(13) Принцип вложенных отрезков. Определение подпоследовательности. Подпоследовательность сходящейся пос-ти. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема: (принцип) Пусть $\{I_n\}$, $I_n=[a_n;b_n]$ $n\in\mathbb{N}$ последовательность отрезков, удовлет-х след. услов:

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ $I_{n+1}\subset I_n$ $[\,[\,\overset{c}{\ }\,]\,]$ (a_n, a_{n+1}, b_{n+1}, b_n)

2) Отрезок длиной $|I_n|$, $|I_n|=b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$ (Длина отрезка I_n 2-ое)

$\exists\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, тогда $\exists c\in\mathbb{R}$-единств. $\forall n\in\mathbb{N}$ $c\in I_n$

Д-во: $I_{n+1}\subset I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n\Rightarrow$ послед-ть

$\{a_n\}$ - возраст. $\{b_n\}$-убываюш.

$\forall n,m\in\mathbb{N}$ $a_n<b_m$, если $n=m$, то $a_n<b_n$

Если $n>m$, $a_m\le a_n<b_n\le b_m\Rightarrow a_n<b_m$ $\Rightarrow$

Если $n<m$, $a_n\le a_m<b_m$ $\Rightarrow a_n<b_m$

$\Rightarrow\forall m\in\mathbb{N}$ $\{a_n\}$ огранич. сверху (числом b_m) $\Big|\Rightarrow\exists c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\limits_{n\ge1}a_n\le b_m$

$\{a_n\}$ возраст.

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}b_m=\lim\limits_{n\to\infty}((b_n-a_n)+a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\overset{,0\text{ по усл.}}{(b_n-a_n)}+\lim\limits_{n\to\infty}\overset{=c}{a_n}=c=$

$=\inf\limits_{m\ge1}b_m$ $\left(\text{т.е. }\lim\frac{1}{n}=0\right)$ $\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\le c\le b_n\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ \exists c\in I_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $d\in I_n$ $a_n\le d\le b_n$ $\to c$

Единственность. $\exists d\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $d\in I_n$

$\exists\lim\limits_{n\to\infty}d=c\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}d=c\\ \lim\limits_{n\to\infty}d=d\end{array}\right\}\Rightarrow c=d.$

Опр. (подпосл-ти.) Пусть $\{x_n\}$ послед-ть и $\{n_k\}$-строго возр. послед-ть натур-х чисел $1\le n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$

Тогда $\{x_{n_k}\}$ подпослед-ть посл-ти $\{x_n\}$

Пример $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $x_n=\frac{1}{n}$, $n=2k$ $x_{2k}=\frac{1}{2k}$ $\left\{\frac{1}{2k}\right\}$ подпосл $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Зам. Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, тогда любая $\forall$ подпосл $\{x_{n_k}\}$ - сходящ. и $\exists\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

Д-во: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\ge N\ |x_n-a|<\varepsilon$

$\{x_{n_k}\}$ подпосл $\Rightarrow\exists K=n_N$ $\forall k\ge K=n_N\ge N$

$n_k\ge K\ge N$ $|x_{n_k}-a|<\varepsilon\Rightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=a$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса) Из всякой ограниченной посл-ти $\{x_n\}$ можно извлечь сход-ся подпосл $\{x_{n_k}\}$, которая сходилась бы к конечному пределу, т.е. $\{x_{n_k}\}$ $(\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=c)$

Д-во: $\{x_n\}$ огран. п-ть $\Rightarrow\exists a_1,b_1\in\mathbb{R}$ $\forall n\ge1$ $a_1\le x_n\le b_1$

$I_1=[a_1;b_1]$, $n_1=1$, $x_n\in I_1$

$c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ середина $I_1=[a_1;c_1]\cup[c_1;b_1]$ $\overset{\vee}{I_2}\subset I_1$ $|I_2|=b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}$. ($I_2$ половина I_1 с бесконечн. числом эл-ов.)

(в I_2 бесконечно много элементов.)

$\exists n_2>n_1$ $x_{n_2}\in I_2$, т.е. делим пополам и берем промеж-к, в котор. содерж-я бесконечно мн. значений. Проделываем это еще и еще раз...

Посл-ть $\{I_n\}$ $I_{n+1}\subset I_n(\forall n\in\mathbb{N})$ $|I_n|=b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}\to0\ (n\to\infty)$

$x_{n_k}\in I_k$ $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ $\exists n_2>n_1$ $x_{n_2}\in I_2$ $\exists n_k>n_{k-1}$

$x_{n_k}\in I_k$ $a_k\le x_{n_k}\le b_k$

I_k - искомая сход. подп-ть - $\{x_n\}$

по теореме $\exists c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$, $a_k\le x_{n_k}\le b_k\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n_k}\to c\ (k\to\infty)\Rightarrow\exists\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c.$