

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)

מועד ב', כ' אדר ה'תשפ"ה (20/3/2025)

שם המרצים: אודה נ. פלדהיים, אורן רוזנשטיין.
משך הבחינה: **שלוש שעות.**

מספר מחברת _____ מספר תעודת זהות _____

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמישה שאלות בבחינה.
- את התשובות יש לרשום בתוך הריבועים בדף השאלות, המחברת משתמשת כמחברת טווטא ולא לבדוק. בסוף הבחינה מצורף דף אחד לתיקונים ותוספות לפתרונות, במקרה הצורך יש להפנות אליו מתוך הSTRUCTIONS.
- כל סעיף שייננה בתשובה "אני יודע" או "אני יודעת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כיודע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עוזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אוינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המרבי יש לצטט במידוייק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 5	שאלה 4	שאלה 3	שאלה 2	שאלה 1

בהצלחה!

שאלה 1

תהי X תוצאה של מדידה סטטיסטית, תהיינה $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0$ שתי השערות בדידות בוגע להתפלגות X המתאימות לפונקציות הסתברות והסתברות נקודתית \mathbb{P}_1, p_1 ו- \mathbb{P}_0, p_0 בהתאם, ויהיו T, T' מבחנים.

(א) יש להגיד באופן מדויק והסתברות α לטעות מסוג ראשון והסתברות β לטעות מסוג שני, ולהתאר מתי מבחן T טוב מבחן T' (במובן של שיפור הסתברויות שגיאה).

(ב) יש לנסה את הלמה של נימן-פירסון על מיטביות מבחני רף ליחס נראות, עבור השערות בעלות התפלגות בדידה ולהוכחה כי מבחנים שאינם מבחני נימן-פירסון בהכרח אינם מיטביים. ניתן לבחור אם לצטט ולהוכיח את הלמה הסטוכסית או את הלמה הדטרמיניסטית.

שאלה 2

בתחילת ניסוי מדליקים שתי נורות. הזמינים עד שכל אחת מהנורות נשרפת מתחאים בהתאם על ידי X_1, X_2 משתנים מקרים בלתי- תלויים המתפלגים גיאומטרית עם סיכוי הצלחה $1/3$.
לניקוד מלא יש להוכיח ולنمך את התשובות באופן מדויק.

- [8 נק.] (א) מהי תוחלת מספר הדקות עד שתשרף לראשונה נורה?
- [9 נק.] (ב) יש להראות כי המשטנה המקורי $\min(X_1, X_2)$ בלתי תלוי במשטנה המציגן $\mathbb{1}(X_1 = X_2)$.
- [8 נק.] (ג) מה ההסתברות שתי הנורות הראשונות תישרפנה באותו הזמן, בהינתן שתמי הנורות לא נשרפו בדקה הראשונה?

שאלה 3

יהיו $(B_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים כך שמתקיים $B_i \sim \text{Ber}(2^{-i})$. נסמן ב- X את מספר המשתנים בסדרה שמקבלים את הערך 1.

- [7 נק.] (א) מהי תוחלת X ?
[11 נק.] (ב) מהי שונותו של X ?
[7 נק.] (ג) יהיו a יש לבטא באמצעות אי-שוויון צ'יביש חסם להסתברות $\mathbb{P}(X > a) \geq \mathbb{E}(X)$.

שאלה 4

יהי X משתנה מקרי רציף בעל צפיפות

$$f_X(x) = \frac{(3e^{-x} + 3e^{-3x}) \mathbb{1}\{x > 0\}}{c}.$$

- [5 נק.] (א) מהו הקבוע c ?
- [10 נק.] (ב) מהי תוחלת X (יש להוכיח קיום)?
- [10 נק.] (ג) יהיו $(X(t), t \geq 0)$ עליות מומנטים. יש לcompute את הפונקציה היוצרת מומנטים של $M_X(t)$, ולהשתמש בא-שוויון צ'רנוף עבור הערך $t = \frac{1}{2}$ כדי לחסום את הסתברותת המאורע $X \geq a$.

נוסחה שימושית: $\int_0^\infty te^{-t} = 1$

שאלה 5

יהיו X ו- Y משתנים מקרים בדידים בלתי-תלויים על אותו מרחב הסתברות.

- [6 נק.] (א) יש להוכיח כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a \leq \mathbb{E}(X | X > a)$.
- [7 נק.] (ב) יש להוכיח כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}(X | X \leq a) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > a)$.
- [7 נק.] (ג) יש להוכיח כי $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > Y)$.
- [5 נק.] (ד) יש להוכיח כי אם X ו- Y שוו **התפלגות** אז $\mathbb{E}(Y | X > Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X | X > Y)$.

מקום נוסף לכתיבה

מקום נוסף לכתיבה