

49) Критерий выпуклости в терминах второй производной. Выпуклость ф-ции касательное.

теор. (Критерий вып-ти в терм. втор. произв.)

Пусть $f(x) \in C^2_{[a,b]}$, тогда

$$1) f(x) \cup_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f''(x) \geq 0 \quad 2) f(x) \cap_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f''(x) \leq 0$$

Д-во: 1) $f(x) \cup_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow f'(x) \uparrow_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow (f'(x))' = f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

2) $f(x) \cap_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow f'(x) \downarrow_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow (f'(x))' = f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

теор. (Крит. выпуклости в терм. касательной)

Пусть $f(x) \in C^2_{[a,b]}$, тогда

1) $f(x) \cup_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow \forall x_0$ график ф-ции лежит выше касательной к графику ф-ции $f(x)$ в т. x_0 .

2) $f(x) \cap_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow \forall x_0$ график ф-ции лежит ниже касательной к гр. ф-ции в т. x_0

Д-во: 1) Пусть $x_0 \in (a,b)$. По формуле Тейлора

$$\forall x \in (a,b) \quad \exists c \in [x_0, x] \quad f(x) = f(c) + f'(c)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2} \cdot (x-x_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = f(c) + f'(c)(x-x_0) \Rightarrow f(x) - y = \frac{f''(c)}{2} (x-x_0)^2 \geq 0$$

$$f(x) \cup_{\text{на}} [a,b] \Leftrightarrow \forall c \in (a,b) \quad f''(c) \geq 0 \Rightarrow f(x) - y \geq 0, \quad f(x) \geq y \Rightarrow$$

точка графика ф-ции $f(x)$ лежит выше точки касательной.

2) Аналог.