(37) Производные высших порядков. Таблица производных n-го порядка. Бином-Ньютона. Формула Лейбница.

Опр. Пусть $f(x)$ определена и дифф-а на (a,b). Если $f'(x)$ дифф-ма на (a,b), то ее производная наз-ся произв. 2го порядка от ф-и $f(x)$ и обознач-ся $f''(x)$ или

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left(f'(x)\right)' \text{ и т.д.}$$

Производная n-го порядка от ф-и $f(x)$: $f^{(n)}_{(x)} = \frac{d^{(n)} f}{dx^n}$

Опр. Если $f(x)$ n раз непрерывна и дифф-а на (a,b), то $f(x) \in C^n_{(a,b)}$ ($f(x)$ принадл. к классу C^n на интервале (a,b))

$\Rightarrow \exists f^{(n)}_{(x)} \in C_{(a,b)}$

Таблица производных n-го порядка

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n \in \mathbb{N}$

2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ Док-во через мат индукцию:

$n=1$ $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow (\sin x)^{(n+1)} = \left(\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)' =$

$= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$ Д-во ан-но.

4) $(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n}$, $\mu \in \mathbb{R}$ кроме $\mu \neq m \in \{0,1,2..\}$?

$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$, $m \in \{0,1,2,..\}$

$(x^m)^{(n)} = 0$ $n > m$, $n \in \mathbb{N}$

5) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ Д-во: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln x)^{(n)}_{n\geq 2} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$0! = 1$

Формула Бинома-Ньютона $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$.

C_n^k – биномиальный коэффициент (число сочетаний из n элементов по k)

1) P_n – число перестановок из n эл-ов $\underline{P_n = n!}$

2) A_n^m – число размещений m из n, $n \geq m$. $A_n^m = n\cdot(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

3) C_n^m сочетание. $\underline{A_n^m = C_n^m \cdot P_n}$, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Формула Лейбница Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ n раз дифф-а, тогда $u\cdot v$ – n дифференцируемая ф-я и справедлива формула:

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + C_n^{(n-1)} u' \cdot v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)}$$

Д-во: $n=1$ $(u\cdot v)' = u'v + uv'$; $n=2$ $(u\cdot v)'' = (u'v+uv')' = (u'v)' + (uv')' =$

$= u''v + u'\cdot v' + u'\cdot v' + u\cdot v'' = u''v + 2u'v' + u\cdot v''$; $C_n^1 = 2$

$(uv)^{(n)}$ сумма u^k, v^{n-k} каждое в кол-ве C_n^k.