74) Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывных на отрезке функций.

Опр. Пусть $f(x)$ опр-а на $[a,b]$, тогда $f(x)$ равномерна и непр-а на $[a,b]$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \delta=\delta(\varepsilon)$, $\forall x', x'' \in [a,b]\ \ |x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

(класс непрер $f(x)$)

Теор. Пусть $f(x)$ опред. на $[a,b]$, тогда $f(x) \in C_{[a,b]} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$

Д-во! 1) Необходимость. Возьмем $x_0 \in [a,b]$ и считаем, что $f(x)$ равном. непр-а на $[a,b]$, тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in[a,b]$ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow f(x)$ непр. в т. $x_0 \Rightarrow f(x)\in C_{[a,b]}$

2) Достаточность. Методом от противного
Предположим $f(x)$ не явл-ся равн. непр-й на $[a,b]$
$\exists \varepsilon^*>0\ \forall\delta>0\ \exists x'(\delta)$ и $x''(\delta)\in[a,b]\ \ |x'(\delta)-x''(\delta)|<\delta\ \ |f(x'(\delta))-f(x''(\delta))|\geq\varepsilon^*>0$
Пусть $\delta=\delta_n=\frac{1}{n}$, тогда $x_n'=x'(\delta_n)$, $x_n''=x''(\delta_n)$ $\exists\varepsilon^*>0\ \forall n\in N$
$\exists x_n', x_n''\in[a,b]\ \ |x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},\ |f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon^*>0$.
Последовательность $\{x_n'\}$ ограниченная послед-ть $(a\leq x_n\leq b)$
По т. Больцана-Вейерштрасса $\exists\{x_{n_k}'\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}'=c\in[a,b]$

$$\underbrace{x_{n_k}'-\frac{1}{n}}_{\to c}\leq x_{n_k}''\leq \underbrace{x_{n_k}'+\frac{1}{n}}_{\to c} \Rightarrow \exists\lim_{k\to+\infty}x_{n_k}''=c\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow\exists\lim_{x\to+\infty}f(x_{n_k}')=f(c)\\&\exists\lim_{x\to+\infty}f(x_{n_k}'')=f(c)\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')\to 0\ (n\to\infty)$$

Для $\varepsilon=\varepsilon^*>0\ \exists K\in N\ \forall k\geq K\ \ |f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|<\varepsilon^*$

$$\text{При } n=k\quad \left.\begin{aligned}&|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geq\varepsilon^*\\&|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\leq\varepsilon^*\end{aligned}\right\}\ \text{противоречие}\Rightarrow$$

$f(x)$ равном. непр. на $[a,b]$