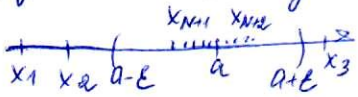
⑥ Определение предела последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последов-ти.

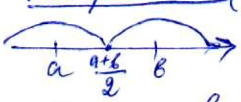
1) $\{x_n\}$ послед-ть $\{x_n\} = \{\underbrace{x_1, x_2, \dots x_n, \dots}_{\text{члены посл-ти}}\}$, $x_n \in R$ при $n \to \infty$

2) Пусть $\{x_n\}$ числовая послед-ть, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in R \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in N, \forall n \geq N_1 \ |x_n - a| < \varepsilon$, при этом $\{x_n\}$ наз-ся сходящейся послед-ю к числу $a \in R$ при $n \to \infty \Leftrightarrow x_n \to a, n \to \infty$



Геометрическая формулировка: число a наз-ся пределом $\{x_n\}$, если для любой ε окрестности точки a найдется натур. число N, что все x_n, для которых $n \geq N$ попадут в ε окрест-ть точки a.

<u>теорема</u> (о единств. предела) Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in R$, тогда он единств-й.



<u>Д-во</u>: От противного. $a \neq b$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $b \neq a$, $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$ находим число N_1 такое, что

$\exists N_1 \in N, \forall n \geq N_1 \ |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{|b-a|}{2}$ и находим N_2

$\exists N_2 \in N, \forall n \geq N_2 \ |x_n - b| < \frac{|b-a|}{2}$, тогда $\exists N = \max\{N_1, N_2\} \in N$

$\forall n \geq N$ будет выполнено $|a-b| = |(a-b)-(x_n-a)| \leq |x_n - b| + |x_n - a| <$
$< \frac{|b-a|}{2} + \frac{|b-a|}{2} = |b-a| \Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow b = a$.

Сходящаяся последоват-ть яв-ся огранич.

<u>теорема</u>: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\exists M \in R \ \forall n \in N \ |x_n| \leq M$,

т.е $\{x_n\}$ ограниченная послед-ть.

Д-во: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$ $\exists N \in N \ \forall n \geq N \ |x_n - a| < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq N \ |x_n| = |a + (x_n - a)| \leq |a| + |x_n - a| < |a| + 1 = M_1 \in R$

$M_2 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_{n-1}|\} \in R$

$M = \max\{M_1, M_2\}$ тогда $\forall n \leq N_1$, $x_n \leq M_2$

$\left.\begin{array}{l}\text{Если } n \leq N_1, \text{ то } |x_n| \leq M_2 \leq M \\ \text{Если } n \geq N_1, \text{ то } |x_n| \leq M_1 \leq M\end{array}\right\} \Rightarrow$ есть такая точка M, которая всегда больше x, т.е ограничена.

<u>Зам.</u> Не всякая огран. послед-ть явл. сходящаяся.
Так, ограниченная послед. $\{(-1)^n\}$ не явл. сход.