(75) Теорема об интегрируемости непрер-х на отрезке ф-ий.

теор. Пусть $f(x) \in C_{[a,b]}$, то $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, т.е $\exists \int\limits_a^b f(x)dx = I \in R$

Д-во: $f(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow f(x)$ равном. непр-а на $[a;b]$

$\forall \varepsilon>0,\ \frac{\varepsilon}{b-a}>0\ \exists \delta>0\ \forall x', x'' \in [a,b]\ |x'-x''|<\delta, |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Произведем разбиение: $\forall$разб. Т рант-а $\lambda_T<\delta$

$T: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

$\exists(\xi_1'\ldots\xi_n') \in [x_{k-1}; x_k]\ f(\xi_k'')=m_k$, т.е. $f(x)\in C_{[a,b]}$ достигает наименьшего m_k значения на к.

$\exists(\xi_k') \in [x_{k-1}; x_k]\ f(\xi_k')=M_k$

$S_T - s_T = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(f(\xi_k')-f(\xi_k''))\Delta x_n$

$0 \le M_k-m_k = |f(\xi_k')-f(\xi_k'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ т.к $|\xi_k'-\xi_k''| \le \Delta x_n \le \lambda_T<\delta$, то

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall$разб. Т ранга $\lambda_T<\delta,\ 0\le|S_T-s_T|<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)}=\varepsilon$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda_T\to 0}(S_T-s_T)=0 \Rightarrow f(x)\in R_{[a,b]}$ ($f(x)$ интегрируема на $[a,b]$)

Критерий Дарбу.