40 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

<u>теорема</u> Пусть ф-ия $f(x) \in C^n(V(x_0))$, тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

<u>Д-во!</u> Используя теорему (Форм. Тейлора) с заменой $n+1 \to n$.

$$\forall x \in V(x_0) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^n}{n!}$$

$f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))$ если $x \to x_0$, то $\theta(x-x_0) \to 0$, значит $(x_0+\theta(x-x_0)) \to x_0$. В силу непрер. n-ой произв-й

$f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)) + f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ где $\alpha(x) \to 0\ (x \to x_0)$

$$\Rightarrow \frac{f^{n}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \underbrace{\frac{\alpha(x-x_0)^n}{n!}}_{\to o((x-x_0)^n),\ x \to x_0} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o\left((x-x_0)^n\right), (x \to x_0)$$

<u>Замеч.</u> $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right), (x \to x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$