56 Корни многочленов. Теорема Безу. Кратность корня. Критерий кратности корня.

Опр. Пусть $P(z)=c_0z^n+\dots+c_n$, $c_0\neq0$ многочлен, тогда число $z_0\in\mathbb{C}$ наз-ся корнем мног-а $P(z)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P(z_0)=0$

теорема (Безу): Пусть $P(z)=c_0z^n+\dots+c_n$, $c_0\neq0$, $n\geq1$
Тогда z_0 является корнем $P(z)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\exists\,Q(z)$, $\deg Q=n-1$, старш. коэф. $Q=c_0$ и $\forall z$ $P(z)=(z-z_0)Q(z)$

Д-во: 1) Достаточность: Если $P(z)=(z-z_0)Q(z)$, то $P(z_0)=(z_0-z_0)Q(z_0)=0\cdot \underbrace{Q(z_0)}_{\in\mathbb{C}}=0\Rightarrow z_0$ корень $P(z)$

2) Необходимость: Пусть $P(z_0)=0$ по т. $\exists\,A(z)$, $R(z)$
$\deg R(z)<1$, $1=\deg(z-z_0)$
$\forall z\in\mathbb{C}$ $P(z)=A(z)(z-z_0)+R(z)$
$R(z)=C$-const $\underbrace{P(z_0)}_{=0}=\underbrace{A(z_0)(z-z_0)}_{=0}+C\Rightarrow C=0\Rightarrow$
$\Rightarrow P(z)=A(z)(z-z_0)$, $Q(z)=A(z)$
$p=c_0=$ старш. коэф $A(z)\cdot1=$ старш. коэф Q
$n=\deg P=\deg Q+\deg(z-z_0)=\deg Q+1\Rightarrow\deg Q=n-1$

Опр Пусть $P(z)=c_0z^n+\dots+c_n$, $c_0\neq0$, $n\geq1$ многочлен и z_0 - корень $P(z)$, $P(z_0)=0$
$\exists k\in\mathbb{N}$, $k\leq n$, $P(z)=(z-z_0)^k\cdot Q(z)$ где $Q(z_0)\neq0$
$\deg Q=n-k$, старш. коэф. $Q=c_0$
Число k наз-ся кратностью z_0 мног-а $P(z)$.

Опр. Пусть $P(z)=c_0z^n+\dots+c_n$, тогда произв-я $P'(z)=nc_0z^{n-1}+\dots+c_{n-1}$
Ан-но $(P'(z))'\dots$

Зам. $(P+Q)'=P'+Q'$; $(\alpha P)'=\alpha P'$; $(PQ)'=P'Q+Q'P$
$$P(z)=P(z_0)+\frac{P'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{P''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots+\frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

теорема (Критерий кратности корня):
Пусть $P(z)=c_0z^n+\dots+c_n$, $c_0\neq0$, $n\geq1$, z_0 корень $P(z)$, $P(z_0)=0$
Тогда z_0 корень кратности k, $1\leq k\leq n\Leftrightarrow$
$P(z_0)=0$, $P'(z_0)=0$ .... $P^{(k-1)}(z_0)=0$

Док-во: $\exists m$, $1\leq m\leq n$, $P'(z_0)=0$ $P^{m-1}(z_0)=0$ $P^{m}(z_0)\neq0$
т.к. $P^n(z_0)=n!\,c_0\neq0$
$$P(z)=\frac{P^m(z_0)(z-z_0)^m}{m!}+\dots+\frac{P^n(z_0)(z-z_0)^n}{n!}=(z-z_0)^mQ(z),$$
$$Q(z_0)=\frac{P^m(z_0)}{m!}\neq0\Rightarrow\ m=k\ \text{— кратность.}$$