מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 80430

פתרון בחינה - מועד לדוגמא

שאלה 1

א. הגדרה 6.17 ומשפט 6.21 בספר.

ב. טענה 6.19 בספר.

ג. הוכחת משפט 6.21 בספר.

שאלה 2

א. A_1 הוא המאורע בו החזרנו את הכדור הראשון שהוצאנו לתוך הכד שבו היה בתחילה, לכן $\mathbb{P}(A_1)=\frac{1}{2}$.

נמספר את הכדורים והכדים ונסמן B_i עבור המאורע בו שלפנו את כדור i ו-C_i עבור המאורע בו החזרנו לכד i, אז

$$A_1=(B_1\cap C_1)\cup(B_1^c\cap C_1^c)$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(B_1\cap C_1)+\mathbb{P}(B_1^c\cap C_1^c)=\mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(C_1)+\mathbb{P}(B_1^c)\,\mathbb{P}(C_1^c)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

A_2 הוא המאורע בו החזרנו את הכדור השני שהוצאנו לתוך הכד הריק מבין השניים, לכן $\mathbb{P}(A_2)=\frac{1}{2}$.

ב. נבחין כי $\mathbb{P}(A_2\mid A_1)=\mathbb{P}(A_1)$ ובאמצעות כלל בייס נסיק כי

$$\mathbb{P}(A_1\mid A_2)=\mathbb{P}(A_2\mid A_1)\cdot\frac{\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A_2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

ג. נוכיח באינדוקציה כי $\mathbb{P}(A_n)=\frac{1}{2}$. ראינו כי $\mathbb{P}(A_1)=\frac{1}{2}$ ונניח כי $\mathbb{P}(A_{n-1})=\frac{1}{2}$.

מן ההנחה, מתקיים גם $\mathbb{P}\left(A_{n-1}^c\right)=\frac{1}{2}$.

עוד נבחין כי $\mathbb{P}(A_n\mid A_{n-1})=\frac{1}{2}$ (בדומה לחישוב ההסתברות של A_1) ולכן גם $\mathbb{P}\left(A_n\mid A_{n-1}^c\right)=\frac{1}{2}$.

כעת, מנוסחת ההסתברות השלמה

$$\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A_n\mid A_{n-1})\cdot\mathbb{P}(A_{n-1})+\mathbb{P}\left(A_n\mid A_{n-1}^c\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_{n-1}^c\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

שאלה 3

א. נטען כי $X_{i,j}$ תלוי ב-$X_{1,1}$ אם ורק אם $X_{i,j} \in \{X_{1,1}, X_{2,1}, X_{n,1}, X_{1,2}, X_{2,2}, X_{n,2}\}$.

לנוחות הקריאה נסמן $\neg 0 = 1$ וכן $\neg 1 = 0$, באינדקס העמודה i נתייחס לאינדקס$(n+1)$ כ-1 ולאינדקס 0 כ-n, ובאינדקס השורה j נתייחס לאינדקס 3 כ-1 ולאינדקס 0 כ-2.

נבחין תחילה כי לכל $j \in [2]$, $i \in [n]$, אם נסמן $Y_{i,j}$ אינדיקטור לכך שצבע המשבצת (i,j) הוא שחור, אז

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{i,j}=1) &= \mathbb{P}(Y_{i,j} \neq Y_{i,j+1} = Y_{i+1,j} = Y_{i-1,j}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{i,j} \neq Y_{i,j+1}) \cdot \mathbb{P}(Y_{i,j} \neq Y_{i+1,j}) \cdot \mathbb{P}(Y_{i,j} \neq Y_{i-1,j})\end{aligned}$$

ומכך שהמשתנים המקריים $Y_{i,j}$ מתפלגים $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ ובלתי-תלויים נקבל $\mathbb{P}(X_{i,j}=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, כלומר

$$X_{i,j} \sim Ber\left(\frac{1}{8}\right)$$

כעת נחלק למקרים :

<u>עבור $X_{1,1}$</u> ברור כי $\frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_{1,1}=1 \wedge X_{1,1}=1) \neq \mathbb{P}(X_{i,j}=1)\,\mathbb{P}(X_{i,j}=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$, כלומר $X_{1,1}$ לא בלתי-תלוי בעצמו.

<u>אם $X_{i,j}$ הוא לא שכן של $X_{1,1}$ ואין להם שכנים משותפים</u>, אז מכך שהמשתנים $\{Y_{i,j}\}_{i\in[n], j\in[2]}$ בלתי-תלויים נסיק

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{1,1}=1 \wedge X_{i,j}=1) \\ &= \mathbb{P}(Y_{1,2} = Y_{2,1} = Y_{n,1} = (\neg Y_{1,1}) \wedge Y_{i+1,j} = Y_{i-1,j} = Y_{i,j+1} = (\neg Y_{i,j})) \\ &= \mathbb{P}(Y_{1,2} = Y_{2,1} = Y_{n,1} = (\neg Y_{1,1})) \cdot \mathbb{P}(Y_{i+1,j} = Y_{i-1,j} = Y_{i,j+1} = (\neg Y_{i,j})) \\ &= \mathbb{P}(X_{1,1}=1) \cdot \mathbb{P}(X_{i,j}=1)\end{aligned}$$

ובדומה לכל k, m מתקיים $\mathbb{P}(X_{1,1}=1 \wedge X_{i,j}=1) = \mathbb{P}(X_{1,1}=1) \cdot \mathbb{P}(X_{i,j}=1)$.

<u>אם $X_{i,j}$ הוא לא שכן של $X_{1,1}$ ויש להם שכן משותף יחיד</u> (כלומר אחד מבין $\{X_{3,1}, X_{n-1,1}\}$), אז לדוגמא עבור $X_{3,1}$ נקבל

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{1,1}=1 \wedge X_{3,1}=1) \\ &= \mathbb{P}(Y_{1,2} = Y_{2,1} = Y_{n,1} = (\neg Y_{1,1}) \wedge Y_{3,1} = Y_{1,1} \wedge Y_{3,2} = (\neg Y_{1,1}) \wedge Y_{4,1} = (\neg Y_{1,1})) \\ &= \frac{1}{2^6} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X_{1,1}=1) \cdot \mathbb{P}(X_{1,2}=1)\end{aligned}$$

ובדומה לכל k, m מתקיים $\mathbb{P}(X_{1,1}=1 \wedge X_{i,j}=1) = \mathbb{P}(X_{1,1}=1) \cdot \mathbb{P}(X_{i,j}=1)$.

אם $X_{i,j}$ הוא שכן של $X_{1,1}$ (כלומר אחד מבין $\{X_{2,1}, X_{n,1}, X_{1,2}\}$), אז לדוגמא עבור $X_{1,2}$ נקבל

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{1,1}=1 \wedge X_{1,2}=1\right) \\
&=\mathbb{P}\left(Y_{1,2}=Y_{2,1}=Y_{n,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{2,2}=Y_{n,2}=Y_{1,1}=\left(\neg Y_{1,2}\right)\right) \\
&=\mathbb{P}\left(Y_{1,2}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{2,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{n,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{2,2}=Y_{1,1} \wedge Y_{n,2}=Y_{1,1}\right) \\
&=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32} \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}=\mathbb{P}\left(X_{1,1}=1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{1,2}=1\right)
\end{aligned}$$

כלומר המשתנים המקריים של משבצות שכנות אינם בלתי-תלויים.

אם $X_{i,j}$ הוא לא שכן של $X_{1,1}$ ויש להם שני שכנים משותפים (כלומר אחד מבין $\{X_{2,2}, X_{n,2}\}$), אז לדוגמא עבור $X_{2,2}$ נקבל

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{1,1}=1 \wedge X_{2,1}=1\right) \\
&=\mathbb{P}\left(Y_{1,2}=Y_{2,1}=Y_{n,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{1,2}=Y_{2,1}=Y_{3,2}=\left(\neg Y_{2,2}\right)\right) \\
&=\mathbb{P}\left(Y_{1,2}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{2,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{n,1}=\left(\neg Y_{1,1}\right) \wedge Y_{1,2}=\left(\neg Y_{2,2}\right) \wedge Y_{3,2}=\left(\neg Y_{2,2}\right)\right) \\
&=\frac{1}{2^5} \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}=\mathbb{P}\left(X_{1,1}=1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{2,1}=1\right)
\end{aligned}$$

ב. נציג שתי דרכים לפתרון:

<u>דרך א' - באמצעות קריטריון השונות להתכנסות לקבוע</u>

נגדיר סדרת משתנים מקריים $Y_n=\frac{1}{n} \sum_{i \in[n], j \in[2]} X_{i,j}$. לכל n, מלינאריות התוחלת

$$\mathbb{E}\left(Y_n\right)=\frac{1}{n} \sum_{i \in[n], j \in[2]} \mathbb{E}\left(X_{i,j}\right)=\frac{1}{n} \sum_{i \in[n], j \in[2]} \frac{1}{8}=\frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{8}=\frac{1}{4}.$$

בעוד השונות שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף, שכן

$$\begin{aligned}
Var\left(Y_n\right)=Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in[n], j \in[2]} X_{i,j}\right) &=\frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i \in[n], j \in[2]} X_{i,j}\right) \\
&=\frac{1}{n^2}\left(2n Var\left(X_{i,j}\right)+2 \cdot \sum Cov\left(X_{i,j}, X_{l,m}\right)\right) \\
&=\frac{1}{n^2}\left(2n \cdot \frac{7}{64}+2 \cdot \frac{5n}{2} \cdot \frac{1}{32}\right)=\frac{12}{32n}
\end{aligned}$$

לפיכך, על פי קריטריון השונות להתכנסות לקבוע, נקבל את הנדרש.

דרך ב' - באמצעות החוק החלש של המספרים הגדולים

נחלק את קבוצת המשתנים המקריים לארבע קבוצות זרות של משתנים מקריים בלתי תלויים :

$$\{X_{2i,1}\}_{i\in\left[\frac{n}{2}\right]},\{X_{2i,2}\}_{i\in\left[\frac{n}{2}\right]},\{X_{2i+1,1}\}_{i\in\left[\frac{n}{2}\right]},\{X_{2i+1,2}\}_{i\in\left[\frac{n}{2}\right]}$$

מכיוון שקבוצת המשתנים המקריים $\{X_{2i,1}\}_{i\in\left[\frac{n}{2}\right]}$ היא קבוצת משתנים מקריים בלתי-תלויים שווי-התפלגות, שהתפלגותם $Ber\left(\frac{1}{8}\right)$, מן החוק החלש של המספרים הגדולים נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n}{2}}\sum_{i\in[n]}X_{2i,1}\xrightarrow{d}\mathbb{E}\left(X_{2,1}\right)=\frac{1}{8}$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]}X_{2i,1}\xrightarrow{d}\frac{1}{2\cdot 8}$$

ובדומה עבור כל אחת מן הקבוצות האחרות, ולכן בסך הכל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i\in[n],j\in[2]}X_{i,j}=\xrightarrow{d}4\cdot\frac{1}{2\cdot 8}=\frac{1}{4}.$$

שאלה 4

א. תוחלת של משתנה מקרי בעל התפלגות מעריכית עם פרמטר λ היא $\frac{1}{\lambda}$ (טענה 8.32 בספר) ולכן מלינאריות התוחלת (טענה 8.24 בספר) נקבל

$$\mathbb{E}\left(Y+X\right)=\mathbb{E}\left(Y\right)+\mathbb{E}\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}.$$

ב. על פי הגדרת פונקצית התפלגות מצטברת, מתקיים

$$F_{X|X<Y}\left(s\right)=\mathbb{P}\left(X\leq s\mid X<Y\right)=\frac{\mathbb{P}\left(X\leq s\wedge X<Y\right)}{\mathbb{P}\left(X<Y\right)}$$

מטעמי סימטריה מתקיים

$$\mathbb{P}\left(X<Y\right)=\frac{1}{2}$$

נזכיר כי פונקצית ההתפלגות המצטברת של משתנה מעריכי עם פרמטר λ היא $F_X\left(s\right)=\max\left(1-e^{-\lambda s},0\right)$, ובאמצעות שימוש באי-תלות נחשב לכל $0<s$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X\leq s\wedge X<Y\right)=&\mathbb{P}\left(X<Y\leq s\right)+\mathbb{P}\left(X\leq s<Y\right)=\\ =&\mathbb{P}\left(X<s\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y\leq s\right)\cdot\mathbb{P}\left(X<Y\mid X<s\wedge Y\leq s\right)+\mathbb{P}\left(X\leq s\right)\cdot\mathbb{P}\left(s<Y\right)\\ =&F_X\left(s\right)\cdot F_Y\left(s\right)\cdot\frac{1}{2}+F_X\left(s\right)\cdot\left(1-F_Y\left(s\right)\right)\\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-\lambda s}\right)\cdot\left(1-e^{-\lambda s}\right)+\left(1-e^{-\lambda s}\right)\cdot\left(e^{-\lambda s}\right)\\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(1-2e^{-\lambda s}+e^{-2\lambda s}+2e^{-\lambda s}-2e^{-2\lambda s}\right)\\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2\lambda s}\right)\end{aligned}$$

לכן בסך הכל

$$F_{X\mid X<Y}\left(s\right)=\mathbb{P}\left(X\leq s\mid X<Y\right)=\frac{\mathbb{P}\left(X\leq s\wedge X<Y\right)}{\mathbb{P}\left(X<Y\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2\lambda s}\right)}{\frac{1}{2}}=\left(1-e^{-2\lambda s}\right).$$

ג. כדי למצוא את פונקצית הצפיפות של $X\mid X<Y$ נגזור את $F_{X\mid X<Y}\left(s\right)$ ונקבל $f_{X\mid X<Y}\left(s\right)=2\lambda e^{-2\lambda s}$ לכל $0<s$ ואחרת 0. במילים אחרות,

$$f_{X\mid X<Y}\left(s\right)=f_X\left(s\right)=\mathbb{1}\left(\left[0,\infty\right)\right)2\lambda e^{-2\lambda s}.$$

שאלה 5

א. נבנה טבלה ונחשב את יחס הנראות:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}_{H_0}\left(\{n\}\right)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mathbb{P}_{H_1}\left(\{n\}\right)$	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\Lambda_{H_1:H_0}\left(n\right)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

מבחן ניימן-פירסון דטרמיניסטי יהיה, על פי ההגדרה, מהצורה

$$T\left(X\right)=\begin{cases}1 & \Lambda_{H_{1}:H_{0}}\left(n\right)>\eta\\0 & otherwise\end{cases}$$

עבור $\eta\geq0$.

מבחן ניימן-פירסון סטוכסטי הוא מהצורה

$$T\left(X\right)=\begin{cases}1 & \Lambda_{H_{1}:H_{0}}\left(n\right)>\eta\\\gamma & \Lambda_{H_{1}:H_{0}}\left(n\right)=\eta\\0 & otherwise\end{cases}$$

עבור $0\leq\eta,\gamma\in\left[0,1\right]$.

ערך המובהקות של מבחן S הוא $\alpha=\mathbb{P}_{H_{0}}\left(X\in S\right)$, לכן בהנתן η ערך המובהקות יהיה $\frac{\left|\left\{ n\in[12]\mid\Lambda_{H_{1}:H_{0}}\left(n\right)>\eta\right\} \right|}{12}$. לפיכך, ערכי המובהקות האפשריים למבחן ניימן-פירסון דטרמיניסטי הם $\left\{ 0,\frac{1}{12},\frac{3}{12},\frac{5}{12},\frac{7}{12},\frac{9}{12},\frac{11}{12}\right\}$.

נשים לב כי הערך 1 לא יכול להיות ערך המובהקות, שכן דגימות עם יחס נראות 0 חייבות להתקבל.

ב. מובהקות $\alpha=0.25$ מתקבלת כאשר $\mathbb{P}_{H_{0}}\left(X\in S\right)=\frac{|S|}{12}=0.25$ כלומר $|S|=3$.

העוצמה היא על פי ההגדרה $1-\beta=1-\mathbb{P}_{H_{1}}\left(X\in S^{c}\right)=\mathbb{P}_{H_{1}}\left(X\in S\right)$.

כדי למצוא את העוצמה המירבית נרצה למקסם את $\mathbb{P}_{H_{1}}\left(X\in S\right)$ על ידי בחירת איברי $S=\left\{ s_{1},s_{2},s_{3}\right\}$.

נבחין כי העוצמה המירבית מתקבלת כאשר $S=\left\{ 6,7,8\right\}$, כלומר

$$\mathbb{P}_{H_{1}}\left(X\in S\right)\leq\sum_{1\leq i\leq3}\mathbb{P}_{H_{1}}\left(\left\{ s_{i}\right\} \right)\leq\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{16}{36}$$

ולכן העוצמה המירבית היא $\frac{16}{36}$.

ג. כן. על פי ההגדרה, סטטיסטי הוא פונקציה של המדגם, וסטטיסטי מספיק ביחס למבחן T הוא פונקציה $f\left(X\right)$ כך שקיימת פונקציה h עבורה $T\left(X\right)=h\left(f\left(X\right)\right)$.

$|X-7|$ הוא סטטיסטי מספיק עבור כל מבחן ניימן-פירסון להפרדת שתי ההשערות, שכן כל מבחן ניימן-פירסון מקיים:

$$T\left(n\right)=\begin{cases}1 & \Lambda_{H_{1}:H_{0}}\left(n\right)>\eta\\0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}1 & |n-7|<6-3\eta\\0 & otherwise\end{cases}$$