

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)

מועד א', כ"ז שבט ה'תשפ"ה (25/2/2025)

שם המרצים: אודה נ. פלדהיים, אורן רוזנשטיין.
משך הבחינה: **שלוש שעות.**

מספר תעודות זהות _____ מספר מהברת _____

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמישה שאלות בבחינה.
- את התשובות יש לרשום בתוך הריבועים בדף השאלות, המחברת משתמש במחברת טווטא ולא לבדוק. בסוף הבחינה מצורף דף אחד לתיקונים ותוספות לפתרונות, במקרה הצורך יש להפנות אליו מתוך הבדיקה.
- כל סעיף שייננה בתשובה "אני יודע" או "אני יודעת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם נתון להתייחס לפתרון סעיף קודם כיודע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עוזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אוינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המרבי יש לצטט במידוייק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 5	שאלה 4	שאלה 3	שאלה 2	שאלה 1

בהצלחה!

שאלה 1

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים על אותו מרחב הסתברות. יש לענות על הטעיפים הבאים.

- [3 נק.] (א) יש לצטט את ההגדרה של שוויון התפלגויות בין X ל- Y .
- [3 נק.] (ב) יש לצטט את ההגדרה של שוויון כמעט-הAINED בין X ל- Y .
- [10 נק.] (ג) יש להוכיח כי אם $X \stackrel{\text{d}}{=} Y$ אז $X \stackrel{\text{a.s.}}{=} Y$.
- [9 נק.] (ד) תהיה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. יש להוכיח כי אם $X \stackrel{\text{d}}{=} Y$ אז $g(X) \stackrel{\text{d}}{=} g(Y)$.

שאלה 2

מטבילים מטבע הוגן שוב ושוב עד לקבלת תוצאה של עז. נסמן ב- X את מספר ההצלחות. מכוניסים לכלי X קוביות הוגנות ומטילים את כולם ביחד. נסמן ב- Y את סכום תוצאות הטליה של כל הקוביות.

- (א) יש ליחס את תוחלת Y .
- (ב) יש ליחס את תוחלת מספר ההצלחות המטבע בהינתן המאורע $X = Y$.

[13 נק.]

[12 נק.]

שאלה 3

נתונים $\{X_i\}_{i \in [n]}$ מקרים שווי התפלגות המתפלגים אחד על $[m]$. שני מספרים $a, b \in [m]$ נקראים **יעוקבים** אם **מעגלית אם** $|a - b| = 1$, או $\{a, b\} = \{1, m\}$, כלומר אחד מבין a ו- b מקבל את הערך 1 והשני את הערך m . נסמן ב- Y_n את מספר הזוגות היעוקבים מעגלית באוסף $\{X_i\}_{i \in [n]}$.

(א) יש ליחס את תוחלת ושונות Y_n .

[12 נק.]

(ב) יש להראות כי קיים קבוע c כך שקיימים $c \rightarrow n$ וליחס קבוע זה.

[13 נק.]

שאלה 4

יהיו $(X_i)_{i \in [n]}$ מחרנים מקרים רציפים בהחלט, שווי-התפלגות ובלתי-יתלוים, שלכולם התפלגות שווה למשתנה מקרי

X בעל צפיפות

$$f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

(א) יש להראות כי X בעל תוחלת ולחשב את תוחלתו ואת שוננותו.

[15 נק.]

(ב) יש להראות כי קיים קבוע $c > 0$ כך שמתקיים לכל n

[10 נק.]

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) > n\right) \leq e^{-cn}$$

אין צורך למציא את הקבוע במפורש.

$$\cdot \int_0^\infty x^2 e^{-x} = 2 \quad , \quad \int_0^\infty x e^{-x} = 1 \text{ חישוב:}$$

שאלה 5

מטילים מطبع 8 פעמים. השערת האפס היא שהמטוס הוגן, ואילו השערה חליפה היא שהמטוס מוטה ובעל סיכוי של 75% לתוכזאה של עצ.

- [10 נק.] (א) יש לתאר מבחני מיטבי להפרדה בין שתי ההשערות בעל מובהקות של $\frac{37}{256} = \alpha$ ולהצדיק את מיטביותו.
- [5 נק.] (ב) יש להראות שמספר תוצאות העצם בהטלה הוא סטטיסטי מספיק לבחן נימונ-פירסון להפרדת שתי ההשערות.
- [10 נק.] (ג) יש לחשב את עוצמת המבחן שჩיברתם בסעיף א' (אין צורך לבנות מושוף לסכום שברים).

מקום נוסף לכתיבה

מקום נוסף לכתיבה