(80) Формула Ньютона - Лейбница. Пример.

Теорема: Пусть $f(x)$ непрер. на $[a,b]$ и $F(x)$ некот. первообр. на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-Fa$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad \text{где } F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Д-во: Рассм. инт. с перем. верхним пределом

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \text{по т. Барроу } F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$$

$$\text{по усл. } \tilde{F}(x)=f(x) \Rightarrow \exists c - \text{const}$$

$$\tilde{F}(x)=F(x)+C \quad (\forall x\in[a,b])$$

При $x=a$ $\tilde{F}(a)=F(a)+C \Rightarrow C=\tilde{F}(a)$

При $x=b$ $\tilde{F}(b)=F(b)+\tilde{F}(a)=\int_a^b f(x)dx-\tilde{F}(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\tilde{F}(b)-\tilde{F}(a)=\tilde{F}(x)\Big|_a^b$$

Пример: $y=\sin x \quad x\in[0;\pi]$

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2.$$