(14) Определение фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Лемма об ограниченности фундаментальной последовательности.

Опр. 1: Последов-ть $\{x_n\}$ наз-ся фундаментальной (или послед-ю Коши или посл-ю сходящейся в себя) если удовлетв. след.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

Теорема (Об ограниченности фунд. посл.): Пусть $\{x_n\}$ - фунд. посл. тогда $\{x_n\}$ огр. послед., т.е.
$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leq M$.

Д-во: $\{x_n\}$ фунд. посл. Возьмем $\varepsilon = 1 > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall p \geq 1$ $|x_{n+p} - x_n| < 1$, $M_1 = \max\{|x_1|, \ldots |x_n|\}$ $\forall n \in \{1, 2, 3, \ldots N\}$ $|x_n| \leq M_1$

$\forall n > N$ $p = n - N \in \mathbb{N}$ $|x_n| = |x_{N+p}| = |(x_{n+p} - x_n) + x_n| \leq |x_{n+p} - x_n| + |x_n| <$

$< 1 + |x_n| = M_2$

$\forall n \geq N+1 \quad |x_n| \leq M_2 > 0$

$M = \max\{M_1, M_2\} > 0 \quad \forall n \geq 1$ либо $n \leq N \Rightarrow |x_n| \leq M_1 \leq M$,

либо $n > N \Rightarrow |x_n| \leq M_2 \leq M \Rightarrow |x_n| \leq M$.