



PROSJEKTRAPPORT 1

Telegrafligningen

ING2501 MM2

AV

Abay, Yonatan Monken
Aleksandersen, Tor Johan Drange
Bertilsson, Agnes Liv
Bjørddal, Olav Schei
Vesteng, Karen

KLASSE: VING 78

Rapport levert: 12. oktober 2025

Sammendrag

Denne rapporten analyserer signalforplantning i elektriske transmisjonslinjer med hovedvekt på tvinnet parkabel (Cat5e). Telegrafligningen utledes fra Kirchhoffs lover, og vi etablerer en frekvensavhengig RLCG-modell der $R(\omega)$ beskriver skinneffekt og $G(\omega)$ dielektriske tap. Overføringsfunksjonen $H(\omega)$, dempningskonstant $\alpha(\omega)$, fasekonstant $\beta(\omega)$ og gruppeforsinkelse $\tau_g(\omega)$ brukes til å kvantifisere demping og dispersjon.

Vi gjennomfører numeriske simuleringer i Python for både tapsfri og realistisk Cat5e. En enkel laboratoriemåling på koaks (5m og 30m) brukes kun som *prinsippbekreftelse* for å vise at høyfrekvente komponenter dempes sterkere og at pulser bredder seg og er ikke ment som verifikasjon av Cat5e-modellen.

Resultatene viser at korte lengder i hovedsak bevarer signalformen, mens økt lengde gir lavpass-karakteristikk, større $\alpha(\omega)$ ved høye frekvenser og pulsbredding (økt stige-/falltid). Simuleringsfunnene er i kvalitativt samsvar med laboratorieobservasjonene og forklarer hvorfor standarder som Ethernet spesifiserer en øvre kabellengde.

Innhold

1	Innledning	1
2	Teori	2
2.1	Kirchhoffs lover	2
2.1.1	Kirchhoffs spenningslov (KVL)	2
2.1.2	Kirchhoffs strømlov (KCL)	2
2.2	Fourier-rekker	3
2.3	Telegrafligningen og transmisjonslinjer	4
2.3.1	R - Resistans	4
2.3.2	L - Induktans	4
2.3.3	C - Kapasitans	4
2.3.4	G – Konduktans per lengdeenhet (lekkasje)	4
2.3.5	Utleddning av telegrafligningen	5
2.4	Propagerende løsning og overføringsfunksjon	6
2.4.1	Demping (amplituderespons)	8
2.4.2	Dispersjon (fase, gruppeforsinkelse og gruppehastighet)	9
2.4.3	Kobling til pulstog	10
2.5	Karakteristisk impedans	10
2.6	Koaksialkabelen (brukt i lab) som transmisjonslinje	11
2.7	Oppsummering og kobling til prosjektet	11
3	Metode	12
3.1	Mål og hypoteser	12
3.2	Oversikt	12
3.3	Numerisk simulering og modellering	12
3.3.1	Inngangssignal og representasjon	13
3.4	Laboratoriestudie	14
3.4.1	Gjennomførelse	14
3.4.2	Hensikt	14
3.4.3	Utstyr og oppsett	14
3.4.4	Måleprosedyrer	14
4	Modellering	15
4.1	Situasjon	15
4.2	Modeller	17
4.3	Modell 1 (kun demping i frekvensdomenet)	18
4.4	Modell 2 (demping i frekvensdomenet i tidsdomenet)	19
4.5	Modell 3 (kun faseendring)	20
4.6	Modell 4 (Ideell, ikke-dispersiv modell)	21
4.7	Modell 5 (full modell)	22
4.8	Modell 6 (Waterfall plot)	23
5	Lab resultater og analyse	25
5.1	5m koaksialkabel	25
5.1.1	Tidsdomenet	25
5.1.2	Frekvensdomenet	25
5.2	30m koaksialkabel	26

5.2.1	Tidsdomenet	26
5.2.2	Frekvensdomenet	26
6	Feilkilder	27
6.1	Teoretiske antakelser	27
6.2	Måleusikkerhet	27
6.3	Forslag til forbedringer	27
7	Konklusjon	28
	Referanser	29
	Vedlegg	30

1 Innledning

Utviklingen av elektrisk kommunikasjon på 1800-tallet skapte et behov for å forstå hvordan signaler forplantet seg i lange ledningsnettverk. Telegrafene, som var den første teknologien for rask kommunikasjon over store avstander, ble raskt bygget ut både i Europa og USA. Etter hvert som ledningsnettene ble lengre, oppsto praktiske problemer: signalene ble svakere, de ble forsinket, og de kunne endre form. For å løse disse utfordringene måtte man utvikle en matematisk modell som tok hensyn til de fysiske egenskapene til en elektrisk ledning.

Oliver Heaviside, en britisk fysiker og ingeniør, brukte Maxwells ligninger som utgangspunkt og formulerte på slutten av 1800-tallet det som i dag kalles *telegrafligningen*. Den beskriver hvordan spenning og strøm endrer seg i tid og rom langs en elektrisk linje, idet resistans, induktans, kapasitans og konduktans inkluderes i modellen. Telegrafligningen ble et viktig teoretisk verktøy for å forstå og forbedre kvaliteten på telegraf- og telefonlinjer, og den la grunnlaget for hele transmisjonslinjeteorien som fortsatt brukes i moderne elektronikk og telekommunikasjon [2].

I dag er de samme prinsippene fortsatt aktuelle. Ethernetkabler, koaksialkabler og telefonlinjer kan modelleres som transmisjonslinjer, der signalet påvirkes av tap og dispersjon. Ethernet-standarden setter en maksimal kabellengde på 100m for å sikre at signalet kan overføres uten for store tap og forvrengninger. Koaksialkablernes maksimale lengde uten stort tap av signalkvalitet vil også variere basert på frekvensene som brukes. På samme måte mister lange telefonkabler kvalitet, spesielt når de brukes til høyere frekvenser som i bredbånd (DSL). Begge disse fenomenene kan forklares gjennom telegrafligningen.

I denne rapporten tar vi derfor utgangspunkt i telegrafligningen som matematisk modell og gjennom numerisk modellering og simulering, og laboratorietester undersøker vi hvordan signaler oppfører seg i korte og lange ledningsnettverk ved forskjellige frekvenser. Vi vil også se på hvordan ulike parametere påvirker signalets kvalitet, med demping, faseendring og forvrengning som sentrale temaer. Dette gir oss en bedre forståelse av hvordan elektriske signaler oppfører seg i praksis.

2 Teori

Motivasjon og sammenheng: Målet er å få en dypere forståelse av hvordan elektriske signaler forplanter seg i ledningsnettverk. For å forstå utbredning av signaler i forskjellige transmisjonslinjer, bruker vi telegrafligningen. Denne beskriver hvordan elektriske signaler forplanter seg i transmisjonslinjer, og gir oss verktøyene til å analysere fenomener som demping, faseforskyvning og dispersjon. Dette er spesielt relevant for praktiske applikasjoner som Ethernet- og koaksialkabler, hvor signalets integritet over lengre avstander er avgjørende.

2.1 Kirchhoffs lover

Grunnlaget for telegrafligningen ligger i Kirchhoffs lover, som beskriver hvordan spenning og strøm fordeles i elektriske kretser. Disse lovene er direkte basert på fysikkens bevaringsprinsipper for energi og ladning, og de brukes til å beskrive forholdet mellom elektriske størrelser i ethvert kretsnettverk.

2.1.1 Kirchhoffs spenningslov (KVL)

sier at summen av alle spenningsendringer rundt en lukket sløyfe er lik null. Dette uttrykker energibevaring: den elektriske energien som brukes opp i motstander og spoler, må være lik den energien som tilføres av spenningskilder. I telegrafligningen brukes KVL til å uttrykke hvordan spenningen endrer seg langs et lite element av ledningen. Spenningsfallet langs et element avhenger av den ohmske motstanden og induktansen, og beskrives matematisk som vist i ligningen (5).

2.1.2 Kirchhoffs strømlov (KCL)

sier at summen av alle strømmene som går inn i et knutepunkt, er lik summen av de som går ut. Dette er et uttrykk for ladningsbevaring. I telegrafligningen brukes KCL til å beskrive hvordan strømmen endrer seg langs ledningen, når en del av strømmen lekker til jord gjennom konduktans og kapasitans. Dette gir ligningen (6).

Ved å kombinere Kirchhoffs lover kan man beskrive hvordan både spenning og strøm endrer seg langs ledningen over tid. Dette er utgangspunktet for telegrafligningen, som gir en fullstendig matematisk modell for hvordan signaler forplanter seg, dempes og forvrenges når de beveger seg gjennom en elektrisk leder.

2.2 Fourier-rekker

Mange signaler kan brytes ned i sine frekvenskomponenter ved hjelp av Fourier-analyse. Dette er spesielt nyttig i signalbehandling og for å forstå hvordan ulike frekvenser påvirkes av transmisjonslinjen. Ethernet-signaler kan sees på som en sekvens av pulser (bitstrøm), som i praksis kan betraktes som et periodisk pulstog. Dette gjør at Fourier-rekker er et naturlig verktøy for å analysere slike signaler i frekvensdomenet, siden pulstoget kan uttrykkes som en sum av sinus- og cosinuskomponenter.

En periodisk funksjon $f(t)$ med periode T kan uttrykkes som en Fourier-rekke:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \quad (1)$$

med koeffisienter gitt ved:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

I kompleks form:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}, \quad \text{der} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt, \quad c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2)$$

I dette prosjektet modellerer vi en Cat5e-transmisjonslinje ved hjelp av Fourier-analyse og en frekvensavhengig RLCG-modell. For et periodisk pulstog $f(t)$ med periode T ($f_0 = 1/T$) bruker vi Fourier-rekken $\{c_n\}$ slik at hver harmoniske ved $f_n = nf_0$ kan analyseres separat. Hver komponent skaleres og fases av linjen gjennom overføringsfunksjonen $H(f)$. For en jevn linje med lengde ℓ og korrekt terminering gjelder:

$$H(f) = e^{-\gamma(f)\ell}, \quad \gamma(f) = \alpha(f) + j\beta(f).$$

Dermed er:

$$H(f) = \frac{V_{\text{out}}(f)}{V_{\text{in}}(f)}, \quad V_{\text{out}}(f) = H(f) V_{\text{in}}(f).$$

Som beskriver hvordan signalet endres i frekvensdomenet når det passerer gjennom kabelen. Denne analysen hjelper oss å forstå hvordan ulike frekvenskomponenter dempes og forvrenges, noe som er avgjørende for å forklare begrensningen på kabelens lengde. Setter vi inn overføringsfunksjonen i komplekse Fourier-rekken, kan vi modellere hvordan hele signalet endres når det går gjennom kabelen [4].

$$f_{\text{out}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} \quad (3)$$

2.3 Telegrafligningen og transmisjonslinjer

En transmisjonslinje kan beskrives ved fire per-enhet-lengde parametre:

- R [Ω/m] – Motstand (ledertap),
- L [H/m] – Induktans (magnetisk lagring),
- C [F/m] – Kapasitans (elektrisk lagring),
- G [S/m] – Konduktans (lekkasjetap).

Ved å kombinere Kirchhoffs lover med disse parameterne utledes telegrafligningen, som beskriver spenning og strøm som funksjon av både posisjon og tid langs kabelen. For spenningen $u(x, t)$ kan den skrives på formen:

$$u_{tt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) u_t + \left(\frac{RG}{LC}\right) u = \left(\frac{1}{LC}\right) u_{xx} \quad (4)$$

der $u(x, t)$ er spenningen langs kabelen og c er utbredelseshastigheten i kabelen. Denne ligningen viser at et signal ikke bare forplanter seg med en hastighet bestemt av L og C , men også blir dempet og forvrengt på grunn av R og G . Resultatet er at høyfrekvente komponenter i signalet svekkes og spres mer enn lave frekvenser, noe som over tid fører til *damping* og *dispersjon*. Ethernet-signaler består ikke av rene sinusbølger, men av pulser med et bredt spekter av frekvenser. Mens Fourier-analyse kan hjelpe oss å uttrykke signalet som en sum av ulike frekvenskomponenter, gir telegrafligningen oss verktøy til å studere hvordan hver enkelt komponent påvirkes. Dermed kan vi forklare hvorfor en grense på omtrent 100m er praktisk: etter denne lengden er tapet og forvrengningen så store at signalet ikke lenger kan tolkes pålitelig for mottakeren.

2.3.1 R - Resistans

Resistans per lengde [Ω/m] er den ohmske motstanden i ledere. Den skyldes av materialets resistivitet og ledertverrsnitt, og øker med temperatur. Motstanden øker dempingen og reduserer rekkevidden til signalet. I telegrafligningen bidrar R direkte til tidsdamping av både strøm og spenning.

2.3.2 L - Induktans

Induktansen per lengde [H/m] er magnetisk lagring av energi rundt ledere når strømmen endres, per meter kabel. Sammen med kapasitans vil denne bestemme farten på signalet i kabelen. I linjemodellen står induktansen i serie.

2.3.3 C - Kapasitans

Kapasitans per lengde [F/m] er elektrisk lagring av energi i feltet mellom leder og referanse, per meter. Sammen med induktans har kapasitans påvirkning på fart. I linjemodellen er dette en gren til jord, den trekker ladning når spenningen endres.

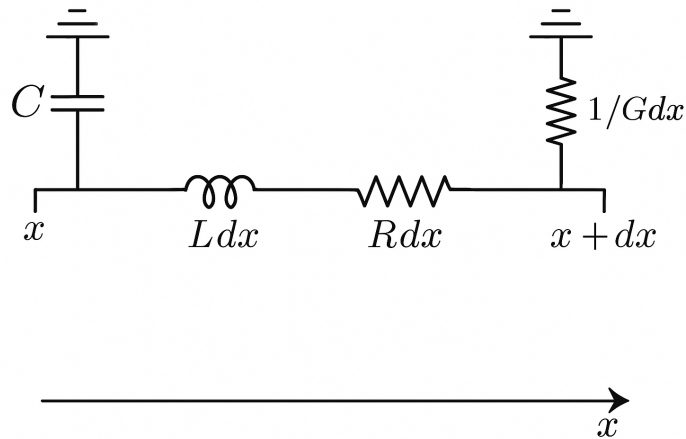
2.3.4 G – Konduktans per lengdeenhet (lekkasje)

G [S/m] er *konduktansen per lengdeenhet* til jord, ofte kalt *shunt-konduktansen*. Den modellerer lekkasjestrøm gjennom kabelens isolasjon og står parallelt med kapasitansen C i den ekvivalente linjemodellen. En større G gir økt demping fordi mer energi går tapt i dielektrikumet.

Verdien av G avhenger av materialets kvalitet og miljøforhold: høy fuktighet, aldring eller skadet isolasjon øker G , mens ideell isolasjon gir $G \approx 0$. Parameteren beskriver dermed tap som skyldes ufullkommen isolasjon mellom lederen og jord.

2.3.5 Utledning av telegrafligningen

Telegrafligningen kan utledes ved å analysere en liten del av transmisjonslinjen, som vist i figuren nedenfor. Vi betrakter et segment av linjen med lengde Δx , og bruker Kirchhoffs spennings- og strømlov for å sette opp differensialligninger for spenning og strøm [1].



Figur 1: Elementært segment av en transmisjonslinje med per-enhet-lengde parametere [1].

Ved å anvende Kirchhoffs spenningslov på segmentet får vi:

$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = R\Delta x \cdot i(x, t) + L\Delta x \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}.$$

Når man deler begge sider av ligningen på Δx og lar $\Delta x \rightarrow 0$, får vi uttrykket for spenningsendringen:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -Ri(x, t) - L\frac{\partial i(x, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Tilsvarende, ved å bruke Kirchhoffs strømlov, får vi:

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = -G\Delta x \cdot u(x, t) - C\Delta x \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -Gu(x, t) - C\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (6)$$

Ved å kombinere disse to relasjonene, ved å derivere den første med hensyn på x og den andre med hensyn på t , og deretter eliminere $i(x, t)$, får vi telegrafligningen for spenningen:

$$u_{tt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) u_t + \left(\frac{RG}{LC}\right) u = \left(\frac{1}{LC}\right) u_{xx}$$

Dette kan vi skrive som:

$$u_{tt} + (\alpha_H + \beta_H)u_t + \alpha_H\beta_H u = c^2 u_{xx}, \quad (i \text{ tapsfri linje : } c = \frac{1}{\sqrt{LC}}). \quad (7)$$

der vi definerer:

$$\alpha_H = \frac{R}{L}, \quad \beta_H = \frac{G}{C}.$$

Dette er en dempet bølgeligning som beskriver hvordan spenningen forplanter seg langs transmisjonslinjen, med damping og forvrengning bestemt av parametrene $RLCG$.

2.4 Propagerende løsning og overføringsfunksjon

I forrige del utledet vi telegrafligningen for spenning langs en kabel uttrykt ved de per-lengde-parametrene $RLCG$ som beskriver hvordan spenningen varierer både i tid og rom (7). Denne likningen er en såkalt bølgelikning med damping. Vi forventer derfor at løsningene skal ha bølgekarakter som oscillerer i tid og samtidig forplanter seg langs kabelen. For å fange dette opp antar vi en løsning på formen [6]

$$v(x, t) = \operatorname{Re}\{U e^{j\omega t - \gamma(\omega)x}\}. \quad (8)$$

Her har vi valgt tre elementer:

- **Tidsdelen** $e^{j\omega t}$: beskriver en harmonisk oscillasjon i tid. At vi bruker den komplekse eksponentialen i stedet for $\cos(\omega t)$ eller $\sin(\omega t)$ skyldes at dette gjør beregningene enklere. Til slutt tar vi realdelen for å hente ut det fysiske signalet.
- **Romdelen** $e^{-\gamma x}$: beskriver hvordan signalet utvikler seg langs kabelens lengde. Hvis γ er reell, betyr dette ren damping. Hvis γ er imaginær, betyr det ren faseforskyvning. I praksis er γ kompleks, slik at vi får begge deler.
- **Kompleks amplitude** U : setter størrelsen og fasen på bølgen.

Dette kalles en *harmonisk ansats*. Den er valgt fordi vi vet fra Fourier-teori at alle signaler kan bygges opp som en sum av slike harmoniske komponenter. Når vi kjenner kabelens respons på en frekvens, kan vi utvide til vilkårlige signaler. Setter vi (8) inn i telegrafligningen (7):

$$v_{tt} + (\alpha_H + \beta_H)v_t + \alpha_H\beta_H v = c^2 v_{xx}.$$

Ser vi at den tidslige avledningen bare gir faktorer av $j\omega$:

$$v_t = j\omega v, \quad v_{tt} = -\omega^2 v,$$

og den romlige avledningen gir faktorer av γ :

$$v_x = -\gamma v, \quad v_{xx} = \gamma^2 v.$$

Som gir oss:

$$-\omega^2 v + j\omega(\alpha_H + \beta_H)v + \alpha_H\beta_H v = c^2 \gamma^2 v.$$

Vi kan forkorte med v (som er forskjellig fra null) og får:

$$c^2 \gamma^2(\omega) = \alpha_H\beta_H - \omega^2 + j\omega(\alpha_H + \beta_H).$$

Dette er en såkalt *dispersjonsrelasjon*, som forteller hvilke kombinasjoner av frekvens ω og bølgetall γ som er mulige. Vi kan løse for γ og får:

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{c} \sqrt{\alpha_H \beta_H - \omega^2 + j\omega(\alpha_H + \beta_H)}.$$

Setter vi inn definisjonene på α_H, β_H og c , kan dette skrives på den standardformen som brukes i transmisjonslinjeteori:

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (9)$$

Dette uttrykket viser tydelig hvordan både ledertap (R) og dielektriske tap (G) bidrar til at signalet dempes, mens L og C bestemmer hastigheten til bølgen. Vi kan også uttrykke γ i form av sin reelle og imaginære del:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega).$$

Her har $\alpha(\omega)$ enheten Np/m (neper per meter) og forteller hvor raskt amplituden avtar med lengden, mens $\beta(\omega)$ har enheten rad/m og forteller hvor raskt fasen øker langs kabelen. Fra β kan vi utlede bølgens fasehastighet:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

og dermed hvor stor tidsforsinkelse signalet får etter en viss lengde.

Hvis vi nå ser på en kabel av lengde ℓ , vil en harmonisk komponent ved frekvens ω endres med faktoren:

$$H(\omega, \ell) = e^{-\gamma(\omega)\ell} = e^{-\alpha(\omega)\ell} e^{-j\beta(\omega)\ell} \quad (10)$$

Dette er kabelens *overføringsfunksjon* [3]. Den kan forstås slik:

- $e^{-\alpha\ell}$: amplituden reduseres eksponentielt med lengden,
- $e^{-j\beta\ell}$: signalet forskyves i fase, tilsvarende en tidsforsinkelse.

Så langt har vi bare sett på en harmonisk bølge. Men i praksis er alle signaler satt sammen av mange slike bølger. Et vilkårlig innsignal kan skrives som en Fourier-rekke:

$$f_{\text{in}}(t) = \sum_n c_n e^{j\omega_n t}.$$

Etter kabelen vil hver komponent være påvirket av $H(\omega_n, \ell)$, og vi får:

$$f_{\text{out}}(t) = \sum_n H(\omega_n, \ell) c_n e^{j\omega_n t}.$$

Dermed virker kabelen som et frekvensavhengig filter: lave frekvenser slipper nesten uendret gjennom, mens høye frekvenser dempes kraftig. For firkantsignaler betyr dette at de skarpe kantene, som består av mange høye frekvenser, gradvis blir avrundet etter hvert som lengden øker. Det er nettopp dette vi kan observere i laboratoriet når vi sender firkantpulser gjennom en Ethernet-kabel.

2.4.1 Damping (amplituderespons)

Damping beskrives av realdelen av propagasjonskonstanten [6]:

$$\alpha(\omega) = \text{Re}\{\gamma(\omega)\}$$

Den sier noe om hvor stor faktor hver frekvenskomponent dempes i amplitude. Denne faktoren er definert som størrelsen av overføringsfunksjonen:

$$|H(\omega, \ell)| = e^{-\alpha(\omega)\ell}, \quad |H(\omega, \ell)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H| = -8.686 \alpha(\omega) \ell$$

Når c_n er Fourier-koeffisienten til n -te harmoniske komponent, er amplituden til denne komponenten etter kabelen gitt ved:

$$|c_n^{\text{out}}| = |H(\omega_n, \ell)| \cdot |c_n| = e^{-\alpha(\omega_n)\ell} |c_n|$$

Hvorfor signalet dempes kan forklares med to hovedmekanismer:

- **Skinneffekt:** Når frekvensen øker, presses strømmen mot overflaten av lederen. Det effektive tverrsnittet blir mindre, og den elektriske motstanden per lengde øker. For runde ledere (og godt approksimert i praksis) gjelder :

$$R(\omega) = R_{DC} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_s}}, \quad \text{hvor} \quad \omega_s = \frac{2\rho}{\mu r^2}, \quad R_{DC} = n_s \cdot \frac{\rho}{\pi r^2} \quad (11)$$

Her er ω_s den skinneffektsfaktoren for runde ledere, R_{DC} den DC motstanden per meter, n_s tar hensyn til antall ledere i serie (2 for tvinnet par), ρ er resistiviteten til lederen, μ er permeabiliteten til lederen og r er radiusen til lederen [7]. Vi ser dermed at:

$$R(\omega) \propto \sqrt{\omega}$$

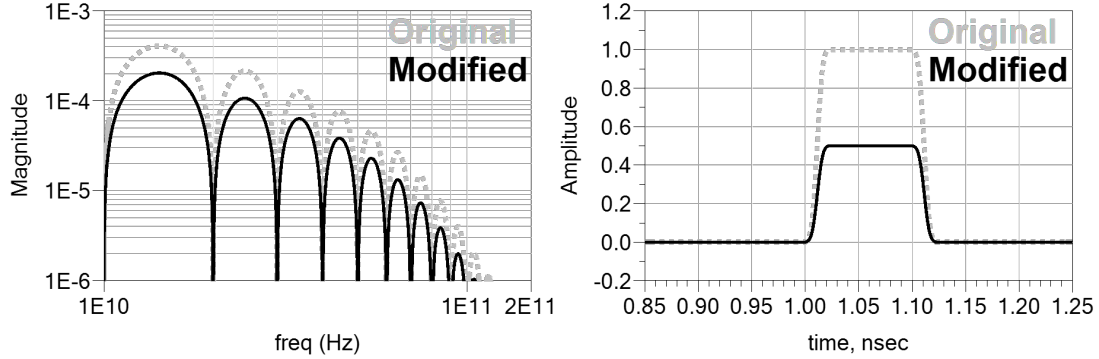
Ut fra propagasjonskonstanten (9) følger at $\alpha(\omega)$ vokser omtrent som $\sqrt{\omega}$.

- **Dielektriske tap:** Et virkelig dielektrikum er ikke tapsfritt: polarisasjonen henger litt etter feltet (faseforsinkelse), noe som kan modelleres med *loss tangent* $\tan \delta$. For små tap får vi den nyttige tilnærmingen:

$$G(\omega) = \omega C \tan \delta \Rightarrow G(\omega) \propto \omega \quad (12)$$

slik at tapet øker lineært med frekvens. Dette bidrar også til $\alpha(\omega)$ og dermed til økende damping med ω [7].

Dette gir da direkte utslag i overføringsfunksjonen. Siden både $R(\omega)$ og $G(\omega)$ øker med frekvens, dempes høyfrekvente komponenter mest. I tid betyr det sløvere kanter og “droop” på plataet (vertikal lukking i øyediagram) siden høye frekvenser som trengs for å gjenskape skarpe kanter, er mest dempet.



Figur 2: Tids- og frekvensdomene av original og modifisert bølgeform. Pulsformen bestemmes av forholdet mellom frekvenskomponentene; er amplituder og relative faser like, blir tidskurven uendret [8].

2.4.2 Dispersjon (fase, gruppeforsinkelse og gruppehastighet)

Dispersjon beskrives av den imaginære delen av propagasjonskonstanten (fasekonstanten) [6]:

$$\beta(\omega) = \text{Im}\{\gamma(\omega)\}$$

Den sier noe om hvor mye hver frekvenskomponent forskyves i fase. Fasen til kabelen er gitt ved:

$$\varphi(\omega, \ell) = -\beta(\omega) \ell$$

Fra fasen kan vi finne *gruppeforsinkelse* og *gruppehastighet*. *Gruppeforsinkelse* er definert som:

$$\tau_g(\omega, \ell) = \varphi'(\omega, \ell) = -\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega, \ell) = \ell \frac{d\beta(\omega)}{d\omega}$$

Den sier noe om hvor mye en smal båndbredde rundt frekvensen ω forsinkes i tid etter å ha passert kabelen. *Gruppehastighet* er definert som:

$$v_g(\omega) = \frac{1}{\tau_g'(\omega)} = \left(\frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right)^{-1}, \quad \text{hvor} \quad \tau_g'(\omega) = \frac{\tau_g(\omega, \ell)}{\ell} = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \quad [\text{s/m}]$$

Den sier noe om hvor raskt en smal båndbredde rundt frekvensen ω forplanter seg i kabelen. Det vi ser her er at τ_g og v_g avhenger av frekvensen og det er nettopp dette som kalles *dispersjon*. Vi kan tolke dette slik at ulike frekvenskomponenter av et signal forplanter seg med ulik hastighet.

Dette får direkte konsekvenser for pulsform og øyediagram.

- **Ingen dispersjon:** Hvis $\frac{d\beta}{d\omega}$ er konstant (lineær fase), får alle frekvenskomponenter samme tidsforsinkelse \Rightarrow ingen pulsbredning (ingen horisontal øyelukking).
- **Dispersjon:** Når $\frac{d\beta}{d\omega}$ varierer med frekvens (ikke-lineær fase), får ulike frekvenskomponenter ulik tidsforsinkelse \Rightarrow pulsbredning (horisontal øyelukking). I lavtap-tilfellet er ofte

$$\beta(\omega) \approx \omega\sqrt{LC} \quad , \quad \text{slik at} \quad \tau'_g(\omega) = \frac{d\beta}{d\omega} \approx \sqrt{LC} \quad , \quad v_g(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(nær konstant): da blir formen mest påvirket av demping, ikke fase-dispersjon.

Spesialtilfelle (forvrengningsfri linje):

Heaviside-betingelsen:

$$\alpha_H = \beta_H \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

gir $\beta(\omega)$ lineær i ω (konstant τ'_g) og $\alpha(\omega)$ frekvensuavhengig. Da fås ingen dispersiv forvrengning (kun lik demping av alle frekvenser).

2.4.3 Kobling til pulstog

Et periodisk innsignal med Fourierkoeffisienter c_n filtreres som

$$f_{\text{out}}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=-N}^N c_n H(\omega_n, \ell) e^{j\omega_n t} \right\}.$$

Demping (via α) fjerner spesielt de høye leddene \Rightarrow langsommere kanter.

Dispersjon via:

$$\frac{d\beta}{d\omega}$$

tidsforskyver leddene relativt \Rightarrow pulsbredning.

2.5 Karakteristisk impedans

En transmisjonslinjes karakteristiske impedans Z_0 er definert som forholdet mellom spenning og strøm for en bølge som forplanter seg langs linjen uten refleksjoner [6]. Den er gitt ved:

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{V_0^+}{I_0^+}$$

Her er V_0^+ og I_0^+ amplitudene til den fremadgående spenningen og strømmen. Denne impedansen er generelt kompleks og frekvensavhengig, noe som betyr at både resistive (RG) og reaktive komponenter (LC) påvirker signalet.

For høye frekvenser, hvor $j\omega L$ og $j\omega C$ dominerer over R og G , nærmer den karakteristiske impedansen seg:

$$R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C \quad \Rightarrow \quad Z_0(\omega) \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dette er den ideelle karakteristiske impedansen for en tapsfri linje. I praksis må transmisjonslinjer ofte matches til kildens og lastens impedans for å minimere refleksjoner som gir stående bølger. Refleksjonskoeffisienten ved en last er gitt ved:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}, \quad \text{hvor } Z_L \text{ er lastimpedansen.}$$

$$Z_0 = Z_L, \quad \Rightarrow \quad \Gamma = 0 \quad (\text{ingen refleksjon})$$

Om vi har en mismatch, vil vi få en løsning som er en superposisjon av frem- og tilbakegående bølger gitt ved:

$$v(x, t) = \text{Re}\{U_+ e^{j\omega t - \gamma x} + U_- e^{j\omega t + \gamma x}\}, \quad \text{hvor } U_- = \Gamma U_+$$

Noe som kan føre til interferens og forvrengning av signalet. Dette er spesielt kritisk i høyfrekvente applikasjoner som RF- og mikrobølgekommunikasjon, hvor selv små refleksjoner kan ha betydelig innvirkning på signalintegriteten. Derfor er det viktig å designe transmisjonslinjer med riktig karakteristisk impedans og å bruke passende termineringer for å sikre optimal ytelse. Ulike typer kabler, som koaksialkabler og tvinnede par, har forskjellige karakteristiske impedanser basert på deres fysiske konstruksjon og materialegenskaper. Ethernet-kabler har typisk en karakteristisk impedans på 100Ω , mens koaksialkabler ofte har 50Ω eller 75Ω . I modellering antar vi at kablen er korrekt terminert med sin karakteristiske impedans for å unngå refleksjoner og stående bølger.

2.6 Koaksialkabelen (brukt i lab) som transmisjonslinje

En koaksialkabel er en praktisk realisering av transmisjonslinjemodellen. Den består av en indre leder omgitt av et isolerende dielektrikum og en ytre leder som fungerer som skjerm. Denne oppbygningen gir god skjerming mot elektromagnetisk støy og jevn feltfordeling, noe som gjør kablen egnet for høyfrekvente signaler. I laboratoriet brukes koaksialkabler for å undersøke hvordan signaler dempes og forvrenges over lengde.

2.7 Oppsummering og kobling til prosjektet

Teorien forklarer hvorfor signaler i lange kabler dempes og forvrenges, og gir oss verktøyene til å analysere dette både analytisk og numerisk. Dette kan gi oss innsikt i hvorfor det er en anbefalt grense på 100m for Ethernet-kabler og hvordan koaksialkabler av forskjellige lengder påvirker signalet i frekvensdomenet. I det videre arbeidet skal vi gjennomføre numeriske simuleringer og praktiske målinger, slik at vi kan modellere effekten av demping og dispersjon på signaler i kabler numerisk og bruke måledata til å validere prinsippene.

3 Metode

3.1 Mål og hypoteser

Formål: Hovedmålet er å utvikle og analysere en frekvensavhengig RLCG-modell for Cat5e (tvinnet parkabel) ved hjelp av Fourier-analyse. Vi beregner overføringsfunksjonen:

$$H(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell} = e^{-\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}\ell}$$

En enkel laboratoriemåling på koaks (5m og 30m) brukes kun som *kvalitativ prinsippbe-
kreftelse*. 1:1 verifikasjon av Cat5e-modellen er utenfor omfanget.

3.2 Oversikt

Metoden vi bruker i denne rapporten består av to hoveddeler: numerisk simulering og laboratoriestudie. Den numeriske simuleringen innebærer å modellere transmisjonslinjen ved hjelp av telegrafligningen. Vi bruker Python for å implementere denne modellen og generere simuleringsdata. I laboratoriestudien gjennomfører vi praktiske målinger av hvordan et pulstog påvirkes når det sendes gjennom en koaksialkabel av forskjellige lengder. Vi bruker en funksjonsgenerator til å generere pulstoget og et oscilloskop for å måle inngangs- og utgangssignaler.

3.3 Numerisk simulering og modellering

For å simulere telegrafligningen numerisk brukte vi Python med relevante biblioteker for numerisk beregning. Koden er vedlagt i vedlegg 1.

Modellantakelser. Vi modellerer kabelen som en lineær, tidsinvariant linje med fordelte parametre $R(f)$, L , C , $G(f)$ per meter. Merk at R og G er frekvensavhengige for å modellere henholdsvis skinneffekt og dielektriske tap (parametriseringen R , G er utledet i Modellering). Vi antar at kabelen er terminert med en last som matcher karakteristisk impedans, slik at vi kan se bort fra refleksjoner, i tillegg er verdier for L og C hentet fra datablad. Vi bruker funksjonen:

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad H(\omega) = e^{-\gamma(\omega)\ell}$$

Verdier for $RLCG$ er vist i tabell 1:

Parameter	Verdi	Enhet
$R(f)$	$\approx 0.17 \cdot \sqrt{\frac{f}{67 \cdot 10^3}}$	Ω/m
L	525	nH/m
C	52	pF/m
$G(f)$	$0.65f$	pS/m
$\tan \delta$	≈ 0.002	--

Tabell 1: Parameterverdier for $RLCG$ -modellen (enheter for f er Hz)

Simuleringens modellering. Vi modellerer fem forskjellige situasjoner for å forstå hvordan forskjellige medier påvirker signalet som propagerer gjennom. Lengdene på mediet er 10m, 50m, 100m og 1000m. Simuleringen tar utgangspunkt i formelen:

$$\gamma(f) = \alpha(f) + j\beta(f)$$

Vi simulerer følgende modeller:

- **Kun damping:** Ignorer faseendring ved å sette $\beta = 0$.
- **Kun faseendring:** Ignorer damping ved å sette $\alpha = 0$.
- **Ideell, tapsfri og ikke-dispersiv modell:** Mediet er ideelt, uten damping og uten dispersjon.
- **Full modell:** Inkluderer både damping og faseendring. Simuleringen tilnærmer seg virkeligheten.
- **Waterfall plott:** Simulerer hvordan forskjellige frekvenskomponenter påvirker tidsdomenesignalet.

3.3.1 Inngangssignal og representasjon

Vi modellerer pulstoget som en 50% duty-cycle firkantpuls med periodetid $T = 2\mu s$ og grunnvinkelhastighet $\omega_0 = 2\pi/T$. Siden duty-cycle er 50% består spekteret av kun oddetalls harmoniske. Tidsfunksjonen representeres med Fourier-rekken (utledet i Modellering).

$$v_{\text{in}}(t) = \frac{5}{2} + \sum_{\substack{n=-N_{\text{harm}} \\ n \text{ oddetall}}}^{N_{\text{harm}}} \frac{5}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t} \quad (13)$$

3.4 Laboratoriestudie

3.4.1 Gjennomførelse

Dette er vårt praktiske forsøk for å studere og analysere telegrafligningen i virkeligheten. Vi bruker en funksjonsgenerator til å generere et firkant-pulstog som sendes gjennom en koaksialkabel av kjente forskjellige lengder. På mottakersiden bruker vi et oscilloskop for å sammenlikne data med en kort, direktekoblet koaksialkabel (referanse) og gjennom en lengre koaksialkabel.

3.4.2 Hensikt

Hensikten med laboratorieforsøket er å undersøke hvordan signalet endres når det overføres gjennom en transmisjonslinje over forskjellige lengder. Ved høyere frekvenser forventes amplitudetap, faseforskyvning og forvrengning av signalet, som vi ønsker å analysere.

3.4.3 Utstyr og oppsett

Utstyret i forsøket er følgende:

- **Funksjonsgenerator.** Modellen er RND 360-00022, Arbitrary Waveform Generator. Genererer firkant-pulstog med justerbar frekvens og amplitude. Firkant-pulstoget ble konfigurert til periodetid $T = 2\mu s$ (frekvens $f_{\text{ref}} = 500\text{kHz}$) med 50% duty-cycle og amplitude på $2.5V_{pp}$ (dette må korrigeres med offset i analysen). Startfasen ble satt til 0° for å sikre at signalet starter ved null. Resistansen på utgangen er 50Ω .
- **Oscilloskop.** Modellen er GW Instek GDS-1104B. Vi benytter FFT-funksjonalitet for frekvensanalyse (0-25 MHz). Resistansen på inngangskanalen er $1M\Omega$.
- **Kabler.** Koaksialkabel med lengder på 5m og 30m. Karakteristisk impedans er 50Ω .

Merk: Ideelt sett skulle kilde impedans og lastimpedans matchet karakteristisk impedans for å unngå refleksjoner, men dette var ikke mulig med tilgjengelig utstyr.

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1M\Omega - 50\Omega}{1M\Omega + 50\Omega} \approx 0.9999 \quad (\text{nesten full refleksjon})$$

3.4.4 Måleprosedyrer

Måleprosedyrene inkluderer kalibrering av funksjonsgenerator og oscilloskop, oppsett av firkant-pulstog, og måling av inngangs- og utgangssignaler for hver kabellengde. På oscilloskopet målte vi v_{in} og v_{out} for hver kabellengde, og registrerte dataene for videre analyse. Her benyttet vi oss også av FFT (Fast Fourier Transform) for å analysere frekvensspekteret til signalene. Vi gjennomfører gjentatte målinger for å vurdere konsistens og usikkerhet.

4 Modellering

4.1 Situasjon

I den første modellen demonstrerer vi dempingen som de forskjellige frekvenskomponentene i et signal opplever når det sendes gjennom et medium. Dette gjøres ved å sende et signal med flere frekvenskomponenter gjennom en dempende funksjon, og deretter analysere hvordan de forskjellige komponentene blir påvirket. Vi tar utgangspunkt i en firkantpuls med periode T :

$$v_{in}(t) = \begin{cases} 5, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}, \quad \text{hvor } T = 2\mu s, \quad \text{duty cycle} = 50\%$$

Vi bestemmer først Fourier-rekken til firkantpulsens for å finne frekvenskomponentene:

$$v_{in}(t) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ oddetall}}}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{hvor } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Merk at siden vi vet at duty cycle er 50%, vil bare oddetalls harmoniske være tilstede i Fourier-rekken. Koeffisientene c_n kan beregnes som:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_{in}(t) dt = \frac{5}{2}$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_{in}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{5}{j2n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Vi får dermed at:

$$v_{in}(t) = \frac{5}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ oddetall}}}^{\infty} \frac{5}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t}$$

For å modellere dempingen i mediet, antar vi parametre som gir realistisk tilnærming til virkelige kabelverdier for RLCG. Vi antar at mediet er en Cat5e kabel med følgende parametre: Fra formel (11) får vi at R er gitt ved:

$$R(f) = R_{DC} \cdot \sqrt{\frac{f}{f_s}}, \quad \text{hvor } f_s = \frac{\rho_{cu}}{\pi \mu_{cu} r^2}, \quad R_{DC} = n_s \cdot \frac{\rho_{cu}}{\pi r^2}, \quad (\text{merk at } \omega = 2\pi f)$$

$$\rho_{cu} = 1.72 \cdot 10^{-8} \Omega m, \quad r = 0.255 mm, \quad \mu_{cu} = \mu_0 \cdot \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m., \quad n_s = 2$$
$$f_s \approx 67 kHz, \quad R_{DC} \approx 0.17 \Omega/m,$$

Dermed får vi:

$$R(f) = 0.17 \cdot \sqrt{\frac{f}{67 \cdot 10^3}} \quad [\Omega/m]$$

Vi antar videre at [5]:

$$L = 525 nH/m, \quad C = 52 pF/m$$

Fra formelen (12) for dielektriske tap, får vi at:

$$G(f) = 2\pi f C \tan \delta, \quad \text{hvor } \tan \delta = 0.002$$

Vi står igjen med:

$$R(f) \approx 0.17 \cdot \sqrt{\frac{f}{67 \cdot 10^3}} \quad [\Omega/m], \quad L = 525 nH/m, \quad C = 52 pF/m, \quad G(f) \approx 0.65 f \quad [pS/m]$$

Vi har nå alt vi trenger for å finne overføringsfunksjonen til mediet:

$$H(f, \ell) = e^{-\gamma(f)\ell}, \quad \text{hvor} \quad \gamma(f) = \sqrt{(R(f) + j2\pi fL)(G(f) + j2\pi fC)}$$

Her er ℓ lengden på mediet (kabelen) og $\gamma(f)$ er propagasjonskonstanten som avhenger av frekvensen. Vi kan nå finne ut hvordan hver frekvenskomponent i firkantpulsens blir dempet ved å multiplisere hver komponent med $H(f, \ell)$:

$$v_{out}(t) = c_0 H(0, \ell) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ oddetall}}}^{\infty} c_n H(nf_0, \ell) e^{jn\omega_0 t}$$

Som i denne situasjonen gir:

$$v_{out}(t) = \frac{5}{2} H(0, \ell) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ oddetall}}}^{\infty} \frac{5}{jn\pi} H(nf_0, \ell) e^{jn\omega_0 t}$$

For å simulere dette numerisk, kan vi bruke Python til å beregne $H(f, \ell)$ for en rekke frekvenser og deretter rekonstruere tidsdomenesignalet ved å summere de dempede frekvenskomponentene i Fourier-rekken. Vi kan da plote både inngangssignalet og utgangssignalet for å visualisere effekten av dempingen i mediet.

4.2 Modeller

For å forstå hvordan forskjellige aspekter av mediets egenskaper påvirker signalet, har vi laget flere modeller der vi varierer hvilke deler av den propagasjonskonstanten $\gamma(f)$ vi tar hensyn til. Modellene er basert på 10m, 50m, 100m og 1000m. Vi har følgende modeller:

- **Kun damping:** I disse modellene tar vi kun hensyn til dempingen i mediet, og ignorerer faseendringen. Dette viser hvordan signalets amplitude påvirkes uten å endre dets form (modell 1 og 2).

$$\gamma(f) = \alpha(f)$$

- **Kun faseendring:** I denne modellen tar vi kun hensyn til faseendringen i mediet, og ignorerer dempingen. Dette viser hvordan signalet ville oppføre seg i et ideelt tapsfritt medium (modell 3).

$$\gamma(f) = j\beta(f)$$

- **Ideell, tapsfri og ikke-dispersiv modell:** Her antar vi at mediet er ideelt, uten demping og uten dispersjon. Dette betyr at alle frekvenskomponenter har samme fasehastighet (modell 4).

$$\gamma(f) = j\beta(f), \quad \text{hvor} \quad \beta(f) = \omega\sqrt{LC}$$

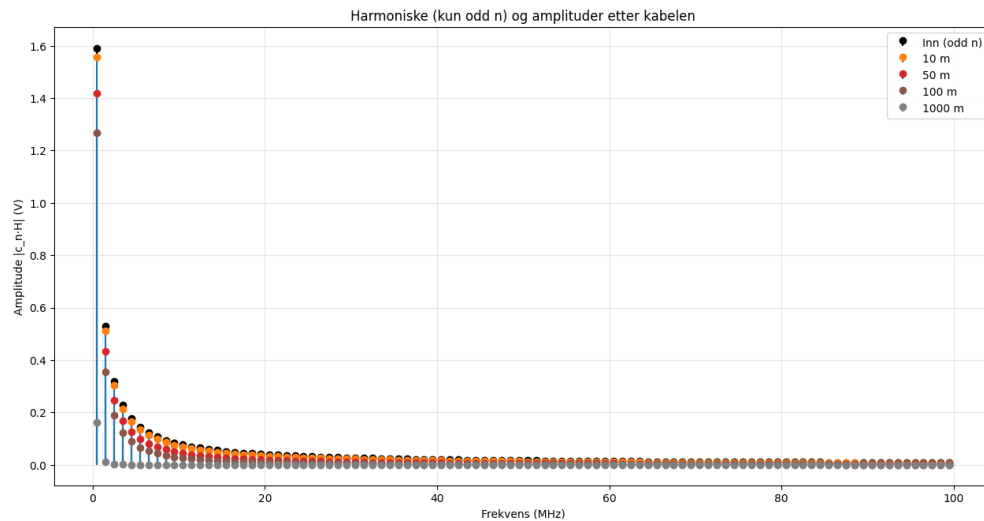
- **Full modell:** Her tar vi hensyn til både demping ($\text{Re}(\gamma)$) og faseendring ($\text{Im}(\gamma)$) i mediet. Dette gir en tilnærmet representasjon av hvordan signalet påvirkes (modell 5).

$$\gamma(f) = \alpha(f) + j\beta(f)$$

- **Waterfall plott:** For å visualisere hvordan forskjellige frekvenskomponenter påvirker tidsdomenesignalet, har vi laget to "waterfallplot" som viser hvordan signalet endres når vi inkluderer flere og flere frekvenskomponenter opp til en viss grensefrekvens (modell 6).

4.3 Modell 1 (kun damping i frekvensdomenet)

Damping av signalet er vist i *figur 3*. Vi ser at høyfrekvente komponenter blir betydelig dempet, noe som resulterer i en mer avrundet firkantpuls ved utgangen. Dette illustrerer hvordan mediet fungerer som et lavpassfilter, hvor de høyere frekvensene reduseres mer enn de lavere frekvensene.



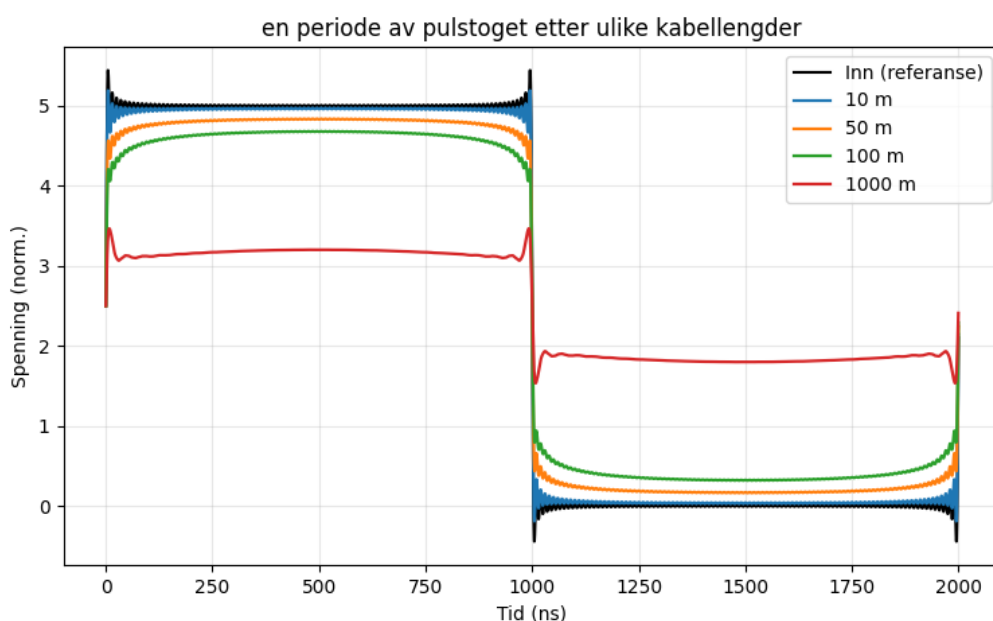
Figur 3: Frekvensdomeneanalyse av firkantpuls etter å ha passert gjennom et dempende medium over forskjellige lengder.

4.4 Modell 2 (damping i frekvensdomenet i tidsdomenet)

I den andre modellen ser vi på hvordan tidsdomenesignalet endres etter å ha passert gjennom mediet. Vi rekonstruerer tidsdomenesignalet ved å summere Fourier-rekkene for de dempede harmoniske. Her har vi kun tatt hensyn til amplitudendringen, og ikke faseendringen. Altså ser vi på:

$$H(f, \ell) = e^{-\alpha(f)\ell}, \quad \text{hvor} \quad \alpha(f) = \text{Re}\{\gamma(f)\}$$

Resultatet er vist i *figur 4*. Vi ser at firkantpulsen blir mer avrundet etter å ha passert gjennom mediet, noe som bekrefter at høyfrekvente komponenter dempes mer enn lavfrekvente komponenter. Dette resulterer i en signifikant endring i signalets form, spesielt over lengre avstander.



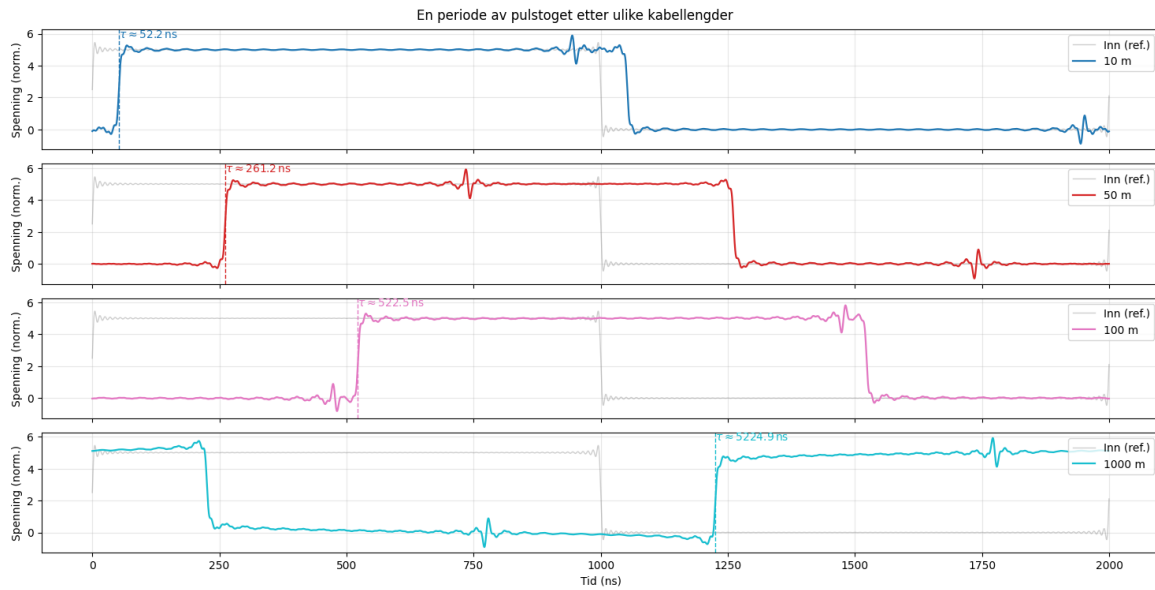
Figur 4: Tidsdomenesignalet av firkantpuls etter å ha passert gjennom et dempende medium over forskjellige lengder.

4.5 Modell 3 (kun faseendring)

I den tredje modellen ser vi på hvordan tidsdomenesignalet endres når vi kun tar hensyn til faseendringen i mediet, og ignorerer dempingen. Altså ser vi på:

$$H(f, \ell) = e^{-j\beta(f)\ell}, \quad \text{hvor} \quad \beta(f) = \text{Im}\{\gamma(f)\}$$

Resultatet er vist i *figur 5*. Vi ser at firkantpulsen blir mer vrengete etter å ha passert gjennom mediet, men beholder sin generelle form. Dette illustrerer hvordan faseendringen påvirker signalets tidsdomenesignal uten å endre dets amplitude. Alle frekvenskomponenter opplever forskjellige faseforsinkelser, noe som fører til en forvrengning av signalets form.



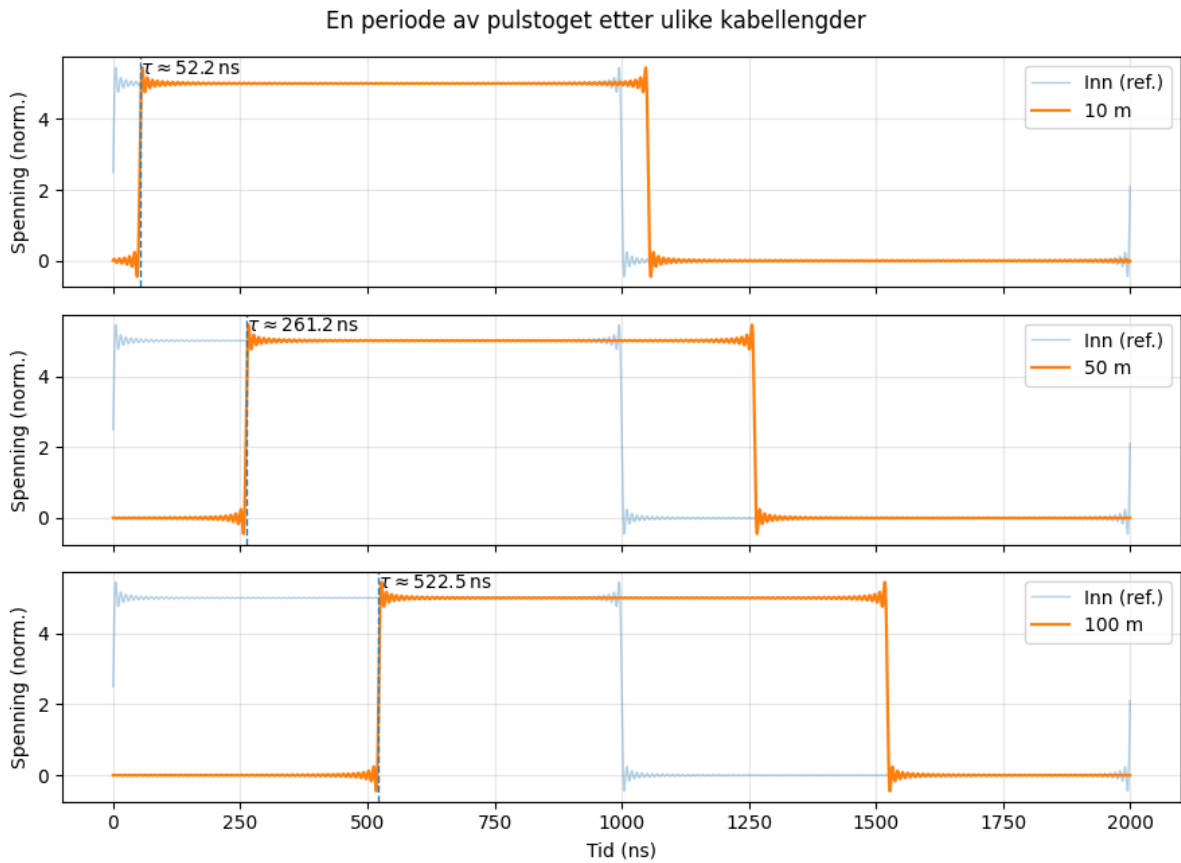
Figur 5: Tidsdomenesignalet av firkantpuls etter å ha passert gjennom et medium med kun faseendring.

4.6 Modell 4 (Ideell, ikke-dispersiv modell)

I den fjerde modellen ser vi på hvordan tidsdomenesignalet endres når vi antar at mediet er ideelt, uten demping og uten dispersjon. Altså ser vi på:

$$H(f, \ell) = e^{-j\beta(f)\ell}, \quad \text{hvor} \quad \beta(f) = \omega\sqrt{LC}$$

Resultatet er vist i *figur 6*. Vi ser at firkantpulsen opprettholder sin opprinnelige form og blir forsinket i tid. Dette bekrefter at i et ideelt ikke-dispersivt medium, har alle frekvenskomponenter samme fasehastighet, noe som betyr at signalets form bevares uten noen forvrengning.



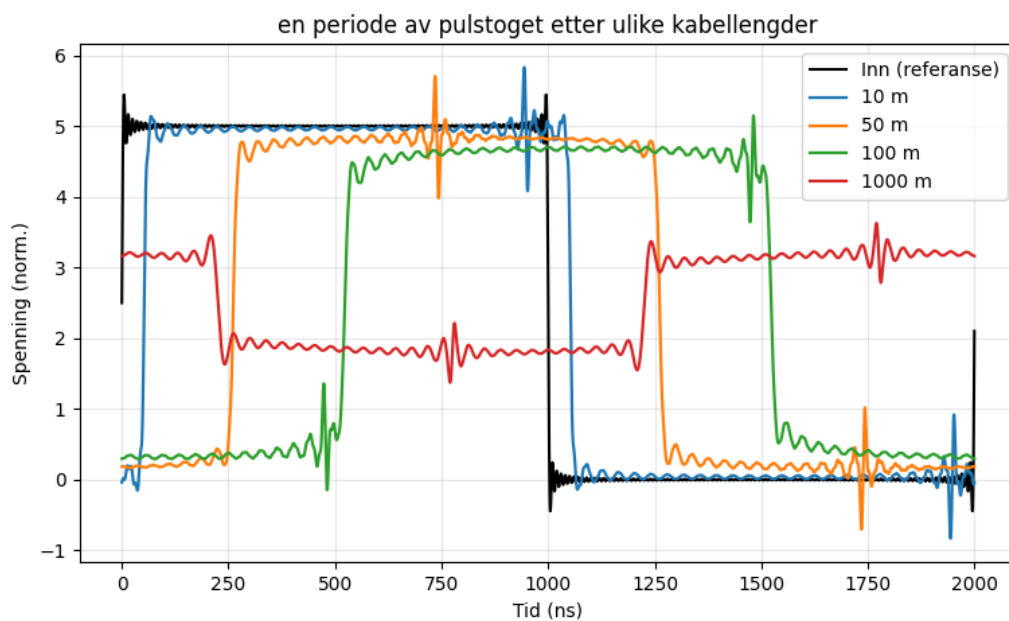
Figur 6: Tidsdomenesignalet av firkantpuls etter å ha passert gjennom et ideelt ikke-dispersivt medium over forskjellige lengder.

4.7 Modell 5 (full modell)

I den femte modellen ser vi på hvordan tidsdomenesignalet endres når vi tar hensyn til både demping og faseendring i mediet. Altså ser vi på:

$$H(f, \ell) = e^{-\gamma(f)\ell}, \quad \text{hvor} \quad \gamma(f) = \alpha(f) + j\beta(f)$$

Resultatet er vist i *figur 7*. Vi ser at firkantpulsen blir både dempet og forsinket i tid etter å ha passert gjennom mediet. Dette gir en mer realistisk representasjon av hvordan signalet påvirkes i et ekte medium, hvor både demping og faseendring spiller en rolle. Over lengre avstander blir signalet stadig mer forvrenget, noe som illustrerer viktigheten av å ta hensyn til begge aspekter for å forstå signalets oppførsel.



Figur 7: Tidsdomenesignalet av firkantpuls etter å ha passert gjennom et realistisk medium over forskjellige lengder.

4.8 Modell 6 (Waterfall plot)

For å få en bedre forståelse av hvordan forskjellige frekvenskomponenter påvirker tidsdomenesignalet, har vi laget to *Waterfall* plot som viser hvordan signalet endres når vi inkluderer flere og flere frekvenskomponenter opp til en viss grensefrekvens (visualisere bidraget fra hver komponent). Den ene kalles lavpassfilter (LP) og den andre høypassfilter (HP). Prinsippet er det samme for begge plottene, men de summerer forskjellige sett av frekvenskomponenter:

- **Lavpassfilter (LP):** Her summerer vi alle frekvenskomponenter fra fundamentalfrekvensen f_0 opp til en økende grensefrekvens f_{cut} . Dette viser hvordan tidsdomenesignalet utvikler seg når vi inkluderer flere lavfrekvente komponenter.

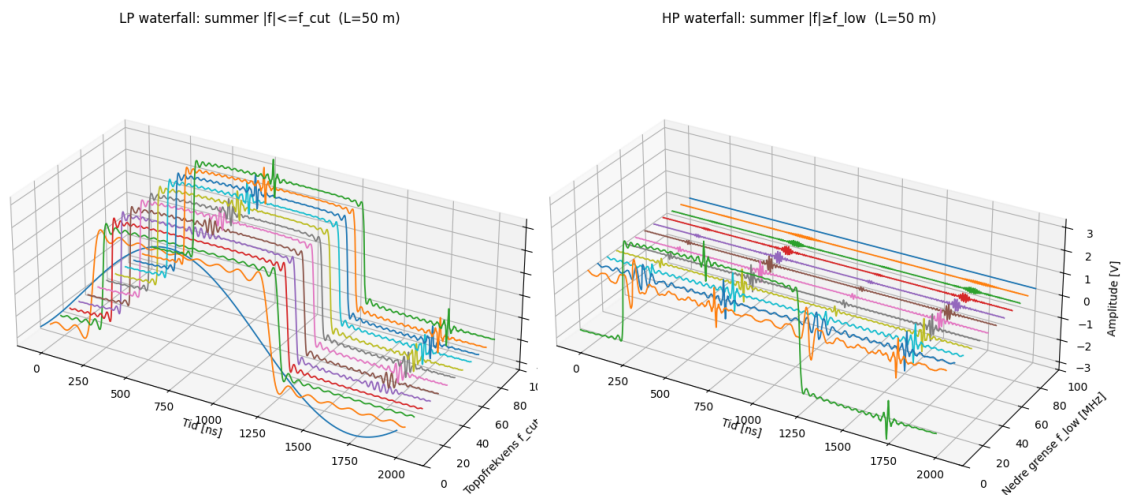
$$|f| \leq f_{cut}$$

- **Høypassfilter (HP):** Her summerer vi alle frekvenskomponenter fra en synkende grensefrekvens f_{low} opp til en øvre grensefrekvens (for eksempel 100 MHz eller høyeste harmoniske). Dette viser hvordan tidsdomenesignalet påvirkes når vi inkluderer flere høyfrekvente komponenter.

$$|f| \geq f_{low}$$

- **Antall kutt:** For å få en jevnere overgang i waterfall plottene, har vi økt antall kutt (cuts) til 13. Dette gir en mer detaljert visualisering av hvordan signalet endres med forskjellige grensefrekvenser.

Dette er vist i *figur 8*.



Figur 8: Waterfall plot som viser hvordan tidsdomenesignalet endres når flere frekvenskomponenter inkluderes opp/ned til forskjellige grensefrekvenser (plottet er for 50m kabel).

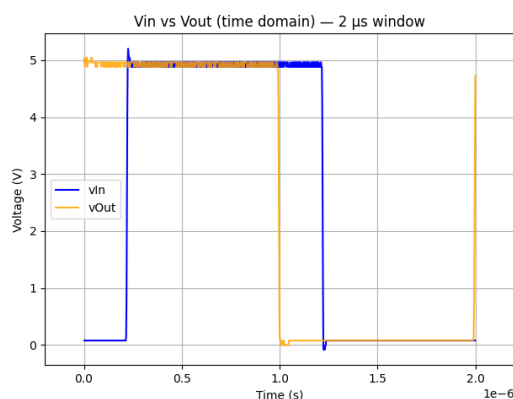
Vi ser at når vi inkluderer flere frekvenskomponenter, blir tidsdomenesignalet mer detaljert og nærmere den opprinnelige firkantpuls. Dette illustrerer viktigheten av høyfrekvente komponenter for å bevare signalets form. For lavpassfilteret ser vi at signalet gradvis nærmer seg firkantpuls når flere lavfrekvente komponenter inkluderes. For høypassfilteret ser vi at signalet blir mer avrundet når flere høyfrekvente komponenter inkluderes, noe som bekrefter at høyfrekvente komponenter er avgjørende for å opprettholde skarpe overganger i tidsdomenesignalet.

5 Lab resultater og analyse

5.1 5m koaksialkabel

5.1.1 Tidsdomenet

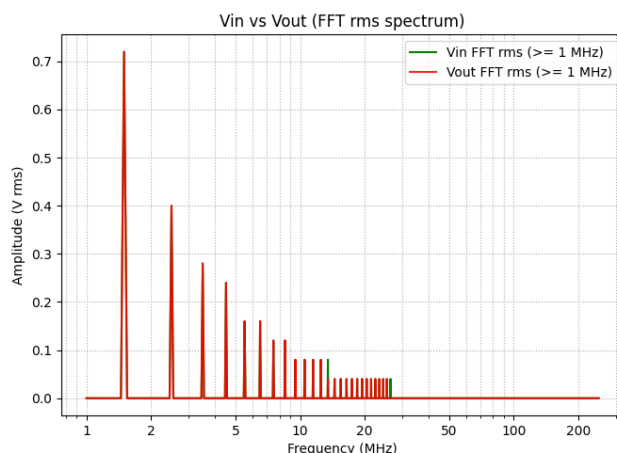
Figur 9 viser inngangs- og utgangssignalene for 5m koaksialkabel i tidsdomenet. Utgangssignalet er tilnærmet identisk med inngangssignalet, med kun minimal damping og faseforskyvning. Dette indikerer en nesten ideell, ikke-dispersiv oppførsel, der signalet hovedsakelig påvirkes av en tidsforsinkelse uten merkbar forvrengning eller tap. Dette er forventet, ettersom kabelen er relativt kort og dermed introduserer svært små tap.



Figur 9: Inngangs- og utgangssignaler for 5m koaksialkabel i tidsdomenet.

5.1.2 Frekvensdomenet

Figur 10 viser FFT av inngangs- og utgangssignaler for 5m koaksialkabel i frekvensdomenet. Vi ser at de harmoniske komponentene er tilnærmet uendret, med minimal damping. Dette indikerer at kabelen har liten effekt på signalets frekvensspekter, noe som er forventet for en kort kabel.

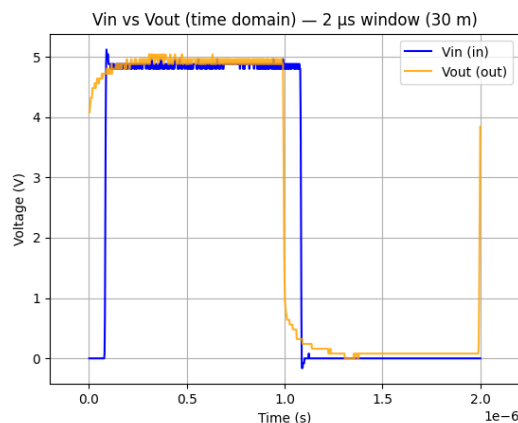


Figur 10: FFT av inngangs- og utgangssignaler for 5m koaksialkabel i frekvensdomenet.

5.2 30m koaksialkabel

5.2.1 Tidsdomenet

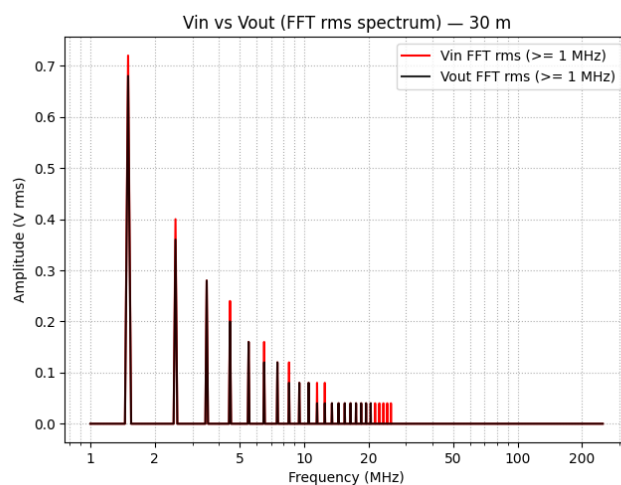
Figur 11 viser inngangs- og utgangssignaler for 30m koaksialkabel i tidsdomenet. Vi ser at utgangssignalet til en viss grad er dempet og har en liten faseforskyvning sammenlignet med inngangssignalet. Dette er forventet, da forvrengning øker med kabelens lengde.



Figur 11: Inngangs- og utgangssignaler for 30m koaksialkabel i tidsdomenet.

5.2.2 Frekvensdomenet

Figur 12 viser FFT av inngangs- og utgangssignaler for 30m koaksialkabel i frekvensdomenet. Selv om vi ser at det er en generell damping av signalet, forventet vi en gradvis damping av høyere frekvenskomponenter, men flere av de høyere harmoniske komponentene er tilnærmet uendret. Dette kan skyldes at koaksialkabelen har lav damping over det aktuelle frekvensområdet, men også andre feilkilder (f.eks. impedansmisforhold) som diskutert i neste kapittel kan ha påvirket resultatene.



Figur 12: FFT av inngangs- og utgangssignaler for 30m koaksialkabel i frekvensdomenet.

6 Feilkilder

Det opprinnelige målet med prosjektet var å modellere og simulere en transmisjonslinje og sammenligne dette med målinger gjort i laboratoriet. I dette kapitlet diskuterer vi feilkilder som kan ha påvirket resultatene.

6.1 Teoretiske antakelser

Som i de fleste modeller har vi gjort idealiserende antakelser som kan avvike fra virkeligheten. Vi antar at den karakteristiske impedansen Z_0 er tilnærmet konstant over frekvensområdet, selv om $Z_0(f)$ i praksis kan variere og skape refleksjoner og forvrengning. Videre antar vi fravær av eksterne elektromagnetiske forstyrrelser. Kabelen antas perfekt terminert (kilde- og lastimpedans matcher Z_0); ellers kan refleksjoner gi stående bølger. Modellen forutsetter lineær og tidsinvariant oppførsel; ved høye nivåer kan ikke-lineære effekter forekomme. Disse forenklingene gjør modellen håndterlig, men kan påvirke samsvaret mellom simulering og praksis.

6.2 Måleusikkerhet

Måleusikkerhet kan også påvirke resultatene. En kjent feilkilde i laboratoriet er at kilde impedansen og lastimpedansen ikke matcher den karakteristiske impedansen til kabelen, noe som kan føre til refleksjoner og stående bølger. Dette kan forvrengte både tids- og frekvensdomenesignalet. Noe som kan forklare de uforventede resultatene i *Figur 12*. Andre potensielle feilkilder inkluderer utilstrekkelig kalibrering av oscilloskop og funksjonsgenerator, som kan forskyve nivå og fase. Kontaktkvalitet og tilkoblinger er kritiske; dårlige eller ustabile overganger introduserer støy og refleksjoner. Elektromagnetisk støy i laboratoriemiljøet kan påvirke målingene, særlig i nærvær av annet elektronisk utstyr. Repeterte målinger, stabile tilkoblinger og et kontrollert målemiljø reduserer disse usikkerhetene.

6.3 Forslag til forbedringer

Med mer tid for å øke nøyaktigheten bør vi bruke samme kabeltype i både simulering og målinger, slik at laboratoriedata ikke bare bekrefter prinsippet, men også kan sammenlignes kvantitativt med modellen. Tilkoblingene bør oppgraderes med høykvalitetskontakter og sikre, lavimpedante overganger. Målingene gjennomføres i et miljø med minimal elektromagnetisk støy. For å redusere tilfeldige feil gjentas målingene, og middelerdi med standardavvik rapporteres. For mer presise frekvensdomenemålinger benyttes en spektrumanalysator fremfor oscilloskopets FFT-funksjon.

7 Konklusjon

Prosjektet har vist at telegrafligningen er en presis og anvendelig modell for å beskrive signalutbredning i transmisjonslinjer. Gjennom numeriske simuleringer har vi sett på forskjellige faktorer som påvirker signalers form, amplitude og fase. Resultatene fra dette bekrefter at korte kabler bevarer signalformen godt, mens lengre kabler fører til tydelig demping av høyfrekvente signaler, og forvrengninger i tidsdomenet. Ved å se på både tids- og frekvensdomenet for simuleringene og laboratoriemålingene, har vi fått en bedre forståelse av hvordan signaler oppfører seg basert på telegrafligningen. Dette undersøtter at telegrafligningen er et sentralt verktøy for å forstå hvordan elektriske signaler forplanter i transmisjonslinjer.

Videre arbeid kan basere seg på å utforske mer komplekse transmisjonslinjer. Dette kan inkludere laboratorieanalyser av Ethernet-kabler, med effekten av tvinnede parledninger på signalet tatt i betraktning, samt ved å undersøke refleksjoner og tilpasning av impedanser. En problemstilling som kan være interessant å utforske videre er hvordan signaler i høyspentlinjer kan påvirkes av ytre faktorer, og hvordan dette kan føre til feil i strømnettet, ved å se på konsekvensene av de ytre faktorene med telegrafligningen.

Avslutningsvis har prosjektet gitt en dypere forståelse av telegrafligningen og dens praktiske anvendelser i moderne kommunikasjonssystemer. Gjennom både teoretiske og praktiske tilnærminger har vi sett hvordan signaler oppfører seg i transmisjonslinjer, og hvordan ulike faktorer påvirker signalets kvalitet. Dette danner et solid grunnlag for videre studier innen signaloverføring og transmisjonslinjeteori.

Referanser

- [1] L. N. Bakken, *Telegrafligningen*, PDF-dokument, Utledelse og løsning av telegrafligningen, vedlagt i prosjektet, 2024. adresse: [Telegrafligningen.pdf](#)
- [2] G. contributors, *Telegrapher's Equation in Electrical Engineering*, Online; accessed 9 October 2025, 2025. adresse: <https://www.geeksforgeeks.org/electrical-engineering/telegraphers-equation/>
- [3] W. contributors, *Telegrapher's equations — Solutions of the telegrapher's equations as circuit components*, Online; accessed 9 October 2025, 2025. adresse: https://en.wikipedia.org/wiki/Telegrapher%27s_equations#Solutions_of_the_telegrapher%27s_equations_as_circuit_components
- [4] A. Croft, P. Davison, M. Hargreaves og J. Flint, *Engineering Mathematics*. Pearson Education Limited, 2017.
- [5] T. Instruments, *Implementing a Variable-Length Cat5e Cable Equalizer*, PDF-dokument, 2020. adresse: https://www.ti.com/lit/an/sboa125/sboa125.pdf?ts=1759787274591&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F#:~:text=Table%20%20shows%20the%20typical%20electrical%20characteristics%20of%20Cat5e%20cable.&text=Applying%20Equation%20%20to%20the,is%20equal%20to%20100.5%CE%A9.
- [6] W. H. H. Jr. og J. A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 8th Edition. New York: McGraw-Hill Education, 2018, Kapittel om transmisjonslinjer og propagasjonskonstanten. sjekket 6. okt. 2025. adresse: <https://dn790009.ca.archive.org/0/items/electromagnetic-field-theory/William%20H.%20Hayt%2C%20Jr.%20and%20John%20A.%20Buck%20-%20Engineering%20Electromagnetics-McGraw-Hill%20Education%20%282018%29.pdf>
- [7] S. Palermo. «Propagation on Transmission Lines.» Forelesningsnotat i ECEN689, sjekket 6. okt. 2025. adresse: https://people.engr.tamu.edu/spalermo/ecen689/lecture3_ee689_tlines.pdf
- [8] K. Technologies, *Root Cause of Eye Closure*, Webside, 2021. adresse: <https://docs.keysight.com/eesofapps/post-5-root-cause-of-eye-closure-678068340.html>

Vedlegg

[1] GitHub repository for prosjektet:

Url: https://github.com/Yonatan1717/Project_Fourier-rekker

Commit: [87f30ac2ba8e7b7361574c4c5bfc16f0230a9cad](#) (commit fra 12.10.2025)

Inneholder all kode og data brukt i prosjektet, mer informasjon i README.md filen.