12. Число e как предел последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$. Доказательство сходимости этой последовательности (с леммами 1 и 2)

Лемма 1. (Неравенство Бернулли): $\forall n \geq 1 \ \forall x \geq -1 \ (1+x)^n \geq 1+nx$

Д-во: методом мат инд по n

базис $(1+x)^1 = 1+x$, $(1+x)^2 \geq 1+2x$

предположим, что $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)^n$, тогда

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x(1+n)+nx^2$, что $\geq 1+nx$

$\Rightarrow$ нер-во верно.

теорема 2 (Число Непера / число Эйлера):

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2,71828\ldots$

Д-во: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\{y_n\} \searrow$ и ограничен снизу

$y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ (по лемме 1) $\geq 1+\frac{n+1}{n} = 2+\frac{1}{n} > 2 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$, т.к. $e \geq 2$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}} = \frac{e}{1} = e.$$

Лемма 2; Пусть $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, тогда $\{y_n\} \searrow$.

Д-во: $\forall n \geq 1 \ y_n > 0$, $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} =$

$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}$ по лемме 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$

$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow \{y_n\} \searrow$