63 Теорема об интегрировании по частям в неопр-м интеграле. Примеры.

Пусть ф-ии $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непр-а и дифф-а на $(a;b)$ т.е. $u(x), v(x) \in C^1_{(a;b)}$, тогда

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ – ф-ла интегриров-я по частям.

т.е. $\int u(x) v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)\,u'(x)dx$.

<u>Д-во:</u> $(uv)' = u'v + uv'$ проинтегр. $\int (uv)'dx = \int u'v\,dx + \int uv'dx =$

$= \int v\,du + \int u\,dv$; $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

<u>Примеры</u>: 1) $\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int \frac{x\,dx}{x} = x\ln x - \int dx =$

$= x\ln x - x + C$.

2) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x^2} & v=x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$

$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$

3) $\int \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\arcsin x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x \end{matrix} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} d(1-x^2)=-2x\,dx \\ x\,dx=-\frac{1}{2}d(1-x^2) \end{matrix} \right| =$

$= x\arcsin x + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{1-x^2} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

4) $\int (x^2 \cdot e^{-x})dx = \left| \begin{matrix} u=x^2 & dv=e^{-x}dx \\ du=2x\,dx & v=-e^{-x} \end{matrix} \right| = x^2(-e^{-x}) + 2\int x e^{-x}dx =$

$\left| \int x e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=e^{-x} \end{bmatrix} \right|$ $= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = e^{-x}(x^2+2x+2)+C$.

5) $\int e^x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x & v=e^x \end{matrix} \right| = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sin x & dv=e^x dx \\ du=\cos x & v=e^x \end{matrix} \right| =$

$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \Rightarrow \int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2} + C$.

$\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$