8) Определение бесконечно малой послед-ти. Теорема о сумме б.м., произведение б.м. на ограниченную и о произведении б.м. последовательностей.

Опр: послед-ть наз-ся б.м., если она сходится к 0.

$\{a_n\}$ наз-ся б.м, если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |a_n|<\varepsilon$

теор: (о сумме) Сумма б.м. послед-й явл-ся б.м. пос-ю, т.е $\{\alpha_n\}\ \{\beta_n\}$ б.м $\Rightarrow \{\alpha_n+\beta_n\}$ б.м. послед.

Д-во: $\forall\varepsilon>0\ \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_1\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2};\ \forall\varepsilon>0, \frac{\varepsilon}{2}>0, \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_2, |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \exists N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |\alpha_n+\beta_n|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0\Rightarrow\{\alpha_n+\beta_n\}$ – б.м.

Замеч.: если послед-ть α_n явл-ся б.м., то $\{\alpha_n\}$ огранич. пос-ть, т.е

$\exists\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0\Rightarrow\exists M\in\mathbb{R}\ \forall n\geq1\ |\alpha_n|\leq M.$

теор. (произв.): Произведение б.м. пос-ти и ограниченной пос-ти яв-ся б.м.п., т.е. α_n б.м., β_n – огранич. пос-ть, то $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ – б.м.п.

Д-во: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0\ \exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ |\beta_n|\leq M.$

$\forall\varepsilon>0, \frac{\varepsilon}{M}>0, \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}.$

$|\alpha_n\cdot\beta_n|=|\alpha_n|\cdot|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon\quad|\alpha_n\cdot\beta_n|<\varepsilon\Rightarrow\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ – б.м.п.

следствие: Произведение двух б.м.п. яв-ся б.м.п., т.е $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – б.м. п-ти $\Rightarrow\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ – б.м.п.

Д-во: $\{\beta_n\}$ б.м $\Rightarrow\{\beta_n\}$ огранич. послед-ть $\Rightarrow\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ – б.м.

теорема: Пусть $\{x_n\}$ числовая послед-ть, тогда $\{x_n\}$ сходящ-я послед-ть при $n\to\infty\Leftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}\ \exists\{\alpha_n\}$ б.м. $\forall n\geq1,\ x_n=a+\alpha_n$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |x_n+a|<\varepsilon\Leftrightarrow\exists a\in\mathbb{R}$

Д-во: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ \exists a\in\mathbb{R}\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |x_n-a|<|\alpha_n|<\varepsilon\Rightarrow\{\alpha_n\}$ б.м. и $x_n=a+\alpha_n$ $(\forall n\geq1)$

$\exists|\alpha_n|=x_n-a\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |x_n-a|<|\alpha_n|<\varepsilon$ ... $\exists|\alpha_n|=x_n-a$

$\Leftarrow$ $x_n=a+\alpha_n\ (\forall n\geq1)\ a\in\mathbb{R}\ \{x_n\}$ б.м $\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ |\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

Опр: $\{\alpha_n\}$ б.м.п. $\forall n\in\mathbb{N}\ \alpha_n\neq0$, тогда пос-ть $\beta_n=\frac{1}{\alpha_n}$ наз-ся бесконечно большой пос-ю.

$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\infty\Leftrightarrow\forall E>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |\beta_n|>E,\ \varepsilon=\frac{1}{E},\ \beta_n=\frac{1}{\alpha_n}$

Замеч. $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty\Rightarrow\forall E>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \beta_n>E$

$\lim\limits_{n\to-\infty}\beta_n=-\infty\Rightarrow\forall E>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ -\beta_n>-E,\ E>\beta_n.$