59. Рациональные функции. Целая часть рациональных функций. Формулировка теоремы о разложении правильной рациональной ф-ии на сумму простейших рациональных функций.

Опр. Функция вида $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q – многочлены, наз-ся рациональной ф-ей

Опр. 1) $P(x)$ многочлен и $Q(x)\equiv 1$ мн-н, то наз-ся целой рациональной ф-ей.

2) $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $\deg P<\deg Q$ наз-ся правильной рац-й ф-ей.

Теор.: Всякая рацион-я ф-ия представленная в виде суммы целой рациональн. ф-ии $A(x)$ и правильной рац. ф-ей $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ с тем же знаменателем $Q(x)$, т.е $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$

Д-во: Поделим $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком, т.е $\exists A(x)$ и $\exists P_1(x)$ $P(x)=A(x)\cdot Q(x)+P_1(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$

$\deg P_1<\deg Q$;

Опр. Простейшие рац-ые ф-ии – ф-ии вида

1) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, где $A\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$

2) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, где $B,C,p,q\in\mathbb{R}$, $p^2-4q<0$, $m\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ наз-ся простейшими рац. ф-ми

Теор. (О разложении правильной рац-й ф-ии на простейшие) Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – прав. рац. ф-ия, т.е $\deg P<\deg Q$, а $Q(x)=a_0$

$Q(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}$

Разложим на лин. квадратичн. множит. знаменатель $Q(x)$, т.е $a_0\neq 0$ старш. коэф-т

$\alpha_1\dots\alpha_s$ - все попарно различные корни $Q(x)$ кратности $k_1\dots k_s$ соответ-о

$(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}=(x-z_j)^{m_j}(x-\bar{z}_j)^{m_j}$ где $z_j, \bar{z}_j$ пары комплексно сопряженных корней $Q(x)$ кратн. m_j

Тогда $\exists A_{i1},\dots A_{ik_i}$ и $\exists B_{j1},\dots B_{jm_j}$, $C_{j1},\dots C_{jm_j}$ для которых $(1\le i\le s;\ 1\le j\le t)$ $j=1\dots t$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\dots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\dots+\frac{A_{s1}}{(x-\alpha_s)^1}+\dots+\frac{A_{sk_s}}{(x-\alpha_s)^{k_s}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\dots+$$

$$+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\dots+\frac{B_{tm_t}x+C_{tm_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}}$$

$k_1+\dots+k_s+m_1+\dots+m_t$ число простейших коэфф.

число коэф $A,B,C=k_1+\dots+k_s+2m_1+\dots+2m_t=n$

где $n=\deg Q(x)$

Д-во: (частичное)

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg P<\deg Q$. Пусть α вещ. корень $Q(x)$ крат-ти $k\in\mathbb{N}$, тогда $Q(x)=(x-\alpha)^kQ_1(x)$, $\deg Q_1(x)=n-k$

$n=\deg Q$, $a_0\equiv$ ст. коэф. Q и Q_1

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\dots+\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=A_1(x-\alpha)^{k-1}+\dots+A_{k-1}(x-\alpha)+A_k+\frac{P_1(x)(x-\alpha)^k}{Q_1(x)}, \text{ если}$$

$x=\alpha \Rightarrow A_k=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}\Rightarrow$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}=\frac{P(x)-A_kQ(x)}{(x-\alpha)^kQ_1(x)}=\frac{P_{11}(x)(x-\alpha)}{(x-\alpha)^kQ_1(x)}=\frac{P_{11}(x)}{Q_1(x)(x-\alpha)^{k-1}}$$

$\deg P_{11}=\deg P_1-1<n-1$ – прав рац. ф-ия

$A_{k-1}=\frac{P_{11}(\alpha)}{Q_1(x)}$ ан-но до тех пор, пока не получим

$A_1=\frac{P_{1m}(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A_1}{x-\alpha}-\dots-\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

$\deg P_1<\deg Q_1$ при таком действии все коэф. однозначны – т.е ед-ть разложения.