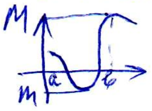
(25) Теорема о непрерывном образе отрезка. Критерий непрерывности монотонной фии.

<u>теор.</u> (о непр-м обр-е) Пусть $f(x)\in C_{[a,b]}$. Обозначим через $E_f = f([a,b])$ множество значений функции $f(x)$. Тогда

$E_f=[m;M]$ 

<u>Д-во:</u> $f(x)\in C_{[a,b]} \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a,b] \Rightarrow m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$

$M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$, $c,d\in[a,b] \Rightarrow \forall k\in(m;M)\ \exists x_0$ лежащее между c и d

$x_0\in[a,b] \Rightarrow f(x_0)=k \Rightarrow k\in E_f$, $[m;M]\subseteq E_f$ если $\ell\notin[m;M]$

$\neg\exists x\in[a,b]\ f(x)=\ell\ (m\le \ell\le M)$ $E_f\subseteq[m;M] \Leftrightarrow [m;M]=E_f$

<u>теорема</u> (критерий непр-ти мон. ф.) Пусть $f(x)$ опр-а и монотонна на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ непр-а на $[a,b]$ $f(x)\in C_{[a,b]} \Leftrightarrow f([a,b])=[m;M]$ (множество значений фии яв-ся отрезком)

<u>Д-во:</u> 1. Необход-ть. $f(x)\in C_{[a,b]} \Rightarrow f([a,b])=[m;M]$.

2. Дост-ть. Пусть $f([a,b])=[m;M]$, $m,M\in\mathbb{R}$, $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

$M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Докажем одностор. непрер-ть для полуинтервала

$\forall x_0\in(a,b]\ \exists f(x_0-0)=f(x_0)$; $\forall x\in[a;b)\ \exists f(x_0+0)=f(x_0)$.

Предположим, что $f(x)\uparrow$ на $[a,b]$, т.е $\forall x\in[a,b]$ $x_1\le x_2, f(x_1)\le f(x_2)$

Возьмем $x_0\in(a;b] \Rightarrow \exists f(x_0-0)$ и $f(x_0-0)\le f(x_0)$.

Докажем метод от прот-го: $f(x_0-0)<f(x_0)$, $f(a)\le f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(b)$

$m=f(a)$, $M=f(b)$, $m\le \underbrace{f(x_0-0)}_{k_1=f(x_1)}\le M$, $f(x_0)=k_2$, $k_1\le k_2$

Рассм. $k'\in(k_1,k_2)$, $k'\in[m,M] \Rightarrow \exists x'\in[a,b]\ f(x')=k'$

где расположена k'. Если $x'<x_0$, то $f(x')\le f(x_0-0) \Rightarrow k'\le k_1$, а по выбору $k'>k_1 \Rightarrow$ противоречие.

Если $x'>x_0$, то $f(x_0)\le f(x') \Rightarrow k_2\le k'$, а по выбору $k'<k_2 \Rightarrow$ противоречие.

Если $x'=x^0$, $f(x')=f(x_0) \Rightarrow k_2=k'$, а по выбору $k'<k_2 \Rightarrow$ прот-е первонач. предполож. $f(x_0-0)\le f(b)$

Ан-но док-ся, что $f(x_0+0)=f(x_0)$, $x_0\in[a,b]$

$\forall x_0\in(a,b)\ \exists\lim f(x)=f(x_0)\ \exists f(a+0)=f(a)\ \exists f(b-0)=f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)\in C_{[a,b]}$