(7) Теорема о предельном переходе в неравенствах. Принцип сжатой переменной.

__Теорема:__ Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \neq 0$, тогда $\exists n_0 \in N$ $\forall n \geq n_0$, $|x_n| > \frac{|a|}{2} > 0$

__Д-во:__ Возьмем $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$, найдем такое n_0, что $\forall n \geq n_0$ $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$,

$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$

1) $a>0$ (левая часть), $x_n > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} = \frac{|a|}{2} \Rightarrow x_n > \frac{|a|}{2}$

2) $a<0$ (правая часть), $x_n < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ $0 \Rightarrow -\frac{a}{2} < -x_n \Rightarrow \frac{|a|}{2} < x_n$
$(|a| = -a)$ ч.т.д.

__Теорема:__ Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ две послед-ти, в которых

1) $\forall n \geq 1$, $x_n \leq y_n$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $\}$, тогда $a \leq b$ $(n\to\infty)$.

__Д-во:__ Методом отрпрот-го. $x_n \leq y_n$ $(n \geq 1)$ $x_n \to a$, $y_n \to b$ $(n\to\infty)$, $a > b$

Возьмём $\varepsilon = \frac{a-b}{3} > 0$. 1) $\exists N_1 \in N$ $\forall n \geq N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \underline{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon$

2) $\exists N_2 \in N$ $\forall n \geq N_2$ $|y_n - b| < \varepsilon \Rightarrow$ $b - \varepsilon < \underbrace{y_n < b + \varepsilon}$ 3) Мы предположили, что a должно быть больше b, тогда имеем $a - \varepsilon > b + \varepsilon$; $2\varepsilon < b - a$;

$\frac{2}{3}(b-a) < (a-b) \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 1$ (при $a > b$).

$N = \max\{N_1; N_2\}$ $\forall n \geq N$ верно след-ее: $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n \Rightarrow$ противоречит условию $x_n \leq y_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq N$ $y_n < x_n$, что

$\Rightarrow$ предполож. неверно $\Rightarrow a \leq b$ ч.т.д.

__Теор.__ (Принцип сжатой переменной): пусть $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$ – посл-ти удовл. услов.: 1) $\forall n \geq 1$, $x_n \leq z_n \leq y_n$ и 2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, т.е $x_n \leq z_n \leq y_n$, $\to a \leftarrow$ $(n\to\infty)$.

__Д-во:__
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ $\forall n \geq N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon$, $\underline{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_2 \in N$ $\forall n \geq N_2$ $|y_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < \underline{y_n < a + \varepsilon}$ $\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N = \max\{N_1; N_2\}$, $\forall n \geq N$, $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in N$ $\forall n \geq N$, $a - \varepsilon < z < a + \varepsilon \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ ч.т.д.