האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)

מועד לדוגמא, סמסטר א׳ ה׳תשפ״ה (2025)

שם המרצים: אוהד נ. פלדהיים, אורי רוזנשטיין.

משך הבחינה: **שלוש שעות.**

מספר מחברת ______________________ מספר תעודת זהות ______________________

הנחיות:

- **יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.**
- **את התשובות יש לרשום בתוך הריבועים בדפי השאלות, המחברת משמשת כמחברת טיוטא ולא תבדק. בסוף הבחינה מצורף דף אחד לתיקונים ותוספות לפתרונות, במקרה הצורך יש להפנות אליו מתוך התשובות.**
- **כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע" או "איני יודעת" – מזכה בנקודה אחת.**
- **בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כידוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.**
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדוייק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

בהצלחה!

שאלה 1

[7 נק.] (א) יש להגדיר התכנסות בהתפלגות לקבוע ולצטט את החוק החלש של המספרים הגדולים.

[11 נק.] (ב) יהי $\mu \in \mathbb{R}$ ותהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בעלי תוחלת ושונות. קריטריון השונות להתכנסות לקבוע קובע כי: אם $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \mu$ וכן $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$ אז $X_n \xrightarrow{\text{d}} \mu$.
יש להוכיח קריטריון זה. מותר לצטט את אי-שוויון צ׳בישב ולהשתמש בו ללא הוכחה.

[7 נק.] (ג) יש להוכיח את החוק החלש של המספרים הגדולים עבור משתנים מקריים בעלי שונות סופית באמצעות קריטריון השונות שמוזכר בסעיף ב׳.

שאלה 2

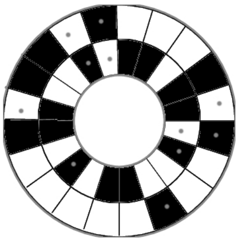
על שולחן יש שני כדים ובכל אחד מהם כדור. בכל שלב בוחרים את אחד משני הכדורים באופן אחיד, מוציאים אותו מהכד שבו הוא נמצא ומעבירים אותו לכד מקרי באופן אחיד (שיכול להיות הכד שממנו הגיע). נסמן ב-A_i את המאורע שלאחר i שלבים יש בכל כד כדור אחד. **לניקוד מלא יש להקפיד ולנמק את התשובות באופן מדוייק.**

[5 נק.] (א) מה הסתברותו של A_1? מה הסתברותו של A_2?

[8 נק.] (ב) בהינתן A_2 מה הסתברותו של A_1?

[12 נק.] (ג) מה הסתברותו של A_n?

שאלה 3



יהי n זוגי. על טבעת שתי שורות של n משבצות זו מעל זו, כך שלכל משבצת 3 שכנות. בפרט המשבצות $(1,1)$ ו-$(n,1)$ שכנות. צובעים כל משבצת באקראי בשחור או בלבן בהסתברות שווה ובאופן בלתי-תלוי. משבצת נקראת **מבודדת** אם צבעה שונה מצבע שלוש שכנותיה.

(לדוגמא: באיור המצורף 11 משבצות מבודדות מסומנות בנקודה אפורה.)

עבור $i \in [n]$ ו-$j \in [2]$ נסמן ב-$X_{i,j}$ משתנה מציין למאורע שהמשבצת (i,j) מבודדת.

[10 נק.] (א) עבור אילו $i \in [n]$ ו-$j \in [2]$ המשתנה המקרי $X_{i,j}$ בלתי-תלוי במשתנה $X_{1,1}$? (יש להוכיח את התשובה)

[15 נק.] (ב) יש למצוא c כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i\in[n], j\in[2]} X_{i,j} \xrightarrow{d} c$ ולהוכיח זאת.

שאלה 4

יהיו X ו-Y משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות מעריכית עם פרמטר λ.

[5 נק.] (א) מהי תוחלת $X+Y$?

[15 נק.] (ב) מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X בהינתן המאורע $X < Y$?

[5 נק.] (ג) מהי צפיפותו של X בהינתן המאורע $X < Y$?

שאלה 5

נתונות שתי השערות בנוגע למשתנה מקרי בדיד X. השערת האפס היא כי X הוא מספר שנבחר באופן אחיד בטווח [12]. ההשערה החילופית כי X נתקבל כסכום תוצאות הטלה של שתי קוביות בלתי-תלויות. על סמך דגימה יחידה:

[10 נק.] (א) יש לאפיין את משפחת מבחני ניימן-פירסון עבור ההפרדה בין שתי ההשערות. עבור אילו ערכי מובהקות α קיים מבחן ניימן-פירסון דטרמיניסטי כזה?

[8 נק.] (ב) יש לחשב את העוצמה המירבית של מבחן בעל מובהקות $\alpha = 0.25$.

[7 נק.] (ג) האם $|X - 7|$ הוא סטטיסטי מספיק עבור כל מבחן ניימן-פירסון להפרדת שתי ההשערות?

מקום נוסף לכתיבה

מקום נוסף לכתיבה