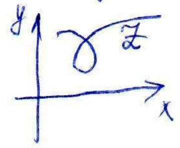
(65) Метод рационализации. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Случай $a>0$. Пример.

Метод рационализации:

Пусть Z некоторая прямая линия на плос-ти Oxy



которая допускает рациональную параметризацию $\varphi(t), \psi(t)$ - рацион. ф-ии от t.

$$Z \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

$(x,y)\in Z \Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R},\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$

Рассм. ф-ию $R(x,y)$ - рац. ф-ия от 2х переменных x и y,

тогда $\displaystyle\int\limits_{(x,y)\in Z} R(x,y)dx = \left[\begin{matrix} x=\varphi(t) & dx=\varphi'(t)dt \\ y=\psi(t) & \end{matrix}\right] = \int \underbrace{R(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'_t}_{\text{рац. ф-ия от } t}\,dt$

(1) Подстановка Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

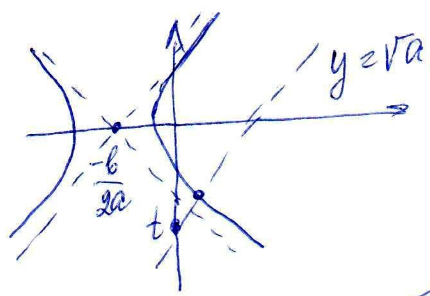
а) $a>0$

$$= \int R\left(\frac{c-t^2}{2\sqrt{a}t-b};\ \frac{c\sqrt{a}-\sqrt{a}t^2}{2\sqrt{a}t-b}+t\right)\left(\frac{c-t^2}{2\sqrt{a}t-b}\right)'_t dt$$

$a\neq 0, a>0$

$Z: \begin{cases} y=\sqrt{ax^2+bx+c} \\ b^2-4ac\neq 0 \end{cases}$; $L_1: y^2=ax^2+bx+c$

$L_1: y^2 = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ - гипербола



$y=\sqrt{a}x+t$ (асимптота)

$ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2=ax^2+bx+c \Rightarrow$

$x=\dfrac{c-t^2}{2\sqrt{a}t-b}=\varphi(t)$ рац. ф-ия.

Подстановка Эйлера

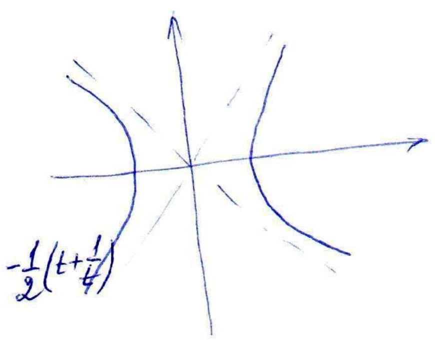
$y=\dfrac{c\sqrt{a}-\sqrt{a}t^2}{2\sqrt{a}t-b}+t=\psi(t)$ рац. ф-ия.

Пример.

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int\frac{(t^2-1)dt}{t} = \frac{1}{2}\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{4}-\frac{1}{2}\ln|t|+C =$$
$$= \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

$y=\sqrt{x^2-1}$

$L_1: x^2-y^2=1$



$y=x+t$

$x-y=-t$

$x^2-x^2-2xt-t^2=1$

$x=-\dfrac{t^2+1}{2t}=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2t}=-\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$

$dx=-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)dt$

$y=-\dfrac{t^2+1}{2t}+t=\dfrac{t^2-1}{2t}$