78 Свойства опр-го инт-а, выраженные неравенствами. Теорема о среднем значении.

2° Св-ва выр-ые нер-ми.

4) Пусть $f(x) \in R_{[a;b]}$ и $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq 0, \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

<u>Д-во:</u> $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_n}_{>0} \geq 0$ при $\lambda_T \to 0$

$\to \int_a^b f(x)dx \geq 0.$

5) интегрирование неравенств

Пусть $f(x), g(x) \in R_{[a;b]}$ $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \leq g(x)$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

<u>Д-во:</u> $g(x)-f(x) \in R_{[a;b]}$ $\forall x \in [a;b]$ $g(x) \cdot f(x) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)-f(x) \geq 0$ $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx) \geq \int_a^b f(x)dx.$

6) Оценка сверху модуля интеграла.

$f(x) \in R_{[a;b]} \Rightarrow f(x) \in R_{[a,b]}$ и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

<u>Д-во:</u> $\forall x \in [a;b]$ спр-во: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq$

$\leq \int_a^b f(x)dx \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right| \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

<u>теорема</u> (о ср. знач.)

Пусть $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$ и $\forall x \in [a;b]$ $g(x) \geq 0$ $\int_a^b g(x)dx > 0$

Тогда $\exists c \in [a;b]$ $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$. В частности

$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Д-во! Пусть $\left.\begin{matrix} m = \min f(x) \\ M = \max f(x) \end{matrix}\right\}$ $x \in [a,b]$, тогда $\forall x \in [a;b]$

$m \leq f(x) \leq M \mid \cdot g(x) \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$

$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M \Rightarrow$ по Т о промеж знач. $\exists c \in [a;b]$ $f(c) =$

$= \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

При $g(x) \equiv 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx) = f(c)(b-a).$