(73) Критерий Дарбу интегрируемости ф-ий.

Опр. Пусть $f(x)$ опр-а и ограничена на $[a;b]$. Тогда

$I_* = \sup\limits_T s_T$ – нижний интеграл Дарбу

$I^* = \inf S_T$ – верхний интеграл Дарбу.

$\forall T \quad s_T \le I_* \le I^* \le S_T$.

теорема Критерий Дарбу интегрируемости ф-ии.

Пусть $f(x)$ опр-а и ограничена на $[a,b]$

Тогда $f(x) \in R_{[a;b]}$, т.е $\exists \int\limits_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} (S_T - s_T) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_* = I^*$, $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

Д-во: 1) Необходимость. $\exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} I(f,T) = I$, $I \in R$ т.е

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, $\forall$ разбиения T ранга $\lambda_T < \delta$ $|I(f,T) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < I(f,T) < I + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \le s_T \le S_T \le$

$\le I + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon + I \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} s_T = I$ и $\exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} S_T = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} (S_T - s_T) = 0 \Rightarrow I^* = I_* = I$

2) Достаточность. Пусть $\exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} (S_T - s_T) = 0$

$s_T \le I_* \le I^* \le S_T$ $\quad$ $0 \le \underbrace{I^* - I_* \le S_T}_{0} \Rightarrow I^* = I_* = I$ обозначим как число I

Тогда $s_T \le I(f,T) \le S_T$ (интегральн. суммы Римана лежат между)

I: $s_T - I \le I(f,T) - I \le S_T - I$ получим, что $0 \le |I(f,T) - I| \le S_T - s_T \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} I(f,T) = I$, $f \in R_{[a,b]}$