35. Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений. Теорема Коши.

<u>Теорема</u> (Лагранжа) Пусть ф-ия $f(x)$ определена и непрер. на $[a,b]$ и дифф-а на (a,b), тогда $\exists c\in(a,b)$ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

<u>Д-во</u>! по т. Ролля $g(x)=f(x)-f(a)-\lambda(x-a)$, учитывая $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

где $g(x)$ удовл. услов. теоремы Ролля:

1) $g(x)\in C_{[a,b]}$ непрерывна на $[a,b]$; 2) $g'(x)=f'(x)-\lambda$, $x\in(a,b)$

$g(a)=f(a)-f(a)-\lambda(a-a)=0$; $g(b)=f(b)-f(a)-\lambda(b-a)=$

$=f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a)=0 \Rightarrow g(a)=g(b) \Rightarrow \exists c\in(a,b), g'(c)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c)-\lambda=0$, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

<u>Формула конечных приращений</u>: Пусть $f(x)$ опр-а, непр, дифф-а на $U(x_0)$ точки x_0, тогда $\forall x=x+\Delta x$, $\Delta x\in U(x_0)$

$\exists\,\theta\in(0;1)$ $\underline{\Delta f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}$

<u>Д-во</u>! $\Delta x>0$, $f(x)\in C_{[x_0,x_0+\Delta x]}$ и $\exists f'(x)$, $x\in(x_0;x_0+\Delta x)$. По т. Лагранжа

$\exists c\in(x_0;x_0+\Delta x)$ $c=x_0+\theta\Delta x \Rightarrow \theta=\dfrac{c-x_0}{\Delta x}$, $\theta>0$ $c>x_0$, $\theta<\dfrac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \theta\in(0;1)$ $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\underline{f'(x_0+\Delta x\theta)\Delta x}$ формула конечных приращений.

$\Delta x<0$ — аналогично.

<u>Теорема</u> (Коши): Пусть $f(x)$, $g(x)$ определ. на $[a,b]$ и выполн. условия:

1) $f(x), g(x)\in C_{[a,b]}$
2) $f(x), g(x)$ дифф-мы на (a,b)
3) $\forall x\in[a,b]$ $g'(x)\neq 0$

$\Rightarrow$ тогда $\exists c\in(a,b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

<u>Д-во</u>! $g(a)\neq g(b)$ формула корректна.
Методом от противного! Если $g(a)=g(b)\Rightarrow\exists c\in(a,b)$, $g'(c)=0$, что противоречит усл. 3.

$\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(a)-\lambda(g(x)-g(a))$, $h(x)\in C_{[a,b]}$

$h'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$ $x\in(a,b)$
$h(a)=0$ $h(b)=0$

$\Rightarrow h(x)$ удовл. усл. т2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists c\in(a,b)$ $h'(c)=0\Rightarrow f'(c)-\lambda g'(c)=0\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.