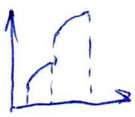
76 Теорема об интегрируемости монотонных ф-ий.

<u>Теорема</u> Пусть $f(x)$ опр. и монотонна на $[a;b]$, тогда $f(x) \in R_{[a;b]}$ [Всякая монотонная ф-ия интегрируема на этом отрезке.]

<u>Д-во:</u> $f(x)\uparrow$ на $[a,b]$ $f(a)<f(b)$ Произв. разбиение $T: x_0=a<\ldots<x_n=b$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0$ $\forall$ разб. T отрезка $[a,b]$ ранга $\lambda_T<\delta$, $0\le S_T-s_T=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$



$x\in[x_{k-1};x_k]$ $\quad m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)=f(x_{k-1})$

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)=f(x_k)$$

тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}_{>0}\underbrace{\Delta x_n}_{\lambda_T<\delta}<\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\delta=$$

$$=\delta(f(x_1)-f(a)+f(x_2)+\ldots+f(b)-f(x_{n-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a))\le\varepsilon$$

$$|S_T-s_T|<\varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\lambda_T\to 0}(S_T-s_T)=0 \Rightarrow f(x)\in R_{[a,b]}$$

и