15 Теорема Коши (критерий сход-ти послед-ти)

теорема: Пусть $\{x_n\}$ послед-ть, тогда $\{x_n\}$ сходящаяся последовательность $\underset{\text{необх. и дост.}}{\Longleftrightarrow}$ $\{x_n\}$ фундамент. послед-ть.

условие Коши необходимо и дост-о для сходимости послед к конечн. пределу

Д-во: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$

1) Необх.

$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall p \geq 1$ $n+p \geq N$ $|x_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a - (x_n - a)| \leq$

$\leq \underbrace{|x_{n+p} - a| + |x_n - a|}_{\text{нер-во }\Delta} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\{x_n\}$ фундамент. послед-ть.

2) Достаточность. $\{x_n\}$ фундамент. послед $\Rightarrow \{x_n\}$ огранич. п-ть $\Rightarrow$ $\exists \{x_{n_k}\}$ подпослед.-ть $\{x_n\}$, которая сходится, т.е $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$, $a \in \mathbb{R}$

1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_1$ $\forall p \geq 1$ $|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ т.е $\{x_n\}$ фундам. посл-ть.

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ по $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists K \in \mathbb{N}$ $k \geq N_1$ $\forall k \geq K$ $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ в частности $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (т.е сходящ-ся посл-ть) $\left.\begin{array}{l} N_1 + p = n \geq N \\ , p = n - N_1 \geq 0 \end{array}\right\}$?

3) $\exists N = n_k$, $n_k \geq k \geq N_1$ $\forall n \geq N_1$

$\Rightarrow N + p \geq N_1$, $n \geq N_1 \Rightarrow |x_{N+p} - x_N| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - a| = |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - a| = |(x_{N+p} - x_N) + (x_N - a)| \leq$

$\leq |x_{n+p} - x_n| + |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = n_k \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$