(39) Теорема о формуле Тейлора.

Теорема: Пусть ф-ия $f(x) \in C^{n}_{[a,b]}$ и $\exists\ f^{(n+1)}(x) \in (a,b)$, тогда $\exists\, c \in (a,b)$ $f(b) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n + R_n$

где $R_n = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$ — остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Д-во: $g(x) = f(b) - f(x) - \left(\frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!} \right) \in C(a,b)$

$h(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \in C_{[a,b]}$

$\exists\ g'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{f''(x)(b-x)}{1!} + \frac{f''(x)(b-x)}{1!} - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$

$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$, $\exists\ h'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} > 0$. $\forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$

$\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$; $g(b) = f(b) - f(b) - \frac{f'(b)(b-b)}{1!} - \ldots - \frac{f^{(n)}(b)(b-b)}{n!} = 0$

$h(b) = \frac{(b-b)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

При $x = a$ $g(a) = R_n$, $h(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{R_n}{(b-a)^{n+1} : (n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n n!}{n!(b-c)^n} =$

$= f^{n+1}(c) \Rightarrow R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$

Замеч. $f(x) \in C^{n+1}\ U(a)$ функция непр. дифф-а в некотор. окрестности т.а $\Rightarrow \forall x \in U(a)\ \exists\, \Theta \in (0;1)$ $f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$ при $a = 0$

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)\, x^{n+1}}{(n+1)!}$ — формула Маклорена.