פרק 1 – מרחבי הסתברות בדידה

<u>הגדרה 1.1 – מרחב מדגם</u>

מרחב מדגם הוא קבוצה לא ריקה. לרוב תסומן ב-Ω

<u>הגדרה 1.3 – פונקציית הסתברות נקודתית</u>

יהיה Ω מרחב מדגם. פונקציה $p: \Omega \to [0,1]$ המקיימת$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)$, מכונה פונקציית הסתברות נקודתית.
הקבוצה $Supp(p) = \{\omega \in \Omega: p(\omega) > 0\}$ מכונה התומך של p

<u>הגדרה 1.6 - מאורע</u>

תת-קבוצה של מרחב המדגם, $A \subset \Omega$ מכונה מאורע. אוסף על המאורעות יסומן ב-$\mathcal{F}$. עבור מאורע A נגדיר את $A^c \coloneqq \Omega \setminus A$, המאורע המשלים של A

<u>הגדרה 1.7 – פונקציית הסתברות</u>

פונקציה $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ המקיימת:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- סכימות בת מנייה: לכל סדרת מאורעות זרים $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

מכונה פונקציית ההסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$. אם $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$ נאמר כי $\mathbb{P}$ נתמכת על A. השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מכונה מרחב ההסתברות

<u>טענה 1.8 – תכונות של פונקציית הסתברות</u>

יהיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה. התכונות הבאות מתקיימות:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- סכימות: לכל אוסף סופי של מאורעות זרים, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

- מונוטוניות: לכל זוג מאורעות A, B כך ש$A \subset B$מתקיים: $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$
- לכל מאורע A מתקיים $\mathbb{P}(A) \le 1$
- הסתברות המשלים: לכל מאורע A מתקיים $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

<u>טענה 1.9 – פונקציית הסתברות נקודתית מגדירה פונקציית הסתברות</u>

תהי $p: \Omega \to \mathbb{R}_+$ פונקציית הסתברות נקודתית על מרחב מדגם Ω. אזי הפונקציה $\mathbb{P}_p: \mathcal{F} \to [0,1]_+$ הנתונה ע"י

$$\mathbb{P}_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

לכל מאורע A, היא פונקציית הסתברות והיא נתמכת על $Supp(p)$

<u>הגדרה 1.11 – מרחב הסתברות בדידה</u>

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה. אם קיימת פונקציית הסתברות נקודתית p כך ש$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$ אז $\mathbb{P}$ נקראת פונקציית הסתברות בדידה. השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מכונה – מרחב הסתברות בדידה

<u>טענה 1.12 – אפיון מרחבי הסתברות בדידה</u>

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. אזי הטענות הבאות שקולות:

- $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה
- $\mathbb{P}$ נתמכת על קבוצה בת מנייה
- $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$
- לכל מאורע A מתקיים: $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$

מסקנה 1.13 – מרחבי הסתברות בני מנייה הם מרחבי הסתברות בדידה

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. אם Ω בת-צנייה אז $\mathbb{P}$ היא פונקציית הסתברות בדידה

הגדרה 1.15 – התרחשות כמעט תמיד

אם מאורע A במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מקיים $\mathbb{P}(A) = 1$ נאמר כי A מתקיים כמעט תמיד

הגדרה 1.20 – מרחב הסתברות אחיד

מרחב הסתברות בדידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ נקרא אחיד, אם לכל $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ מתקיים $p(\omega_1) = p(\omega_2)$

הגדרה 1.39 – מרחב מכפלה

יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות בדידה, עבור פונקציות הסתברות נקודתית p_1 ו-p_2 בהתאמה. המרחב $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_{\Omega_1 \times \Omega_2}, \mathbb{P}_q)$ המתאים לפונקציות ההסתברות הנקודתית $q\big((\omega_1, \omega_2)\big) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$ מכונה מרחב המכפלה של $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$

הגדרה 1.41 – מאורעות שוליים, מאורעות מכפלה

יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות בדידה ויהי $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathbb{P})$ מרחב המכפלה שלהם. מאורעות מהסוג $\Omega_1 \times B$ או $A \times \Omega_2$, עבור $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. מכונים מאורעות שוליים. מאורע מן הסוג $A \times B$ מכונה מאורע מכפלה

טענה 1.42 – במרחב מכפלה הסתברות מאורע מכפלה היא מכפלת ההסתברויות השוליות

יהיו $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_{p_1})$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות בדידה ויהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב המכפלה שלהם. יהיו A ו-B מאורעות ב-Ω_1 וב-Ω_2 בהתאמה. אזי $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$

הגדרה 1.43 – מרחב מכפלה של מספר מרחבים בדידים

יהיו $\{(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}_k)\}_{k\in[n]}$ מרחבי הסתברות בדידה המתאימים לפונקציות הסתברות נקודתית $\{p_k\}_{k\in[n]}$. נסמן את מרחב המדגם ב- $\Omega = \times_{k=1}^{n} \Omega_k$. מכפלת פונקציות ההסתברות הנקודתית היא פונקציה $p: \Omega \to \mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $p\big((\omega_1, \dots, \omega_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} p_k(\omega_k)$. מרחב המכפלה של מרחבי ההסתברות הללו הוא המרחב $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$

פרק 2 – שיטות בסיסיות

הגדרה 2.1 – חלוקה של מרחב מדגם

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מ"ה. אוסף מאורעות זרים שאיחודם הוא Ω מכונה חלוקה של מרחב זה. אם אוסף זה הוא בן-מנייה – נאמר כי זוהי חלוקה בת-מנייה

טענה 2.2 – נוסחת ההסתברות השלמה

תהיה $\mathcal{A}$ חלוקה בת מנייה של מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי לכל מאורע B מתקיים

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbb{P}(A \cap B)$$

טענה 2.7 – חסם האיחוד לשני מאורעות

יהיו A, B מאורעות במ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

משפט 2.8 – חסם האיחוד למספר מאורעות – אי שוויון בול

לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל סדרה של m מאורעות $\{A_n\}_{n\in[m]}$ במ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in[m]} A_n\right) \leq \sum_{n\in[m]} \mathbb{P}(A_n)$$

הגדרה 2.14 – סדרת מאורעות מונוטונית

סדרה של מאורעות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במ"ה נקראת עולה אם לכל $i<j$ מתקיים $A_i\subset A_j$. הסדרה נקראת יורדת אם $A_j\subset A_i$ לכל $i<j$

משפט 2.15 – רציפות פונקציית ההסתברות על סדרה עולה של מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה ותהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה עולה של מאורעות. אזי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

מסקנה 2.16 – רציפות פונקציית ההסתברות על סדרה יורדת של מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה ותהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה יורדת של מאורעות. אזי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

משפט 2.18 – חסם האיחוד לסדרת מאורעות – אי שוויון בול

לכל סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)$$

טענה 2.19 – הכלה והפרדה לשני מאורעות ולשלושה מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה

- יהיו A,B מאורעות. אזי מתקיים $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
- יהיו A,B,C מאורעות, אזי מתקיים
$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

טענה 2.21 – עקרון ההכלה וההפרדה הכללי

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה. יהיו $A_1,\dots,A_n$ מאורעות ולכל $I\subset[n]$ נסמן $A_I=\cap_{i\in I}A_i$. אזי מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]}A_i\right)=\sum_{1\le i\le n}\mathbb{P}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{P}\big(A_{\{i,j\}}\big)+\sum_{1\le i<j<k\le n}\mathbb{P}\big(A_{\{i,j,k\}}\big)-\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}\big(A_{\{1,\dots,n\}}\big)$$

שתי דרכים מפורשות לכתוב סכום זה הן:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]}A_i\right)=\sum_{\ell\in[n]}(-1)^{\ell+1}\sum_{\substack{I\subset[n]\\|I|=\ell}}\mathbb{P}(A_I),\qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]}A_i\right)=\sum_{\substack{I\subset[n]\\I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}\mathbb{P}(A_I)$$

פרק 3 – הסתברות מותנית ואי תלות

הגדרה 3.1 – הסתברות מותנית

יהיה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה, יהי B מאורע בעל הסתברות חיובית ויהי A מאורע כלשהו. נגדיר את ההסתברות המותנית של A בהינתן B על ידי $\mathbb{P}(A|B):=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

טענה 3.2 – הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות

יהיה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מ"ה ויהי B מאורע בעל הסתברות חיובית. אזי הפונקציה $\mathbb{P}_B(A)=\mathbb{P}(A|B)$ לכל מאורע A, היא פונקציית הסתברות על $(\Omega,\mathcal{F})$. נאמר כי זו פונקציית ההסתברות המתקבלת מ-$\mathbb{P}$ לאחר התניה ה-B.

אבחנה 3.11 – כלל השרשרת

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B מאורעות כך שמתקיים $\mathbb{P}(B)>0$. אזי, $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)$

טענה 3.14 – התניה חוזרת שקולה להתניה בחיתוך

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)>0$. נסמן ב-$\mathbb{P}'=\mathbb{P}_A$ את פונקציית ההסתברות המתקבלת מ-$\mathbb{P}$ לאחר התניה ב-A, ונסמן ב-$\mathbb{P}''=\mathbb{P}'_B$ את פונקציית ההסתברות המתקבלת מ-$\mathbb{P}'$ לאחר התניה ב-B. אזי לכל מאורע D מתקיים $\mathbb{P}''(D)=\mathbb{P}(D|A\cap B)$

טענה 3.18 – נוסחת ההסתברות השלמה במונחי הסתברות מותנית

תהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מנייה של מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. אזי לכל מאורע B מתקיים
$$\mathbb{P}(B)=\sum_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ \mathbb{P}(A)>0}}\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

טענה 3.20 – כלל בייס, נוסחת ההיפוך

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות בעלי הסתברות חיובית. אזי
$$\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

או בניסוח אחר,
$$\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

הגדרה 3.26 – אי תלות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות בו. נאמר כי A ו-B הינם בלתי תלויים (ב"ת) אם
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

טענה 3.30 – תכונות בסיסיות של אי תלות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$ שני מאורעות

- A בלתי תלוי ב-Ω וב-$\emptyset$
- אם $\mathbb{P}(B)>0$ אז $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A^c\cap B)=\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$. כלומר גם A^c ו-B בלתי תלויים

הגדרה 3.34 – אי תלות מאורע באוסף מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B_1,\dots,B_k$ מאורעות בו. נאמר כי A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k\}$ אם לכל $I\subset[k]$ מתקיים כי A בלתי תלוי ב-$\cap_{i\in I}B_i$

טענה 3.37 – תנאי שקול לאי תלות מאורע באוסף מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B_1,\dots,B_k$ מאורעות בו. A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k\}$ אם ורק אם A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k,B_1^c,\dots,B_k^c\}$

הגדרה 3.40 – אי תלות של אוסף סופי של מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. מאורעות $A_1,\dots,A_n$ יקראו בלתי תלויים אם לכל $I\subset[n]$ מתקיים
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$$

טענה 3.42 – תנאי שקול לאי תלות של אוסף מאורעות

יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A_1,\dots,A_n$ מאורעות בו. מאורעות אלה בלתי תלויים אם ורק אם לכל $j\in[n]$ המאורע A_j בלתי תלוי ב-$\{A_i: i\in[n]\setminus\{j\}\}$

הגדרה 3.44 – אי תלות בזוגות

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. מאורעות $A_1, \dots, A_n$ ייקראו בלתי תלויים בזוגות אם לכל $i \neq j$ מתקיים כי A_i בלתי תלוי ב-A_j

הגדרה 3.49 – אי תלות של אוסף מאורעות אינסופי

אוסף מאורעות $\mathcal{A}$ נקרא בלתי תלוי אם המאורעות בכל תת אוסף סופי שלו הם בלתי תלויים

טענה 3.52 – נוסחת מכפלה לסדרה אינסופית של מאורעות בלתי תלויים

תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של מאורעות בלתי תלויים אזי

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

פרק 4 – משתנים מקריים בדידים

הגדרה 4.1 – משתנה מקרי

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. משתנה מקרי הוא פונקציה מ-Ω ל-$\mathbb{R}$.
נסמן ב-$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ את אוסף המאורעות על מרחב המדגם $\mathbb{R}$, עבור $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ נסמן את המאורע

$$\{X \in S\} \coloneqq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} \in \mathcal{F}$$

הגדרה 4.5 – משתנה מציין

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי מאורע $A \in \mathcal{F}$. המשתנה המקרי

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

מכונה משתנה מציין של A

אבחנה 4.6 – קשר בין מאורעות ומשתנים מציינים

יהי X משתנה מקרי על מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, תהי $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ המקיימת $0 \notin S$ ויהיו A, B מאורעות. אזי

- $1 - \mathbb{I}_A = \mathbb{I}_{A^c}$
- $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B$
- $\mathbb{I}_{A\cup B} = \max(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$
- $\{X \in S\} \cap A = \{X\mathbb{I}_A \in S\}$

הגדרה 4.9 – התפלגות משתנה מקרי

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. הפונקציה $\mathbb{P}_X : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ הנתונה על ידי,

$$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(S)\big) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\})$$

מכונה התפלגותו של X. אם $\mathbb{P}_X$ נתמכת על S אז נאמר כי X נתמך על S

טענה 4.10 – התפלגותו של משתנה מקרי היא פונקציית הסתברות

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי $(\Omega, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$ הוא מרחב הסתברות

הגדרה 4.11 – משתנה מקרי בדיד

משתנה מקרי X יקרא בדיד, והתפלגותו תקרא בדידה אם $\mathbb{P}_X$ היא פונקציית הסתברות בדידה. כאשר X משתנה מקרי בדיד, פונקציית ההסתברות הנקודתית p_X המתאימה ל-$\mathbb{P}_X$ תכונה פונקציית ההתפלגות הנקודתית של X

הגדרה 4.15 – התפלגות ברנולי

נאמר כי משתנה מקרי X מתפלג לפי התפלגות ברנולי עם הסתברות הצלחה p ונכתוב $X \sim Ber(p)$ אם $p_X(1) = p$ ו-$p_X(0) = 1 - p$

הגדרה 4.18 – התפלגות אחידה

נאמר כי מ"מ X מתפלג לפי התפלגות אחידה על קבוצה סופית $S \subset \mathbb{R}$ ונכתוב $X \sim Unif(S)$ אם לכל $i \in S$ מתקיים $p_X(i) = \frac{1}{|S|}$

הגדרה 4.22 – משתנה מקרי קבוע

נאמר כי משתנה מקרי X הנו משתנה מקרי קבוע אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$p_X(c) = 1$. כלומר אם המאורע $\{X = c\}$ מתרחש כמעט תמיד

הגדרה 4.24 – שוויון כמעט תמיד

יהיו X, Y שני משתנים מקריים בדידים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. נאמר כי X ו-Y שווים כמעט תמיד, ונסמן $X =^{a.s} Y$ אם מתקיים

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

הגדרה 4.27 – שוויון התפלגויות

אם לשני משתנים מקריים שונים X ו-Y (שעשויים להיות מוגדרים על שני מרחבי הסתברות שונים) יש את אותה ההתפלגות (כלומר מתקיים $\mathbb{P}_X \equiv \mathbb{P}_Y$), נאמר כי הם שווי התפלגות ונכתוב $X =^d Y$. בפרט, משתנים מקריים בדידים הנם שווי התפלגות, אם ורק אם יש להם אותה פונקציית התפלגות נקודתית (כלומר מתקיים $p_X \equiv p_Y$)

טענה 4.28 – שוויון כמעט תמיד גורר שוויון התפלגויות

יהיו X ו-Y משתנים מקריים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אם $X =^{a.s} Y$ אז $X =^d Y$

טענה 4.30 – שוויון התפלגויות נשמר תחת הפעלת פונקציה

יהיו X, Y מ"מ בדידים, שווי התפלגות (לאן דווקא על אותו מרחב הסתברות), ותהי $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ אזי $f(X) =^d f(Y)$

הגדרה 4.36 – וקטור מקרי

אוסף סופי של משתנים מקריים $X = (X_1, \dots, X_n)$ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ יכונה וקטור מקרי

הגדרה 4.37 – התפלגות משותפת

יהי $X = (X_1, \dots, X_n)$ וקטור מקרי על מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. הפונקציה $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1,\dots,X_n} : \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \to [0,1]$ הנתונה על ידי,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

מכונה ההתפלגות המשותפת של $X = (X_1, \dots, X_n)$. ההתפלגות של כל אחד מהמשתנים המקריים $X_1, \dots, X_n$ מכונה התפלגות שולית. אם $\mathbb{P}_X$ נתמכת על A , נאמר כי X נתמך על A

אבחנה 4.38 – התפלגות משותפת היא פונקציית הסתברות

יהי $(X_1, \dots, X_n)$ וקטור מקרי, אז $\mathbb{P}_{X_1,\dots,X_n}$ היא פונקציית הסתברות על $\mathbb{R}^n$

הגדרה 4.40 – וקטור מקרי בדיד

וקטור מקרי $X = (X_1, \dots, X_n)$ יקרא בדיד, והתפלגותו תקרא בדידה אם $\mathbb{P}_X$ היא פונקציית הסתברות בדידה. פונקציית ההסתברות הנקודתית p_X המתאימה ל-$\mathbb{P}_X$ תכונה פונקציית ההתפלגות הנקודתית של X.

את הקבוצה $Supp(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_X(x) > 0\}$ נכנה בשם התומך של X. ננהיג כתיב מקוצר של פונקציית ההסתברות הנקודתית עבור קונפיגורציה $x = (x_1, \dots, x_n)$ מסויימת:

$$p_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) := p_X\left((x_1, \dots, x_n)\right) = p_X(x)$$

הגדרה 4.45 – התפלגות אחידה של וקטור מקרי

נאמר שווקטור מקרי $X = (X_1, \dots, X_d)$ מתפלג לפי התפלגות אחידה על קבוצה סופית $S \subset \mathbb{R}^d$ ונכתוב $X \sim Unif(S)$ אם לכל $i \in S$ מתקיים $p_X(i) = \frac{1}{|S|}$

הגדרה 4.46 – שוויון כמעט תמיד של וקטורים מקריים

וקטורים מקריים X ו-Y על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הנם שווים כמעט תמיד ($X =^{a.s} Y$) אם $\mathbb{P}(X = Y) = 1$

הגדרה 4.47 – שוויון התפלגויות של וקטורים מקריים

וקטורים מקריים X ו-Y הם שווי התפלגות ($X =^d Y$) אם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

אבחנה 4.51 – שוויון נשמר תחת הפעלת פונקציות

יהיו $X=(X_1,\dots,X_n)$ ו-$Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ שני וקטורים מקריים בדידים ותהי $f\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}$ פונקציה כלשהי. אזי

- אם $X=^{a.s}Y$ אז $f(X)=^{a.s}f(Y)$
- אם $X=^{d}Y$ אז $f(X)=^{d}f(Y)$

הגדרה 4.52 – התפלגות בהינתן מאורע

יהי X וקטור מקרי בדיד בממד d על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ויהי $A\in\mathcal{F}$ מאורע המקיים $\mathbb{P}(A)>0$. לכל $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}$ נרשום

$$\mathbb{P}_{X|A}(S)\coloneqq\mathbb{P}(X\in S|A)=\mathbb{P}_A(X\in S)$$

כאשר $\mathbb{P}_A$ היא פונקציית ההסתברות $\mathbb{P}$ מותנית ב-A. ההתפלגות $\mathbb{P}_{X|A}$ מכונה התפלגותו של X בהינתן A, והיא למעשה התפרגותו של X על מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_A)$. כמו כן נשתמש בכיתוב $(X|A)\sim\mathcal{D}$ כדי לציין כי בנינתן A, המשתנה X מתפלג לפי $\mathcal{D}$

הגדרה 4.58 – אי תלות של שני משתנים מקריים

נאמר שהמשתנים X ו-Y המוגדרים על אותו מרחב הסתברות הנם בלתי תלויים, אם לכל שתי קבוצות $S,T\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים שהמאורעות $\{X\in S\}$ ו-$\{Y\in T\}$ בלתי תלויים, כלומר

$$\mathbb{P}(X\in S,Y\in T)=\mathbb{P}(X\in S)\mathbb{P}(Y\in T)$$

בניסוח אחר, X ו-Y בלתי תלויים אם לכל $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ עבורה $\mathbb{P}(X\in S)>0$ מתקיים $\mathbb{P}_{Y|X\in S}=\mathbb{P}_Y$

טענה 4.59 – אי תלות של שני משתנים מקריים בדידים

המשתנים מקריים בדידים X ו-Y בלתי תלויים אם ורק אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ המאורעות $\{X=x\}$ ו-$\{Y=y\}$ בלתי תלויים, כלומר

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

בניסוח אחר, X ו-Y בלתי תלויים אם לכל $x\in Supp(X)$ מתקיים $\mathbb{P}_{Y|X=x}=\mathbb{P}_Y$

הגדרה 4.73 – אי תלות של אוסף משתנים מקריים

יהיו $X_1,\dots,X_n$ משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר שזהו אוסף משתנים מקריים בלתי תלויים אם לכל n קבוצות $S_1,\dots,S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, המאורעות $\{X_1\in S_1\},\dots,\{X_n\in S_n\}$ בלתי תלויים

הגדרה 4.74 – אי תלות של אוסף וקטורים מקריים

יהיו $X_1,\dots,X_n$ וקטורים מקריים d-מימדיים המוגדרים על אותו מ"ה, כאשר $X_i=\left(X_{i,1},\dots,X_{i,d}\right)$. נאמר שזהו אוסף וקטורים מקריים בלתי תלויים אם לכל n קבוצות $S_1,\dots,S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ המאורעות $\{X_1\in S_1\},\dots,\{X_n\in S_n\}$ בלתי תלויים

טענה 4.74 – תנאי שקול לאי תלות של אוסף וקטורים מקריים

אוסף וקטורים מקריים d-מימדיים $X_1,\dots,X_n$ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות הנם בלתי תלויים אם ורק אם לכל $S_1,\dots,S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X_1\in S_1,\dots,X_n\in S_n)=\prod_{i\in n}\mathbb{P}(X_i\in S_i)$$

הגדרה 4.93 – סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים

סדרה של מ"מ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ נקראת סדרת משתנים ב"ת אם לכל $n\in\mathbb{N}$ המשתנים המקריים $X_1,\dots,X_n$ בלתי תלויים

טענה 4.94 – נוסחת מכפלה לסדרה אינסופית של משתנים מקריים

תהי X_n סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ותהיינה $S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ אזי

$$\mathbb{P}(\forall n\in\mathbb{N}:X_n\in S_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n\in S_n)$$

טענה 4.95 – אין סוף משתנים מקריים שווי התפלגות על מרחבי הסתברות בדידה

תהי X_n סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ולא קבועים על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. אז $\mathbb{P}$ אינה פונקציית הסתברות בדידה

טענה 4.96 – קיום סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים

יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים על מרחבי הסתברות כלשהם. אז קיים מרחב הסתברות שעליו מוגדרת סדרת משתנים מקריים $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בלתי תלויים המקיימת $Y_n =^d X_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$

הגדרה 4.99 – התפלגות גיאומטרית

יהי $p\in(0,1)$. נאמר שמ"מ X מתפלג לפי התפלגות גיאומטרית עם הסתברות p להצלחה ונכתוב $X\sim Geo(p)$ אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $p_X(n)=(1-p)^{n-1}$

טענה 4.100 – הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת מתפלגת גיאומטרית

תהי $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים כאשר $X_k\sim Ber(p)$ לכל $k\in\mathbb{N}$ ונסמן

$$X=\min(\{k: X_k=1\})$$

אזי $X\sim Geo(p)$

טענה 4.104 – תיאור משתנה גיאומטרי במונחים של התפלגות שיורית

משתנה מקרי שנתמך על השלמים מתפלג $Geo(p)$ אם ורק אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X>n)=(1-p)^n$$

טענה 4.105 – אפיון התפלגות גיאומטרית במונחי חוסר זיכרון

יהי X משתנה מקרי הנתמך על $\mathbb{N}$ אשר מקיים $\mathbb{P}(X=1)<1$. שלושת הבאים שקולים:

- X מתפלג גיאומטרית
- X ו-$(X-1|X>1)$ שווי התפלגות
  כלומר $\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X-1=n|X>1)$ לכל $n\in\mathbb{N}$
- X ו-$(X-s|X>s)$ שווי התפלגות לכל $s\in\mathbb{N}$
  כלומר $\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(X-s=n|X>s)$ לכל $n\in\mathbb{N}$

הגדרה 4.112 – התפלגות בינומית

נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג לפי התפלגות בינומית עם n ניסיונות והסתברות הצלחה p ונכתוב $X\sim Bin(n,p)$ אם לכל $k\in\{0,\dots,1\}$ מתקיים $p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

טענה 4.113 – סכום של משתנים ברנולי בלתי תלויים מתפלג בינומית

יהי $X=\{X_i\}_{i\in[n]}$ וקטור של משתני ברנולי עם הסתברות הצלחה p, בלתי תלויים. אזי

$$\sum_{i\in[n]} X_i \sim Bin(n,p)$$

משפט – נוסחת סטירלינג

יהי $n\in\mathbb{N}$. אזי $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

הגדרה 4.123 – התפלגות פואסון

נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג פואסון עם שכיחות $\lambda\geq 0$ ונכתוב $X\sim Pois(\lambda)$ אם לכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים

$$p_X(n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

טענה 124 – פואסון כגבול של בינומי במובן הנקודתי

יהי $Y\sim Pois(\lambda)$. תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מ"מ כך שלכל $n>\lambda$ מתקיים $X_n\sim Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$. אזי לכל $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{X_n}(k)=\mathbb{P}_Y(k)$$

טענה 4.125 – תכונות התפלגות פואסונית

יהי $X\sim Pois(\lambda)$

- אם $Y\sim Pois(\eta)$ בלתי תלוי ב-X אז $X+Y\sim Pois(\lambda+\eta)$
- אם לכל $n\in\mathbb{N}_0$ מתקיים $(Y|X=n)\sim Bin(n,p)$ אז $Y\sim Pois(\lambda p)$

פרק 5 – תוחלת

הגדרה 5.1 – תוחלת משתנה מקרי בדיד

יהי X משתנה מקרי בדיד. התוחלת של X, מוגדרת על ידי

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X=x)$$

כאשר טור זה מתכנס בהחלט. במקרה כזה נאמר כי X בעל תוחלת סופית ואחרת נאמר שהוא חסר תוחלת סופית

טענה 5.2 – תוחלת של משתנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. התוחלת של X מקיימת

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

והיא קיימת אם ורק אם טור זה מתכנס בהחלט

טענה 5.9 – תכונות התוחלת

יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית, המוגדרים על אותו מ"ה. אזי

- אי שליליות: אם $X\geq^{a.s.}0$ אז $\mathbb{E}(X)\geq 0$. אם בנוסף $\mathbb{P}(X>0)>0$ אז $\mathbb{E}(X)>0$
- לינאריות: $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$
- מונוטוניות: אם $X\geq^{a.s.}Y$ אז $\mathbb{E}(X)\geq\mathbb{E}(Y)$. אם בנוסף $\mathbb{P}(X>Y)>0$ אז $\mathbb{E}(X)>\mathbb{E}(Y)$

טענה 5.15 – כפליות התוחלת למשתנים בלתי תלויים

יהיו X,Y משתנים מקריים, ב"ת ובעלי תוחלת סופית. אזי התוחלת של XY קיימת ומקיימת

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

טענה 5.17 – הגדרת אי תלות במונחי תוחלת

יהיו X,Y משתנים מקריים על מרחב הסתברות. אזי X ו-Y בלתי תלויים אם ורק אם לכל שתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(Y)\big)=\mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$$

בכל מקרה בו התוחלות $\mathbb{E}\big(f(X)\big),\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$ קיימות

טענה 5.19 – נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה מקרי על הטבעיים

יהי X משתנה מקרי המקיים $Supp(X)\subset\mathbb{N}_0$. אזי,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X\geq n)$$

טענה 5.21 – קיום תוחלת למשתנה נשלט

יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ויהי Y משתנה מקרי. אם Y מקיים $|X|\geq^{a.s.}|Y|$ אז גם Y בעל תוחלת סופית

טענה 5.25 – נוסחת התוחלת השלמה

תהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מנייה של מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ויהי X מ"מ בעל תוחלת סופית על מרחב זה. אזי

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{A\in\mathcal{A}}\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A)$$

הגדרה 5.27 – תוחלת מותנית

יהיו X מ"מ בעל תוחלת סופית, ו-A מאורע בעל הסתברות חיובית. תוחלתו המותנית של X בהינתן מאורע A מוגדרת להיות תוחלתו של X תחת פונקציית ההסתברות המותנית $\mathbb{P}_A$, כלומר

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x|A)$$

טענה 5.28 – נוסחת התוחלת השלמה במונחי תוחלת מותנית

תהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מנייה של מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ויהי X מ"מ בעל תוחלת סופית על מרחב זה. אזי

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ \mathbb{P}(A)>0}} \mathbb{E}(X|A)\mathbb{P}(A)$$

משפט 5.36 – אי שוויון מרקוב

יהי X מ"מ אי שלילי (כלומר המקיים $X \geq^{a.s.} 0$), בעל תוחלת סופית. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

מסקנה 5.37 – אי שוויון מרקוב – שימוש בתוחלת כיחידה למדידת הסטייה

יהי X מ"מ אי שלילי בעל תוחלת סופית וחיובית. לכל $b > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}\big(X \geq b\mathbb{E}(X)\big) \leq \frac{1}{b}$$

פרק 6 – שונות

הגדרה 6.1 – שונות וסטיית תקן

יהי X מ"מ בעל תוחלת סופית $\mu = \mathbb{E}(X)$. השונות של X מוגדרת כ-

$$Var(X) := \mathbb{E}((X-\mu)^2)$$

אם תוחלת זו סופית. אחרת נאמר של-X אין שונות, או ששונותו אינסופית

את השורש הריבועי של השונות $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ נכנה בשם סטיית התקן של X

טענה 6.2 – הגדרה שקולה לשונות

לעל משתנה מקרי X בעל תוחלת סופית מתקיים

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

כאשר צד ימין של השוויון מוגדר אם ורק אם צדו השמאלי מוגדר

טענה 6.3 – תכונות השונות

יהי X מ"מ בעל שונות סופית, ויהי $a \in \mathbb{R}$. אזי

- אי שליליות: $Var(X) \geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם X קבוע כמעט תמיד
- אדישות להזזות: $Var(X + a) = Var(X)$
- כיול ריבועי: $Var(aX) = a^2Var(X)$

טענה 6.4 – חיבוריות השונות למשתנים מקריים בלתי תלויים

יהיו X, Y מ"מ בלתי תלויים בעלי שונות סופית. אזי $X + Y$ בעל שונות סופית ומתקיים

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

מסקנה 6.5 – חיבוריות השונות למ"מ בלתי תלויים

יהיו $\{X_i\}_{i\in[n]}$ מ"מ ב"ת בעלי שונות סופית. אזי $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ בעל שונות סופית ומתקיים

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

משפט 6.9 – אי שוויון צ'בישב

יהי X מ"מ בעל שונות סופית. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

מסקנה 6.10 – אי שוויון צ'בישב – ניסוח אחר

יהי X מ"מ בכל סטיית תקן σ_X. לכל $b > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq b\sigma_X) \leq \frac{1}{b^2}$$

הגדרה 6.17 – התכנסות התפלגויות לקבוע

נאמר כי התפלגות המשתנים המקריים בסדרה מתכנסת לקבוע ונסמן $X_n \to^d a$ אם לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - a| < \epsilon) = 1$$

טענה 6.19 – תנאי תוחלת ושונות להתכנסות לקבוע

תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים המקיימת עבור $\mu \in \mathbb{R}$ כי $\mathbb{E}(X_n) \to \mu$ וכן $Var(X_n) \to 0$. אזי

$$X_n \to^d \mu$$

משפט 6.21 – החוק החלש של המספרים הגדולים

יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים, שווי התפלגות, בעלי תוחלת μ. אזי

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^d \mu$$

הגדרה 6.24 – שונות משותפת

יהיו X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות, בעלי תוחלת סופית. השונות המשותפת של X ו-Y, מוגדרת על ידי

$$Cov(X,Y) \coloneqq \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

שני משתנים מקריים אשר שונותם המשותפת מתאפסת – נקראים בלתי מתואמים

טענה 6.25 – קיום שונות משותפת

לכל X ו-Y, משתנים מקריים בעלי שונות סופית מתקיים כי $\mathbb{E}(XY)$ קיימת וסופית

אבחנה 6.30 – אי תלות גוררת אי מתואמות

יהיו X, Y מ"מ בלתי תלויים ובעל תוחלת. אזי X, Y בלתי מתואמים

טענה 6.32 – תכונות השונות המשותפת

יהיו X, Y, Zמ"מ בעלי שונות סופית, ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אזי מתקיימות התכונות הבאות

- סימטריות: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- בילינאריות: $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$
- $Cov(X,X) = Var(X)$
- אדישות להזזות: $Cov(X + a, Y) = Cov(X,Y)$

טענה 6.34 – נוסחת השונות לסכום

לכל אוסף $(X_k)_{k\in[n]}$ של משתנים מקריים מתקיים

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{\ell,k\leq n} Cov(X_k, X_\ell) = \sum_{k\leq n} Var(X_k) + 2\sum_{k<\ell\leq n} Cov(X_k, X_\ell)$$

בכל מקרה בו אגף ימין של המשוואה מוגדר היטב

הגדרה 6.38 – מרחב במשתנים המקריים עד כדי שוויון כמעט תמיד

נסמן ב-$\mathcal{V}$ את אוסף המשתנים המקריים על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, כאשר אנו מזהים שני משתנים מקריים X ו-Y אם $X =^{a.s.} Y$

אבחנה 6.39 – מרחב המשתנים המקריים הוא מרחב לינארי

$\mathcal{V}$ הוא מרחב לינארי (לא בהכרח ממד סופי) ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר. כאשר $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות בדידה, ממדו של $\mathcal{V}$ שווה לעוצמת התומך של $\mathbb{P}$

הגדרה 6.40 – מרחב המשתנים המקריים שהם בעלי מומנט שני סופי

המומנט הסופי של משתנה מקרי X מוגדר להיות $\mathbb{E}(X^2)$. אוסף המשתנים המקריים X ב-$\mathcal{V}$ שהם בעלי מומנט שני סופי יסומן בL^2

המומנט המעורב של שני משתנים מקריים X ו-Y מוגדר להיות $\mathbb{E}(XY)$, כאשר תוחלת זו קיימת וסופית

מסקנה 6.44 – אוסף המשתנים המקריים בעלי מומנט שני הוא מרחב מכפלה פנימית

L^2 הוא תת מרחב לינארי של $\mathcal{V}$, אשר $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ מהווה מכפלה פנימית ביחס אליו

הגדרה 6.48 – הטלה של משתנה מקרי ביחס למשתנה אחר

יהיו X ו-Y משתנים מקריים ב-L^2. נגדיר את ההטלה של X על Y להיות $Proj_Y(X) := \frac{\mathbb{E}(XY)}{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}} Y$. כעת נוכל להציע פירוק מאונך של X לפי $X = Proj_Y(X) + \big(X - Proj_Y(X)\big)$, כאשר הרכיב $\big(X - Proj_Y(X)\big)$ מכונה הרכיב המאונך ל-Y

טענה 6.50 – התוחלת ממזערת סטיה ריבועית

יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית, אזי

$$\min\{\mathbb{E}((X-a)^2) : a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = Var(X)$$

טענה 6.51 – רגרסיה לינארית במשתנה אחד

יהיו X, Y משתנים מקריים ב-L^2 בעלי תוחלת μ_X, μ_Y וסטיות תקן σ_X, σ_Y בהתאמה. אזי

$$\min\{\mathbb{E}((X-Z)^2) : Z \in span(1, Y)\} = \mathbb{E}\left(\left(X - Proj_{1,Y}(X)\right)^2\right) = \sigma_X^2 - \frac{Cov(X,Y)^2}{\sigma_Y^2}$$

כאשר ההטלה של X על $span(1, Y)$ נתונה במפורש על ידי

$$Proj_{1,Y}(X) = \mu_X + \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_Y^2}(Y - \mu_Y)$$

פרק 7 – פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה 7.1 – מומנטים פולינומיאלים

יהיה X משתנה מקרי. המומנט מסדר k של X מוגדר בתור $m_k(X) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$ כאשר תוחלת זו מוגדרת היטב

טענה 7.2

יהיה X משתנה מקרי. אם $m_k(X)$ סופי אז גם $m_{k-1}(X)$ סופי

הגדרה

המומנט המרכזי של מ"מ בדיד בעל תוחלת הוא המומנט ה-k של $X - \mathbb{E}(X)$

המומנט המוחלט של מ"מ בדיד בעל תוחלת הוא המומנט ה-k של $(|X - \mathbb{E}(X)|)$

טענה 7.3

יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת ובעל מומנט k. אזי לכל $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^k\right)}{a^k}$$

הגדרה 7.4 – פונקציה יוצרת מומנטים

יהי X משתנה מקרי. הפונקציה הממשית $M_X(t)$ הנתונה על ידי
$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$
מכונה הפונקציה יוצרת מומנטים של X. משתנה מקרי אשר הפונקציה יוצרת מומנטים שלו מוגדרת בסביבה כשלהי של הראשית מכונה בעל מומנט מעריכי

טענה 7.5 – כפליות פונקציה יוצרת מומנטים

יהיו X ו-Y משתנחם מקריים בלתי תלויים ויהי $Z = X + Y$. אזי
$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

משפט 7.8 – אי שוויון צ'רנוף

יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אזי לכל $t > 0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$\mathbb{P}(x \geq a) \leq M_X(t)e^{-ta}$$

טענה 7.11 – הלמה של הופדינג

יהי X משתנה מקרי המקיים $|X| \leq^{a.s.} 1$ וכן $\mathbb{E}(X) = 0$. אזי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

משפט 7.12 – אי שוויון הופדינג

יהיו $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים מקריים ב"ת ובעלי תוחלת אפס, אשר מקיימים $|X_k| \leq^{a.s.} 1$ לכל $k \in [n]$. אזי לכל $a > 0$ מתקיים
$$\mathbb{P}\left(\sum_{k\in[n]} X_k \geq a\right) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

מסקנה 7.13 – אי שוויון הופדינג – גרסה כללית

יהיו $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים מקריים ב"ת, אשר מקיימים $|X_k - \mathbb{E}(X_k)| \leq^{a.s.} M$ לכל $k \in [n]$. ונסמן $X = \sum_{k\in[n]} X_k$.
אזי לכל $a > 0$ מתקיים
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2nM^2}\right)$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2nM^2}\right)$$

פרק 8 – מרחבי הסתברות כלליים

הגדרה

$\mathcal{F}$ אוסף המאורעות הוא σ-אלגברה של קבוצות, הווה אומר, אוסף תת הקבוצות של Ω שסגור למשלימים ולאיחודים בני מנייה

הגדרה

מרחב ההסתברות התקני הוא $([0,1], \mathbb{B}([0,1]), \mathbb{P})$ כש-$\mathbb{P}\big((a,b)\big) = b - a$ לכל $0 \leq a \leq b \leq 1$

הגדרה

מ"מ על מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא פונקציה $X: \Omega \to \mathbb{R}$ כך שלכל $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ מתקיים $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

הגדרה 8.12 – פונקציית התפלגות מצטברת

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות. הפונקציה $F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $F_X(s) = \mathbb{P}(X \leq s)$
מכונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.
באופן דומה הפונקציה $\bar{F}_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $\bar{F}_X(s) = \mathbb{P}(X > s) = 1 - F_X(s)$
מכונה פונקציית ההתפלגות השיורית של X

טענה 8.13 – אפיון פונקציות התפלגות מצטברת

$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי כלשהו אם ורק אם היא מונוטונית עולה, רציפה מימין ומקיימת

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

טענה 8.14 – התפלגות מצטברת מאפיינת את פונקציית ההתפלגות

יהיו X, Y שני משתנים מקריים על מרחב הסתברות. אם $F_X \equiv F_Y$ אז $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

הגדרה 8.15 – משתנה מקרי בדיד

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. נאמר כי ל-$X$ התפלגות בדידה אם קיימת קבוצה A בת מנייה, כך שמתקיים $\mathbb{P}(X \in A) = 1$

הגדרה 8.16 – משתנה מקרי רציף

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. נאמר כי ל-$X$ התפלגות רציפה אם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = x) = 0$

פרק 9 – משתנים מקריים רציפים בהחלט

הגדרה 9.1 – משתנה מקרי רציף בהחלט

יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות. נאמר ש-X רציף בהחלט אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $-\infty \le a < b \le \infty$ מתקיים

$$\mathbb{P}\big(X \in (a,b)\big) = \int_a^b f(x)dx$$

הפונקציה f נקראת הצפיפות של X

אבחנה 9.2 – פונקציית הסתברות מצטברת ושיורית של משתנה מקרי רציף בהחלט

יהי X משתנה רציף בהחלט של מרחב הסתברות. אזי

$$F_X(s) = \mathbb{P}(X \le s) = \int_{-\infty}^{s} f(x)dx$$

$$\bar{F}_X(s) = \mathbb{P}(X > s) = \int_{s}^{\infty} f(x)dx$$

טענה 9.3 – בניית משתנה מקרי מצפיפות

עבור כל פונקציה $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ אינטגרבילית המקיימת

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1$$

קיים משתנה מקרי X כך ש-$f_X = f$

טענה 9.4 – חישוב הסתברות – קטעים

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל צפיפות f_X. אזי לכל קטע $[a,b]$ ב-$\mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

בפרט $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = a) = 0$

טענה 9.6

יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X ותהי $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש וגזירה. אז $Y = g(X)$ הוא משתנה מקרי בעל צפיפות ולכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

כאשר $x = g^{-1}(y)$

הגדרה 9.11 – תוחלת משתנה מקרי רציף בהחלט

יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל פונקציית צפיפות $f_X(x)$. אזי

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

בכל מקרה בו אינטגרל זה מתכנס בהחלט. אחרת אין ל-X תוחלת

טענה 9.12

לכל משתנה מקרי רציף בהחלט X מתקיים

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{\infty} \bar{F}_X(x)dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx$$

טענה 9.13 – תוחלת פונקציה של משתנה מקרי

יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X ותהי פונקציה $g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. אז $Y = g(X)$ הוא מתנה מקרי המקיים

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

אם ורק אם האינטגרל מתכנס בהחלט

הגדרה 9.18 – התפלגות אחידה

יהי $[a,b] \subset \mathbb{R}$ קטע. נאמר שלמשתנה מקרי X התפלגות אחידה על $[a,b]$ ונכתוב $X \sim Unif([a,b])$, אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{I}([a,b])(x)}{b-a}$$

אבחנה 9.19 – תכונות התפלגות אחידה

יהי $X \sim Unif([a,b])$ משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה. אזי מתקיים

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

כמו כן לכל $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\underline{\alpha X + \beta \sim Unif([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])}$

הגדרה 9.21 – התפלגות מעריכית

נאמר שלמשתנה מקרי X התפלגות מעריכית עם פרמטר λ עבור $\lambda > 0$, ונכתוב $X \sim Exp(\lambda)$, אם צפיפותו היא

$$f_X(x) = \mathbb{I}\big([0,\infty)\big)(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

כאשר $\lambda = 1$ נאמר כי המשתנה מעריכי תקני

אבחנה 9.22

יהי $X \sim Exp(\lambda)$. אזי

$$F_X(t) = \max\left(1 - e^{-\lambda t}, 0\right), \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \ \ (\lambda > t)$$

כמו כן לכל $\alpha > 0$ מתקיים $\alpha X \sim Exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$

אבחנה 9.23 – חוסר זיכרון

יהי $X \sim Exp(\lambda)$. אזי המשתנה המקרי $Y = (X - x_0 | X > x_0)$ מקיים $Y \sim Exp(\lambda)$

מסקנה 9.24 – דיסקרטיזציה של מעריכי היא גיאומטרית

יהי $X \sim Exp(\lambda)$. אזי המשתנה המקרי $Y = \lceil X \rceil$, מתפלג גיאומטרית עם סיכוי הצלחה $1 - e^{-\lambda}$

הגדרה 9.26 – התפלגות נורמלית

נאמר שלמשתנה מקרי X התפלגות נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 ונכתוב $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אם צפיפותו היא

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כאשר $X\sim N(0,1)$ נאמר כי X נורמלי תקני

הגדרה 9.27 – פונקציית התפלגות מצטברת של התפלגות נורמלית

נסמן מעתה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי $X\sim N(0,1)$ ב-

$$\Phi(x)=\mathbb{P}(X\le x)=F_X(x)$$

אבחנה 9.28 – תכונות משתנה נורמלי

יהי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. אזי

$$F_X(t)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\qquad \mathbb{E}(X)=\mu,\qquad Var(X)=\sigma^2,\qquad M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

וכן לכל $\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים $\alpha X+\beta\sim N(\alpha\mu+\beta,\alpha\sigma^2)$

הגדרה 9.29 – צפיפות משותפת של שני משתנים מקריים

נאמר כי לשני משתנים מקריים X,Y מעל מרחב הסתברות משותף $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יש צפיפות משותפת אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ המקיימת לכל קבוצה מהטיפוס $A=(-\infty,a]\times(-\infty,b]$

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A)=\mathbb{P}(X\le a,Y\le b)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f_{X,Y}(x,y)dydx$$

הפונקציה $f_{X,Y}(x,y)$ נקראת צפיפות משותפת של X ו-Y

אבחנה 9.32

יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ אז X ו-Y רציפים בהחלט ומתקיים כי

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy\,,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$$

הן צפיפויות של X ו-Y בהתאמה. התפלגויותיהם של X ו-Y נקראות ההתפלגויות השוליות של X ו-Y

אבחנה 9.35

יהיו X,Y משתנים מקריים רציפים בהחלט בעלי צפיפות f_X ו-f_Y בהתאמה. אזי X ו-Y בלתי תלויים אם ורק אם קיימת להם צפיפות משותפת המקיימת

$$f_{X,Y}=f_Xf_Y$$

אבחנה 9.39

אם X,Y מ"מ ב"ת על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אז

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)$$

פרק 10 – סדרות של התפלגויות

הגדרה 10.1 – התכנסות בהתפלגות

תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים, לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות, ויהי X משתנה מקרי. נאמר כי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת בהתפלגות ל-X, ונסמן $X_n\to^d X$ אם לכל a שהיא נקודת רציפות של F_X מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(a)=F_X(a)$$

טענה 10.5

יהיו $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ו-X מ"מ הנתמכים על השלמים. אז X_n מתכנסת בהתפלגות ל-X אמ"מ לכל $k\_\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(X=k)$$

משפט 10.8 – משפט הגבול המרכזי

תהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, בעלי תוחלת 0 ושונות 1. אזי
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^d Z$$
כאשר Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.
באופן שקול, לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

מבוא לסטטיסטיקה

הגדרה

השערה פשוטה היא פונקציית הסתברות $\mathbb{P}$ על $(\Omega,\mathcal{F})$

הגדרה

השערה מורכבת היא אוסף פונקציות הסתברות $\{\mathbb{P}_{a_1,\dots,a_n}\}$ על $(\Omega,\mathcal{F})$, כש-$a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ הם אוסף כלשהו של פרמטרים

הגדרה

מבחן דטרמיניסטי הוא מ"מ $T:\Omega\to\{0,1\}$
מבחינתנו $T=1$ אומר שאנחנו בוחרים ב-$\mathcal{H}_1$ (דוחים את השערת האפס) ו-$T=0$ אומר שאנחנו בוחרים ב-$\mathcal{H}_0$ (מקבלים את השערת האפס)

הגדרה

מובהקות של מבחן T היא $\mathbb{P}_0(T=1)$ ומסומנת ב-$\alpha \ or\ \alpha_T$

הגדרה

עוצמה של מבחן היא $\pi=1-\beta$. כש-$\beta=\beta_T=\mathbb{P}_1(T=0)$, ההסתברות לשלילי כוזב

הגדרה

יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדגם, עם שתי השערות $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$. נאמר שמבחן T_1 הוא עדיף על או טוב יותר ממבחן T_2, ונסמן $T_1\succcurlyeq T_2$ אם
$$\alpha_{T_1}\le\alpha_{T_2} \quad \wedge \quad \beta_{T_1}\le\beta_{T_2}$$

הגדרה

עבור $\omega\in\Omega$ הנראות של ω לפי $\mathcal{H}_i$ היא $\mathcal{L}(\omega;\mathcal{H}_i)=\mathbb{P}_i(\{\omega\})$
אם ההסתברות $\mathbb{P}_i$ רציפה בהחלט נגדיר $\mathcal{L}(\omega;\mathcal{H}_i)=f_i(\omega)$

הגדרה

עבור $\omega\in\Omega$ יחס הנראות של ω הוא $\Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)=\frac{\mathcal{L}(\omega;\mathcal{H}_1)}{\mathcal{L}(\omega;\mathcal{H}_0)}$

הגדרה

סטטיסטי מספיק עבור מבחן T הוא פונקציה $g:\Omega\to\mathbb{R}$ כך שיש פונקציה $h:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ כך ש-$T(\omega)=h\big(g(\omega)\big)$

משפט – הלמה של היימן-פירסון

יהי Ω מרחב מדגם עם שתי השערות $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$. מבחן $T:\Omega\to\{0,1\}$ הוא מיטבי עבור מובהקות נתונה α אם קיימת $\lambda\in[0,\infty]$ כך שלכל $\omega\in\Omega$ מתקיים

$$T(\omega)=\begin{cases}1 & \Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)\geq\lambda\\ 0 & \Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)<\lambda\end{cases}$$

הגדרה – מבחן סטוכסטי

יהי Ω מרחב מדגם. $T:\Omega\to[0,1]$ נקרא מבחן סטוכסטי.
אם T מבחן סטוכסטי, ו-$U\sim Unif([0,1])$ ב"ת ב-T אז נגדיר את אזור הדחייה כ-$U\leq T$

משפט – הלמה הסטוכסטית של ניימן-פירסון

יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדגם, עם שתי השערות $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$. מבחן סטוכסטי T הוא מיטבי עבור מובהקות נתונה α אם ורק אם קיימים $\lambda\in[0,\infty)$, $\gamma\in[0,1]$ כך ש:

- אם $\lambda=0$ אז $\gamma=0$
- אם $\lambda=\infty$ אז $\gamma=1$
- $$T(\omega)=\begin{cases}0 & \Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)<\lambda\\ \gamma & \Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)=\lambda\\ 1 & \Lambda_{\mathcal{H}_1;\mathcal{H}_0}(\omega)>\lambda\end{cases}$$