(20) Теорема о применении эквивалентных б.м. при вычислении lim. Беск. малые более высокого порядка малости. Критерий эквивалентности б.м. Символ O-малое.

__теорема__ (об использ. экв. б.м. при выч. пределов)
Пусть $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ – б.м при $x\to a$ и выполн. усл:
1) $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ $(x\to a)$ 2) $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$, $A\in R$

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$.

__Д-во__: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\exists\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\cdot A\cdot 1=A$$

__Опр__. Пусть $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ б.м. при $x\to a$, тогда $\gamma(x)$ явл-ся б.м более высокого порядка малости чем $\alpha(x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=0$. При этом $\gamma(x)=o(\alpha(x))$ $(x\to a)$
„o"-малое" символ Ландау.

__теорема__ (критерий эквив. б.м) Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м $x\to a$
тогда $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(x\to a)\Leftrightarrow\gamma(x)=\beta(x)-\alpha(x)$ б.м. более высокого порядка малости, где $\alpha(x)$
т.е $\beta(x)-\alpha(x)=o(\alpha(x))$ $(x\to a)$

__Д-во__: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}-1\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)-\alpha(x)}{\alpha(x)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\beta(x)-\alpha(x)=o(\alpha(x))$.

__Замеч.__ $f(x)=g(x)+o(\alpha(x))$ $(x\to a)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha(x)$ - б.м $(x\to a)$
$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=o(\alpha(x))$ $(x\to a)$

__Зам.__ $\alpha(x)=o(x-a)$ $(x\to a)$ $\alpha(x)=o(1)$ $(x\to a)$
$\alpha(x)$ – б.м. при $x\to a$.