(64) Интегрирование простейших рациональных ф-ий.

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q\not\equiv 0$, $A(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, $\deg P_1<\deg Q$

$\int A(x)dx = B(x)+C$ многочлен.

$\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – сумма простейших рациональных ф-ий.

1) $\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha|+C$, $A\neq 0$, $x\geq 2$

2) $\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^n} = A\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n} = A\int (x-\alpha)^{-n}d(x-\alpha) = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}}+C$

3) $\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{matrix} t=x+\frac{p}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=t^2+a^2\\ a=\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}>0\end{matrix}\right] =$

$p^2-4q<0$

$= \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

4) $\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{x^2+px+q} = \int\frac{d(x^2+px+q)}{2(x^2+px+q)} = \frac{1}{2}\ln|x^2+px+q|+C$

$p^2-4q<0$

5) $\int\frac{(Bx+C)dx}{x^2+px+q} = B\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{x^2+px+q} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| +$

$+ \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$

6) $I_m = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$; $I_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$

$a>0$, $m\geq 1$

Пусть $m\geq 2$. $I_m=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+t^2)-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt =$

$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}} - \int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt = \frac{1}{a^2}I_{m-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}I_{m-1}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{t}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+$

$+\frac{1}{2a^2(1-m)}\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}}_{I_{m-1}}$ $=$ $\left\|\begin{matrix} u=t & dv=\frac{t\,dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}\\ du=dt & v=\frac{1}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}\end{matrix}\right| = \frac{t}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}-\int\frac{dt}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}$

$= \frac{t}{a^2(2m-2)(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{a^2(2m-2)}I_{m-1}=I_m$ $(m\geq 2)$

7) $\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{1}{2(1-m)(x^2+px+q)^{m-1}}+C$, $m\geq 2$

$p^2-4q<0$

$a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}>0$

$t=x+\frac{p}{2}$

$I_m=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$

$m\geq 2$.

8) $p^2-4q>0$

$a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}>0$

$t=x+\frac{p}{2}$

$I_m=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$, $m\geq 2$

$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx = B\int\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)dx}{(x^2+px+q)^m}+\frac{2C-Bp}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$

$=\frac{B}{2(1-m)(x^2+px+q)^m}+\frac{2C-Bp}{2}I_m$ (где I_m по формуле 6)

Для всякой рац. ф-ии $\exists$ первообр. в элемент. ф-ях.