51 Общее неравенство выпуклости. Пример: неравенство между средним арифметическим и средним геом-м. n чисел.

Теорема (Общее нер-во выпукл.) Пусть $f(x)$ опр. на $[a,b]$, тогда

1) $f(x) \cup$ на $[a,b] \Leftrightarrow \forall x_1 \dots x_n \in [a,b]$ $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in [0;1]$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ $\quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

2) $f(x) \cap$ на $[a,b] \Leftrightarrow$ $\forall x_1 \dots x_n \in [a,b]$ $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in [0;1]$
$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ $\quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

Д-во: ММИ База: $n=2$ (по опр. выпукл.)
Инд-й переход: $f(x)$ (т.е утверждение верно для $n-1$)
Возьмём n членов $\in [a,b]$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq (1-\alpha_n) f\left(\frac{\alpha_1 x_1}{1-\alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_n x_{n-1}}{1-\alpha_n}\right) + \alpha_n f(x_n) \leq$$

$$\leq \left[\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{1-\alpha_n} = 1\right] \leq \frac{(1-\alpha_n)\alpha_1}{1-\alpha_n} \cdot f(x_1) + \dots + \frac{(1-\alpha_n)\alpha_{n-1}}{1-\alpha_n} f(x_{n-1}) +$$

$$+ \alpha_n f(x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Пример: 1) $y = \ln x$, $x \in (0;+\infty)$, $y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x \cap$ на $(0;+\infty) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$

$\forall x_1 \dots x_n > 0$ $\quad \ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln x_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n =$

$$= \ln \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}_{\text{среднее геометрическое}} \leq \frac{x_1 + x_n}{n} \text{ среднее ариф-ое.}$$

т.е среднее арифм. не меньше среднего геометр-го.

2) $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $y' = \frac{-1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$, значит ф-ия $\frac{1}{x} \cup$ на $(0;+\infty)$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$. $\quad \forall x_1 \dots x_n > 0$ $\quad \dfrac{1}{\frac{x_1 + x_n}{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}_{\text{среднее гармоническое.}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}}_{\text{Среднее арифм.}}$$