22 两端简支曲梁载荷位移曲线 ( $F = -800 \sin(36t)$ )

Fig. 22 Load-displacement curve of simply supported arc beam ( $F = -800 \sin(36t)$ )

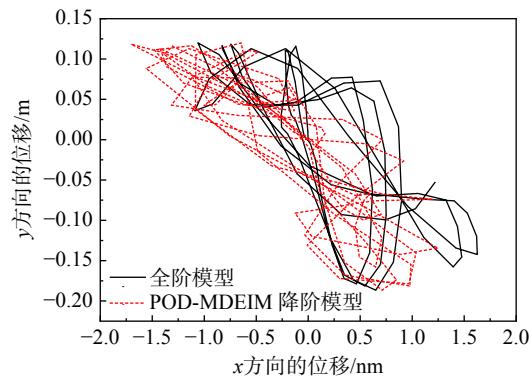
图 23 两端简支曲梁中点的轨迹对比图 ( $F = -800 \sin(36t)$ )

Fig. 23 Comparison of the paths traced by the mid-point of the arc beam obtained using the FOM and ROM ( $F = -800 \sin(36t)$ )

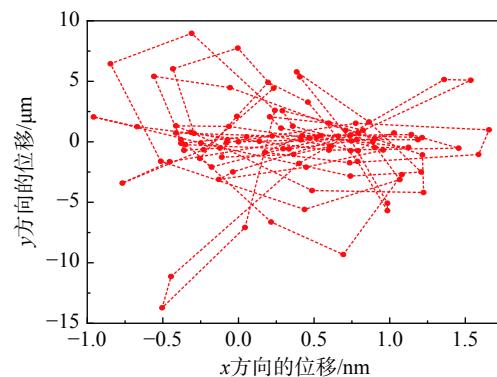
图 24 两端简支曲梁降阶与全阶模型位移差值图 ( $F = -800 \sin(36t)$ )

Fig. 24 Difference of mid-point displacement between FOM and ROM for the arc beam ( $F = -800 \sin(36t)$ )

对比图, 两者吻合良好。从图 23~图 25 中可以观察到, 本文提出的降阶模型对于变载荷情况也能得到高精度的解。

#### 4.4 参数化两端简支曲梁

图 26 所示为两端简支曲梁的参数化模型, 曲梁模型参数与算例 4.3 相同。其由二阶 NURBS

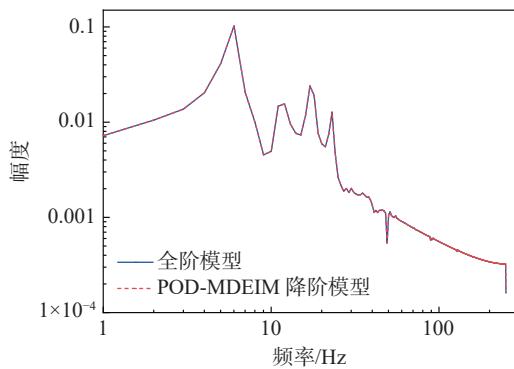
图 25 两端简支曲梁频率响应对比图 ( $F = -800 \sin(36t)$ )

Fig. 25 Comparison of frequency response obtained using FOM and ROM ( $F = -800 \sin(36t)$ )

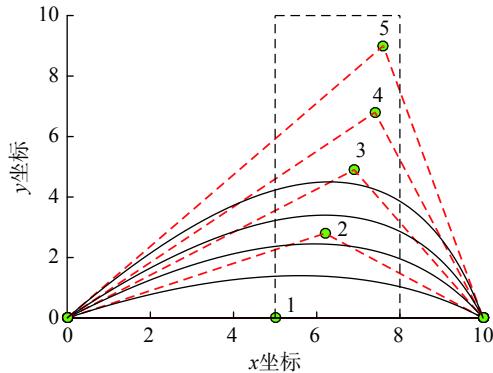


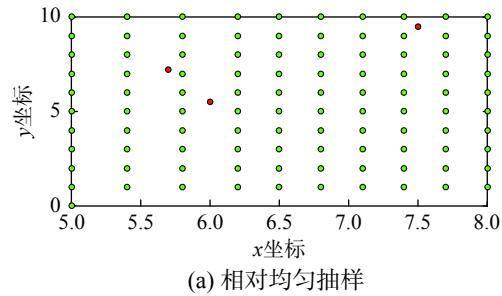
图 26 两端简支曲梁的参数化模型

Fig. 26 Parametric model of simply supported curved beams  
曲线描述, 单元数为 1, 通过改变中间控制点  $P_2$  的位置坐标可以实现曲梁几何模型的参数化。假设中间控制点  $P_2$  可在  $x \in [2, 8]$  m,  $y \in [0, 10]$  m 范围内取任意值, 由于对称性, 故只需考虑范围  $x \in [5, 8]$  m,  $y \in [0, 10]$  m (如图 26 中虚线方框所示)。

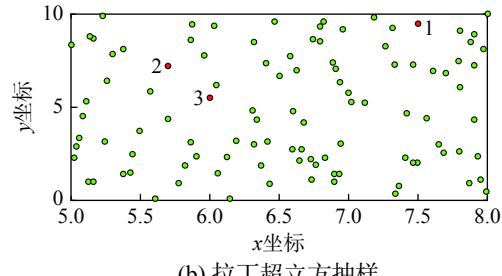
曲梁模型中点处 ( $\xi = 0.5$ ) 受集中力载荷  $F = -800$  N, 为了获得较高计算精度, 将曲梁细化为 31 个单元, 阶数提升为 3 阶。由于等几何分析模型与几何模型保持一致, 故无需进行额外的模型转换等工作, 并且, 模型的细化并不会改变其几何形状, 这对模型的参数化提供了便利。

为了准确捕捉不同参数下结构的位移载荷响应特征, 本算例采用了两种不同抽样方法, 即相对均匀抽样 (抽样方法 1) 以及拉丁超立方抽样 (抽样方法 2), 在范围  $x \in [5, 8]$  m,  $y \in [0, 10]$  m 中生成控制点  $P_2$  的坐标样本, 如图 27 中绿色控制点所示, 其中, 相对均匀抽样点数为 101 个, 拉丁超立方抽样点数为 100 个。

线下计算时, 分别对每个抽样控制点所对应



(a) 相对均匀抽样

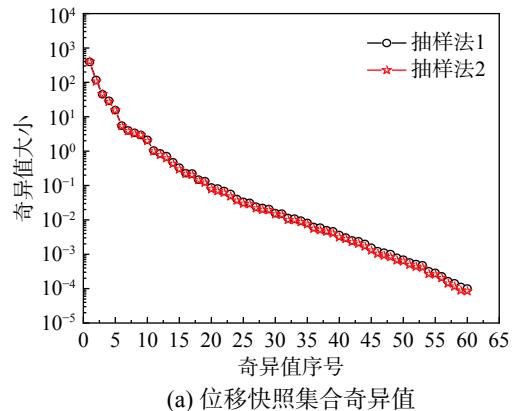


(b) 拉丁超立方抽样

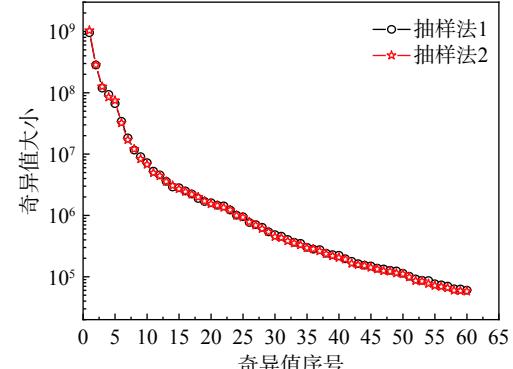
图 27 控制点  $P_2$  抽样分布图

Fig. 27 Sampling positions of the control point  $P_2$

的曲梁模型进行非线性动力学分析, 并搜集位移以及刚度矩阵快照集合  $\mathbf{U}_{\text{snap}}$  和  $\mathbf{K}_{T \text{ snap}}$ 。对两种抽样方法所获得的快照集合分别进行奇异值分解, 得到奇异值如图 28 所示。



(a) 位移快照集合奇异值



(b) 刚度矩阵向量快照集合奇异值

图 28 参数化曲梁奇异值

Fig. 28 Singular values of displacement snapshots and stiffness matrix snapshots for parameterized arc beam

选取  $k = 20$  阶位移基底向量作为模型降阶基底, 选取前  $m = 50$  阶刚度矩阵基底向量作为 MDEIM 基底。根据误差估计公式(39)可知, 所选取的位移以及刚度矩阵基底的逼近误差分别为:  $1.23 \times 10^{-5}\%$  和  $9.78 \times 10^{-6}\%$  (抽样法 1),  $9.06 \times 10^{-6}\%$  和  $7.37 \times 10^{-6}\%$  (抽样法 2), 因此具有足够的精度。

在线上计算模式中, 为了验证 POD-MDEIM 模型降阶方法的精度及可靠性, 在范围  $x \in [5, 8] \text{ m}$ ,  $y \in [0, 10] \text{ m}$  中任意选择与抽样点不相重合的控制点, 建立曲梁模型, 进行非线性动力学降阶模型计算。选取控制点  $P_2$  坐标为  $(7.5, 9.5) \text{ m}$ ,  $(5.7, 7.2) \text{ m}$ 。基于上述两种抽样方法所构建的降阶模型, 进行非线性动力学分析, 其位移载荷响应如图 29 所示, 可以观察到, 对于不同抽样方法, POD-MDEIM 降阶模型所得结果与原阶模型吻合良好, 验证了所提出的降阶模型的可靠性以及准确性。

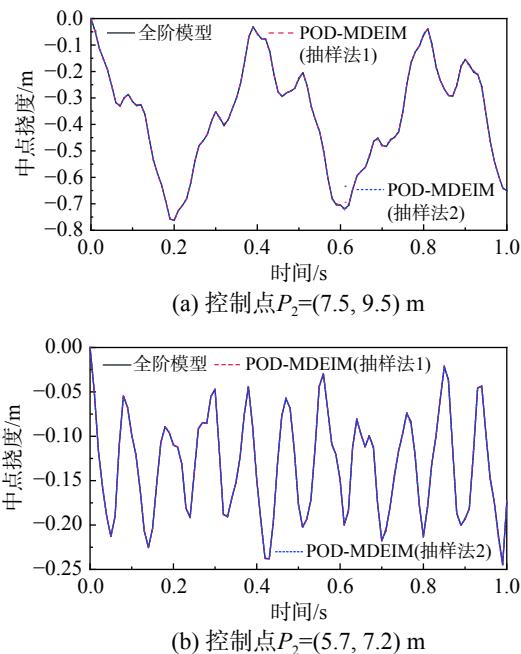
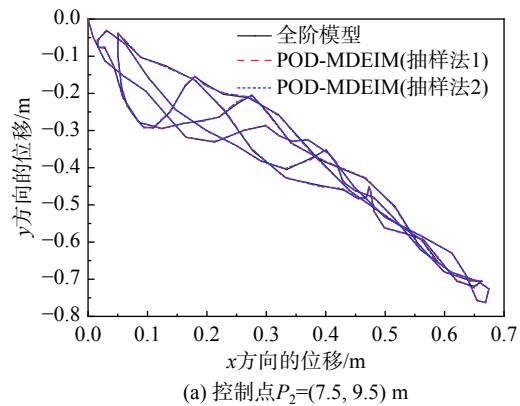


图 29 不同抽样方法所对应的位移载荷响应

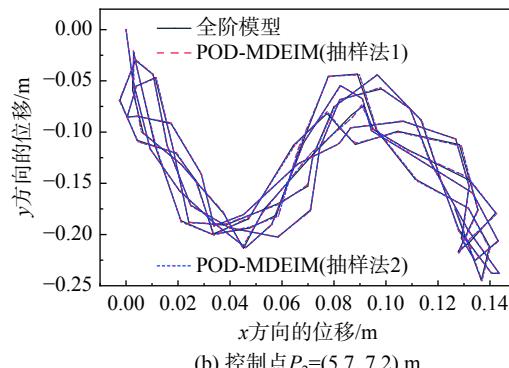
Fig. 29 Load-displacement response of half-circle arc beam

图 30、图 31 所示分别为  $P_2 = (7.5, 9.5) \text{ m}$  及  $P_2 = (5.7, 7.2) \text{ m}$  时, 降阶模型与全阶模型在  $\xi = 0.5$  处的轨迹对比图以及位移差值图。由于参数化曲梁不再是对称模型, 因此需要考虑其  $x$  方向位移, 可以观察到, 对于不同抽样方法, 降阶模型与全阶模型在  $\xi = 0.5$  处的运动轨迹均吻合良好, 且位移误差约为  $10^{-3} \text{ m}$  的水平。

图 32 所示为参数化曲梁降阶模型与全阶模型的频率响应对比图。可以观察到, 对于不同取样



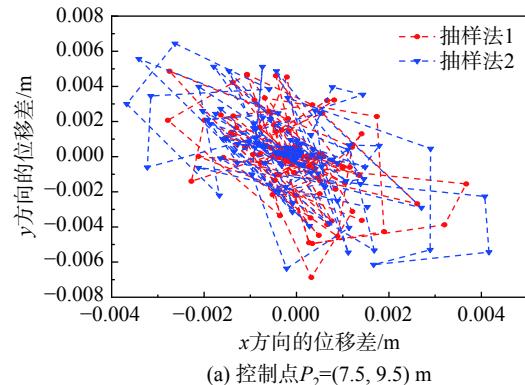
(a) 控制点  $P_2 = (7.5, 9.5) \text{ m}$



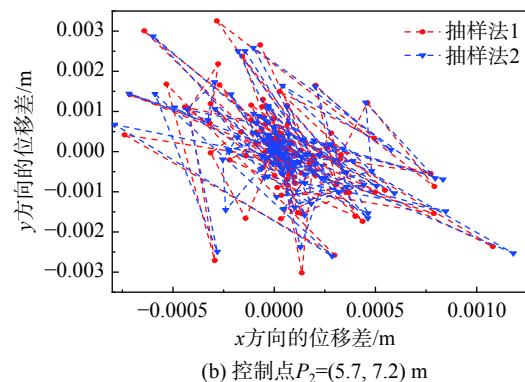
(b) 控制点  $P_2 = (5.7, 7.2) \text{ m}$

图 30 参数化曲梁  $\xi = 0.5$  处的轨迹对比图

Fig. 30 Comparison of the paths traced at the position of  $\xi = 0.5$  for the parameterized arc beam obtained using the FOM and ROM



(a) 控制点  $P_2 = (7.5, 9.5) \text{ m}$



(b) 控制点  $P_2 = (5.7, 7.2) \text{ m}$

图 31 参数化曲梁降阶与全阶模型位移差值图 ( $\xi = 0.5$ )

Fig. 31 Difference of the displacement between FOM and ROM for the parameterized arc beam ( $\xi = 0.5$ )

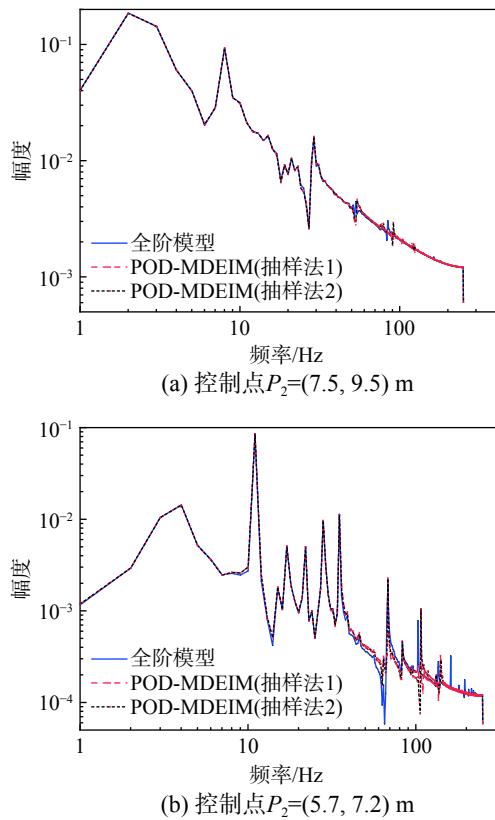


图 32 参数化曲梁频率响应对比图

Fig. 32 Comparison of frequency response obtained using FOM and ROM for the parameterized arc beam

方法以及不同控制点位置，降阶模型与全阶模型在频域内吻合良好。

为了研究本文所提出的降阶模型对于变载荷以及变时间步长的适应性，以下分 2 种情况进行讨论：首先，保持载荷时间历程 (1 s) 和时间步长 (0.01 s) 不变，外力载荷 ( $N$ ) 变为  $F = -800 \sin(48t)$ ；其次，保持上述载荷时间历程和外载荷大小 ( $N$ ) 不变 ( $F = -800 \sin(48t)$ )，减小时间步长为 0.005 s，选择控制点  $P_2$  坐标为 (6, 5.5) m。针对上述两种情况分别对两种抽样方法所建立的降阶模型进行非线性动力学计算，所得载荷时间历程曲线如图 33 和图 34 所示，从图中可以观察到，对于不同载荷以及时间步长，采用不同抽样方法所建立的降阶模型与原阶模型吻合良好，体现了降阶模型的稳定性。

图 35 及图 36 所示为变载荷、变时间步长情况下参数化曲梁在 ( $\xi = 0.5$ ) 处轨迹对比图以及位移差值图。由图可见，对于两种不同抽样方法，降阶模型与全阶模型均吻合良好，位移误差约为  $10^{-3}$  m 的水平。图 37 所示为降阶模型与全阶模型频率响应对比图，两者吻合良好。图 35~图 37 体现了参

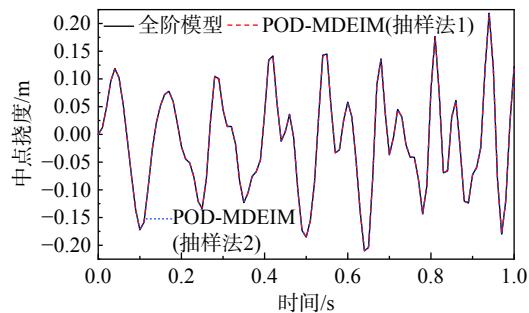


图 33 不同抽样方法所对应的位移载荷响应 ( $\xi = 0.5$ )  
( $F = -800 \sin(48t)$ )

Fig. 33 Comparisons of load-displacement histories of the parameterized arc beam at ( $\xi = 0.5$ ) ( $F = -800 \sin(48t)$ )

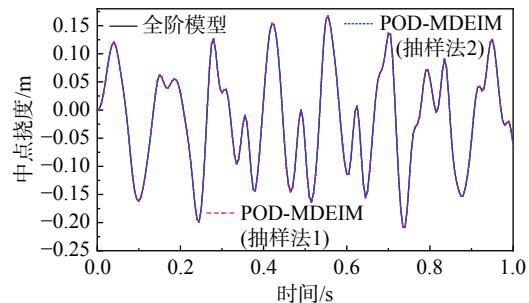


图 34 不同抽样方法所对应的位移载荷响应 ( $\xi = 0.5$ )  
( $F = -800 \sin(48t)$ , 时间步长: 0.005 s)

Fig. 34 Comparisons of load-displacement histories of the parameterized arc beam at ( $\xi = 0.5$ )  
( $F = -800 \sin(48t)$ , time step: 0.005 s)

数化降阶模型对于不同载荷以及不同抽样方法的适应性。

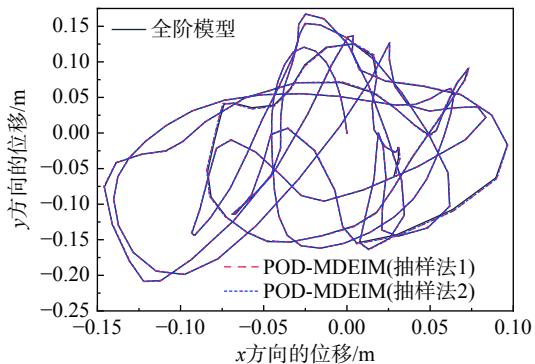


图 35 参数化曲梁 ( $\xi = 0.5$ ) 处的轨迹对比图  
( $F = -800 \sin(48t)$ , 时间步长: 0.005 s)

Fig. 35 Comparison of the paths traced at the position of ( $\xi = 0.5$ ) for the parameterized arc beam obtained using the FOM and ROM ( $F = -800 \sin(48t)$ , time step: 0.005 s)

降阶模型的计算时间对比如表 4 所示。由表可见，POD-MDEIM 降阶模型对于计算效率的提升较为显著，且对于不同抽样方法、不同计算样本，以及不同的外载荷，均体现出了较高的速度提升效果，体现了降阶模型的稳定性及适应性。

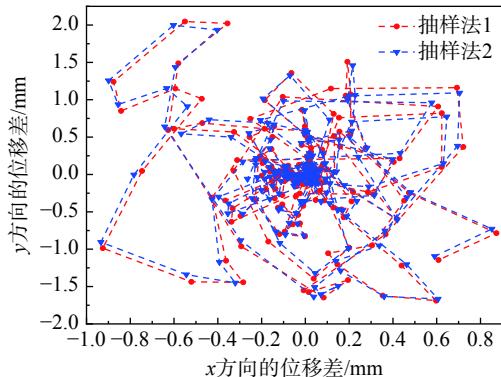


图 36 参数化曲梁降阶与全阶模型位移差值图  
( $\xi = 0.5$ ) ( $F = -800 \sin(48t)$ , 时间步长: 0.005 s)

Fig. 36 Difference of the displacement between FOM and ROM for the parameterized arc beam ( $\xi = 0.5$ )  
( $F = -800 \sin(48t)$ , time step: 0.005 s)

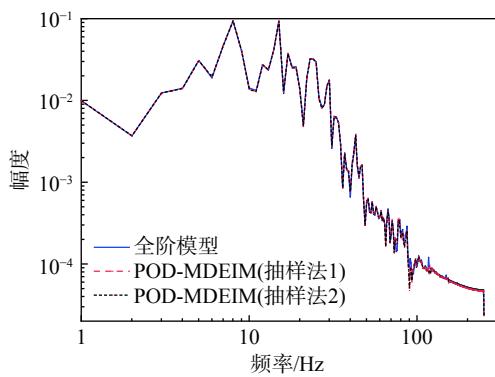


图 37 参数化曲梁频率响应对比图  
( $F = -800 \sin(48t)$ , 时间步长: 0.005 s)

Fig. 37 Comparison of frequency response obtained using FOM and ROM for the parameterized arc beam  
( $F = -800 \sin(48t)$ , time step: 0.005 s)

表 4 参数化曲梁降阶模型计算时间对比

Table 4 Comparisons of computational time for reduced order models of parameterized arc beam

控制点 $P_2$ 坐标	计算时间/s			速度提升率	
	全阶模型	POD-MDEIM			
		降阶模型	抽样1	抽样2	
$P_2 = (7.5, 9.5)$ m $F = -800$ N	237.0	41.1	43.5	5.8	5.4
$P_2 = (5.7, 7.2)$ m $F = -800$ N	242.1	39.0	37.6	6.2	6.4
$P_2 = (6, 5.5)$ m $F = -800 \sin(48t)$ N	402.0	78.1	71.6	5.1	5.6

## 5 结论

本文结合等几何分析、POD 以及离散经验插值方法研究了参数化、平面曲梁结构的非线性动力学模型降阶问题。等几何分析具有几何精确、高阶连续等特点，较适合于薄壁类结构（比如曲

梁）的参数化描述以及力学性能分析，且无需网格生成等前处理过程，简化了参数化模型的非线性动力学分析。

POD-DEIM 模型降阶方法通过寻找非线性项的插值位置向量来构造插值矩阵，从而在非线性动力学计算时，只需计算少数选定位置处的元素，显著降低了非线性项的计算量，大大提升了计算效率。

在参数化、非线性动力学分析方面，本文构造的降阶模型方法对于不同抽样方法显示出了良好的适应性，其对于参数取样空间中的几何模型，展示了良好的计算精度与效率。

此外，本文所提出的 POD-DEIM 降阶模型也适用于变载荷以及变载荷步长的情形，因此，具有良好的适应性与稳定性。

综上所述，基于等几何分析的 POD-DEIM 模型降阶方法有效提升了平面曲梁结构的非线性动力学计算效率，可以推广到复杂曲面类薄壳结构的非线性动力学分析中。

## 参考文献：

- [1] Tiso P, Jansen E, Abdalla M. Reduction method for finite element nonlinear dynamic analysis of shells [J]. AIAA Journal, 2011, 49: 2259 – 2304.
- [2] Nickell R E. Nonlinear dynamics by mode superposition [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1976, 7: 107 – 129.
- [3] Idelsohn S R, Cardona A A. A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49: 253 – 279.
- [4] Idelsohn S R, Cardona A A. A load-dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics [J]. Computers and Structures, 1985, 20: 203 – 210.
- [5] Krysl P L, Marsden J. Dimensional model reduction in nonlinear finite element dynamics of solids and structures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51: 479 – 504.
- [6] 郑保敬, 梁钰, 高效伟, 等. 功能梯度材料动力学问题的 POD 模型降阶分析 [J]. 力学学报, 2018, 50(4): 787 – 797.  
Zheng Baojing, Liang Yu, Gao Xiaowei, et al. Analysis for dynamic response of functionally graded materials using POD based reduced order model [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(4): 787 – 797. (in Chinese)
- [7] Chaturanabut S. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation [D]. USA: Rice University, 2011.

- [8] Astrid P. Reduction of process simulation models: A proper orthogonal decomposition approach [D]. The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 2004.
- [9] Rewienski M, White J. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices [J]. *IEEE Transactions on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, 22: 155 – 170.
- [10] Gaonkar A K, Kulkarni S S. Model order reduction for dynamic simulation of slender beams undergoing large rotations [J]. *Computational Mechanics*, 2017, 59: 809 – 829.
- [11] Gaonkar A K, Kulkarni S S. Model order reduction for dynamic simulation of beams with forcing and geometric nonlinearities [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, 76: 50 – 62.
- [12] 满兴博, 伍晓红, 孙清. 采用非线性Galerkin方法的柔性梁模型降阶研究[J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(7): 113 – 119.  
Man Xingbo, Wu Xiaohong, Sun Qing. Study on the model order reduction of flexible beam based on nonlinear Galerkin method [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2015, 49(7): 113 – 119. (in Chinese)
- [13] Barrault M, Maday Y, Nguyen N C, et al. An "empirical interpolation" method: Application to efficient reduced basis discretization of partial differential equations [J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2004, 339: 667 – 672.
- [14] Grepl M A, Maday Y, Nguyen N C, et al. Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations [J]. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2007, 41: 575 – 605.
- [15] Galbally D, Fidkowski K, Wilcox K, et al. Non-linear model reduction for uncertainty quantification in large-scale inverse problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 81: 1581 – 1608.
- [16] Hesthaven J S, Rozza G, Stamm B. Certified reduced basis methods for parameterized partial differential equations [M]. Switzerland: Springer, 2016.
- [17] Prud'homme C, Rovas D V, Veroy K, et al. Reliable real-time solution of parameterized partial differential equations: Reduced-basis output bound methods [J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124: 70 – 80.
- [18] Balmes E. Parametric families of reduced finite element models: Theory and applications [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, 10: 381 – 394.
- [19] Huynh P, Rozza G, Sen S, et al. A successive constraint linear optimization method for lower bounds of parametric coercivity and inf-sup stability constants [J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2007, 345: 473 – 478.
- [20] Rinaldi M. Reduced basis method for isogeometric analysis: Application to structural problems [D]. Italy: Polytechnico Di Milano, 2014.
- [21] Dedden R J. Model order reduction using the discrete empirical interpolation method [D]. The Netherlands: Delft University of Technology, 2012.
- [22] Salmoiraghi F, Ballarin F, Heltai L, et al. Isogeometric analysis-based reduced order modelling for incompressible linear viscous flows in parameterized shapes [J]. *Advanced Modelling and Simulation in Engineering Sciences*, 2016, 3: 21.
- [23] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 4135 – 4195.
- [24] 徐岗, 李新, 黄章进, 等. 面向等几何分析的几何计算[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2015, 27(4): 570 – 581.  
Xu Gang, Li Xin, Huang Zhangjin, et al. Geometric computing for isogeometric analysis [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2015, 27(4): 570 – 581. (in Chinese)
- [25] 何宜谦, 王霄腾, 祝雪峰, 等. 求解粘弹性问题的时域自适应等几何比例边界有限元法[J]. *工程力学*, 2020, 37(2): 23 – 33.  
He Yiqian, Wang Xiaoteng, Zhu Xuefeng, et al. A temporally piecewise adaptive isogeometric SBFEM for viscoelastic problems [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(2): 23 – 33. (in Chinese)
- [26] 刘涛, 汪超, 刘庆运, 等. 基于等几何方法的压电功能梯度板动力学及主动振动控制分析[J]. *工程力学*, 2020, 37(12): 228 – 242.  
Liu Tao, Wang Chao, Liu Qingyun, et al. Analysis for dynamic and active vibration control of piezoelectric functionally graded plates based on isogeometric method [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(12): 228 – 242. (in Chinese)
- [27] 汪超, 谢能刚, 黄璐璐. 基于扩展等几何分析和混沌离子运动算法的带孔结构形状优化设计[J]. *工程力学*, 2019, 36(4): 248 – 256.  
Wang Chao, Xie Nenggang, Huang Lulu. Design and shape optimization of holed structures by extended isogeometric analysis and chaotic ion motion optimization [J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(4): 248 – 256. (in Chinese)
- [28] Kiendl J, Bletzinger K -U, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198: 3902 – 3914.
- [29] Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M C, et al. Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 276 – 289.
- [30] Hosseini S, Remmers J J C, Verhoosel C V, et al. An isogeometric solid-like shell element for nonlinear analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 95: 238 – 256.

- [31] Echter R, Oesterle B, Bischoff M. A hierachic family of isogeometric shell finite elements [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 254: 170 – 180.
- [32] Nagy A P, Abdalla M M, Gurdal Z. Isogeometric sizing and shape optimization of beam structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 1216 – 1230.
- [33] Weeger O, Narayanan B, Dunn M L. Isogeometric shape optimization of nonlinear, curved 3D beams and beam structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 345: 26 – 51.
- [34] Maurin F, Dede L, Spadoni A. Isogeometric rotation-free analysis of planar extensible-elastica for static and dynamic applications [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81: 77 – 96.
- [35] 夏阳, 廖科. 复杂三维曲梁结构的无闭锁等几何分析算法研究[J]. *工程力学*, 2018, 35(11): 17 – 25.  
Xia Yang, Liao Ke. Locking-free isogeometric analysis of complex three-dimensional beam structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(11): 17 – 25. (in Chinese)
- [36] Guo Y J, Zou Z H, Ruess M. Isogeometric multi-patch analyses for mixed thin shells in the framework of non-linear elasticity [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 380: 113771.
- [37] Guo Y J, Heller J, Hughes T J R, et al. Variationally consistent isogeometric analysis of trimmed thin shells at finite deformations, based on the STEP exchange format [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 336: 39 – 79.
- [38] Guo Y J, Do H, Ruess M. Isogeometric stability analysis of thin shells: From simple geometries to engineering models [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, 118: 433 – 458.
- [39] 宋敏. 带参数椭圆型方程的等几何分析及POD模型降阶研究[D]. 浙江: 浙江大学, 2019.  
Song Min. IGA and proper orthogonal decomposition for parameter dependent elliptic problems [D]. Zhejiang: Zhejiang University, 2019. (in Chinese)
- [40] Manzoni A, Salmoiraghi F, Heltai L. Reduced basis isogeometric methods (RB-IGA) for the real-time simulation of potential flows about parameterized NACA airfoils [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 284: 1147 – 1180.
- [41] Ding C S, Deokar R R, Lian H J, et al. Resolving high frequency issues via proper orthogonal decomposition based dynamic isogeometric analysis for structures with dissimilar materials [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 359: 112753.
- [42] Li S, Trevelyan J, Wu Z, et al. An adaptive SVD-Krylov reduced order model for surrogate based structural shape optimization through isogeometric boundary element method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 349: 312 – 338.
- [43] Khatir S, Wahab M A. Fast simulation for solving fracture mechanics inverse problems using POD-RBF XIGA and Jaya algorithm [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, 205: 285 – 300.
- [44] Luo K, Liu C, Tian Q, et al. An efficient model reduction method for buckling analyses of thin shells based on IGA [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 309: 243 – 268.
- [45] Piegl L, Tiller W. The NURBS book – Monographs in visual communication [M]. Heidelberg: Springer-Verlag Publishing Company, 1997.
- [46] De Borst R, Crisfield M A, Remmers J J C, et al. Non-linear finite element analysis of solids and structures [M]. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2012.