FHS/Cyberingeniørskolen
Matematikk

11. okt. 2024

PROSJEKTRAPPORT

FOURIERREKKER

LOTKA-VOLTERRA LIKNINGENE

ING2504 MATEMATISKE METODER 2

AV

Herman Hellum, Marius Møller, Simon Bøhmer & Aleksander Jonassen

KLASSE: VING 77

Rapport levert: 11/10-2024

Innhold

1. Innledning

Rapportens formål er å utforske Lotka-Volterra likningene. Lotka-Volterra er et ligningssystem som forklarer sammenhengen mellom antall byttedyr og rovdyr i et biologisk system. Lotka-Volterra består av to førsteordens ikke-lineære differensiallikninger. [1]

Rapporten skal utforske likningene og se nærmere på den praktiske bruken av dem. Verdiene som brukes i modellene er valgt vilkårlig og er ikke basert på virkelige verdier. Dette for å ikke skape unødvendige komplikasjoner for rapportens hensikt.

2. Teori

I dette kapittelet forklares og utledes formlene fra oppgavevedlegget.

2.1. Lotka-Volterra likningene

Lotka-Volterra likningene forklarer dynamikken mellom to dyrearter i et system, der den ene arten er rovdyr (y) og det andre er byttedyr (x). Med antakelser om at det er tilstrekkelig med mat for byttedyrene, og at rovdyrene kun ernærer seg av valgt byttedyr (x). Klima, sykdom og andre faktorer er ikke inkludert. Med dette kan befolkningene x og y utrykkes med likningene:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = y(\delta x - \gamma)$$

Dette kan også representeres med en matrise, på denne måten [1]:

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Der de ulike konstantene i likningen defineres slik, der alle konstantene er reelle, positive tall:

- t er tiden
- α er den største stigningen byttedyrene kan ha (fødsler byttedyr)
- γ er den naturlige dødelighet blant rovdyrene (dødsfall rovdyr)

β og δ er konstanter som viser sammenhengen mellom befolkningene:

- β er effekten rovdyrene har på byttet (bytte drept pr. rovdyr)
- δ er effekten byttet har på rovdyrene (fødsler pr. bytte spist)

Lotka-Volterra likningene kan utvides til å inkludere andre faktorer som sykdom og endring av årstidene. Dette vil gi mer nøyaktige resultater og et mer naturlig bilde av hvordan dynamikken mellom dyrene faktisk er, men på bekostning av mer kompleksitet. Likningene i rapporten ser bort ifra disse for å ikke skape unødvendige komplikasjoner.

2.2 Likevektspunkter

Befolkningslikevekt i et system vil si at verken rovdyrbestanden eller byttedyrbestanden endrer seg over tid. Altså at det er oppstått en likevekt slik at antall byttedyr- og rovdyrbestanden er konstant. Disse likevektspunktene kan finnes slik:

<u>2.2.1 Den deriverte er null</u>

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løser for $\dot{x}$:

$$x(\alpha - \beta y) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\alpha - \beta y = 0 \Rightarrow y = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$x = 0 \text{ eller } y = \frac{\alpha}{\beta}$$

Løser for $\dot{y}$:

$$y(\delta x - \gamma) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\delta x - \gamma = 0 \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\delta}$$

$$y = 0 \text{ eller } x = \frac{\gamma}{\delta}$$

Dette gir:

$$V \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma/\delta \\ \alpha/\beta \end{bmatrix} \right\}$$

Dersom x = 0 og y = 0 så betyr det at alle dyrene utryddet.
Dersom $x = \frac{\gamma}{\delta}$ og $y = \frac{\alpha}{\beta}$ er det oppnådd likevekt, altså der begge dyrebefolkningene kan opprettholde befolkning konstant over en ubestemt tid. Plasseringen av likevekten i grafen bestemmes av variablene γ, δ, α og β. Se Figur 1 for eksempel.

<u>2.2.2 Egenverdien til Jacobimatrisen</u>

Jacobimatrisen til Lotka-Volterra er en fremstilling av det deriverte likningssettet:

$$J(x,y) = F'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\alpha x - \beta xy)}{\partial x} & \frac{\partial(\alpha x - \beta xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\delta xy - \gamma y)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta xy - \gamma y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta y \\ \delta y & \delta x - y \end{bmatrix} \tag{2}$$

Jacobimatrisa av gradienten for en skalarvaluert funksjon blir kalt hessematrisa. Hessematrisa kan ses på som den annenderiverte av den skalarvaluerte funksjonen. [2] Denne matrisen kan brukes for å finne stabiliteten til et nullpunkt. Vi kan sette nullpunktene vi fant inn i matrisen.

Nullvektor

Jacobimatrisen ved nullvektoren:

$$J\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha & 0\\0 & -\gamma\end{bmatrix}$$

Egenverdier:

$$Det\begin{bmatrix}\alpha-\lambda & 0\\0 & -\gamma-\lambda\end{bmatrix} = 0$$

$$(\alpha-\lambda)(-\gamma-\lambda) = 0$$

$$\lambda = \{\alpha, -\gamma\}$$

Ettersom egenverdiene er reelle og har motsatt fortegn vet vi at dette er et sadelpunkt. Det viser at punktet er ustabilt. Dette har betydning fordi vi nå har vist at punktet $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ vil være en asymptote til funksjonen F, og befolkningene i modellen vil aldri faktisk nå 0 bortsett fra om funksjonen starter med nullverdier.

Likevektspunktet

Jacobimatrisen ved likevektspunktet:

$$J\begin{bmatrix}\gamma/\delta\\\alpha/\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\beta\gamma}{\delta}\\\dfrac{\alpha\delta}{\beta} & 0\end{bmatrix}$$

Vi finner egenverdiene:

$$Det\begin{bmatrix}-\lambda & -\dfrac{\beta\gamma}{\delta}\\\dfrac{\alpha\delta}{\beta} & -\lambda\end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)^2 + \alpha\gamma = 0$$

$$\lambda = \{i\sqrt{\alpha\gamma}, -i\sqrt{\alpha\gamma}\}$$

Ettersom egenverdiene til likevektspunktet er imaginære forstår vi at funksjoner i nærheten av dette punktet vil oscillere/svinge rundt punktet. Siden løsningen ikke hadde noen reelle verdier vet vi også at punktet ikke tiltrekker seg andre punkter og funksjonene rundt vil derfor komme tilbake til samme punkt flere ganger.

2.3 Eliminering av t / kurven $V(x, y) = K$

I Lotka-Volterra er det ofte ønskelig å fjerne tidsvariabelen (t). Ved å fjerne (t) får man en differensiallikning som viser hvordan en endring i dyrebefolkningen påvirker den andre parten, framfor den tidsavhengige, som viser hvordan de påvirkes over tid.

Setter uttrykkene lik hverandre for å fjerne tid fra utrykket:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \qquad \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\alpha x - \beta xy}, \qquad dt = \frac{dy}{\delta xy - \gamma y}$$

$dt = dt$, derfor:

$$\frac{dx}{\alpha x - \beta xy} = \frac{dy}{\delta xy - \gamma y}$$

$$\frac{y}{\alpha - \beta y} dx = \frac{x}{\delta x - \gamma} dx$$

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = \frac{\delta x - \gamma}{x} dx$$

$$\frac{\delta x - \gamma}{x} dx + \frac{\beta y - \alpha}{y} dy = 0$$

Gjør om og integrerer:

$$\left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx + \left(\beta - \frac{\alpha}{y}\right) dy = 0$$

$$\int \left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx + \int \left(\beta - \frac{\alpha}{y}\right) dy = 0$$

$$\delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) + K = 0$$

Gitt de to befolkningene ved et hvilket som helst tidspunkt kan vi finne en funksjon for en kurve K:

$$K(x, y) = \delta x - \gamma * \ln(x) + \beta y - a * \ln(y) \tag{3}$$

2.4 Minimumspunktet til funksjonen V

For å vite når byttedyret og rovdyret er på sitt stabile likevektspunkter må man regne ut når $V(x, y)$ er stabil eller ikke endrer seg. Regner ut gradienten til $V(x, y)$:

$$\nabla V(x, y) = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d(\delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y))}{dx} \\ \dfrac{d(\delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y))}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta - \dfrac{\gamma}{x} \\ \beta - \dfrac{\alpha}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som kan skrives som:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma/\delta \\ \alpha/\beta \end{bmatrix}$$

Som er definisjonen av minimumspunktet til funksjonen V som er beskrevet ytterligere tidligere, da som K.

2.5 Bevegelsen langs partikkelbanen

Fra likevektspunktene vet vi at systemet vil være konstant ved:

$$x = \frac{\gamma}{\delta} \text{ og } y = \frac{\alpha}{\beta}$$

Vi kan skrive om utrykket for $\dot{x}$ og $\dot{y}$:

$$\dot{x} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\dot{x} = -x\beta\left(y - \frac{a}{\beta}\right)$$

Og

$$\dot{y} = y(\delta x - \gamma)$$

$$\dot{y} = y\delta\left(x - \frac{\gamma}{\delta}\right)$$

Med dette kan man se på tegnene til $\dot{x}$ og $\dot{y}$ for å bestemme hvordan populasjonene påvirker hverandre:

Dersom $y > \frac{a}{\beta}$ vil x synke:

$$y > \frac{a}{\beta} \Rightarrow -x\beta\left(y - \frac{a}{\beta}\right) < 0$$

$$\dot{x} < 0$$

Dersom $y < \frac{a}{\beta}$ vil x øke:

$$y < \frac{a}{\beta} \Rightarrow -x\beta\left(y - \frac{a}{\beta}\right) > 0$$

$$\dot{x} > 0$$

Dersom $x > \frac{\gamma}{\delta}$ vil y øke:

$$x > \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow y\delta\left(x - \frac{\gamma}{\delta}\right) > 0$$

$$\dot{y} > 0$$

Dersom $x < \frac{\gamma}{\delta}$ vil y synke:

$$x < \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \dot{y} = y\delta\left(x - \frac{\gamma}{\delta}\right) < 0$$

$$\dot{y} < 0$$

Øverst høyre:

$$y > \frac{a}{\beta}\ og\ x > \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\dot{x} < 0 \text{ og } \dot{y} > 0$$

$$x\ går\ mot\ venstre\ og\ y\ går\ oppover$$

Nederst høyre:

$$y < \frac{a}{\beta}\ og\ x > \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\dot{x} > 0 \text{ og } \dot{y} > 0$$

$$x\ går\ mot\ høyre\ og\ y\ går\ oppover$$

Nederst venstre:

$$y < \frac{a}{\beta}\ og\ x < \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\dot{x} > 0 \text{ og } \dot{y} < 0$$

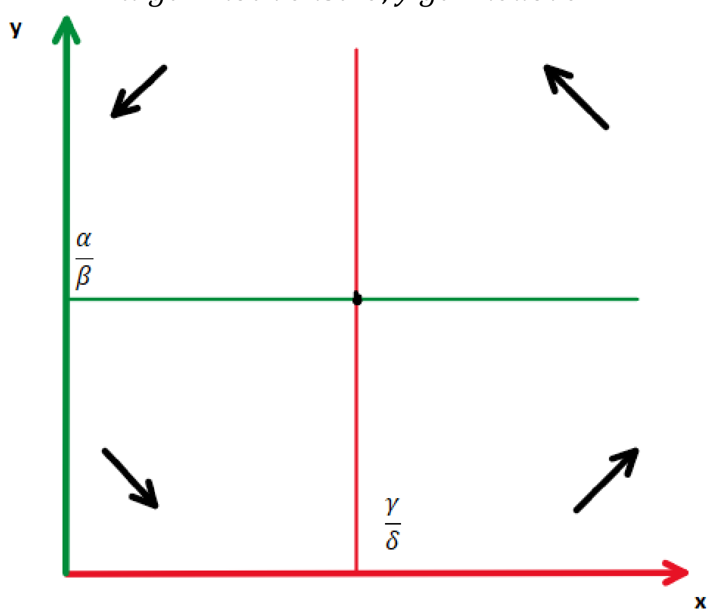
$$x\ går\ mot\ høyre, y\ går\ nedover$$

Øverst venstre:

$$y > \frac{a}{\beta}\ og\ x < \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\dot{x} < 0 \text{ og } \dot{y} < 0$$

$$x\ går\ mot\ venstre, y\ går\ nedover$$



Figur 1: Visualisering av likevektspunktet og bevegelsesretningen

Med dette som utgangspunkt vet vi at kurven K beveger seg i retning mot klokken. Dette er også illustrert på figuren ovenfor.

2.6 En tilnærmet løsning på Lotka-Volterra ligningene

Det er mulig å finne en tilnærmet løsning for Lotka-Volterra ligningene dersom initialpunktet $(x(0), y(0))$ er nærme minimumspunktet $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Løsningen innebærer å nytte første ordens taylortilnærming for $\boldsymbol{F}(x, y)$ og andre ordens taylortilnærming for $V(x, y)$ om minimumspunktet, slik at en derfra skal kunne bestemme en tilnærmet løsning av Lotka-Volterra ligningen. Hvor partikkelbanen nær minimumspunktet er en ellipse med periode T lik:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma}}$$

3. Modellering

I et praktisk eksempel av modellen er konstantene gitt. Verdiene er vilkårlig valgt og er de samme i alle modellene under:

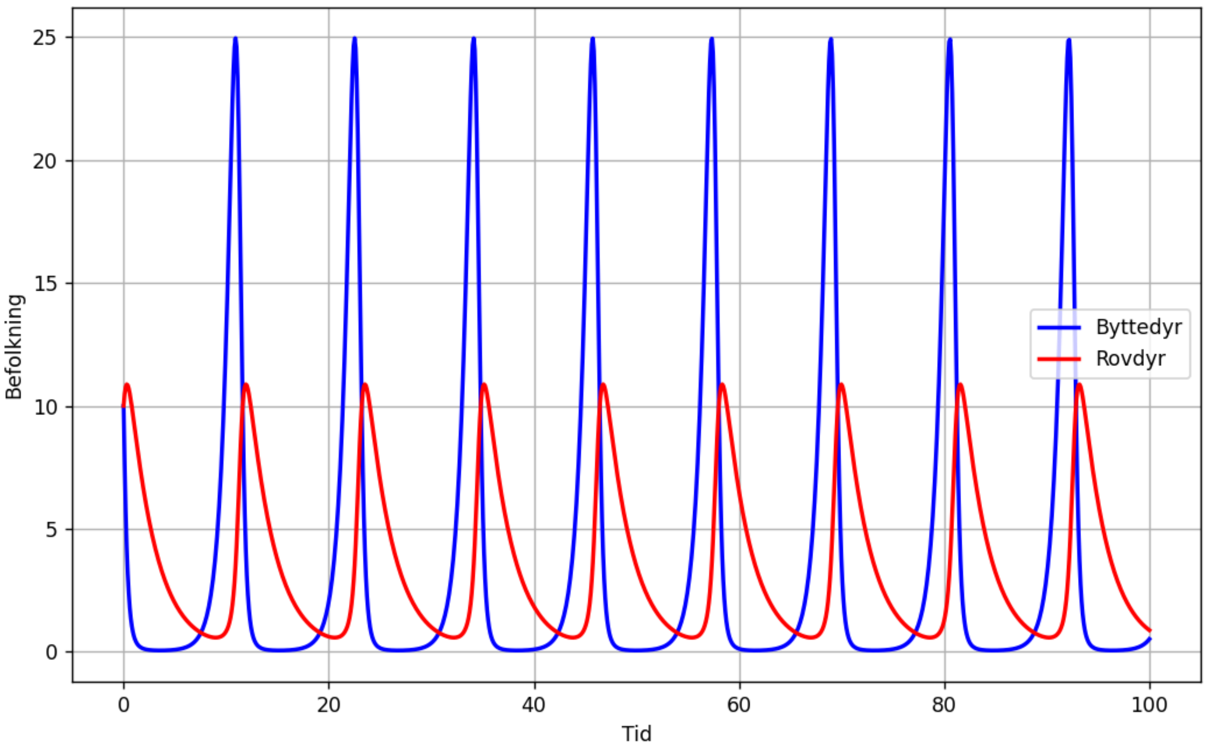
- $\alpha = 1{,}4$ (fødsler pr. byttedyr)
- $\gamma = 0{,}4$ (dødsfall pr. rovdyr)
- $\beta = 0{,}4$ (antall drept pr. rovdyr)
- $\delta = 0{,}1$ (fødsler pr. bytte spist)

Vi substituerer konstantene i funksjon (1).

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1 - 0{,}4y) \\ y(0{,}1x - 0{,}4) \end{bmatrix}$$

3.1 Lotka-Volterra som funksjon av tid

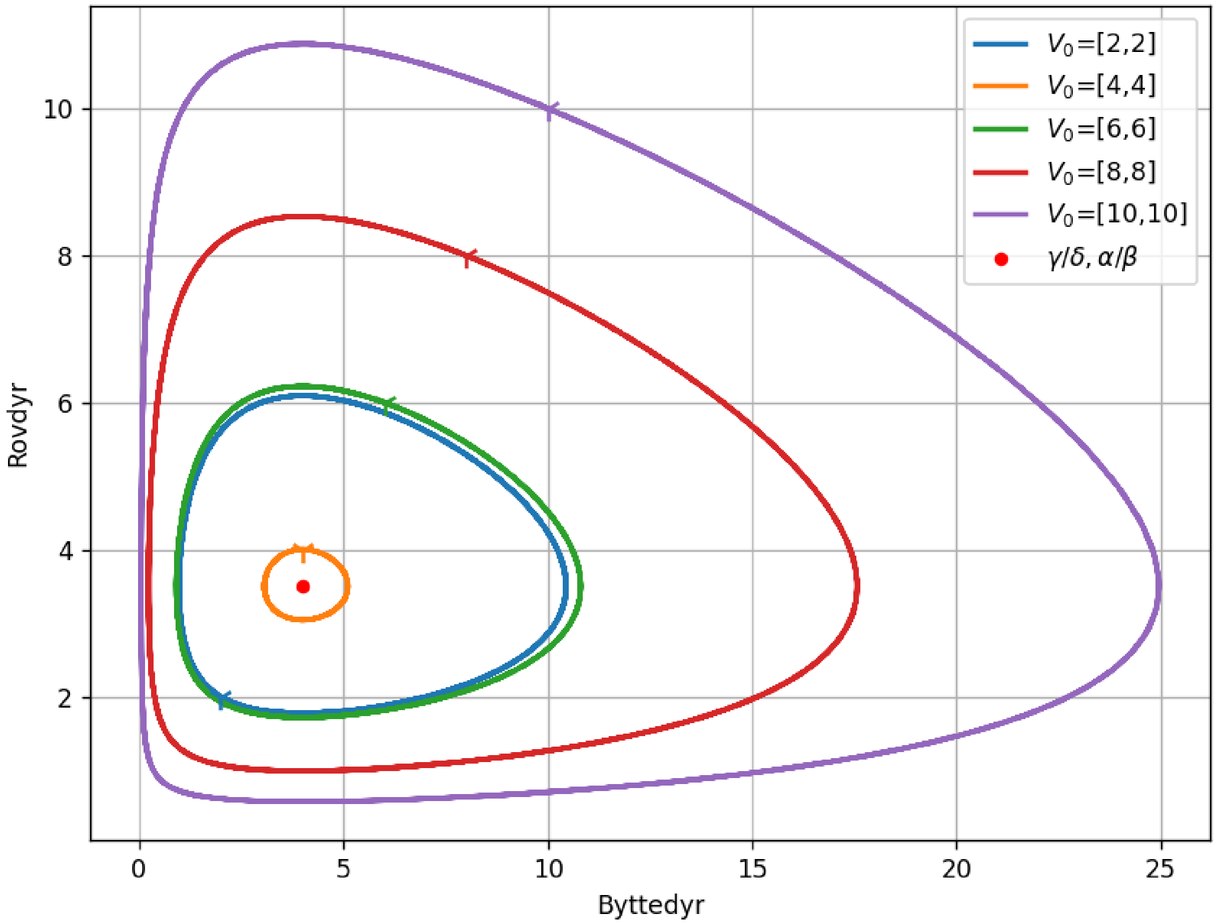
Figur 2 viser en fremstilling av Lotka-Volterra. Det blir tydelig hvordan antall rovdyr stiger når det blir flere byttedyr, og faller når det forholdet mellom byttedyr og rovdyr blir for lavt. Det kommer også tydelig frem at funksjonene oscillerer periodisk.



Figur 2: Befolking som funksjon av tid

3.2 Parameterfremstilling av Lotka-Volterra

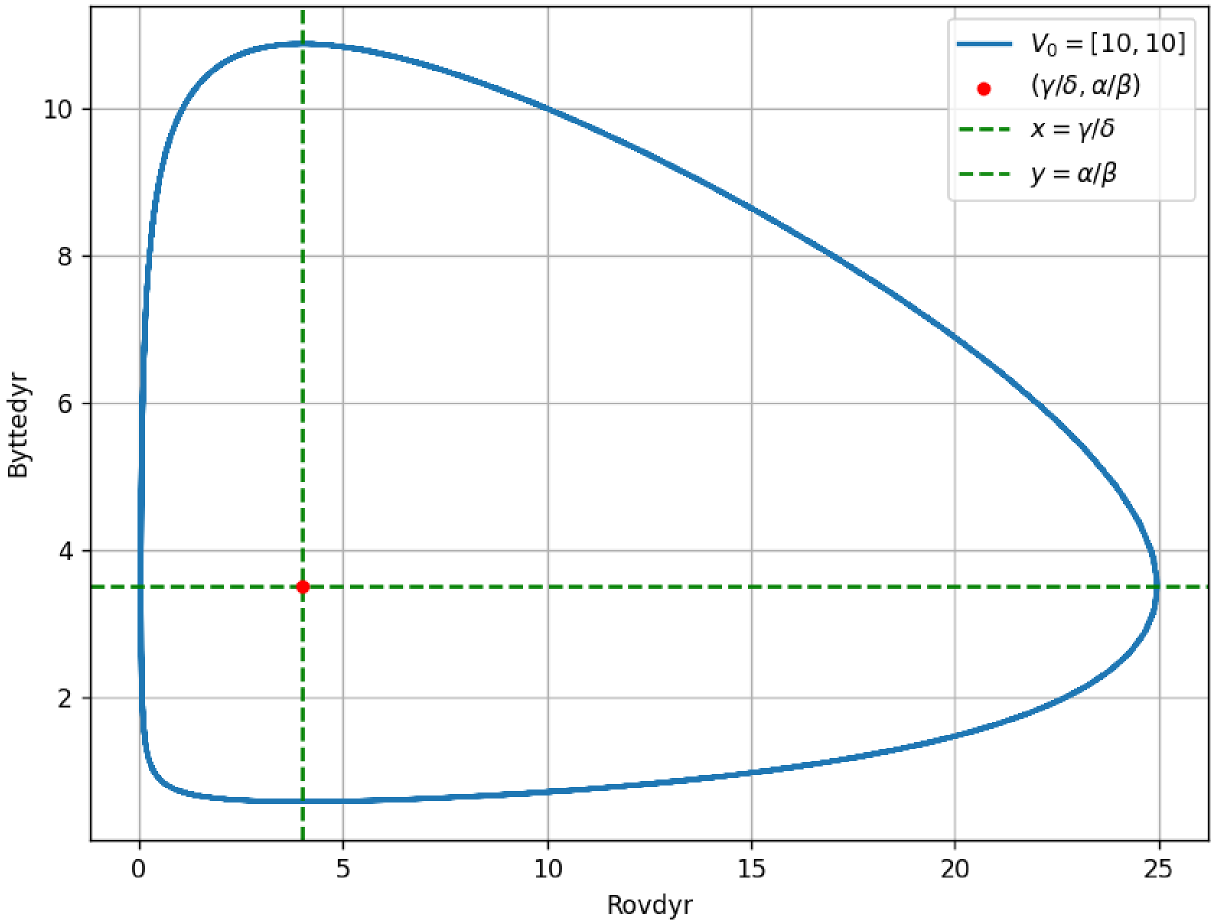
I Figur 3 er har vi tegnet kurven K. Fremstillingen viser sammenhengen mellom rovdyrene og byttedyrene for ulike startbetingelser for befolkningen. Figuren illustrerer hvordan funksjonen går i sykluser og at hvordan hele befolkningen utvikler seg avhenger av startverdiene V_0. Dersom startverdiene ligger nære likevektspunktet $\left[\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right]$, vil de to befolkningene svinge mindre. For to startverdier som $[2, 2]$ og $[6, 6]$ kan vi se at de har nærmest lik funksjonsgraf, noe som er interessant siden de har forskjellige xy-startverdier. Dette kan forklares av verdiene for α, γ, β og δ. Disse verdiene er satt opp slik at kurven til $[2, 2]$ under likevektspunktet $[4, 3.5]$, vil gå i bane like ved startverdien $[6, 6]$, over likevektspunktet. Dette kan ses i Figur 3, der startverdiene er markert med en strek på hver sin respektive kurve:



Figur 3: Parameterfremstilling for K, med ulike startbetingelser

3.3 Ekstremalpunkter

Ekstremalpunktene kan finnes grafisk ved å se på parameterfremstillingen av funksjonen. Vi kan se på Figur 4 at ekstremalpunktene til funksjonen i x-retning, har samme y-koordinat som likevektspunktet, $\frac{\alpha}{\beta}$, og at det samme gjelder for y der ekstremalpunktene vil ha samme x-koordinat som likevektspunktet, $\frac{\gamma}{\delta}$.



Figur 4: grafisk løsning for ekstremalpunkter

Derifra kan vi finne det tilhørende koordinaten ved regning. Dette kan finnes ved substituere konstantene i kurvefunksjonen (funksjon 3) og angi initialbetingelser $x = 10$ og $y = 10$:

$$K = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y)$$
$$K = 0{,}1 * 10 - 0{,}4 \ln(10) + 0{,}4 * 10 - 1{,}4 \ln(10)$$
$$K = 0{,}8553$$

For så å løse kurvelikningen med hensyn på variablene vi ønsker å finne:

$$0{,}8553 = 0{,}1x - 0{,}4 \ln(x) + 0{,}4y(0) - 1{,}4 \ln(y)$$

Dette utrykket kan ikke løses algebraisk fordi det inneholder både x og $ln(x)$. Derfor velger vi å løse likningen numerisk. Fremgangsmåten for å finne løsningen i CAS sees nedenfor på Figur 5.

$$a = 1.4$$
$$= \frac{7}{5}$$

$$\gamma = 0.4$$
$$= \frac{2}{5}$$

$$\delta = 0.1$$
$$= \frac{1}{10}$$

$$\beta = 0.4$$
$$= \frac{2}{5}$$

$$K(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - a \ln(y)$$
$$= \frac{-2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(y) + \frac{1}{10} x + \frac{2}{5} y = \frac{-2}{5} \ln(x) - \frac{7}{5} \ln(y) + \frac{1}{10} x + \frac{2}{5} y$$

$$\mathrm{NLøs}\left(K\left(\frac{\gamma}{\delta}, y\right) = K(10, 10), y\right)$$
$$\approx \{y = 0.5724877698336, y = 10.87838310962\}$$

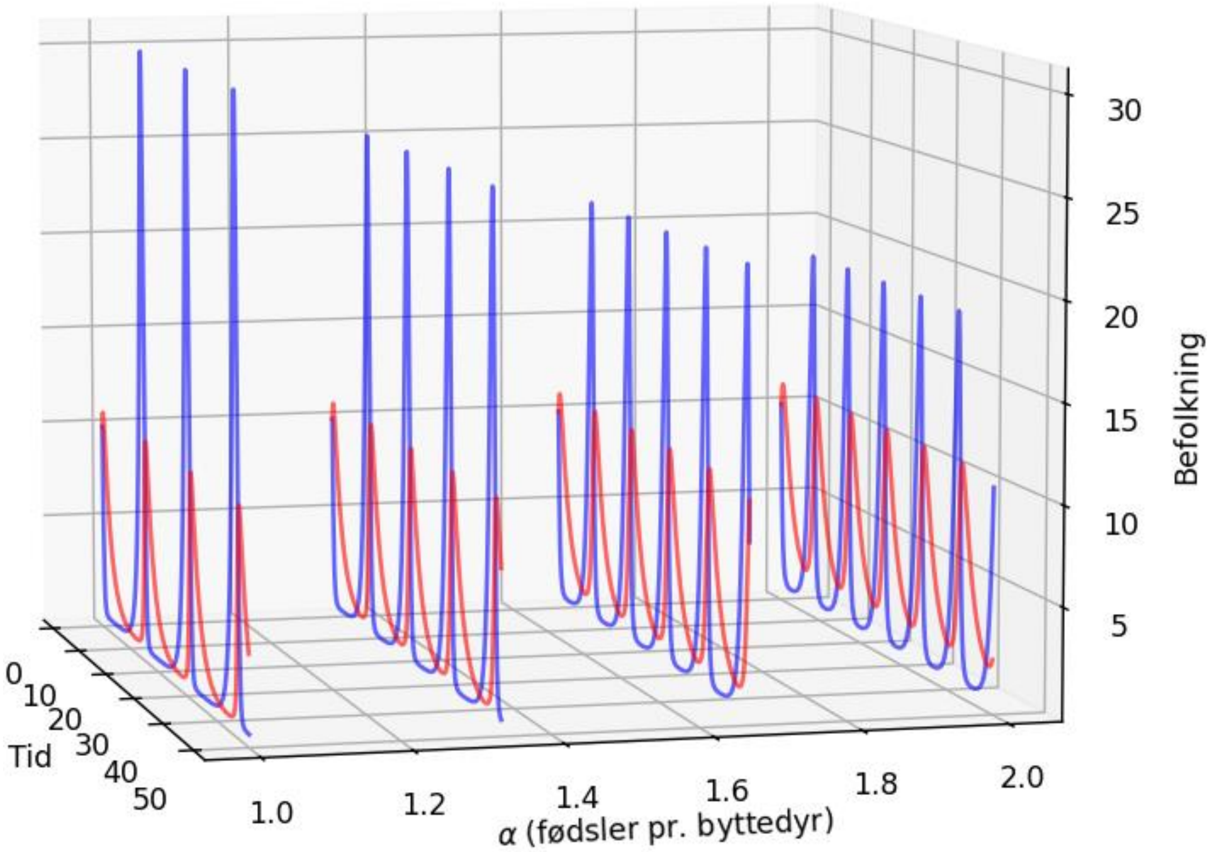
$$\mathrm{NLøs}\left(K\left(x, \frac{a}{\beta}\right) = K(10, 10), x\right)$$
$$\approx \{x = 0.0492560309251, x = 24.96148622981\}$$

Figur 5: numerisk løsning av ekstremalpunkter

Vi finner at toppunktet for kurven gir $y = 10{,}88$. Det stemmer godt overens med fremstillingen på Figur 4, der skjæringspunktene mellom kurven K og $x = \frac{\gamma}{\delta}$. I praksis betyr det at antallet rovdyr i denne modellen aldri vil overskride rundt 11 dyr. På samme måte gjelder dette også for byttedyrene, som aldri vil bli flere enn 25.

3.4 Lotka-Volterra for ulike α

Figuren nedenfor illustrerer hvordan en økning i fødselsraten for byttedyr, α, påvirker dynamikken i begge befolkningene.



Figur 6: Befolkning som funksjon av tid med ulik α

Når α øker, fører dette til en hyppigere frekvens og jevnere vekstkurve for rovdyrpopulasjonen. Byttedyrene når også en lavere maksimal populasjonsstørrelse. Dette fenomenet kan forklares med å se på funksjonsuttrykket for Lotka-Volterra modellen:

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\delta x - \gamma) \end{bmatrix} \tag{1}$$

En økning i α betyr at byttedyrene reproduserer seg raskere. Dette fører til en eksplosjon i byttedyrpopulasjonen, som igjen stimulerer en økning i rovdyrpopulasjonen. Den økte rovdyrpopulasjonen fører til et kraftig fall i byttedyrpopulasjonen, før syklusen gjentar seg.

$$K(x, y) = \delta x - \gamma \ln(x) + \beta y - \alpha \ln(y) \tag{3}$$

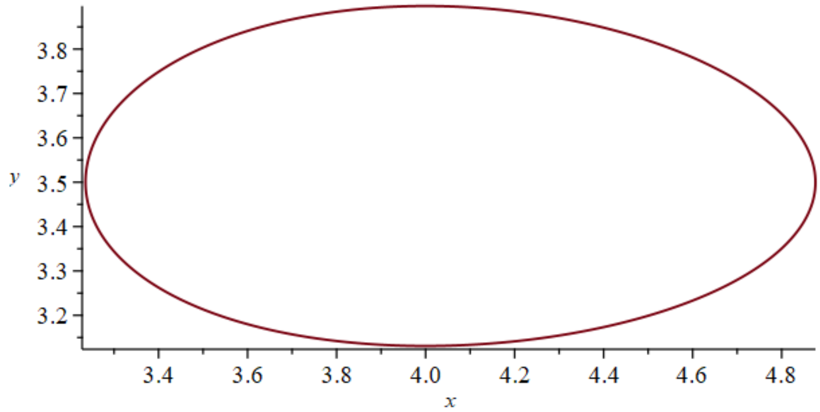
Den kortere sykluslengden kan forklares ved å se på funksjonen til kurven. En høyere α-verdi fører til at kurven K vil ha kortere avstand til minimumspunktet, noe som resulterer i at banen rundt punktet blir kortere.

3.5 En tilnærmet løsning av Lotka-Volterra

Taylorrekker kan brukes for å finne en tilnærming til Lotka-Volterra gitt at initialverdien er nær likevektspunktet. Derfor er K definert lik -0.5, ettersom K er:

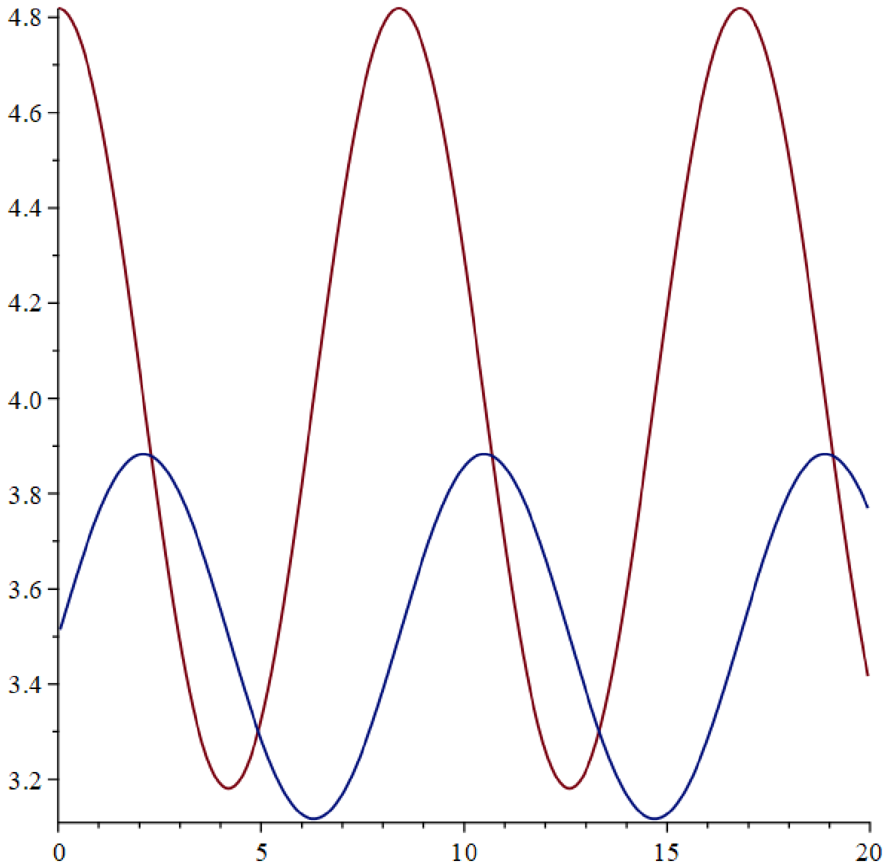
$$K\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = -0.508385899 \approx$$

Dette i den hensikt å sikre at den tilnærmede løsningen vil være brukbar.



Figur 7: K(x,y)=-0.5 plottet der x-aksen er byttedyr og y-aksen er rovdyr

Ovenfor er $K(x, y) = -0.5$ plottet i en graf hvor x er byttedyr og y er rovdyr. Denne grafen viser forholdene mellom dyrene uten hensyn til tid.



Figur 8: x(t) (rød) og y(t) (blå) plottet der den horisontale aksen er tid og den vertikale aksen er populasjonstall

Grafen ovenfor viser modellen med hensyn til tid. I nærheten av likevektspunktet ble den tidløse modellen en ellipse og en kan se ovenfor at x(t) og y(t) er periodiske sinusgrafer. Grafene er definert nedenfor:

$$y = t \to \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sqrt{2\Delta V\alpha}}{\beta}\sin(\varpi t)$$

$$x = t \to \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\sqrt{2\Delta V\gamma}}{\delta}\sin(\varpi t)$$

Delta V er definert under:

$$\Delta V = -0.5 - K\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Øvrige variabler har like verdier som tidligere i rapporten.

Et bruksområde for en tilnærmet løsning av Lotka-Volterra er å kunne finne perioden ved bruk av formelen nedenfor.

$$T = \frac{2\pi}{\varpi} = 8.396259540$$

4. Konklusjon

Lotka-Volterra-likningene er ett matematisk verktøy for å studere dynamiske systemer, spesielt innenfor økologi. Gjennom vår analyse har vi utforsket hvordan disse ikke-lineære differensiallikningene kan brukes til å modellere og visualisere samspillet mellom to populasjoner, som for eksempel rovdyr og byttedyr. Vi har også sett på sammenhengen mellom parameterfremstillingen sine ekstremalpunkter og hvordan man kan benytte fremstillingen for å få seg en tidløs oversikt. Videre har vi også sett at en tilnærmet løsning nærme nok likevektspunktet vil tillate en numerisk løsning av perioden. Ved å analysere likevektspunkter, parameterfremstilling og parametervariasjoner har vi fått innsikt i modellens matematiske egenskaper og begrensninger.

Videre arbeid kan se på utvidelse av modellen for å inkludere mer realistiske antakelser, som for eksempel tetthetsavhengige veksthastigheter, aldersstruktur og at byttedyrenes tilgang på mat vil endre seg, for eksempel ved å inkludere ett ekstra dyr i næringskjeden i likningen.

Ved å sammenligne modellens med data fra naturlige populasjoner kan vi videre validere modellens antakelser og justere konstantene slik at de mer nøyaktig representerer virkeligheten.

5. Litteratur og referanser

[1] Wikipedia, «Lotka-Volterra equations,» [Internett]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations. [Funnet 1 Oktober 2024].

[2] Wikipedia, «Wikipedia,» [Internett]. Available: https://no.wikipedia.org/wiki/Jacobimatrise. [Funnet 8. oktober 2024].

[3] L. N. Bakken, «Lotka-Volterra equations,» 11. oktober 2019.