פתרון מועד ב'

1 שאלה 1

תהי X תוצאה של מדידה סטטיסטית. יהיו $\mathcal{H}_0$ ו-$\mathcal{H}_1$ שתי השערות בדידות בנוגע להתפלגות X המתאימות להסתברויות והסתברויות נקודתיות $\mathbb{P}_0, p_0$ ו-$\mathbb{P}_1, p_1$ בהתאמה. יהיו T, T' מבחנים.

1.1 הגדירו במדויק הסתברות לטעות מסוג ראשון ושני ותארו מתאי מבחן T עדיף על מבחן T'.

1. טעות מסוג ראשון היא כשאנחנו דוחים את $\mathcal{H}_0$ בטעות. נגדיר את ההסתברות מסוג זה לפי השערת ה-0 להיות $\alpha = \alpha_T = \mathbb{P}_0\left(T=1\right)$. לערך זה קוראים **המובהקות** של המבחן T.
2. טעות מסוג שני היא שאנחנו מקבלים את $\mathcal{H}_0$ בטעות. נגדיר את ההסתברות מסוג זה לפי ההשערה החליפית להיות $\beta = \beta_T = \mathbb{P}_1\left(T=0\right)$. לערך $1-\beta$ קוראים **העוצמה** של המבחן T.

נאמר שמבחן T עדיף על מבחן T' אם $\alpha_T \le \alpha_{T'}$ וגם $\beta_T \le \beta_{T'}$, דהיינו ההסתברויות לטעויות משני הסוגים עבור T לא עולות על ההסתברויות המתאימות עבור T'. מבחן T הוא טוב-ממש ממבחן T' אם הוא עדיף עליו, ולפחות אחד מהאי-שיוויונות הוא חזק. (תשובות קיבלו ניקוד מלא הן להגדרה של טוב במובן החלש והן של טוב ממש)

1.2 נסחו את הלמה של ניימן-פירסון לגבי מבחני יחס-נראות והוכיחו כי מבחנים שאינם מבחני ניימן-פירסון אינם מיטביים.

ננסח את הלמה הדטרמיניסטית: בתנאי השאלה, אם T מבחן יחס נראות בעל מובהקות α ו-T' מבחן כלשהו בעל מובהקות $\alpha' \le \alpha$ <u>אז</u> $\beta_T > \beta_{T'}$.

הוכחה. נרצה להראות $1-\beta_T = \pi_T \ge \pi_{T'} = 1-\beta_{T'}$. מספיק להראות $\pi_T - \pi_{T'} \ge 0$.

$$\pi_T - \pi_{T'} = \mathbb{P}_1\left(T=1\right) - \mathbb{P}\left(T'=1\right)$$

נסמן $A = \{T=1\}$ ומתקיים מהגדרת מבחן יחס-נראות שיש $\lambda \in (0,\infty)$ כך ש-

$$A = \left\{x \in \Omega \middle| \Lambda_{\mathcal{H}_1:\mathcal{H}_0}\left(x\right) > \lambda\right\}$$

נסמן $B = \{T'=1\}$. אם כך

$$\begin{aligned}\pi_T - \pi_{T'} &= \mathbb{P}_1\left(A\right) - \mathbb{P}_1\left(B\right)\\ &= \sum_{x\in A} p_1\left(x\right) - \sum_{x\in B} p_1\left(x\right)\\ &= \sum_{x\in A\setminus B} p_1\left(x\right) - \sum_{x\in B\setminus A} p_1\left(x\right) && \text{קיזוז ההסתברויות של איברים בחיתוך}\\ &\ge \sum_{x\in A\setminus B} \lambda p_0\left(x\right) - \sum_{x\in B\setminus A} \lambda p_0\left(x\right) && \otimes\end{aligned}$$

האי-שוויון נובע מכך שלכל $x \in A \setminus B$ בפרט $x \in A$ ולכן $\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \Lambda_{\mathcal{H}_1:\mathcal{H}_0}\left(x\right) > \lambda$ ולכל $x \in B \setminus A$ בפרט $x \notin A$ ולכן $\Lambda_{\mathcal{H}_1:\mathcal{H}_0}\left(x\right) \le \lambda$ $= \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$, כך שהגדלנו את המחסר והקטנו את המחוסר. נמשיך:

$$\otimes = \lambda\left(\sum_{x\in A\setminus B} p_0\left(x\right) - \sum_{x\in B\setminus A} p_0\left(x\right)\right)$$

ואנחנו רק צריכים שזה יהיה אי-שלילי. $\lambda > 0$ בכל מקרה אז נותר רק לטפל בסוגריים. שוב נחבר ונחסר את $\sum_{x\in A\cap B} p_0(x)$

$$\begin{aligned}\sum_{x\in A\setminus B} p_0(x) - \sum_{x\in B\setminus A} p_0(x) &= \sum_{x\in A} p_0(x) - \sum_{x\in B} p_0(x)\\ &= \mathbb{P}_0(A) - \mathbb{P}_0(B)\\ &= \alpha - \alpha' \geq 0\end{aligned}$$

כשהאי-שוויון הוא על פי ההנחה שהמובהקות של T' טובה לפחות כמו זו של T. בזאת הסתיימה ההוכחה. $\square$

2 שאלה 2

בקופסה 3 נורות. כל נורה נשרפת X_i דקות מהרגע שהודלקה, כאשר $X_i \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$ ב"ת, עבור $i \in [3]$.
בתחילה מדליקים את נורות $1, 2$. כאשר נשרפת את מהן, מדליקים את נורה 3.

2.1 מהי תוחלת מספר הדקות עד שתישרף הנורה הראשונה?

נסמן $Y = \min(X_1, X_2)$ ואנחנו רוצים את $\mathbb{E}[Y]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > n) &= \mathbb{P}(X_1 > n, X_2 > n)\\ &\underset{\text{תלות}}{\overset{\text{אי}}{=}} \mathbb{P}(X_1 > n)\,\mathbb{P}(X_2 > n)\\ &\overset{X_i\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^n\end{aligned}$$

כך שלפי נוסחת הזנב של מ"מ גיאומטרי, והטענה שראינו, שהתפלגות שיורית קובעת משתנה מקרי, נקבל $Y \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{5}{9}\right)$ ולכן $\mathbb{E}[Y] = \frac{9}{5}$.

2.2 יש להראות שהמ"מ $\min(X_1, X_2)$ בלתי תלוי ב- $\mathbb{1}_{X_1=X_2}$.

בסימוני סעיף קודם $Y = \min(X_1, X_2)$, והראינו $Y \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{5}{9}\right)$. נסמן גם $Z = \mathbb{1}_{X_1=X_2}$. משתנה מציין הוא משתנה ברנולי, ונותר למצוא את הפרמטר שלו.

$$\begin{aligned}p_Z(1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_1 = X_2 = k)\\ \text{אי-תלות} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_1 = k)\,\mathbb{P}(X_2 = k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{5}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\ Q\sim\mathrm{Geo}\left(\frac{5}{9}\right) &= \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

כלומר $Z \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{5}\right)$. עכשיו

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k,Z=1) &= \mathbb{P}(X_1=X_2=k)\\ &= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z=1)\,\mathbb{P}(Y=k)\end{aligned}$$

וזה מספיק כדי להראות אי-תלות (כי Z משתנה מציין).

2.3 מה ההסתברות ששתי הנורות תישרפנה באותה דקה, בהינתן ששתיהן לא נשרפו בדקה הראשונה?

בסימוני סעיפים קודמים אפשר לנסח את המאורע ב-$Z=1$ בהינתן $Y>1$. מאחר והמ"מ ב"ת אז ההסתברות היא עדיין $\frac{1}{5}$.

3 שאלה 3

יהיו $(B_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ כך $B_i \sim \text{Ber}\left(2^{-i}\right)$ בלתי-תלויים. נסמן ב-X את מספר המשתנים בסדרה שמקבלים את הערך 1.

3.1 חשבו את תוחלת X.

X הוא בדיוק $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} B_i$.
לכל $i\in\mathbb{N}_0$ מתקיים $\mathbb{E}[B_i]=\mathbb{P}(B_i=1)=2^{-i}$. תוחלת היא חיבורית ולכן

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{i\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}[B_i]=\sum_{i\in\mathbb{N}_0}2^{-i}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

3.2 חשבו את שונות X.

מאחר והמשתנים בלתי-תלויים אז גם השונות חיבורית. $\text{Var}[B_i]=2^{-i}\left(1-2^{-i}\right)$ ולכן

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \sum_{i\in\mathbb{N}_0}\text{Var}[B_i]=\sum_{i\in\mathbb{N}_0}2^{-i}-2^{-2i}\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}_0}2^{-i}-\sum_{i\in\mathbb{N}_0}4^{-i}=2-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

3.3 יהי $a\geq\mathbb{E}[X]$. חסמו באמצעות אי-שוויון צ'בישב את ההסתברות $\mathbb{P}(X>a)$.

$X\in\mathbb{N}$, ולכן $\mathbb{P}(X>a)=\mathbb{P}(X\geq\lfloor a\rfloor+1)$ לכל $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. נוכל אם כן להניח ש-$a\in\mathbb{N}$ ולחסום את $\mathbb{P}(X\geq a+1)$.
נשתמש בכך שמצאנו $\mathbb{E}[X]=2$. $a\geq 2$ ולכן $a-1>0$. עכשיו נחשב כך:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq a+1) &= \mathbb{P}(X-2\geq a-1)\\ \text{מונוטוניות}\quad &\leq \mathbb{P}(|X-2|\geq a-1)\\ \text{צ'בישב}\quad &\leq \frac{2/3}{(a-1)^2}=\frac{2}{3(a-1)^2}\end{aligned}$$

4 שאלה 4

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל פונקציית צפיפות

$$f_X=\left(\frac{3e^{-x}+3e^{-3x}}{c}\right)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$$

4.1 מהו הקבוע c?

זו בדיקת נירמול:

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3e^{-x}+3e^{-3x}}{c}dx$$
$$=\frac{1}{c}\left[-3e^{-x}-e^{-3x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{c}(-0-0+3+1)=\frac{4}{c}$$

כלומר $c=4$.

4.2 מהי תוחלת X?

$$\mathbb{E}[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx=\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot\frac{3e^{-x}+3e^{-3x}}{4}dx$$
$$=\frac{3}{4}\int xe^{-x}dx+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot 3e^{-3x}dx$$

כך שאם נסמן $Y\sim\mathrm{Exp}(1)$ ו-$Z\sim\mathrm{Exp}(3)$ אז קיבלנו

$$\mathbb{E}[X]=\frac{3}{4}\mathbb{E}[Y]+\frac{1}{4}\mathbb{E}[Z]$$
$$=\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

4.3 יהי $a>\mathbb{E}[X]$. מצאו את $M_X(t)$ והשתמשו באי-שוויון צ'רנוף כדי לחסום את $\mathbb{P}(X\geq a)$ עם $t=\frac{1}{2}$.

ראשית נחשב ישירות את $M_X(t)$:

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\infty} e^{tx}\left(3e^{-x}+3e^{-3x}\right)dx$$
$$=\frac{3}{4}\int\limits_{0}^{\infty} e^{x(t-1)}dx+\frac{3}{4}\int\limits_{0}^{\infty} e^{x(t-3)}dx$$
$$=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{t-1}e^{x(t-1)}\right]_0^{\infty}+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{t-3}e^{x(t-3)}\right]_0^{\infty}$$
$$(t<1)=\frac{3}{4(1-t)}+\frac{3}{4(3-t)}$$

לפי אי-שוויון צ'רנוף

$$\mathbb{P}(X\geq a)\leq M_X(t)e^{-ta}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{3-t}\right)e^{-ta}$$
$$\overset{t=\frac{1}{2}}{=}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3-\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{3}{4}\left(2+\frac{2}{5}\right)e^{-\frac{a}{2}}=\frac{3\cdot 12}{4\cdot 5}e^{-\frac{a}{2}}=\frac{9}{5}e^{-\frac{a}{2}}$$

5 שאלה 5

יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים על אותו מרחב הסתברות.

5.1 הראו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}[X \mid X > a] \geq a$.

מאחר ו-$a \overset{\text{a.s.}}{\leq} (X \mid X > a)$ אז מונוטוניות התוחלת נותנת את הטענה. רק נדגיש

$$\mathbb{P}\left(X > a \mid X > a\right) = 1$$

שזה מהות השיוויון כמעט-תמיד שרשום.

עוד הוכחה שהתקבלה היא ישירות מהגדרת התוחלת המותנית.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid X > a] &= \sum_{x \in \text{Supp}(X)} x\mathbb{P}\left(X = x \mid X > a\right) \\
\circledast &= \sum_{a < x \in \text{Supp}(X)} x\mathbb{P}\left(X = x \mid X > a\right) \\
&\geq a \sum_{a < x \in \text{Supp}(X)} \mathbb{P}\left(X = x \mid X > a\right) \\
&= a\mathbb{P}\left(X > a \mid X > a\right) = a \cdot 1
\end{aligned}$$

כש-$\circledast$ נובע מזה שלכל $x \leq a$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X = x \mid X > a\right) = 0$. גם תשובות ללא נימוקים התקבלו פה כל עוד היו מפורטות.

5.2 הראו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}[X \mid X > a] \geq \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[X \mid X \leq a]$.

מנוסחת התוחלת השלמה

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid X > a]\,\mathbb{P}(X > a) + \mathbb{E}[X \mid X \leq a]\,(1 - \mathbb{P}(X > a))$$

נימוק אפשרי ראשון $\mathbb{E}[X]$ הוא ממוצע משוקלל של $\mathbb{E}[X \mid X > a]$ ו-$\mathbb{E}[X \mid X \leq a]$. אי לכך, לא ייתכן ששניהם קטנים ממש מ-$\mathbb{E}[X]$. לפי סעיף קודם

$$\mathbb{E}[X \mid X > a] \geq a$$

ואותו טיעון גם מראה $\mathbb{E}[X \mid X \leq a] \leq a$, כלומר $\mathbb{E}[X \mid X \leq a] \leq \mathbb{E}[X \mid X > a]$ ולכן בהכרח $\mathbb{E}[X \mid X \geq a] \geq \mathbb{E}[X]$.
מאחר וגם לא ייתכן ששתי התוחלות המותנות גדולות ממש מ-$\mathbb{E}[X]$ אז הקטנה מביניהן, שהיא $\mathbb{E}[X \mid X \leq a]$ חייבת להיות קטנה או שווה ל-$\mathbb{E}[X]$.

נימוק אפשרי שני טיעון זהה לסעיף א' (התקבלו תשובות כאלו במבחן) מראה ש-$\mathbb{E}[X \mid X \leq a] \leq a$, ובפרט לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}[X \mid X \leq a] \leq \mathbb{E}[X \mid X > a]$$

לפיכך, בהמשך לנוסחת התוחלת השלמה לעיל נקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &\leq \mathbb{E}[X \mid X > a]\,\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{E}[X \mid X > a]\,\mathbb{P}(X > a) \\
&= \mathbb{E}[X \mid X > a]\,(\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(X > a)) \\
&= \mathbb{E}[X \mid X > a] \cdot 1 \\
\mathbb{E}[X] &\geq \mathbb{E}[X \mid X \leq a]\,\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{E}[X \mid X \leq a]\,\mathbb{P}(X > a) \\
&= \mathbb{E}[X \mid X \leq a]\,(\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(X > a)) \\
&= \mathbb{E}[X \mid X \leq a] \cdot 1
\end{aligned}$$

כנדרש.

מה אי אפשר לעשות

- להגיד "נקבע $a = \mathbb{E}[X]$" בגלל שהאי-שיוויון צריך להיות נכון לכל a.
- להפריד למקרים $a < \mathbb{E}[X]$ או $a > \mathbb{E}[X]$ בגלל שזה נותן רק את אחד הצדדים ולא את שניהם בבת אחת.
- להשתמש בא"ש מרקוב, מאחר ולא נתון ש-X משתנה אי-שלילי כ"ת.
- להגיד שתוחלת היא חיובית, כי היא לא (שונות היא החיובית).

טעויות חוזרות

- אי-שיוויונים הפוכים מהנכון: השמטת מחובר חיובי מקטינה את הביטוי. לא מגדילה אותו.

5.3 הראו כי מתקיים $\mathbb{E}[X \mid X \geq Y] \geq \mathbb{E}[X]$.

שוב נשתמש בתוחלת שלמה ובכך ש-Y משתנה מקרי בדיד:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid X \geq Y] &= \sum_{a \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{E}[X \mid X \geq Y, Y = a] \, \mathbb{P}\left(Y = a \mid X \geq Y\right) \\
&= \sum_{a \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{E}[X \mid X \geq a, Y = a] \, \mathbb{P}\left(Y = a \mid X \geq Y\right) \\
\text{אי תלות} &= \sum_{a \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{E}[X \mid X \geq a] \, \mathbb{P}\left(Y = a \mid X \geq Y\right) \\
\text{סעיף ב'} &\geq \sum_{a \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{E}[X] \, \mathbb{P}\left(Y = a \mid X \geq Y\right) \\
&= \mathbb{E}[X] \sum_{a \in \text{Supp}(Y)} \mathbb{P}\left(Y = a \mid X \geq Y\right) \\
&= \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

כשהשוויון האחרון הוא בגלל שפונקציית הסתברות מותנית היא עדיין פונקציית הסתברות, ואנחנו סוכמים על כל התומך של Y.

הערה 1. טענה זו איננה נכונה ללא אי-תלות, ולכן כל הוכחה שלא התייחסה לאי-תלות נפסלה. אכן, אם $X \sim \text{Unif}(\{-1, 1\})$ ו-$Y = 2X$ אז נקבל

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 0 \\
\mathbb{E}[X \mid X > Y] &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1 \\
\mathbb{E}[X \mid X \leq Y] &= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

בפרט, האי-שיוויונים הפוכים ממש למה שבטענה. ההבדל הוא בזה ש-Y תלוי מאוד ב-X.

5.4 הראו כי אם $X \overset{\text{d}}{=} Y$ אז $\mathbb{E}[X \mid X \geq Y] \geq \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \geq \mathbb{E}[Y \mid X \geq Y]$.

במבחן זה מופיע בלי השיוויון ל-$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, אבל זה המפתח להוכחה. בלי חלק זה ההוכחה אינה תקפה.

השוויון באמצע נובע משוויון התפלגויות ומכך שתוחלת נקבעת על-ידי התפלגות. האי-שוויון הראשון הוא סעיף ג'. האי-שיוויון האחרון (הימני) מוכח באופן אנלוגי לסעיף ג'.

טעויות נפוצות

- התעלמות מהנתון של שיוויון התפלגויות.
- הטענה: $X \overset{\text{d}}{=} Y$ <u>אז</u> $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{2}$.