(62) Теорема о замене переменной в неопр. инт. Примеры.

Теор.: Пусть ф-ия $f(x)$ опр. и непр-а на $(a;b)$, а ф-ия $x=\varphi(t)$ непр-а диф-а на $(a,b) \Rightarrow \exists\ \varphi'(t) \in C_{(\alpha,\beta)}$

Если для всех $t \in (\alpha;\beta)$, $\varphi(t) \in (a,b)$, то сложная ф-ия $f(\varphi(t))$ корректно определена и справедлива формула.

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\varphi(t))\,\varphi'_t(t)dt$$ – формула замены.

Док-во: Пусть $\int f(x)dx = F+C$, $F'_x(x)=f(x)$ найдем произв. сложной ф-ии

$(F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t)) \cdot \varphi'_t(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ – это подынтегральная функция для сложного интеграла $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int f(\varphi(t))\,\varphi'_t dt = F(\varphi(t)) + C = \begin{bmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{bmatrix} = f(x)+C$

Пример: 1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left| \begin{matrix} x=at \\ t=\frac{x}{a} \\ dx=adt \\ a>0 \end{matrix} \right| = \int \frac{adt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{matrix} x=at \\ t=\frac{x}{a} \\ dx=adt \\ a>0 \end{matrix} \right| = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

3) $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left| \begin{matrix} d(x^2+1) = 2x\,dx \\ xdx = \frac{d(x^2+1)}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$