(45) Достаточное условие экстремума в терминах второй производной.

<u>теор.</u>: (Экстр. ф-ции в терм. вт. пр-й) Пусть $f(x) \in C^2_{(U(x_0))}$ дважды непр-а и дифф-а $f'(x_0)=0$, тогда

1) если $f''(x_0)>0$, то x_0 точка строгого min ф-ции $f(x)$

2) если $f''(x_0)<0$, то x_0 точка строгого max $f(x)$

3) если $f''(x_0)=0$, то ничего сказать нельзя.

<u>Д-во:</u> Применим формулу Тейлора для $n=1$, т.е $\forall x \in U(x_0)$ $\exists c \in (x; x_0)$, $c \in U(x_0)$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$ т.к $f'(x)=0$, то $f(x)-f(x_0) = \frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2}$

1) Рассм. 1 случ.

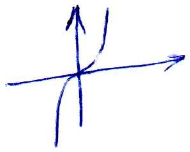
$\exists \delta>0\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ f''(x)>0$, $f''(x_0) \in \underset{\text{непрерывная ф-ция}}{C(U(x_0))} \Rightarrow \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \exists c \in \mathring{U}_\delta(c)$

$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\frac{f''(c)}{2}}_{>0}\underbrace{(x-x_0)}_{>0} > 0$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ $f(x_0) < f(x) \Rightarrow x_0$ т. строгого min.

2) Док-ся аналогично. Для док-ва 3) рассм. замечание и примеры.

<u>Замеч.</u> Пусть $f(x) \in C^2(U(x_0))$ $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$

1) $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y'=0$, $x_0=0$; $y''=6x$, $y''=0$, $x_0=0$



$y(0)=0$, $x>0$, $y(x)>y(0)$
$x<0$ $y(x)<y(0)$
x_0 не является экстремумом.

2) $y=-x^4$. $y'=-4x^3$, $y'=0$, $x_0=0$, $y'(0)=0$; $y''=-12x^2$, $y''=0$, $x_0=0$

$y(x)=-x^4<0$
$y(0)=0 \Rightarrow x_0$ – точка max $f(x)$.

3) $y=x^4$ $y'=4x^3$, $y'=0$, $x_0=0$; $y''=12x^2$, $y''=0$, $x_0=0$ x_0 – т. min $f(x)$