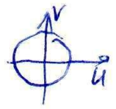
(68) Интегралы вида $\int R(x; \cos x; \sin x)dx$. Универсальная тригоном. подстановка. Другие методы интегр-я

Примеры:

$$\int R(x;\cos x;\sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

L: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$u^2+v^2=1$



$t=tg\frac{x}{2}$, $x=2arctg\frac{x}{2}$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Универсальная тригонометрическая подстановка (УТП)

Пример: $\int\frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right] = \int\frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)} = \int\frac{2dt}{1-t^2} = \int\frac{2dt}{(1-t)(1+t)} = \int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= \int\frac{dt}{1-t}+\int\frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t|+\ln|t+1|+c = \ln\left|\frac{t+1}{1-t}\right|+c = \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+c =$$

т.к. $tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\frac{x}{2}+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\frac{x}{2}\cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{tg\frac{x}{2}+1}{1-tg\frac{x}{2}}$, то $= \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

Другие приемы:

а) $\int R(\sin x)\cos x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{matrix}\right] = \int R(u)du.$

б) $\int R(\cos x)\sin dx = \left[\begin{matrix} u=\cos x\\ du=-\sin x\,dx\end{matrix}\right] = -\int R(u)du.$

в) $\int\cos^n x\sin^m x\,dx =$
- если $n=2n+1$ (нечет), то $\cos^n x = (1-\sin^2 x)^{n_1}\cdot\cos x \Rightarrow (а)$
- если $m=2m+1$, то $\sin^n x = (1-\cos^2 x)^{m_1}\cdot\sin x \Rightarrow (б)$
- если $n=2n$ (четн) $m=2m$ | то $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$, $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Пример: $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{2}dx = \frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot(1+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{8}\int(\sin^2 2x+\sin^2 2x\cdot\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,(\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\int\frac{(1-\cos 4x)}{2}dx + \frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}d(\sin 2x) = 1\,x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

г) $\int R(tg x)dx = \left[\begin{matrix} t=tg x\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right] = \int\frac{R(t)dt}{1+t^2}$

$\int R(a^x)dx = \left[\begin{matrix} t=a^x\\ x=\log_a t\\ dx=\frac{dt}{t\cdot\ln a}\end{matrix}\right] = \frac{1}{\ln a}\int\frac{R(t)dt}{t}$

$a>0, a\neq 1$

$\int R(ch x, sh x)dx$ можно находить как с УТП.