(21) Определение непрерывности ф-ии в точке. Теорема об арифм-х операциях над непрерывными ф-ми. Непрерывность сложной ф-ии. Классификация точек разрыва.

<u>Опр.</u> Пусть ф-я $f(x)$ опред. в окрестности т. x_0, т.е $\mathcal{V}(x_0)$, $x \in R$, тогда мы говорим, что $f(x)$ непрер-а в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x\ |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Опр.</u> (односторонняя непрерывность): 1) Пусть $f(x)$ опр-а на промежутке $[x_0; x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, $f(x)$ непрерывна справа от т. x_0, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

2) $f(x)$ опред. на $[x_0 - \delta; x_0]$, $\delta > 0$, $f(x)$ непрер-а слева т. x_0, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0 - 0) =$ $= f(x_0)$

<u>Зам.</u> Если $f(x)$ опред-а в $\mathcal{V}(x_0)$, то $f(x)$ непрерывна в т. x_0, $\Leftrightarrow$, когда $f(x)$ непрерывна справа и слева x_0.

<u>Опр.</u> Пусть $D \subset R$, D – объединение промежутков, тогда $f(x)$ опреде-а в области D, непрер-а в обл-и D. Если $f(x)$ непр-а $\Leftrightarrow$

1) $f(x)$ непр-а во всякой внутренней точке промежутков области D.

2) $f(x)$ односторонне непр-а на концах промежутков, в которых ф-ия $f(x)$ опр-а. которые являются числами и в которых ф-ия $f(x)$ опр-а. (класс непр. ф-ий в области D)

<u>Обозначение</u> $f(x) \in C_{(D)}$ ($f(x) \in$ классу непр. ф-ий в области D)

<u>теор.</u> (Арифм. опер.) Пусть $f(x)$, $g(x)$ непр. в т. x_0, тогда

1) $f(x) + g(x)$ непр. в т. x_0; 2) $\forall \alpha \in R$, $\alpha f(x)$ непрер. в т. x_0

3) $f(x) \cdot g(x)$ непр. в т. x_0; 4) $g(x) \neq 0$ в $\mathcal{V}_\delta(\ )$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непр. в т. x_0

<u>Д-во</u> $\Rightarrow$ из теоремы об арифм-х действ. над пределами.

<u>теорема</u> (непрер-ть сложной ф-ии): Пусть $f(x)$ непр-а в x_0, а функция $z = f(y)$ непр-а в т. $y_0 = g(x_0)$, тогда сложная ф-ия $f(g(x))$ опред-а в некоторой окрестн. т. x_0 и непр-а в x_0

<u>Д-во!</u> $f(y)$ непр-а в т. $y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall y\ |y - y_0| < \sigma$, $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$.

$y = g(x)$ непр-а в т. $x_0 \Rightarrow \forall \sigma > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ |x - x_0| < \delta$

Для ф-ии $f(g(x))$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ |x - x_0| < \delta$ $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$. Сложная ф-ия $f(g(x))$ непр-а в x_0 и определена в окр-ти $\mathcal{V}_\delta(x_0)$.

<u>Опр.</u> (точки разрыва) Пусть $f(x)$ опр-а в $\mathring{\mathcal{V}}(x_0)$, тогда x_0 наз-ся точк. разрыва ф-ии. 1) Если $\exists f(x_0 - 0) = A$, $A \in R$ и $\exists f(x_0 + 0) = B$, $B \in R$, то x_0 наз-т т. разрыва первого уровня ($A \neq B$). При этом если $A = B$, то разрыв наз-т устранимым. 2) Остальные т-и разрыва наз-т точками разрыва $\underline{II}$ рода. При этом $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то разрыв бесконечный (пример гипербола $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$)

 $\leftarrow$ <u>скачок</u>