

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

## בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)

מועד א', כ"ז שבט ה'תשפ"ה (25/2/2025)

שם המרצים: אוהד נ. פלדהיים, אורי רוזנשטיין.

משך הבחינה: שלוש שעות.

מספר תעודת זהות \_\_\_\_\_

מספר מחברת \_\_\_\_\_

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.
- את התשובות יש לרשום בתוך הריבועים בדפי השאלות, המחברת משמשת כמחברת טיוטא ולא תבדק. בסוף הבחינה מצורף דף אחד לתיקונים ותוספות לפתרונות, במקרה הצורך יש להפנות אליו מתוך התשובות.
- כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע" או "איני יודעת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כידוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדויק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

**בהצלחה!**

## שאלה 1

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בדידים על אותו מרחב הסתברות. יש לענות על הסעיפים הבאים.

(א) יש לצטט את ההגדרה של שוויון התפלגויות בין  $X$  ל- $Y$ .

[3 נק.]

(ב) יש לצטט את ההגדרה של שוויון כמעט-מיד בין  $X$  ל- $Y$ .

[3 נק.]

(ג) יש להוכיח כי אם  $X \stackrel{\text{a.s.}}{=} Y$  אז  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

[10 נק.]

(ד) תהיה  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . יש להוכיח כי אם  $X \stackrel{d}{=} Y$  אז  $g(X) \stackrel{d}{=} g(Y)$ .

[9 נק.]

## שאלה 2

מטילים מטבע הוגן שוב ושוב עד לקבלת תוצאה של עץ. נסמן ב- $X$  את מספר ההטלות. מכניסים לכלי  $X$  קוביות הוגנות ומטילים את כולן ביחד. נסמן ב- $Y$  את סכום תוצאות ההטלה של כל הקוביות.

(א) יש לחשב את תוחלת  $Y$ .

[13 נק.]

(ב) יש לחשב את תוחלת מספר הטלות המטבע בהינתן המאורע  $X = Y$ .

[12 נק.]

### שאלה 3

נתונים  $\{X_i\}_{i \in [n]}$  משתנים מקריים שווי התפלגות המתפלגים אחד על  $[m]$ . שני מספרים  $a, b \in [m]$  נקראים **עוקבים מעגלית** אם  $|a - b| = 1$  או  $\{a, b\} = \{1, m\}$ , כלומר אחד מבין  $a$  ו- $b$  מקבל את הערך 1 והשני את הערך  $m$ . נסמן ב- $Y_n$  את מספר הזוגות העוקבים מעגלית באוסף  $\{X_i\}_{i \in [n]}$ .

(א) יש לחשב את תוחלת ושונות  $Y_n$ .

[12 נק.]

(ב) יש להראות כי קיים קבוע  $c$  כך שמתקיים  $\frac{Y_n}{n^2} \xrightarrow{d} c$  כאשר  $n \rightarrow \infty$  ולחשב קבוע זה.

[13 נק.]

#### שאלה 4

יהיו  $(X_i)_{i \in [n]}$  משתנים מקריים רציפים בהחלט, שווי-התפלגות ובלתי-תלויים, שלכולם התפלגות שווה למשתנה מקרי  $X$  בעלי צפיפות

$$f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

(א) יש להראות כי  $X$  בעל תוחלת ולחשב את תוחלתו ואת שונותו. [15 נק.]

(ב) יש להראות כי קיים קבוע  $c > 0$  כך שמתקיים לכל  $n$  [10 נק.]

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) > n\right) \leq e^{-cn}$$

אין צורך למצא את הקבוע במפורש.

אינטגרלים שניתן להשתמש בהם ללא חישוב:  $\int_0^\infty x e^{-x} = 1$ ,  $\int_0^\infty x^2 e^{-x} = 2$ .

## שאלה 5

מטילים מטבע 8 פעמים. השערת האפס היא שהמטבע הוגן, ואילו השערה חליפית היא שהמטבע מוטת ובעל סיכוי של 75% לתוצאה של עץ.

(א) יש לתאר מבחן מיטבי להפרדה בין שתי ההשערות בעל מובהקות של  $\alpha = \frac{37}{256}$  ולהצדיק את מיטביותו. [10 נק.]

(ב) יש להראות שמספר תוצאות העץ בהטלה הוא סטטיסטי מספיק למבחן ניימן-פירסון להפרדת שתי ההשערות. [5 נק.]

(ג) יש לחשב את עוצמת המבחן שחיברתם בסעיף א' (אין צורך לעשות מכנה משותף לסכום שברים). [10 נק.]

## מקום נוסף לכתיבה

## מקום נוסף לכתיבה