48 Критерий выпуклости в терминах первой произв-й.

Теорема Пусть $f(x)\in C_{[a,b]}$ $\exists f'(x)\ \forall x\in[a,b]$ тогда

1) $f(x)\smile$ на $[a,b] \Leftrightarrow f'(x)\uparrow$ на $[a,b]$

2) $f(x)\frown$ на $[a,b] \Leftrightarrow f'(x)\downarrow$ на $[a,b]$

Д-во: I Необходимость $\quad a \quad x_1 \quad x_1' \quad x_2' \quad x_2 \quad b$

$a\le x_1<x_1'<x_2'<x_2\le b$

Рассм. ф-ю углов. коэфф-ов $\varphi_{x_1}(x_1')=\varphi_{x_1'}(x_1)$ [т.к $\varphi\uparrow$]

$\varphi_{x_1}(x_1')=\varphi_{x_1'}(x_1)\le\varphi_{x_1'}(x_2')=\varphi_{x_2'}(x_1')\le\varphi_{x_2'}(x_2)=\varphi_{x_2}(x_2')$ Пусть $x_1'\to x_1+0$, $x_2'\to x_2-0$

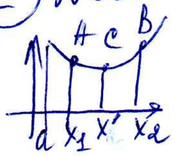
$\varphi_{x_1}(x_1')\le\varphi_{x_2}(x_2')$;

$\varphi_{x}(x_1')=\underbrace{\frac{f(x_1')-f(x_1)}{x_1'-x_1}}_{f'(x_1)}$; $\quad \varphi_{x_2}(x_2')=\underbrace{\frac{f(x_2')-f(x_2)}{x_2'-x_2}}_{f'(x_2)}$;

$f'(x_1)\le f'(x_2)\Rightarrow f'(x)\uparrow$ на $[a,b]$

2) Ан-но.

II Достаточность. Пусть $f'(x)\uparrow[a,b]$. Докажем, что $f(x)\smile[a;b]$



$k_{AC}=\frac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1}=$ по Лагранжа $=\frac{f'(c)(x'-x_1)}{x'-x_1}=f'(c)$, $c<x'$

$k_{CB}=\frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}=\frac{f'(d)(x_2-x')}{x_2-x'}=f'(d)$, $d>x'$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к $c\le d$, то $f'(c)\le f'(d)\Rightarrow k_{AC}\le k_{CB}\Rightarrow f(x)\smile[a,b]$

2) Д-ся ан-но.