79. Свойства интегралов с переменным верхним пределом: непрерывность, дифф-ть

Опр. Пусть $f(x) \in R_{[a;b]}$ Тогда ф-ия $f(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$) опр-на на $[a,b]$ и наз-ся интегралом с переменным верхним пределом.

1°. Теорема: (о непр. интегр. с перем. верх. пр.)

Пусть $f(x) \in R_{[a,b]}$, тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на $[a;b]$.

Д-во: $f(t) \in R_{[a;b]} \Rightarrow f(t)$ ограничена на $[a,b]$ т.е

$\exists M > 0 \ \forall t \in [a;b] \quad |f(t)| \le M$

Возьмем $x_0 \in [a,b]$ и выберем h, так, что $(x_0+h) \in [a,b]$, $(h \to 0)$

тогда $f(x_0+h) - f(x_0) = \int\limits_a^{x_0+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$

$$\Rightarrow |f(x_0+h) - f(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|dt\right| \le M\left|\int\limits_{x_0} dt\right| =$$

$$= M|h| \Rightarrow 0 \le \underbrace{|F(x_0+h) - F(x_0)|}_{\downarrow\, 0} \le M|h| \Rightarrow \exists \lim_{\substack{h\to 0 \\ x+h \in [a,b]}} F(x+h) = F(x_0) \Rightarrow$$

$h \to 0$

$\Rightarrow F(x) \in C_{[a,b]}$

2° Теор.: (Барроу): Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$, тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифф-ма на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Д-во: $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a;b]$ $\quad \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c$ между x_0 и x_0+h, $\dfrac{f(c)(x_0+h-x_0)}{h} = f(c)$ при $\left.\begin{matrix} h\to 0 \\ c \to x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$f(c) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h+x_0 \in [a,b]}} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad F'(x) = f(x).$

Зам. $\forall f(x) \in C_{[a,b]} \quad \exists \underset{\text{первообр.}}{F(x)} = \int\limits_a^x f(t)dt$, $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$