55. Многочлены, их степень и старший коэффициент. Сумма и произведение многочленов. Тождественное равенство многочленов. Деление многочленов с остатком.

Опр. Многочлен степени n с комплексными коэфф-ми $c_0 \neq 0, c_1, \dots c_n$ комплексных переменных $z \in \mathbb{C}$ вида

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

При этом степень $n = \deg P \geq 0$, c_0 — старший коэф-т $P(z)$.

↑старшая степень.

Многочлен тождественно равный 0 и $\deg(0) = -\infty$ (все коэф-ты равны 0)

Зам. $P(z) \cdot Q(z) = (a_0 z^n + \dots + a_n)(b_0 z^m + \dots + b_m) = a_0 b_0 z^{n+m} + \dots + a_n b_m$ — многочлен. Старший коэф-т $P(z)Q(z)$ равен произведению ст. к $P(z)$ на ст. коэф. $Q(z)$, степень равняется сумме высших степ-й

Теор. 1 (о делении мн-ов с остатком) Пусть P, Q многочлены, $Q \neq 0$, тогда $\exists$ мн-ны $A(z)$ и $R(z)$, $\deg R(z) < \deg Q$, такие что $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = A(z) \cdot Q(z) + R(z)$.

$A(z)$ — неполное частное $R(z)$ — остаток от дел.

Д-во: на примере. $P(z) = 2z^3 - 3z + 4$ $Q(z) = z^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2z^3 - 3z + 4 & z^2 - 1 \\ \cline{2-2} 2z^3 - 2z & \underbrace{2z}_{=A} \\ \cline{1-1} \underbrace{-z + 4}_{=R} & \end{array}$$

$2z^3 - 3z + 4 = 2z(z^2 - 1) - z + 4$

$P = AQ + R$

теор. (о тождеств-ом равенстве) Пусть $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $Q(z) = b_0 z^m + \dots + z_m$, $b_0 \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) = Q(z)$, тогда

1) $m = n$ 2) $a_0 = b_0 \dots a_n = b_m$

Д-во! $T(z) = P(z) - Q(z) = c_0 z^k + \dots + c_k$, $c_0 \neq 0$, $k = \deg T(z)$

методом от противного! $T(z) \neq 0$. Возьмем $z = x \in \mathbb{R}$ $T(x) = T_1(x) + iT_2(x) + \dots$, если $T_1 \neq 0$, тогда $c_0 = c_0' + ic_0''$, $c_0' \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $c_0' x^k + \dots + c_n' = 0$, $c_0' + \frac{c_1'}{x} + \dots + \frac{c_n'}{x^n} = 0 \ (x \to \infty)$, получили против-е усл. $c_0' \neq 0$. ч.т.д.