(72) Свойства интегральных сумм Дарбу.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x)$ опред-а и ограничена на $[a,b]$
Произведем разбиение T: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ разбиение отрезка $[a;b]$.
Обозначим через $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$ $\quad M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$

1) $s_T = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = m_1\Delta x_1+\ldots+m_n\Delta x_n$ – нижняя интегр. сумма Дарбу.

2) $S_T = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = M_1\Delta x_1+\ldots+M_n\Delta x_n$ – верхняя интегр. сумма Дарбу соответств. разбиению T.

<u>Зам.</u>: 1) Справедливо нер-во: $s_T \le \underline{I}(f,T) \le S_T$ $(\forall\, \xi_1 \ldots \xi_n)$

<u>Д-во</u>: $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$

$m_k\Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k\Delta x_k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \Rightarrow$

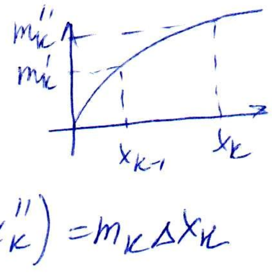
$\Rightarrow s_T \le \underline{I}(f,T) \le S_T.$

<u>Зам.</u> T_2 размельчение разбиения T_1
тогда. 1) $s_{T_1} \le s_{T_2}$ нижний возрастает
2) $S_{T_2} \le S_{T_1}$ верхний уменьшается

<u>Д-во</u>: T_1: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$
T_2: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x'<x_k<\ldots<x_n=b$
$T_2 = T_1 \cup \{x'\}$, $\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta x'_1 = x - x_1$
$\Delta x''_k = x_k - x'$

1) $s_{T_1} = m_1\Delta x_1+\ldots+m_k\Delta x_k+\ldots+m_n\Delta x_n$
$s_{T_2} = m_1\Delta x_1+\ldots+m'_k\Delta x'_k+m''_k\Delta x''_k+\ldots+m_n\Delta x_n$

$m'_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1};x']} f(x) \ge m_k = \inf f(x)$ $\quad m''_k \ge m_k$



Тогда $m'_k\Delta x'_1 + m''_k\Delta x''_1 \ge m_k(\Delta x'_k+\Delta x''_k) = m_k\Delta x_k$

$\Rightarrow s_{T_1} \le s_{T_2}$. Ан-но $S_{T_2} \le S_{T_1}$

<u>Зам.</u>: $\forall\, T_1, T_2$ разбиений $[a;b]$ справедливо нер-во $s_{T_1} \le S_{T_2}$
<u>Д-во</u>: $T=T_1\cup T_2$ разбиение $[a,b]$ размельчение T_1 и T_2; $s_{T_1} \le s_T \le S_T \le S_{T_2} \Rightarrow s_{T_1} \le S_{T_2}$.