57 Формулировка основной теоремы высшей алгебры. Теорема о разложении мн-а с комплексными коэф-ми на линейные множ-ли.

теор. (осн. высш. алг.): Пусть $P(Z) = C_0 Z^n + \ldots + C_n$ многочлен степени $n \geq 1$ с комплексн. коэф-ми $C_0 \neq 0, \ldots C_n$ тогда $\exists\, Z_0 \in \mathbb{C}$, $P(Z_0) = 0$, т.к. Z_0 корень мн-а $P(Z)$

теор. (о разлож.) Пусть $P(Z) = C_0 Z^n + \ldots + C_n$, $C_0 \neq 0$, $n \geq 1$

Тогда $\exists\, Z_1, Z_2, \ldots, Z_s \in \mathbb{C}$ попарноразличные, яв-ся корнями $P(Z)$, кратности $k_1, \ldots k_s$ соответственно, такие, что $P(Z) = C_0 (Z - Z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (Z - Z_s)^{k_s}$,

$k_1 + \ldots + k_s = n$ и такое разложение единств-ое с точностью до порядка множителей.

Д-во: база $n = 1$, Z_0-корень $P(Z) = C_0 (Z - Z_0)$, Z_0 корень кратности 1

переход: $\exists\, Z_1 \in \mathbb{C}$ корень $P(Z_1) = 0$. По т. Безу

$P(Z_1) = (Z - Z_1)^{k_1} \cdot Q(Z_1)$ где $Q(Z_1) \neq 0$. старшая степень равна $n - k_1$, $\deg Q = n - k_1$

По индукционному предположению

$Q(Z) = C_0 (Z - Z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (Z - Z_s)^{k_s} \Rightarrow$

$P(Z) = C_0 (Z - Z_1)^{k_1} \ldots (Z - Z_s)^{k_s}$

$\Rightarrow Z_2 \ldots Z_s$ корни $P(Z)$ кратности $k_2 \ldots k_s$

$k_2 + \ldots + k_s = n - k_1 \Rightarrow k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$

Следствие: Пусть $P(Z) = C_0 Z^n + \ldots + C_n$, $C_0 \neq 0$, $n \geq 1$

Тогда число S попарно различн. корней $P_Z \leq n$; $\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{S\text{ раз}} - S \leq k_1 + \ldots + k_s = n$