33 Теорема о производной параметрически заданной ф-ии.

теор. Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определены и непр. на интервале $I = U(t_0)$, при этом пусть $\varphi(t)$ строго монотонна на I и дифф-а в точке t_0 $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тогда неявная ф-ия $y = y(x)$ заданная параметрически
$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in I$ дифф-а в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, а ее
производная равна $y'(x_0) = \dfrac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$ в точке t_0.

Д-во: $\varphi(t)$ строго монот-ая на $I \Rightarrow \exists\, t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in U(x_0)$
$\varphi'(x)$ непр. в $U(x_0)$ $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ сложная ф-ия
дифф-ма в точке x_0

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = \psi'_t(t_0) \cdot \left(\varphi^{-1}(x)\right)'_x = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'_t(t_0)} \quad \text{ч.т.д.}$$

Зам. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in I$ $\forall t \in I$ $\exists\, \varphi'_t(t) \neq 0$ $\begin{cases} y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ x = \varphi(t). \end{cases}$

Пример $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\begin{matrix} x'_t = -\sin t \\ y'_t = \cos t \end{matrix}$ $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{-\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$ $\begin{cases} y'_x = -\operatorname{ctg} t \\ x = \cos t. \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 1$ $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{y} = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$

$y = \sqrt{1-x^2}$