46 Определение выпуклости вниз и выпуклости вверх ф-ии. Критерий выпукл-ти в терминах угловых коэффициентов хорд, стягивающих точки графика ф-ии.

Опр. Пусть $f(x)$ опред. на отр. $[a,b]$, тогда 1) $f(x)$ выпукла вниз $\Leftrightarrow$ $f(x) \cup$ на $[a,b] \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ и любых чисел $\alpha, \beta \geq 0$

$\alpha+\beta=1$ $\quad f(\alpha x_1)+f(\beta x_2) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$

2) $f(x)$ выпукла вверх на $[a,b]$. $f(x) \cap [a,b] \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

$\forall \alpha, \beta$, $\alpha+\beta=1$ $\quad f(\alpha x_1+\beta x_2) \geq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$

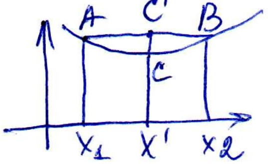
Замеч. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $x_1 < x' < x_2$ $\exists \lambda > 0$, $x' = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \Rightarrow x'+\lambda x' = x_1+\lambda x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{x'-x_1}{x_2-x'} > 0.$

Пусть $\alpha = \dfrac{1}{1+\lambda} > 0$, $\beta = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} > 0$, $\alpha+\beta = \dfrac{1+\lambda}{1+\lambda} = 1$, $x' = \alpha x_1 + \beta x_2$.

Тогда 1) $f(x) \cup$ на $[a,b] \Leftrightarrow f(x') \leq \dfrac{x_2-x'}{x_2-x_1} \cdot f(x_1) + \dfrac{x'-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$; $(x_1 < x' < x_2)$

2) $f(x) \cap$ на $[a,b] \Leftrightarrow f(x') \geq \dfrac{x_2-x'}{x_2-x_1} f(x_1) + \dfrac{x'-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$.



$C = f(x')$ если провести хорду AB то C' лежит выше графика.

Выпуклость ф-ии в терминах угловых коэф-ов хорд)

Пусть $f(x)$ опред. на $[a,b]$ $a \leq x_1 < x' < x_2 \leq b$; $A(x_1; f(x_1))$ $B(x_2; f(x_2))$ $C(x'; f(x'))$.

$k_{AB} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; $k_{AC} = \dfrac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1}$; $k_{CB} = \dfrac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x_1}$ || угловые коэф-ты.

Тогда 1). $f(x) \cup [a,b]$, если $\forall x_1 < x' < x_2$, $k_{AC} \leq k_{CB} \Leftrightarrow k_{AC} \leq k_{AB} \Leftrightarrow k_{AB} \leq k_{CB}$

2) $f(x) \cap [a,b]$, если $k_{AC} \geq k_{CB} \Leftrightarrow k_{AC} \geq k_{AB} \Leftrightarrow k_{AB} \geq k_{CB}$.

Д-во! $f(x) \cup [a,b] \Leftrightarrow k_{AC} \leq k_{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'} \Leftrightarrow (x_2-x')f(x') - (x_2-x')f(x_1) \leq$

$\leq (x'-x_1)f(x_2) - (x'-x_1)f(x') \Rightarrow f(x')(x_2-x'+x'-x_1) \leq f(x_1)(x_2-x') + f(x_2)(x'-x_1)$

$f(x')(x_2-x_1) \leq f(x_1)(x_2-x') + f(x_2)(x'-x_1) \Big| \cdot \dfrac{1}{x_2-x_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x') \leq \dfrac{x_2-x'}{x_2-x_1} \cdot f(x_1) + \dfrac{x'-x_1}{x_2-x_1} \cdot f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \cup [a,b]$

Остальные св-ва док-ся ан-но.