(24) Определение монотонной на отрезке функции. Теорема о точках разрыва монотонной функции.

Опр 1. Пусть функция $f(x)$ определена на (a, b), тогда

1) $f(x)$ возрастает на $(a; b) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a, b) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$

Обозначение $f(x) \uparrow$ на $(a; b)$

2) $f(x)$ убывает на $(a; b)$ если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$

3) $f(x)$ монотонна на $(a; b)$, если $f(x) \uparrow$ на (a, b) или $f(x) \downarrow$ на $(a; b)$

Теорема 1 (о точках разрыва монотонной ф-ии)

Пусть $f(x)$ монотон. на $(a; b)$, тогда все точки разрыва явл. т. разрыва I рода.

$\forall x_0 \in (a; b)$ $\exists f(x_0 - 0)$ $\exists f(x_0 + 0)$. Причем если

$f(x) \uparrow (a; b)$, то $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$

Если $f(x) \downarrow (a; b)$, то $f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + 0)$

Д-во: Пусть $f(x)$ возрастает на $(a; b)$. Выберем $x_0 \in (a; b)$

Докажем существование $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$

Множество $E_0^- = \{ f(x) \mid x \in (a; x_0) \}$ $\forall x \in (a; x_0)$, $x \leq x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow E_0^-$ огранич. сверху $\exists M \in \mathbb{R}$, $M = \sup E_0^-$

При этом 1) $\forall x \in (a; x_0)$ $f(x) \leq M$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in (a; x_0)$ $M - \varepsilon < f(x')$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = x_0 - x'$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow x' < x < x_0$ т.к. $x' < x_0$

$f(x') \leq f(x) \Rightarrow M - \varepsilon < f(x') \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$

$\exists \delta > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ $|f(x) - M| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) < M = f(x_0 - 0)$

M - sup $\Rightarrow M \leq f(x_0)$ верхняя граница $E_0^- \Rightarrow$

$f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$

Аналогично док-ся, что $\exists f(x_0 + 0)$ $\inf E_0^+$

$f(x_0) \leq f(x_0 + 0) = \inf E_0^+ = \{ f(x) \mid x \in (x_0; b) \}$

Аналогично для $f(x) \downarrow$ на $(a; b)$