

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)
מועד ב', כ' אדר ה'תשפ"ה (20/3/2025)

שם המרצים: אוהד נ. פלדהיים, אורי רוזנשטיין.
משך הבחינה: שלוש שעות.

מספר מחברת _____ מספר תעודת זהות _____

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.
- את התשובות יש לרשום בתוך הריבועים בדפי השאלות, המחברת משמשת כמחברת טיוטא ולא תבדק.
- בסוף הבחינה מצורף דף אחד לתיקונים ותוספות לפתרונות, במקרה הצורך יש להפנות אליו מתוך התשובות.
- כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע" או "איני יודעת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כידוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדויק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

בהצלחה!

שאלה 1

תהי X תוצאה של מדידה סטטיסטית, תהינה $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ שתי השערות בדידות בנוגע להתפלגות X המתאימות לפונקציות הסתברות והסתברות נקודתית p_0, \mathbb{P}_0 ו- p_1, \mathbb{P}_1 בהתאמה, ויהיו T, T' מבחנים.

(א) יש להגדיר באופן מדויק הסתברות α לטעות מסוג ראשון והסתברות β לטעות מסוג שני, ולתאר מתי מבחן T טוב ממבחן T' (במובן של שיפור הסתברויות שגיאה). [10 נק.]

(ב) יש לנסח את הלמה של ניימן-פירסון על מיטביות מבחני רף ליחס נראות, עבור השערות בעלות התפלגות בדידה ולהוכיח כי מבחנים שאינם מבחני ניימן-פירסון בהכרח אינם מיטביים. ניתן לבחור אם לצטט ולהוכיח את הלמה הסטוכסטית או את הלמה הדטרמיניסטית. [15 נק.]

שאלה 2

בתחילת ניסוי מדליקים שתי נורות. הזמנים עד שכל אחת מהנורות נשרפת מתוארים בהתאמה על ידי X_1, X_2 משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים גיאומטרית עם סיכוי הצלחה $1/3$.
לניקוד מלא יש להקפיד ולנמק את התשובות באופן מדויק.

(א) מהי תוחלת מספר הדקות עד שתשרף לראשונה נורה?

[8 נק.]

(ב) יש להראות כי המשתנה המקרי $\min(X_1, X_2)$ בלתי תלוי במשתנה המציין $\mathbb{1}(X_1 = X_2)$.

[9 נק.]

(ג) מה ההסתברות ששתי הנורות הראשונות תישרפנה באותה הדקה, בהינתן ששתי הנורות לא נשרפו בדקה הראשונה?

[8 נק.]

שאלה 3

יהיו $(B_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים כך שמתקיים $B_i \sim \text{Ber}(2^{-i})$. נסמן ב- X את מספר המשתנים בסדרה שמקבלים את הערך 1.

(א) מהי תוחלת X ?

[7 נק.]

(ב) מהי שונותו של X ?

[11 נק.]

(ג) יהי $a \geq \mathbb{E}(X)$ יש לבטא באמצעות אי-שוויון צ'בישב חסם להסתברות $\mathbb{P}(X > a)$.

[7 נק.]

שאלה 4

יהי X משתנה מקרי רציף בעל צפיפות

$$f_X(x) = \frac{(3e^{-x} + 3e^{-3x}) \mathbb{1}\{x > 0\}}{c}.$$

(א) מהו הקבוע c ?

[5 נק.]

(ב) מהי תוחלת X (יש להוכיח קיום)?

[10 נק.]

(ג) יהי $a > \mathbb{E}(X)$. יש לחשב את הפונקציה היוצרת מומנטים של $M_X(t)$, ולהשתמש באי-שוויון צ'רנוף עבור

[10 נק.]

הערך $t = \frac{1}{2}$ כדי לחסום את הסתברות המאורע $X \geq a$.

נוסחה שימושית: $\int_0^\infty te^{-t} = 1$

שאלה 5

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בדידים בלתי-תלויים על אותו מרחב הסתברות.

(א) יש להוכיח כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a \leq \mathbb{E}(X | X > a)$.

[6 נק.]

(ב) יש להוכיח כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}(X | X \leq a) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > a)$.

[7 נק.]

(ג) יש להוכיח כי $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > Y)$.

[7 נק.]

(ד) יש להוכיח כי אם X ו- Y **שווי התפלגות** אז $\mathbb{E}(Y | X > Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > Y)$.

[5 נק.]

מקום נוסף לכתיבה

מקום נוסף לכתיבה