(30) Теорема о произв-й обратной ф-ии. Примеры. Вычисление произв-х логарифмической ф-ии и обратных тригоном-х. ф-ий.

Теорема (об обр. ф-ии) Пусть $f(x)=y$ опред., непрер. и строго монотонна в $V(x_0)$. Предположим, что $f(x)$ дифф-а в x_0 и ее производная $f'(x_0)\neq 0$, тогда обратная ф-ия $x=f^{-1}(y)$ опред., непр. и строго монотонна в $V(y_0)$ где $y_0=f(x_0)$ и дифф-а в т. y_0 $\frac{df^{-1}(y_0)}{dy}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'_x(f^{-1}(y_0))}$

Д-во: $f^{-1}(y)$ опред. непр-а и строго монот.-а в т. y_0

$\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$; $y_0=f(x_0)$ $\exists x\in V(x_0)$, $y=f(x)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$

$x=f^{-1}(y)$, $y\neq y_0$; $x\neq x_0$ в силу строгой монотонности обр-й ф-ии $\Rightarrow \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$, если $y\to y_0$, $x\to x_0$, непрерывность ф-ии $f^{-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f'_x(x_0)}$ $(y\to y_0)$ функция определена в т. y_0 $(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'_x(x_0)}=\frac{1}{f'_x(f^{-1}(y_0))}$

Примеры: 1) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x=e^x=f(y)$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(x)=\ln x$, $(e^y)'=e^y$ $\Rightarrow(\ln x)'=\frac{1}{e^y}=[y=\ln x]=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$.

2) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $(\sin y)'=\cos y>0$ $y\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=[y=\arcsin x]=\frac{1}{\cos\arcsin x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y=\arccos x$, $x=\cos y$, $(\cos y)'=-\sin y \underset{<0}{\neq 0}$ $\in(0;\pi)$

$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sin y}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $(\operatorname{tg} y)'=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2>0$.

$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$

5) $(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$, $y=\operatorname{arcctg} x$, $x=\operatorname{ctg} y$, $(\operatorname{ctg} y)'=\frac{-1}{\sin^2 y}=(-1)(1+\operatorname{ctg}^2 y)=$

$=(-1)(1+x^2)$.

$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$.