⑤ Теорема о существовании инфимума. Понятие окрестности точки.

Пусть $A$ - огранич. снизу числов. мн-во, тогда $\exists m^* = \inf A \in \mathbb{R}$

<u>Д-во:</u> Рассм. мн-во $B = -A = \{-a \mid a \in A\}$

$A$-огр. снизу $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ \ m \le a \Rightarrow m - a \le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -a \le -m = M$

$\forall b \in B\ \exists a \in A\ \ b = -a \le M \Rightarrow$ Мн-во $B$ огранич. сверху

$\exists M^*$ 1) $\forall b \in B\ \ b \le M^*$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in B \Rightarrow M^* - \varepsilon < b'$

$m^* = -M^*$

1) $\forall a \in A\ \exists b = -a \in B,\ b \le M^*,\ -a \le -m^* \Rightarrow m^* \le a$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in B\ \ M^* - \varepsilon < b'$, пусть $a' = -b^* \in A$,
$-m^* - \varepsilon < -a' \Rightarrow a' < m^* + \varepsilon \Rightarrow m^* = \inf A \in \mathbb{R}$.

<u>Опр.</u> Пусть $A \subset \mathbb{R}$, тогда $A$-огр. мн-во $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ m \le a \le M$.

<u>Абсолютная величина (модуль) вещ. числа</u>

$|a-b|$ — расстояние от $a$ до $b$.

$a \in \mathbb{R}$, $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0 \\ -a, & \text{если } a \le 0 \end{cases}$ $\quad |a| \ge 0$


<u>Зам. 1</u>
1) $|a| \ge 0$, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2) $|a \cdot b| = |a||b|$
3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4) $|a+b| \le |a| + |b|$ нер-во треуг-ка.
5) $|a-b| \ge |a| - |b|$

<u>Опр.</u> Пусть $a \in \mathbb{R}$ (точка на числовой прямой) и $\varepsilon > 0$, тогда 1) <u>$\varepsilon$-окрестность точки $a$</u> наз-ся мн-во
$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$

2) <u>Проколотой $\varepsilon$-окрестностью</u> точки $a$ наз-ся мн-во
$\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

<u>Геом.</u>


$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$
$\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$

<u>Зам</u>
1) $(a; b)$ интервал $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $a, b \in \mathbb{R}$
2) отр. $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ (или сегмент)
3) $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ полуинтервал.
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$