58. Многочлен с вещественными коэфф-ми. Свойства комплексных корней. Теорема о разложении многочлена с вещест. коэф-ми на линейные и квадратичные множ-ли.

Опр. $P(z)=a_0z^n+\dots+a_n$, $a_0\ne 0$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$
тогда $P(z)$ многочлен с вещест. коэф-ми.

Теорем.: Пусть $P(z)=a_0z^n+\dots+a_n$, $a_0\ne 0$, $n\ge 1$ мног-н с вещ. коэф-и.
Если z_0 корень комплексный мн-а $P(z)$ кратности $k\ge 1$, то комплексн. сопряженное число $\bar z_0$ также является корнем $P(z)$ такой же кратности.

Д-во: 1) Если $z_0\in\mathbb{R}$, то $\bar z_0=z_0$ и утв. верно.
2) $z_0=\alpha+\beta i$ где $\beta\ne 0$, $z_0\ne\bar z_0$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$\bar a_0=\bar a_1\dots\bar a_n=a_n$, $\bar 0=0$
$0=P(z_0)=a_0z_0^n+\dots+a_n\Rightarrow 0=\bar 0=\overline{a_0z_0^n+\dots+a_n}=$
$=\overline{a_0z_0^n}+\dots+\overline{a_n}=\bar a_0\cdot\overline{z_0^n}+\dots+\bar a_n$
$\bar a_0=a_0$, $\bar a_1=a_1\dots\bar a_n=a_n\Rightarrow 0=a_0\bar z_0^n+\dots+a_n=P(\bar z_0)\Rightarrow$
$\Rightarrow P(\bar z_0)=0$, корень $P(z)$
Имеем $P(z_0)=0$, $P'(z_0)=0$, $P^{(k-1)}(z_0)\ne 0$, если бы
$P^{k}(\bar z_0)=0\Rightarrow P^{(k)}(\bar z_0)=0=P^{k}(z_0)=0\Rightarrow$
$\bar z_0^{\,k}$ — корень кратности k

Теорема! Пусть $P(z)=a_0z^n+\dots+a_n$, $a_0\ne 0$, $n\ge 1$, $a_1\dots a_n\in\mathbb{R}$, тогда
$P(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{m_t}$, где
a_0 — это ст. коэф. $P(x)$, $\alpha_1\dots\alpha_s$ все вещест. попарно различн. корни мн-на $P(x)$ кратности $k_1\dots k_s$ соотв-но, $s\ge 0$
$(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}=(x-\bar z_j)^{m_j}(x-z_j)^{m_j}$ где $z_j=\alpha_{s+j}+i\beta_j$
$\beta_j>0$, $\bar z_j=\alpha_{s+j}-i\beta_j$ соответств. все попарно различн. пары $(z_j,\bar z_j)$ компл. сопряж.-х корней кратности m_j многочлена
$1\le j\le t$, $t\ge 0$
Такое разложение единственно с точностью до порядка многочлена.

Д-во: $(x-z_0)(x-\bar z_0)=(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=$
$=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$
$p=-2\alpha\in\mathbb{R}$, $q=\alpha^2+\beta^2>0$, $D=p^2-4q=4\alpha^2-4\alpha^2-4\beta^2=-4\beta^2<0$
$(x^2+px+q)^m=(x-z_0)^m(x-\bar z_0)^m$.