27 Теорема о существовании и теорема о непрерывности обратной к монотонной ф-ии.

Опр. Пусть $f(x)$ опред-а на D и E – ее мн-во значений, тогда ф-ия $x = g(y)$, $y \in E$ наз-ся обратной к ф-ии $y = f(x)$, $x \in D$, если 1) $\forall x \in D$, $g(f(x)) = x$; 2) $\forall y \in E$, $f(g(y)) = y$.

Замеч. $f: D \to E$, $y: E \to D$

1) f сюръективно $\forall y \in E\ \exists x \in D$, $y = f(x)$ (любой элемент из E имеет свой прообраз)

2) f инъективно $\forall x_1, x_1 \in D$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (разные элементы переводит в разные другого мн-ва)

3) f биективно $\Leftrightarrow$ f сюръективно и f инъективно.
(взаимно однозначное отображение)

Обозначение обратного отображения: $g(y) = f^{-1}(y)$

Теорема (существов-е обратной монот-й ф-ии). Пусть $f(x)$ $x \in D$ строго монотонно на D, т.е либо $f(x) \uparrow$ на D, [т.е $\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$] либо $f(x) \downarrow$ на D, [$\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$], тогда на множ-е $E = f(D)$ определена обратная к f ф-ия $g(y) = f^{-1}(y)$, которая является строго монотонн. на E и того же направления (если $f \uparrow$ то $g \uparrow$ и наоборот)

Д-во: 1) $E = f(D) \Rightarrow f$ сюръективно; 2) Пусть $x_1, x_2 \in D$, если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ [или $f(x_1) > f(x_2)$]; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ инъективно $\Rightarrow$ f – биективно, т.е $\exists g(y) = f^{-1}(y)$; $E \to D$

Пусть $f(x)$ строго $\uparrow$ на D, $\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Возьмем $y_1, y_2 \in E$, $y_1 < y_2$. Найдем $x_1, x_2 \in D$, такие, что $x_1 = g(y_1)$ $x_2 = g(y_2)$ т.е $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$. Если $x_1 \geq x_2$, то $f \uparrow \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ т.е $\left.\begin{matrix} y_2 \leq y_1 \\ y_1 < y_2 \end{matrix}\right\}$ противоречие $\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow g(y)$ строго $\uparrow$ на E.

Теорема (непрер-ть обр. ф-ии) Пусть $f(x)$ строго монот. и непр. на $[a,b]$, тогда обр-я ф-ия $x = f^{-1}(y)$ строго монот. и непр на $[m, M]$ $f([a,b])$

Д-во: $x = f^{-1}(y)$ строго монот. на $[m; M]$ и $f^{-1}([m, M]) = [a, b]$, то $x = f^{-1}(y)$ непр. на $[m; M]$

Пример: $y = \sin x$ $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] = D$, она строго $\uparrow$ на D, ее мн-во знач-й $E = [-1; 1] \Rightarrow y = \sin x$ непр. на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
Обратная ф-ия $x = \arcsin y$ $y \in [-1; 1]$ стр. $\uparrow$ на E и непр. на E.