(43) Теорема о критерии монотонности и постоянства ф-ии.

теор: Пусть $f(x)$ определена и дифф-а на $(a;b)$, тогда

1) $f(x)\uparrow$ на $(a,b) \Leftrightarrow \forall x\in(a;b)\ f'(x)>0$

2) $f(x)\downarrow$ на $(a,b) \Leftrightarrow \forall x\in(a,b)\ f'(x)<0$

3) $f(x)=c$ постоянная на $(a,b) \Leftrightarrow \forall x\in(a,b)\ f'(x)=0$

Д-во: I) Необходимость. 1) $f(x)\uparrow$ на $(a,b) \Leftrightarrow \forall x\in(a,b)\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x\pm 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad \left[\begin{array}{c} x_0<x, \text{то } x-x_0>0 \\ \Downarrow \\ f(x_0)<f(x), \text{то } f(x)-f(x_0)>0 \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0,\ f'(x_0)\geq 0\ (\forall x\in(a,b))$$

2) $f(x)\downarrow$ на $(a,b) \Leftrightarrow \forall x, x\in(a,b)\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad \left[\begin{array}{l} x_0<x \Rightarrow x-x_0>0 \\ f(x_0)>f(x) \Rightarrow f(x)-f(x_0)<0 \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \Rightarrow f'(x_0)\leq 0\ (\forall x\in(a,b))$$

3) $$c'=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

II Достаточность. 1) $\forall x\in(a;b)\ f'(x)\geq 0$ Возьмем x_1, x_2 $a<x_1<x_2<b$

по т. Лагранжа $\exists c\in(a,b)$ $f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\geq 0$

$\forall x_1, x_2\in(a,b)$ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ т.е $f(x)\uparrow$ на (a,b)

2) $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)\leq 0$ $\forall x_1, x_2$ $a<x_1<x_2<b$ по т. Лагр-а.

$\exists c\in(a,b)$ $f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\leq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\leq 0$, $f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f(x)\downarrow$

3) $\forall x$ $f'(x)=0$, $x_0\in(a,b)$ $c=f(x_0)$ $\forall x\in(a,b)$ по т. Лагранжа

$f(x)-f(x_0)=\underset{\shortparallel\atop 0}{f'(c)}(x-x_0)=0$ $f(x)\ \forall x\in(a,b)$ $f(x)=f(x_0)=c$.