(44) Определение локальных экстремумов. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума в терминах первой производной.

Опр. Пусть $f(x)$ опред. в некоторой окрест. $U(x_0)$ тогда 1) x_0 точка min или локального min фии $f(x)$, если

$\exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0)$, $f(x_0) \le f(x)$. При этом x_0 точка строгого

(дельта окрест-ть x_0.)

min, если $\exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $f(x_0) < f(x)$.

2). x_0 точка max или локального max фии $f(x)$, если

$\exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0)$ $f(x_0) \ge f(x)$.

x_0 точка строгого max фии $f(x)$ если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $f(x_0) > f(x)$

3) x_0 точка экстемума фии, если x_0 точка min или max $f(x)$.

4) x_0 точка строгого экстремума, если x_0 точка строгого min или стр. max. $f(x)$

Зам (Необходимое услов. экстремума) (т Ферма). Если x_0 т. экстремума $f(x)$ и $f(x)$ дифф-а в т. x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Теор. (Достаточное усл. в терм. 1й произв.) Пусть $f(x)$ опред. непрер. в $U(x_0)$ и дифф.-а в $\overset{\circ}{U}(x_0)$, тогда

1) $\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x_0) \le 0$, $\forall x \in (x_0; \delta + x_0)$ $f'(x) \ge 0 \Rightarrow x_0 = \min f(x)$

2) Если $\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) \le 0 \Rightarrow x_0 = \max f(x)$.

Д-во! 1) $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ по т. Лагранжа $\exists c_1 \in (x; x_0)$

$f(x_0) - f(x) = \underset{\le 0}{f'(c)} \underset{\le 0}{(x - x_0)} \ge 0$

$\forall x_0 \in (x_0; x_0 + \delta)$ $\exists c_2 \in (x_0; x)$ $f(x) - f(x_0) = \underset{\ge 0}{f'(c)} \underset{> 0}{(x - x_0)} \ge 0$,

$f(x) \ge f(x_0)$

$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $f(x_0) \le f(x) \Rightarrow x_0$ точка min $f(x)$

2) Ан-но.

Зам. Если в теореме неравенства строгие, то экстремум будет строгим.