(18) Неопределенности и раскрытие неопределенностей. Предел $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ т.к $\left.\begin{array}{l}\lim f(x)=\infty\\ \lim g(x)=\infty\end{array}\right| \Rightarrow [\infty-\infty]$ Предел яв-ся неопред-ю вида $[\infty-\infty]$.

Пример $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$ раскрыли неопред-ть.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=[0-\infty]$ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$

$[\frac{0}{0}]$ $[\frac{\infty}{\infty}]$ $[1^{\infty}]$ $[\infty^{0}]$ $[0^{\infty}]$ $[0^{0}]$

Пример $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $[1^{\infty}]$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ $[1^{\infty}]$

1) $x\to 0+0$ $\{x_n\}\downarrow$ $x_n\to 0\ (n\to\infty)$ $0<x_n<1$

$k_n=\left[\frac{1}{x_n}\right]\in\mathbb{N}$, $k_n\le\frac{1}{x_n}<k_n+1$; $\frac{1}{k_n}\ge x_n>\frac{1}{k_n+1}$; $\frac{1}{k_n+1}<x_n\le\frac{1}{k_n}$.

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\le\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)}_{\to 1}\to e$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

e

2) $-1<x_n<0$ $\{x_n\}\uparrow$ $x_n\to 0-0\ (n\to+\infty)$

$y_n=-x_n$ $\{y_n\}\downarrow$ $y_n\to 0+0\ (n\to+\infty)$

$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=(1-y_n)^{-\frac{1}{y_n}}$; $1+z_n=\frac{1}{1-y_n}$, $z_n=\frac{y_n}{1-y_n}\in(0;1)$

$1-y_n=\frac{1}{1+z_n}$, $z_n\to 0\ (n\to\infty)$

$y_n=1-\frac{1}{1+z_n}=\frac{z_n}{1+z_n}$.

$$(1+z_n)^{\frac{1}{y_n}}=(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}+1}=\underbrace{(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}}}_{\to e}\underbrace{(1+z_n)}_{\to 1}\to e\ (n\to\infty)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$