(10) Определение монотонных послед-ей. Теорема о существовании пределов монотонных послед-ей.

__Опр:__ Пусть $\{x_n\}$ послед., тогда: 1) $\{x_n\}$ возраст-я послед-ть $\Leftrightarrow$, когда каждый последующий член посл-ти больше или равен предыдущ-у. $\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow \{x_n\} \uparrow$.

2) $\{x_n\}$ убывающ-я послед-ть $\Leftrightarrow$, когда каждый последующий член меньше или равен предыдущему. $\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \{x_n\} \downarrow$

__Опр.!__ $\{x_n\}$ монотонная послед-ть, если $\{x_n\} \downarrow$ или $\{x_n\} \uparrow$

__Опр.!__ Строго монотонные посл-ти:

$\{x_n\} \uparrow$ строго, если $x_{n+1} > x_n$; $\{x_n\} \downarrow$ строго, если $x_{n+1} < x_n$

$\{x_n\}$ строго монот-я послед-ть, если $\{x_n\} \downarrow$ строго или $\{x_n\} \uparrow$ строго.

__теорема:__ Всякая возр. и огр. сверху посл-ть $\{x_n\}$ является сходящейся, т.е. $\{x_n\} \uparrow$ имеет предел $\exists M, \forall n \geq 1 \quad x_n \leq M \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to a} x_n = a = \sup x_n$.

__Д-во:__ $a = \sup x_n$, т.к. $\{x_n\}$ огранич. сверху

1) для всех x_n, $x_n \leq a$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \quad a - \varepsilon < x_{n_1}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N_1 = N_\varepsilon$, то $\forall n = N_1 \quad a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_{n_\varepsilon+1} \leq \ldots \leq a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

__Следствие:__ Всякая убывающая посл. имеет предел, т.е. $\{x_n\} \downarrow$ и $\exists m, \forall n \geq 1 \quad x_n \geq m \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \inf x_n$.

__Д-во:__ $y_n = -x_n$, $\{x_n\} \downarrow \Rightarrow \{y_n\} \uparrow$; $y_n \leq M = -m$

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} (-x_n) = b = \sup(-x_n) = -\inf x_n = -a \Rightarrow -\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -a \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \inf x_n$

__Следствие:__ Всякая возр-я (убыв-я) послед-ть $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел равный $+\infty$ ($-\infty$), если она неограничена сверху (снизу), причем $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sup\{x_n\}$ (соотв-о $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf\{x_n\}$)