(70) Интегральные суммы Римана. Определение интеграла по Риману.

Опр. (Определение отрезка) Пусть $[a;b] \in R$ отрезок, тогда $T: x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ разбиение отрезка $[a;b]$ на $[x_0;x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}; x_n]$; $[a;b] = [x_0;x_1] \cup [x_1;x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1};x_n]$

$\Delta x_k = x_n - x_{k-1}$ (длина n-го подотрезка), $k = 1 \ldots n$, $\lambda_T = \max\limits_{1 \le x \le n} \Delta x_k$ — равные разбиения.

Опр. (Интегральные суммы Римана) Г. Пусть $f(x)$ опред-а на $[a;b]$ и $T: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ - разбиение $[a;b]$

Выберем точку $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $k = 1 \ldots n$ ($k \in n$)

Сумма: $I(T,f) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$ - наз-ся суммой Римана.

Опр. Пусть $f(x)$ опр-а на $[a,b]$ и $\exists \lim\limits_{\lambda_T \to 0} I(T,f) = I$, $I \in R$ (λ_T разбиение) тогда говорят, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, I наз-ся опр. интегралом от фии $f(x)$ на $[a,b]$.

$I = \int\limits_a^b f(x)dx$; $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} I(T,f) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall_{\text{разбиения}} T = \lambda_T < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \xi_1 \ldots \xi_n \; |I(T,f) - I| < \varepsilon$.

Пишем. $f(x) \in R_{[a;b]} = R([a;b])$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_T \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_n$$

Опр. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.