

Prosjektrapport 1

Varmelikningen og varmespredning
i 1. og 2. dimensjon



KLASSE:

Rapport levert: 1. desember 2022

Sammendrag

Dette prosjektet har undersøkt varmelikningen i én og to dimensjoner for å vise forståelse av prinsippene bak varmelikningen gjennom egne analyser. I én dimensjon ble temperaturfordelingen langs en stav analysert med ulike grensebetingelser. Stavens ender hadde enten perfekte kjøleelementer eller Robin randbetingelser. Deretter ble varmespredningen over en todimensjonal plate evaluert med Dirichlet randbetingelser.

Resultatene samsvarer med de teoretiske aspektene ved varmelikningen og dens paraboliske egenskaper, samt dens forbindelse til fourierrekker. Det ble tydelig demonstrert hvordan forskjellige grensebetingelser påvirker temperaturfordelingen. Funnene har betydning både for å gi en dypere forståelse av komplekse matematiske konsepter og for deres praktiske anvendelse i virkelige problemstillinger.

Innhold

1	Innledning	1
2	Teori	2
2.1	Fourierrekker	2
2.2	Varmelikningen	4
2.2.1	Varmelikningen i én dimensjon	4
2.2.2	Varmelikningen i to dimensjoner	5
2.2.3	Initialbetingelser og randbetingelser	5
2.2.4	Likevekt av varmelikningen	7
2.3	Numerisk løsning av varmelikningen	8
2.4	Symbolsk løsning av varmelikningen	8
2.4.1	Løsning i én dimensjon med Dirichlet randbetingelser . . .	8
2.4.2	Løsning i to dimensjoner	11
3	Metode	13
3.1	Varmespredning i en stang	13
3.2	Varmespredning i et todimensjonalt plan	15
4	Resultater	17
4.1	Varmetransport i én dimensjon	17
4.2	Varmetransport i to dimensjoner	20
5	Diskusjon	22
5.1	Likevekt	22
5.2	Feilkilder	22
5.3	Ekstern hjelp	23
6	Konklusjon	24
7	Vedlegg	26
7.1	Utvidelse av Numerisk løsning	26
7.1.1	En Dimensjon	26
7.1.2	Hvordan lage Differanseformlene	26
7.1.3	To Dimensjoner	27
7.2	Programfiler	28

Figurer

1	Approximering av en firkantkurve vha. fourierrekker av økende antall ledd	2
2	To funksjoner hvor $f(x)$ er like og $g(x)$ er odde.	4
3	Fourier approximering med økende nøyaktighet.	17
4	Visualiseringer for temperaturendring over tid i stangen	18
5	Misforhold mellom initiell temperaturfordeling $f(x)$ og fouriertilnærming ved $t = 0$	19
6	Temperaturendring i stav over tid med varmeoverføringsevne $k = 0.6$	19
7	Temperaturendring i stav over tid med varmeoverføringsevne $k = 6$	20
8	Utvikling av varmespredning over tid på en plate.	21

1 Innledning

Denne rapporten er utarbeidet som en del av prosjekt 1 i emnet Matematiske Metoder 2. Hensikten er å demonstrere en grundig forståelse av prinsippene bak varmelikningen gjennom teoretiske betraktninger, egne analyser og beregninger. Denne rapporten undersøker varmelikningen i både én og to dimensjoner. Den vil også illustrere varmeoverføring i disse dimensjonene ved å presentere matematiske likninger som funksjoner.

Rapporten innledes med en presentasjon av relevant teoretisk bakgrunn for varme-likningen. Dette inkluderer blant annet fourierrekker, initial- og randbetingelser, samt numerisk og symbolsk løsning av varmelikningen. Rapporten vil deretter presentere resultatene fra simuleringene gjennom grafiske fremstillinger av temperaturutviklingen i ulike systemer. Disse vil diskuteres og sammenlignet med de teoretiske modellene. Avslutningsvis vil rapporten presentere en konklusjon basert på analysen av resultatene og teorien. For å se fulle animasjoner og grafer med variable glidere, se vedlegg A. Legg også merke til at rapporten bruker begrepene *varme* og *temperatur* om hverandre.

2 Teori

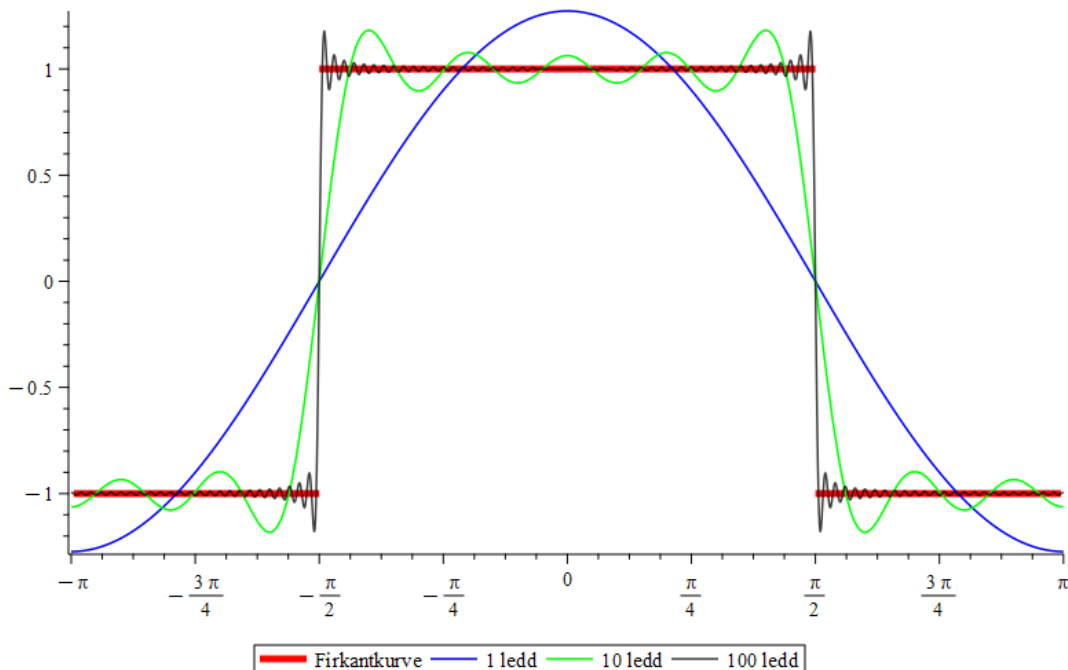
I dette kapitlet introduseres de grunnleggende prinsippene bak fourierrekker og varmelikningen. Det går i dybden på varmelikningen i både én og to dimensjoner, samt en forklaring av konseptet om likevekt. Kapitlet utdyper nærmere numeriske og symbolske metoder for å løse varmelikningen. Formålet med dette, er å gi en dypere forståelse av den matematiske teorien som oppgavens analyse bygger på. Boken *Engineering Mathematics: A Foundation for Electronic, Electrical, Communications, and Systems Engineers*, er brukt gjennom teorien, og skaper forståelsesgrunnlaget[1].

2.1 Fourierrekker

Fourierrekker er matematiske rekker som uttrykker funksjoner ved hjelp av sinus- og cosinusfunksjoner. En funksjon $f(t)$ kan uttrykkes som en uendelig sum av sinus- og cosinusfunksjoner:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.1.1)$$

Heltallet n øker mot uendelig og fourierrekken konvergerer da mot den opprinnelige funksjonen. Jo flere ledd man benytter, jo mer nøyaktig blir tilnærmingen. I figur 1 visualiseres dette ved at en firkantkurve approksimeres med økende nøyaktighet når n øker.



Figur 1: Approksimering av en firkantkurve vha. fourierrekker av økende antall ledd

Legg også merke til utslagene hvor funksjonen hopper, dette skyldes *Gibbsfenomenet*. Gibbsfenomenet oppstår i punkter hvor funksjonen er diskontinuerlig og gjør et ”hopp”. I disse punktene oppstår større oscillerende svinginger som sett i figur 1. Gibbsfenomenet oppstår kun når fourierrekken avkortes, altså at man løser for en bestemt verdi av n .

Det konstante leddet a_0 representerer gjennomsnittsverdien av funksjonen f over én periode. Koeffisientene a_n og b_n representerer amplituden til de cosinus- og sinus-komponentene ved en gitt n . Når T er gitt som den primitive perioden til funksjonen $f(t)$, kan konstantene a_0 , a_n og b_n beregnes ved bruk av følgende formler[2]:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.1.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.1.3)$$

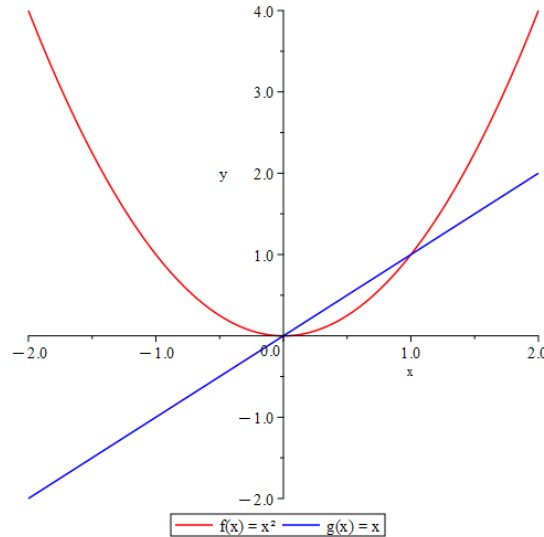
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.1.4)$$

For å forenkle integrasjon av symmetriske funksjoner kan følgende sammenhenger benyttes.

$$f \text{ er odde} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad (2.1.5)$$

$$f \text{ er like} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (2.1.6)$$

En funksjon er like når $f(-x) = f(x)$ og odde når $f(-x) = -f(x)$. I eksempelet under ser man to funksjoner hvor $f(x)$ er like og $g(x)$ er odde[3].



Figur 2: To funksjoner hvor $f(x)$ er like og $g(x)$ er odde.

2.2 Varmelikningen

2.2.1 Varmelikningen i én dimensjon

Varmelikningen i én dimensjon beskriver hvordan varme sprer seg langs en linje eller gjennom en én-dimensjonal gjenstand. Den generelle formelen for varmelikningen i én dimensjon er som følger:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad , \quad u = u(x, t) \quad (2.2.1)$$

Her er u temperaturfordelingen ved posisjonen x og tiden t . Partiellderivasjonen $\frac{\partial}{\partial t} u$ er den tidsderiverte av temperaturen og viser hvordan temperaturen endrer seg over tid. Uttrykket $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ er den andreordens partiellderiverte av temperaturen med hensyn på posisjonen x . Den viser hvordan temperaturen varierer med avstanden i én retning. c er kjent som termisk diffusivitet. Termisk diffusivitet kan uttrykkes som følgende:

$$c = \frac{K}{\rho c_p} \quad (2.2.2)$$

Her er K den termiske ledningsevnen til materialet, ρ er tettheten til materialet, og c_p er materialets spesifikke varmekapasitet ved konstant trykk. Denne likningen beskriver hvordan temperaturen endres over tid som følge av varmeledning. Formelen er et mål på hastigheten på varmeoverføring inne i et materiale. Den kalles gjerne en parabolisk partiell differensiallikning. Dette fordi kurvene den beskriver har en tendens til å tilnærme seg parabolisk form kort tid etter initieringen av systemet. Likningen kan også generaliseres til flere dimensjoner for å kunne vise hvordan varmen fordeles i ulike romlige materialer, ved bruk av Laplace-operatoren:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = c^2 \nabla^2 u \quad (2.2.3)$$

Her representerer Laplace-operatoren den andre romderiverte i flere dimensjoner av temperaturfordelingen u . c^2 er den termiske diffusiviteten i kvadrat[4].

2.2.2 Varmelikningen i to dimensjoner

Varmelikningen i to dimensjoner beskriver hvordan varme brer seg over en to-dimensjonal overflate. Denne likningen kan forstås som en utvidelse av varmelikningen for én dimensjon, der Laplace-operatoren representerer summen av de andrederiverte av en funksjon. For en funksjon $u(x, y)$ i to dimensjoner er Laplace-operatoren definert som følger:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \quad (2.2.4)$$

Da blir den generelle formen for varmelikningen i to dimensjoner:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right) \quad (2.2.5)$$

Her er temperaturen gitt som en funksjon av posisjonen (x, y) og tiden t . $\frac{\partial}{\partial t}u$ er den tidsderiverte av temperaturen, som viser hvordan temperaturen endres over tid. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ og $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$ er de romlige andrederiverte av temperaturen med hensyn til x og y , som beskriver hvordan temperaturen endrer seg i hver av de to retningene. Konstanten c er kjent som termisk diffusivitet og beskriver hvor raskt varme sprer seg gjennom materialet. Varmelikningen i to dimensjoner sier at hastigheten på temperaturendringen over tid i et punkt på overflaten er proporsjonal med hvordan temperaturen varierer i de to retningene. Hvis det er store temperaturforskjeller i nærheten av et punkt, vil temperaturen i det punktet endre seg raskere[4].

2.2.3 Initialbetingelser og randbetingelser

Initialbetingelsene til varmelikningen beskriver varmefordelingen ved starttidspunktet $t = 0$. Initialbetingelsene setter en presedens for å videre kunne beskrive endringen i varmefordelingen over et tidsintervall. Ved å bruke en funksjon $f(\mathbf{r}, 0)$ som beskriver en gitt temperaturfordeling kan initialbetingelsene beskrives. I en dimensjon kan dette beskrives ved at temperaturen defineres for alle verdiene av x ved $t = 0$:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.2.6)$$

Tilsvarende kan den initielle temperaturen over regionen i andre dimensjon defineres for x og y ved tiden $t = 0$:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (2.2.7)$$

Randbetingelsene til varmelikningen beskriver hvordan temperaturen oppfører seg ved randene av definisjonsområdet for varmelikningen. Altså en funksjon som uttrykker hvordan varmen påvirkes ved kantene. Dette kan for eksempel være brem-sing grunnet isolasjon, tap gjennom varmestraling, eller at randtemperaturen er fastsatt. Avhengig av prosessen som skjer ved randen finnes det ulike måter å matematisk beskrive randbetingelsene. De tre vanligste randbetingelsene for partiel-le differensiallikninger som varmelikningen er *Dirichlet randbetingelser*, *Neumann randbetingelser* og *Robin randbetingelser*.

En fastsatt randtemperatur beskrives ved Dirichlet randbetingelser:

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad \text{for alle } t \quad (2.2.8)$$

Her er randene av definisjonsmengden, altså ved $x = 0$ og $x = L$ tildelt to konstante temperaturverdier T_1 og T_2 . Dersom varme tilføres eller forsvinner gjennom randene benyttes Neumann randbetingelser. De beskriver fluksen (raten) varmen tilføres eller forsvinner. For et éndimensjonalt system hvor $x \in [0, L]$ kan dette beskrives slik:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(0, t) = q_1, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(L, t) = q_2 \quad (2.2.9)$$

Hvor q_1 og q_2 er varmeffluksen gjennom randene $x = 0$ og $x = L$.

I andre dimensjon må randen beskrives som en funksjon for definisjonsområdet til varmelikningen:

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x, y, t) = g(x, y) \quad (2.2.10)$$

Hvor $\frac{\partial}{\partial n}u$ er den deriverte som står normalt på randen og beskriver varmeffluksen gjennom et randpunkt (x, y) .

Ofte benyttes en kombinasjon av Dirichlet og Neumann, for eksempel ved konvek-sjon. Konveksjon er prosessen hvor varme overføres fra en overflate til en væske eller gass. Et eksempel kan være at varme ledes gjennom et metall (konduksjon) samtidig som varme 'tapes' til luften rundt (konveksjon).

For å beskrive dette benyttes Robin randbetingelser. I første dimensjon kan dette beskrives slik for de to randpunktene $x = 0$ og $x = L$:

$$hu(0, t) + k\frac{\partial}{\partial x}u(0, t) = g_1(t), \quad hu(L, t) + k\frac{\partial}{\partial x}u(L, t) = g_2(t) \quad (2.2.11)$$

Det første leddet beskriver Dirichlet randbetingelsene skalert med en konstant h . Det andre leddet beskriver Neumann randbetingelsene skalert med en konstant k . Funksjonen $g(t)$ er en gitt funksjon som beskriver hvordan randbetingelsen oppfører seg langs randene[5].

2.2.4 Likevekt av varmelikningen

For et endimensjonalt objekt, for eksempel en stav, beskriver varmelikningen hvordan temperaturen utvikler seg over tid langs staven. Når systemet når likevekt betyr det at temperaturen slutter å endre seg gjennom staven. Staven oppnår en stabil tilstand der temperaturen forblir konstant[6]. Dette kalles likevektsfordelingen og kan matematisk uttrykkes slik:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = 0 \iff \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 0 \quad (2.2.12)$$

Under likevektsbetingelser er det ingen varmeoverføring mellom punktene i staven. Dette betyr at den termiske balansen opprettholdes og dermed kan man formulere den generelle løsningen som en lineær funksjon:

$$u(x) = Ax + B \quad (2.2.13)$$

A og B er konstanter som bestemmes av randbetingelsene. Dersom man antar at temperaturen ved $x = 0$ er T_0 , og temperaturen ved $x = L$ er T_L kan disse betingelsene brukes til å løse for konstantene:

$$\text{Ved } x = 0 : \quad u(0) = T_0 \implies B = T_0 \quad (2.2.14)$$

$$\text{Ved } x = L : \quad u(L) = T_L \implies T_L = AL + B \quad (2.2.15)$$

Siden $B = T_0$ er kjent, gjelder følgende:

$$T_L = AL + T_0 \implies A = \frac{T_L - T_0}{L} \quad (2.2.16)$$

Dermed kan temperaturfordelingen formuleres på følgende måte:

$$u(x) = \frac{L}{T_L - T_0}x + T_0 \quad (2.2.17)$$

Denne likningen demonstrerer hvordan temperaturen endrer seg fra T_0 ved starten av staven til T_L ved slutten. Likevektsfordelingen viser dermed den jevne fordelingen av temperatur langs staven når systemet har stabilisert seg.

Videre kan man bruke at C som er temperaturforskjellen mellom start- og slutt punktene og D er temperaturen ved $x = 0$:

$$u(x) = \frac{L}{C}x + D \quad (2.2.18)$$

Denne likningen gir en enklere forståelse av temperaturfordelingen og hvordan den stabiliserer seg under gitte forhold.

Når man anvender dette konseptet på et todimensjonalt system, som for eksempel en plate, utvides modellen for å ta hensyn til temperaturvariasjoner i både x og y retning. I dette tilfellet beskriver Laplacialikningen hvordan temperaturen fordeler seg i et todimensjonalt system når den er i en stabil tilstand.

$$\frac{\partial}{\partial t}u = 0 \iff \nabla^2 u = 0 \quad (2.2.19)$$

Ved å bruke riktige randbetingelser kan man utvikle en generell løsning som avhenger av flere konstanter.

2.3 Numerisk løsning av varmelikningen

Numeriske metoder brukes når eksakte løsninger av varmelikningen er vanskelige å finne. Ved å dele tid og rom opp i diskrete punkter tilnærmes den deriverte med endelige differanser. Nedenfor presenteres en kort oversikt over denne løsningsmetoden.

I én dimensjon deles tidsintervallet $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ med avstand Δt , og rommet $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$ med avstand Δx . Den tidsderiverte tilnærmes som:

$$\frac{\partial}{\partial t} u \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.3.1)$$

og den romderiverte som:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \approx \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.3.2)$$

Ved å sette disse inn i varmelikningen får vi en eksplisitt formel for neste tids steg:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \quad (2.3.3)$$

Denne formelen anvendes iterativt over hele det definerte området, og gir en tilnærmet fremstilling av temperaturflyten langs den endimensjonale stangen. I to dimensjoner utvides denne tilnærmingen ved å bruke differanser både i x - og y -retning. Dette gir en løsning for varmelikningen på et todimensjonalt plan basert på samme prinsipp som for én dimensjon. For detaljert utledning, se vedlegg 7.1.

2.4 Symbolsk løsning av varmelikningen

2.4.1 Løsning i én dimensjon med Dirichlet randbetingelser

En lang, tynn stav i én dimensjon vurderes. Staven er perfekt isolert bortsett fra ved endepunktene. Den har en bestemt initialbetingelse $f(x)$, samt spesifikke randbetingelser. Basert på disse kan en generell løsning formuleres.

$$u(0, t) = 0 \quad \text{og} \quad u(L, t) = 0$$

Disse betingelsene kalles homogene Dirichlet-betingelser, som angir at temperaturen holdes konstant ved grensene av systemet. For å analysere varmespredningen i staven benyttes den relevante partielle differensiallikningen, nemlig varmelikningen i én dimensjon:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

For å finne en symbolsk løsning av varmelikningen benyttes metoden kjent som separasjon av variabler. Denne metoden antar at den ukjente funksjonen kan deles

opp i et produkt av to funksjoner, en som avhenger av tid og en annen som avhenger av rom:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.4.1)$$

Ved å sette denne antagelsen inn i varmelikningen får man:

$$X(x) \frac{d}{dt} T(t) = c^2 T(t) \frac{d^2}{dx^2} X(x) \quad (2.4.2)$$

Neste trinn involverer deling av begge sider med $X(x)T(t)$ for å separere de tids-avhengige og romavhengige leddene:

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d}{dt} T(t) = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -p^2 \quad (2.4.3)$$

Siden venstre side kun avhenger av tid, og høyre side kun av rom, kan begge sider settes lik en konstant $k = -p^2$. Dette fører til to separate ordinære differensiallikninger.

Løsning av romavhengighet

Den romavhengige likningen kan uttrykkes som:

$$\frac{d^2}{dx^2} X(x) + p^2 X(x) = 0 \quad (2.4.4)$$

Dette er en standard andreordens differensiallikning som har generelle løsninger av sinus- og cosinusform:

$$X(x) = B \cos(px) + C \sin(px) \quad (2.4.5)$$

Der B og C er konstanter som bestemmes av de spesifikke randbetingelsene. For å tilfredsstille de gitte randbetingelsene $u(0, t) = 0$ og $u(L, t) = 0$, må den romavhengige løsningen $X(x)$ være av formen:

$$X(x) = C \sin(px) \quad (2.4.6)$$

Randbetingelsen impliserer også at $X(0) = 0$ og $X(L) = 0$, som gir at $p = \frac{n\pi}{L}$ der n er et positivt heltall. Dermed blir løsningen for $X_n(x)$:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.4.7)$$

Løsning av tidsavhengighet

Den tidsavhengige likningen kan skrives som:

$$\frac{d}{dt}T(t) + c^2 p^2 T(t) = 0 \quad (2.4.8)$$

Ved å sette inn $p = \frac{n\pi}{L}$ får vi:

$$\frac{d}{dt}T(t) + \lambda_n^2 T(t) = 0 \quad \text{der} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (2.4.9)$$

Løsningen av denne førsteordens differensiallikningen er av eksponentiell form:

$$T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n^2 t) \quad (2.4.10)$$

hvor A_n er en konstant som bestemmes av initialbetingelsene.

Generell løsning

Deretter settes funksjonene sammen igjen til det originale uttrykket:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp(-\lambda_n^2 t) \quad \text{der} \quad D_n = A_n \times C_n \quad (2.4.11)$$

Denne funksjonen oppfyller varmelikningen og randbetingelsene, men for å spesifisere den til en gitt initialbetingelse $f(x)$, må følgende rekke bli implementert:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.4.12)$$

For $t = 0$ har vi:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.4.13)$$

Dette uttrykket ligner på en fourierrekke, og vi kjenner at:

$$\varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.4.14)$$

Settes D_n til å være lik b_n får vi $f(x)$ uttrykt med rekken, gitt at $f(x)$ er stykkevis kontinuerlig og integrerbar over perioden L [7]. Dermed har vi:

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.4.15)$$

2.4.2 Løsning i to dimensjoner

Løsningen av varmelikningen i to dimensjoner bygger på samme prinsipper som i én dimensjon, men det er nødvendig å ta hensyn til både x- og y-aksen. Prosessen starter med å utvide varmelikningen for å beskrive varmedistribusjonen over et todimensjonalt område:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y, t) \right) \quad (2.4.16)$$

Deretter defineres Dirichlet-randbetingelsene:

$$u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = 0 \quad \text{og} \quad u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \quad (2.4.17)$$

Disse betingelsene innebærer at temperaturen er null langs kantene på et firkantet område med lengde L_x og bredde L_y .

Løsningsmetoden baserer seg på separasjon av variabler, likt som for én dimensjon. Løsningen antas å kunne skrives som et produkt av tre funksjoner: én som avhenger av x , én av y , og én av t :

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (2.4.18)$$

$$X(x) = X, \quad Y(y) = Y, \quad T(t) = T$$

Ved å sette dette inn i varmelikningen, og forenkle som i én dimensjon, oppnås:

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d}{dt}T = \frac{1}{XY} \left(\frac{d^2}{dy^2}XY + \frac{d^2}{dx^2}XY \right) = k \quad (2.4.19)$$

Løsning av romavhengighet

For å løse for X og Y , tas følgende steg:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2}{dx^2}X = \frac{1}{Y} \left(kY - \frac{d^2}{dy^2}Y \right) = -p_m^2 \quad (2.4.20)$$

En ny konstant, p_m , introduseres slik at begge uttrykkene settes lik $-p_m^2$. Deretter løses de to differensiallikningene:

$$\frac{d^2}{dx^2}X + p_m^2 X = 0 \quad (2.4.21)$$

Løsningen for X blir:

$$X_m(x) = A_m \sin(p_m x), \quad \text{der} \quad p_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad (2.4.22)$$

Tilsvarende løses Y ved:

$$\frac{d^2}{dy^2}Y + (-k - p_m^2)Y = 0 \quad \text{hvor} \quad -k - p_m^2 = h_n^2 \quad (2.4.23)$$

Løsningen for Y er:

$$Y_n(y) = B_n \sin(h_n y), \quad \text{der} \quad h_n = \frac{n\pi}{L_y} \quad (2.4.24)$$

Før løsningen for $T(t)$ formuleres, defineres det et uttrykk for k :

$$-k = p_m^2 + h_n^2 \quad (2.4.25)$$

Likningen for $T(t)$ er deretter:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -c^2(p_m^2 + h_n^2) = -k_{mn}^2 \quad (2.4.26)$$

$$\frac{dT}{dt} + k_{mn}^2 T = 0 \quad (2.4.27)$$

Løsningen for $T(t)$ er dermed:

$$T_{mn}(t) = C_{mn} \exp(-k_{mn}^2 t) \quad \text{der} \quad \lambda = k_{mn}^2 = c^2(p_m^2 + h_n^2) \quad (2.4.28)$$

Til slutt settes T , X , og Y inn i varmelikningen for å få den generelle løsningen:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \exp(-\lambda t) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \quad (2.4.29)$$

Konstanter:

$$D_{mn} = C_{mn} B_n A_m \quad \text{og} \quad \lambda = k_{mn}^2 = c^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right) \quad (2.4.30)$$

Her er D_{mn} bestemt av dobbelt-sinus-fourier-utvidelsen av initialbetingelsen $u_0(x, y)$:

$$D_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) dx dy \quad (2.4.31)$$

Denne generelle løsningen beskriver temperaturfordelingen i en todimensjonal plate med Dirichlet-randbetingelser og en initial varmefordeling $u_0(x, y)$ [3].

3 Metode

I oppgaven er Maple brukt som hovedprogram for løsning av differensiallikninger med initial- og grensebetingelser. Maple er også brukt for fremstilling og modellering av funksjoner og animasjoner.

3.1 Varmespredning i en stang

For å modellere varmeutbredelsen langs en stav, er det nødvendig å bruke varme-likningen for én dimensjon, samt grensebetingelser og initialbetingelser. Ved å benytte den innebygde Maple-funksjonen `pdsolve`, kan alle tre likningene løses sammen. I tillegg kan de forenkles ved å deklare alle konstantene som positive. Deretter blir det laget en tilnærming til den initielle temperaturfordelingen ved å bruke `proc` funksjonen. Denne tilnærmingen blir uttrykt gjennom en fourierrekke. Ved å endre antall ledd i rekken, kan tilnærmingen visualiseres. Med denne tilnærmingen ble det deretter fremstilt en simulasjon av temperaturendringen, samt en tredimensjonal graf der tid utgjør den tredje dimensjonen.

Den initielle temperaturfunksjonen

Temperaturfunksjonen $f(x)$ som beskriver temperaturfordelingen langs stangen ved tidspunkt $t = 0$ ble valgt som en vilkårlig funksjon basert på dens brede temperaturspenn, og gode illustrasjon av temperaturendringer i stangen. Temperaturamplituden er $T_0 = 100$, dempningsfaktoren $\alpha = 0.6$, og $L = 10$ er stangens lengde. Funksjonen ble definert slikt:

$$f(x) = T_0 \exp(-\alpha) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Funksjonen $f(x)$ er også initialbetingelsen:

$$T(x, 0) = f(x)$$

Selve utledningen av likningen ble utført to ganger for å se forskjeller mellom ulike grensebetingelser. Først ble Dirichlet grensebetingelser definert slik:

$$T(0, t) = T(L, t) = 0$$

Dette betyr at begge endene av stangen holdes ved en konstant temperatur på 0°C . I tillegg ble kvadratet til den termiske diffusjonskonstanten, beskrevet i 2.2.2, satt til en vilkårlig verdi $k = 0.6$. Dette ble gjort for å kunne visualisere varmeoverføringen over et tidsforløp på under 30 sekunder. Målet var å unngå for langstrakte simuleringer, noe som minimerer prosesseringstiden. Videre var det ikke ønskelig med for rask temperaturendring, da dette ville kreve at vi benytter oss av tid som er mindre enn ett sekund. Desimaltall i tidsvariabelen forårsaket feilmeldinger, som var ønskelig å unngå, da vi ikke er godt kjent med debugging i Maple.

Analytisk løsning

For å løse varmelikningen med de gitte betingelsene, ble Maple sin `pdsolve` funksjon benyttet. Denne funksjonen finner den analytiske løsningen av partielle differensiallikninger. Løsningen ble forenklet ved hjelp av `simplify`-kommandoen for å gjøre uttrykket lettere å tolke ettersom det er gitt at alle konstantene er positive.

Numerisk tilnærming og summering av termer

Ettersom den analytiske løsningen er en uendelig serie, ble serien kvantifisert gjennom fourierrekker. Det ble også laget en grafisk fremstilling av hvordan funksjonen ser ut, ved å summere et høyt antall termer N fra Fourierserien. Dette ble gjennomført ved hjelp av Maple-funksjonen `proc` som summerte de første N termene og gav en numerisk tilnærming til temperaturen langs staven.

3D-visualisering av temperaturfordelingen

For å oppnå en bedre forståelse av temperaturfordelingen kan en 3D-visualisering være nyttig for å illustrere variasjonen i både tid og rom. Ved å benytte seg av funksjonen `plot3d` kan man fremstille tredimensjonale grafer. Denne visuelle fordelingen ble utnyttet for eksempelet med homogene Dirichletbetingelser i første dimensjon, se figur 4b. I dette eksempelet var $N = 1000$ for å få en mest mulig nøyaktig fouriertilnærming ved de ulike tidspunktene. Figuren viser temperaturen som en funksjon av både stavens posisjon og tiden, med temperaturen representert langs den vertikale akse.

Robin Randbetingelser

Etter simuleringene med Dirichlet randbetingelser var neste mål å simulere samme scenario, men med de mer generelle Robin grensebetingelser. Det vil si at istedenfor å benytte en konstant temperatur på null grader ved randene, kan randene variere. Med Robin grensebetingelser kan en nå variere temperaturstart på randen, samt temperaturfluksen gjennom randen. Dette fremstilles matematisk som:

$$\begin{aligned}\alpha_r T(0, t) + \beta_r \frac{\partial}{\partial x} T(0, t) &= f(t), \\ \alpha_r T(L, t) + \beta_r \frac{\partial}{\partial x} T(L, t) &= g(t).\end{aligned}$$

Der α_r og β_r er konstanter. Formlene over noteres slik i Maple:

$$\begin{aligned}\alpha_r * T(0, t) + \beta_r * D[1](T)(0, t) &= f(t) \\ \alpha_r * T(L, t) + \beta_r * D[1](T)(L, t) &= g(t)\end{aligned}$$

Funksjonen $g(t)$ ble satt lik 0 for å simulere en konstant temperert ende, og $f(t)$ ble satt lik $-5t + 100$. Modellen tar ikke hensyn til det absolutte nullpunkt. Det er derfor ønskelig å undersøke når modellen ikke lenger er gyldig. Dette skjer når

punktet $x = 0$ har en temperatur på -273.15°C . For å finne dette tidspunktet må løsningen av differensiallikningen, gitt ved $Tsol(x, t, N)$, løses for t slik at resultatet blir -273.15°C .

$$Tsol(0, t, N) = -273.15 \quad , \quad N = 250 \quad (3.1.1)$$

I Maple kan denne likningen løses ved å bruke funksjonen `fsolve`.

I tillegg må konstanten k økes for 0.6 og 6, for å ta hensyn til hurtigere varmeutbredelse i de to systemene. På denne måten kan tidspunktene modellen bryter ned for de to individuelle systemene beregnes.

3.2 Varmespredning i et todimensjonalt plan

For å forenkle løsningsprosessen og Maple-koden ved grafisk løsning av varmelikningen i to dimensjoner, ble varmelikningen løst ved hjelp av en Fourierserie. Dette kalles gjerne separasjon av variable kombinert med Fourier-tranformasjon. Dette for å unngå problemer med løsning av partielle differensiallikninger i Maple.

Startfunksjon ved $t = 0$

For varmespredning i et todimensjonalt plan ble en Gaussisk funksjon brukt for å definere temperaturfordelingen ved $t = 0$. Lengden i x og y retning er $L_x = L_y = 10$, standardavviket er $\sigma = 1$ og amplituden er $A_0 = 100$:

$$f(x, y) = A_0 \exp\left(-\frac{(x - \frac{L_x}{2})^2 + (y - \frac{L_y}{2})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Funksjonen beskriver en plate med initiell temperatur på 100°C i sentrum av platen, med en gradvis avtagende temperatur ut fra sentrum.

Randbetingelsene er gitt ved homogene Dirichlet betingelser og holdes derfor konstant til 0°C .

Fourierkoeffisienter og løsning

Videre ble fourierkoeffisientene definert ved å projisere startfunksjonen $f(x, y)$ på et ortogonalt sett av sinusfunksjoner i x og y retning. Dette ga en serie med koeffisienter som representerer bidraget fra hver frekvens i løsningen som vist i formel 2.4.31, der $u_0(x, y) = f(x, y)$.

Fourierkoeffisientene ble deretter satt inn i løsningen av varmelikningen. Løsningen er en dobbeltsummering (med n og m antall termer) av sinusfunksjoner multiplisert med en eksponentiellfaktor som styrer varmediffusjonen av hver frekvens. Eksponentialfaktoren $\exp(-\lambda \cdot t)$ beskriver hvordan temperaturkomponentene svekkes over tid. λ inneholder også diffusjonskonstanten β , som er kvadratet til den termiske diffusiviteten. β er satt lik 1.0. Dette er gjort for å unngå problemer med flyttallverdier. λ er gitt slik:

$$\lambda = \beta\pi^2 \left(\frac{m^2}{(L_x)^2} + \frac{n^2}{(L_y)^2} \right)$$

Til slutt plottes løsningen $u(x, y, t)$ som en grafisk fremstilling av temperaturutviklingen over tid på en todimensjonal plate, enten som en animasjon eller som flere stillbilder ved ulike tidspunkt.

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{50} \sum_{m=1}^{50} D_{mn} \sin \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) \exp \left(-\beta\pi^2 \left(\frac{m^2}{(L_x)^2} + \frac{n^2}{(L_y)^2} \right) \right)$$

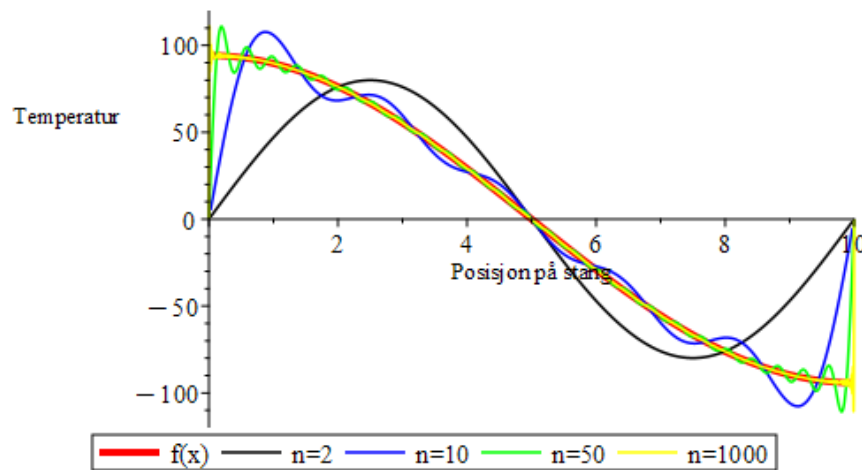
4 Resultater

4.1 Varmetransport i én dimensjon

I et endimensjonalt system med gitt initialbetingelse og gitte Dirichlet grensebetingelser, gav varmelikningen løsningen:

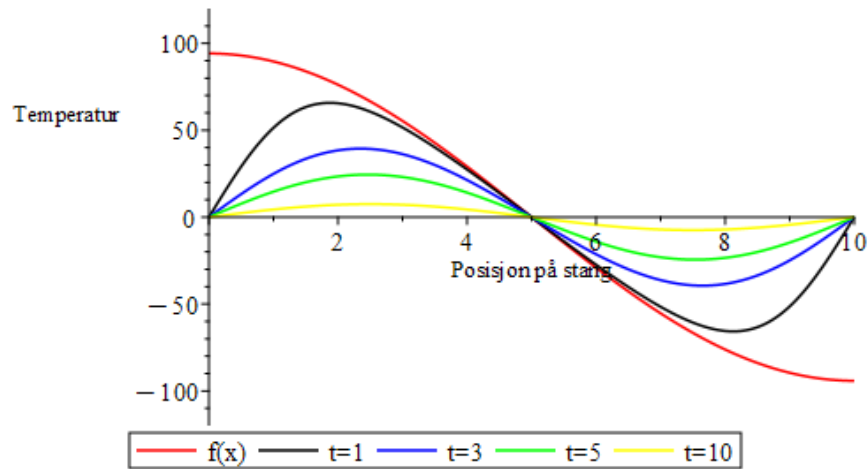
$$T(x, t) = 200 \exp(-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n((-1)^n + 1) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{9\pi^2 n^2 t}{10L^2}\right)}{n^2 - 1} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Fra denne løsningen ble fourierrekken fremstilt. Som vist i figur 3 kan man se at tilnærmingen ble svært lik den initielle temperaturfordelingen så lenge N er stor nok. Figuren viser tydelig hvordan en fourierrekke konvergerer mot et sett med betingelser:

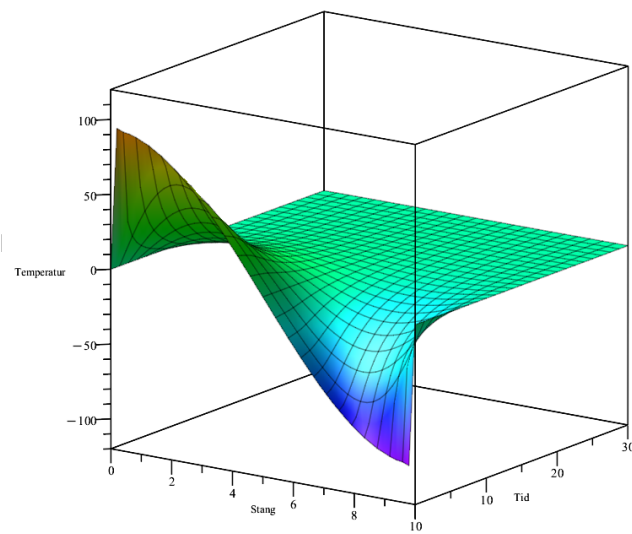


Figur 3: Fourier approksimering med økende nøyaktighet.

Gitt Dirichlet grensebetingelser kan en dermed se hvordan temperaturen i staven går mot 0°C og varmelikningen går mot likevekt. Dette er visualisert i figur 4.



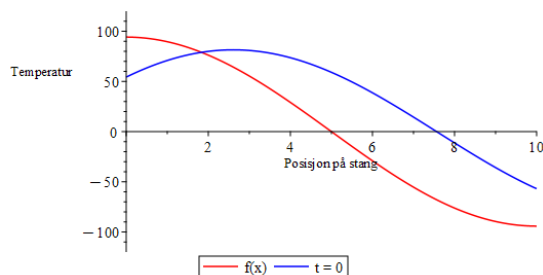
(a) Temperaturendring i stangen over tid



(b) 3D graf av temperaturendring over tid

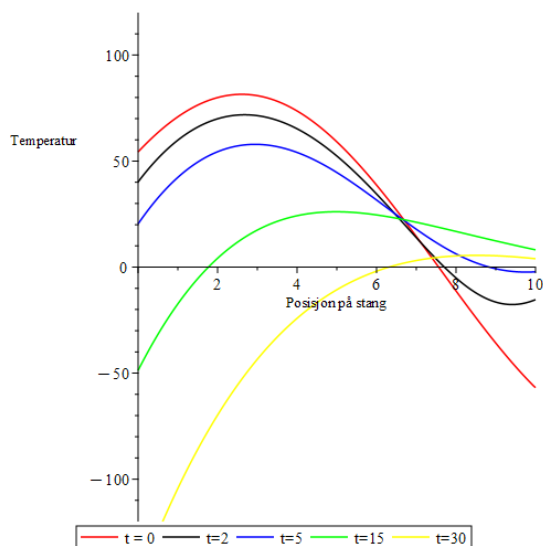
Figur 4: Visualiseringer for temperaturendring over tid i stangen

Nå betraktes et tilsvarende endimensjonalt system, men med Robin randbetingelser:



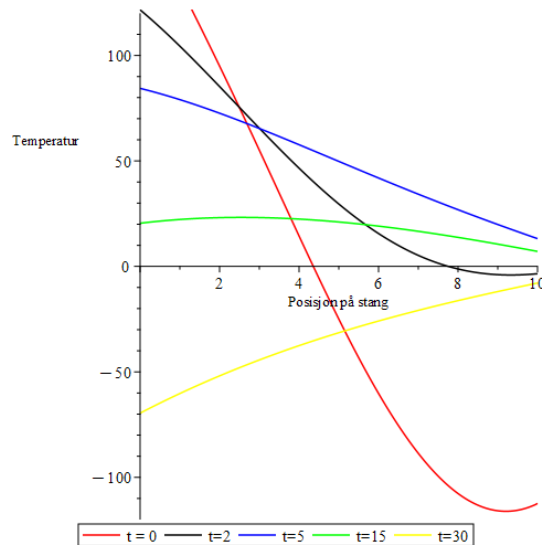
Figur 5: Misforhold mellom initiell temperaturfordeling $f(x)$ og fouriertilnærming ved $t = 0$

Legg merke til at fouriertilnærmingen ved $t = 0$ i figur 5 ikke er identisk med den initielle temperaturfordelingen $f(x)$. Legg også merke til at ved randen $x = 10$ i figur 6 og figur 7 blir nabopunktene varmere. Denne oppførslen beskrives nærmere i diskusjonen.



Figur 6: Temperaturendring i stav over tid med varmeoverføringsevne $k = 0.6$

Ved høyere termisk diffusivitet kan en se at den isolerte enden blir ”dratt” av enden med høy varmekraft ut av systemet.

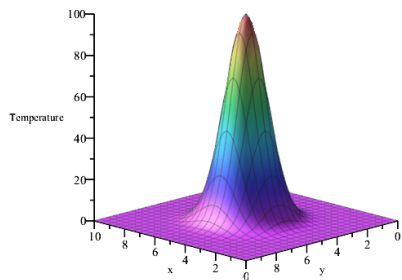


Figur 7: Temperaturendring i stav over tid med varmeoverføringsevne $k = 6$

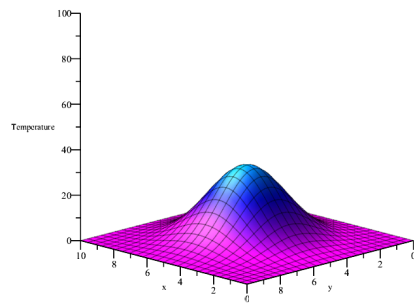
Ved Robin grensebetingelser kan man med plotting ved ulike tidsverdier, tydelig se hvordan systemet initialt går mot likevekt. Enden med positiv temperatur minker, og enden med negativ temperatur øker. Det er viktig å legge merke til at randen med $f(t)$ går videre mot negative verdier, og 'drar' med seg enden der $x = L$. Systemet vil derfor aldri oppnå likevekt. Varmefluksen ut av staven er lineær og vil derfor være like stor uavhengig av tiden. Det betyr at temperaturen vil fortsette å falle for alltid, forbi $0K$, bedre kjent som det absolutte nullpunkt. Med bakgrunn i dette er modellen ugyldig etter dette punktet. Dette tidspunktet kan regnes ved formel 3.1.1, og gir $t \approx 50$ sekunder. Tilsvarende for figur 6 er modellen ugyldig ved $t \approx 64$ sekunder.

4.2 Varmetransport i to dimensjoner

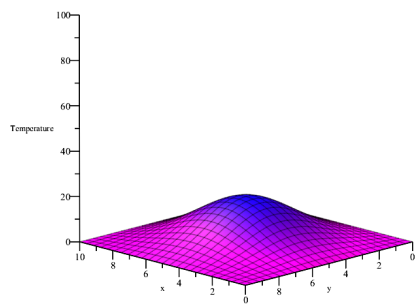
Systemet i to dimensjoner oppfører seg tilsvarende som i det endimensjonale systemet med Dirichlet betingelser - systemet går mot likevekt. Dette illustreres tydelig i figur 8 hvor varmeutbredelsen simuleres ved seks ulike tidspunkt. Legg merke til tidspunktene for simuleringen, fra dem er det tydelig at jo høyere temperaturen er i systemet, jo høyere er varmekraften til systemet. Man kan derfor se for seg varmekraften til systemet som en eksponentielt avtagende kurve, der platen til slutt når $0^{\circ}C$, altså likevekt. Dette stemmer overens med løsningen til $u(x, y, t)$ fra formel 3.2, hvor løsningen inneholder leddet $\exp(-\lambda t)$, som er en eksponentielt avtakende kurve.



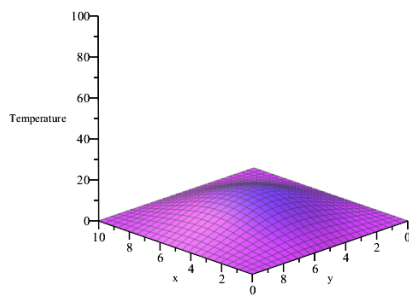
(a) Varmefordeling ved $t = 0$



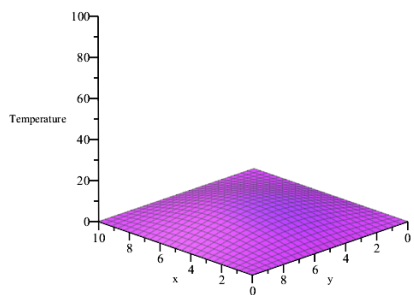
(b) Varmefordeling ved $t = 1$



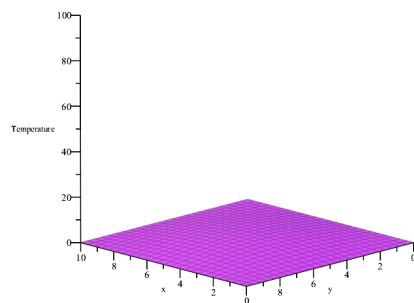
(c) Varmefordeling ved $t = 2$



(d) Varmefordeling ved $t = 3$



(e) Varmefordeling ved $t = 5$



(f) Varmefordeling ved $t = 10$

Figur 8: Utvikling av varmespredning over tid på en plate.

5 Diskusjon

5.1 Likevekt

I teorien ble det presentert hvordan systemer ønsker å oppnå likevekt, og som det framgikk i analysen gjør systemet nettopp dette når systemet har konstant temperatur ved randene. I det første eksempelet med Dirichletbetingelser i første dimensjon kommer det tydelig frem i figur 4 at systemet går mot likevekt ved 0°C . Dette er logisk da begge randene har konstant temperatur 0°C og varme strømmer ut av disse med konstant hastighet til likevekt er oppnådd. Se hvordan figur 4b flater ut med tiden.

I eksempelet med Robinbetingelser i første dimensjon er venstre rand gitt ved en lineær funksjon, det betyr at varmekraften varierer med tiden. Høyre rand er gitt ved homogene Dirichletbetingelser; konstant temperatur ved 0°C . I figur 6 er konstanten for varmeoverføringsevne $k = 0.6$. Prinsippet for likevekt gjelder også her, men fordi venstre rand blir kaldere med tiden ser det ut som at grafen 'dras' nedover. Høyre rand er initielt varmere enn staven og for å oppnå likevekt dras høyre side oppover mot 0. Denne oppførselen er enda tydeligere i figur 7 hvor konstanten for varmeoverføringsevne er satt til $k = 6$, noe som betyr at varmen brer seg hurtig gjennom staven. Fordi venstre rand blir kaldere med tiden vil dette systemet aldri oppnå likevekt, og praktisk sett vil modellen ikke være gjeldende når randen blir kaldere enn absolutt null.

I det siste eksempelet med en oppvarmet plate, figur 8, hvor randene hadde en konstant temperatur på 0°C illustreres hvordan varmen utbrer seg over tid. Her kommer det frem at når temperaturen er høy er også varmekraften ut av platen stor. Etterhvert som systemet nærmer seg likevekt går også varmekraften hurtig ned. Dette utviklingen kan beskrives som en eksponentielt avtagende kurve, helt til temperaturen over platen er 0°C og likevekt er oppnådd.

5.2 Feilkilder

En avgjørende utfordring under utvikling av kode til simuleringene, var mangel på erfaring og kunnskap med Maple. Programmet har en bratt læringskurve og prosjektets tidsbegrensede natur gjorde det vanskelig å tilegne seg nok kunnskap for å skrive robust kode. Dette førte blant annet til frustrasjon og at tid ikke ble utnyttet effektivt. Da metoden Maple behandler data ikke er kjent for oss er det også usikkerhet knyttet til de visuelle resultatene og utregningene Maple presenterer. Dette er særlig synlig i forbindelse med temperaturfordelingen til en stav i én dimensjon når Robin randbetingelser benyttes.

Under utvikling av koden opplevde vi en rekke utfordringer og gitt den begrensede tiden inneholder sluttproduktet enkelte betydningsfulle misvisninger. Dette gjelder spesielt for fouriertilnærmingen ved $t = 0$ som ikke samsvarer med den initielle varmekraftfordelingen. Denne misvisningen er illustrert i figur 5 og er kommentert i kildekoden. Denne utfordringen var i tillegg tidkrevende og har skapt

mye hodebry. Eksempelet ble likevel inkludert i oppgaven fordi den likevel fremstiller temperaturutbredelse med Robin grensebetingelser på en god måte, se figur 6 og figur 7. I tillegg er prinsippene til fouriertilnærmingen godt vist i eksemplene med Dirichletbetingelser. En annen viktig årsak til å benytte Robinbetingelser er at de beskriver varmeutvikling på en mer sammensatt, realistisk måte som gjerne er målet ved utvikling av modeller for varmeutbredelse og mer interessant å undersøke.

Det bør nevnes at funksjonene, simuleringene og animasjonene for én og to dimensjoner med Dirichlet randbetingelser oppfører seg som forventet. Dette skyldes blant annet god tilgang på ressurser og kildekode. Maplefilene er derfor et resultat av kode fra forskjellige kilder, egne justeringer, og litt prøving og feiling for å undersøke hva som fungerer.

5.3 Ekstern hjelp

Det ble fort klart at Robin grensebetingelsene krevde god innsikt i matematikken, men særlig god kjennskap til Maple. Vi kom derfor i kontakt Professor Scot A.C Gould fra W.M Keck Science Center. Prof. Gould har laget mange YouTube videoleksjoner om Maple og veiledet oss på den mer avanserte koden. Problemene med Robinbetingelser har Prof. Gould, per innlevering av rapporten, ikke avdekket, men han har tatt forbindelse med utvikleren bak `pdsolve`. Heller ikke egen emneansvarlig har funnet en konkret løsning på problemet.

6 Konklusjon

Denne rapporten har undersøkt prinsippene bak fourierrekker og varmelikningen gjennom både teoretiske analyser og praktiske simuleringer. For systemene med Dirichlet randbetingelser gav simuleringene tilfredsstillende resultater, og fouriertilnærmingen gav en nøyaktig beskrivelse av varmespredningen over tid. Tilgangen på ressurser og kildekode bidro til at løsningene samsvarte godt med teorien.

For Robin randbetingelsene oppsto det derimot visse avvik fra de forventede resultatene. Hovedutfordringen var relatert til bruk av Maple programvaren, som vi ikke fullt ut har mestret. Dette skapte usikkerhet rundt temperaturfordelingen, spesielt i en endimensjonal stang. I tillegg samsvarte ikke Fouriertilnærmingen ved $t = 0$ med den initielle varmefordelingen, som igjen førte til mindre nøyaktige simuleringer. Likevel ble eksempelet med Robinbetingelser inkludert i rapporten, fordi det illustrerte hvordan disse mer komplekse randbetingelsene fungerer i praksis. Til tross for noen misvisninger ga simuleringen nyttig innsikt i hvordan Robinbetingelser kan brukes til å modellere varmesystemer med realistiske, fysiske interaksjoner.

Videre arbeid kan omfatte en forbedring av tilnærmingen til Robinbetingelsene og bruken av mer presise numeriske metoder som finitte elementmetoder, spesielt for å takle mer komplekse systemer. Det kan også være interessant å utvide analysen til tredimensjonale systemer eller utforske varmespredning i materialer med varierende egenskaper, men dette er områder som kan undersøkes videre dersom det er behov for det.

Referanser

- [1] Anthony Croft mfl. Engineering Mathematics: A Foundation for Electronic, Electrical, Commun 5th. Harlow, England: Pearson Education Limited, 2017. ISBN: 978-1-292-14665-2. URL: <http://www.pearson.com/uk>.
- [2] NTNU. “Fourieranalyse”. I: wiki.math.ntnu.no (2017). Accessed: 11-10-2024. URL: https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4135/2017h/tma4135_fourieranalyse.pdf.
- [3] Fourier leksjon 1. PDF document. Leksjonsnotater på Forurierrekker. n.d.
- [4] Wikipedia contributors. Heat equation. Accessed: October 13, 2024. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation.
- [5] Robert Daileida. Lecture 11: The heat equation in one spatial dimension. Accessed: 2024-10-13. 2023. URL: <http://ramanujan.math.trinity.edu/rdaileida/teach/s23/m3357/lectures/lecture11.pdf>.
- [6] Store norske leksikon. Termisk likevekt. Hentet fra Store norske leksikon. 2005-2007. URL: https://snl.no/termisk_likevekt (sjekket 11.10.2024).
- [7] NN. One-Dimensional Heat Flow. PDF document. PDF document about heat equation and partial differential equations. n.d.
- [8] Matematikk.org. Definisjon av den deriverte. Accessed: October 13, 2024. n.d. URL: https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=187434&within_tid=154780.

7 Vedlegg

7.1 Utvidelse av Numerisk løsning

I tilfeller hvor eksakte løsninger av varmeligningen er vanskelige å oppnå, kan numeriske metoder benyttes for å finne tilnærmede løsninger. I stedet for å løse ligningen analytisk for alle posisjoner og tidspunkter, beregnes løsningen ved gitte punkter. Dette gjøres ved å dele opp det kontinuerlige området i tid og rom.

Numeriske løsninger innebærer å tilnærme de deriverte i varmeligningen med endelige differanser, der endringer i tid og rom uttrykkes som differanser mellom nærliggende gridpunkter. Dette omformer differensialligningen til et sett algebraiske ligninger som kan løses trinnvis.

7.1.1 En Dimensjon

For å løse en 1-dimensjonal varmeligning numerisk, må det kontinuerlige området i tid og rom først deles opp. Tidsintervallet deles opp i n antall punkter: $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ med avstanden Δt mellom dem. Det samme gjøres med det romlige intervallet der x-aksen deles opp i forskjellige punkter: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$ med avstanden Δx . Dette gir en jevn fordeling av punkter over tidsintervallet og det romlige intervallet:

$$t_n = n\Delta t \quad \text{og} \quad x_i = i\Delta x \quad (7.1.1)$$

Videre må en approksimasjon av de deriverte lages, fordi numeriske løsninger arbeider med diskrete verdier for både tid og rom i stedet for kontinuerlige funksjoner. Differensialligninger, som varmeligningen, inneholder deriverte som beskriver kontinuerlige endringer. For å løse disse numerisk, må de kontinuerlige deriverte erstattes med differanseuttrykk som tilnærmer endringer basert på verdier på diskrete punkter.

7.1.2 Hvordan lage Differanseformlene

Tidsderivert ($\frac{\partial}{\partial t}u$) : Tidsderiverte tilnærmes med en fremoverdifferanse som ser på endringen i temperaturen mellom nåværende og neste tidssteg, u_i^n og u_i^{n+1} .

Fra definisjonen av den deriverte fra første orden [8]:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (7.1.2)$$

For numerisk tilnærming, hvis Δx representerer avstanden mellom to punkter (i stedet for at den går mot null), kan derivasjonen tilnærmes på en diskret måte. Ved å erstatte $f(x + \Delta x)$ og $f(x)$ med u_i^{n+1} og u_i^n , blir den tids deriverte:

$$\frac{\partial}{\partial t}u \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (7.1.3)$$

Dette uttrykker tidsderiverte som endringen i temperatur over tidssteg Δt .

Romlig Andrederivert ($\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$) : Den andrederiverte tilnærmes ved å bruke en sentraldifferanse, som tar verdiene på nabopunktene u_{i-1}^n , u_i^n , og u_{i+1}^n for å estimere krumningen rundt x_i . For å finne krumningen sees det på endringen i den deriverte rett etter punktet:

$$\frac{\partial}{\partial x}u \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (7.1.4)$$

Og rett før punktet:

$$\frac{\partial}{\partial x}u \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (7.1.5)$$

Den andrederiverte uttrykkes deretter som differansen mellom disse delt på Δx :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (7.1.6)$$

Varmeligningen: Ved å sette sammen disse tilnærmingene får vi følgende formel:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (7.1.7)$$

Løsningsalgoritmen: For å finne u_i^{n+1} (temperaturen ved neste tidssteg) kan uttrykket omorganiseres slik:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) \quad (7.1.8)$$

Dette gir en eksplisitt metode som gjør det mulig å beregne temperaturen u_i^{n+1} ved hvert romlig punkt i i neste tidssteg $n + 1$ basert på temperaturen ved det nåværende tidssteget n . For å bruke denne metoden til å løse et problem settes initialbetingelser og randbetingelser opp, tids- og romsteg blir definert, og formelene løses iterativt for hvert tidssteg for å oppdatere temperaturverdiene i de definerte punktene. Løsningen vil gi en tilnærmet verdi av varmeligningen, og nøyaktigheten av denne verdien øker med antall punkter i tids- og romintervallene.

7.1.3 To Dimensjoner

For å løse varmeligningen numerisk i to dimensjoner må det tas hensyn til at rommet nå er utvidet til et todimensjonalt plan. Dette medfører flere endringer i tilnærmingen:

Romlig Diskretisering: I stedet for å jobbe med en enkelt akse, må nå et rutenett av punkter i begge retninger (x og y) etableres. Dette kan gjøres ved å definere et grid med punkter u_{ij} hvor i representerer posisjonen i x-retning og j representerer posisjonen i y-retning.

Matematisk Formulering: Den generelle varmeligningen må utvides til å inkludere begge dimensjoner. Den romlige andrederiverte blir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u \quad (7.1.9)$$

Løsningsteknikker: For å løse likningen må differansemeteroder som er tilpasset todimensjonale rutenett brukes. For eksempel kan en todimensjonal sentraldifferanse benyttes for å estimere den romlige andrederiverte:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \approx \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (7.1.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u \approx \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \quad (7.1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (7.1.12)$$

I tillegg vil den tidsderiverte oppdateres, som nå inkluderer begge romlige variabler:

$$\frac{\partial}{\partial t}u \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (7.1.13)$$

Disse formlene settes inn i varmeligningen for 2 dimensjoner, og man får formelen:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (7.1.14)$$

For å finne $u_{i,j}^{n+1}$ (temperaturen ved neste tidssteg) kan uttrykket omorganiseres slik:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \alpha \Delta t \left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (7.1.15)$$

Ved bruk av denne ligningen, sammen med fastsettelse av initial- og randbetingelser samt definering av tids- og romsteg, kan temperaturverdiene for hvert tidssteg oppdateres iterativt. Dette gir en tilnærmet løsning for alle tids- og romsteg i et todimensjonalt plan.

7.2 Programfiler

Se vedlegg A (zip-fil)