(19) Бесконечно малые фии. Эквивалентность б.м. Таблица эквивалент-х б.м. (схема док-ва).

Опр Пусть функция $\alpha(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$ опред. в некот-й проколотой окрестности т. a, тогда говорят, что $\alpha(x)$ беск. мал. фия при $x \to a$, если $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Опр. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to a$, тогда говорим, что $\alpha(x)$ эквивалентна $\beta(x)$ при $x \to a$

$\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$, если $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = 1$

Зам: (Свойства эквив-ти б.м.)

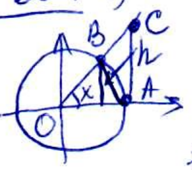
1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x\to a)$ рефлексивность
2) $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$ $(x\to a)$ симметричность
3) $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$ $(x \to a)$, $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ $(x\to a)$ транзитивность

Зам. Таблица эквив-ти б.м. при $x \to 0$

1) $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$
2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$
3) $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$
4) $\ln(1+x) \sim x$ $(x\to 0)$
5) $a^x - 1 \sim x \ln a$ $(x \to 0)$
6) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ $(x \to 0)$ $\mu \in R\setminus\{0\}$

Д-во: 1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$. круговой сектор $OAB \overset{\text{содержит}}{\supset} \triangle OAB$.

Сектор $OAB \overset{\text{содержится}}{\subset} \triangle OAC$



$S_{\triangle OAB} \le S_{\text{сект.}OAB} \le S_{\triangle OAC}$; $h = \sin x$, $OB = 1$

$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \le 1 \Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$\to 1 \ (x \to 0)$

$x \in \mathring{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$, $x \in$ Окр. $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{2x^2}{2\cdot 2} = \frac{x^2}{2} < \varepsilon$. $|x| < \sqrt{2}\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon < \frac{\pi^2}{8}$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \sqrt{2\varepsilon}\ \forall x,\ 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \le |1 - \cos x| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\exists \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \sim x$ $(x\to 0)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \left[\begin{array}{l} x = \log_a(1+y) \\ a^x = 1 + y\ (y\to 0,\ x \to 0)\end{array}\right] = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\log_a(1+y)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y \cdot \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \Rightarrow a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} = \left[\begin{array}{l} 1 + x = e^y \\ y = \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\to} 0\end{array}\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left(\underbrace{\dfrac{e^{\mu y} - 1}{\mu y}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{y}{e^y - 1}}_{\to 1}\right) = 1 \Rightarrow (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ $(x\to 0)$.