(54) Комплексные числа. Основные определения.

$N=\{1,2,3\dots\}$ $a+x=b$ $Z=\{0;\pm1;\pm2\dots\}$ $a\cdot x=b$

$Q=\{\pm\frac{p}{q} \mid p\in Z,\ q\in N\}$

$x^2=2$, $x\in R$, $x\notin Q$, R - веществ. числа, $x=\sqrt{2}$

Рассм. симв. ур-ие $x^2+1=0$, $x^2=-1$, $x\notin R$, C - комплексн. числа.

$\sqrt{-1}=i$

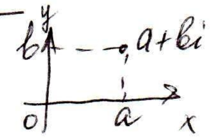
Опр. Пусть $a,b\in R$, тогда $z=a+bi\in C$ наз. комплексными, если в мн-ве C, заданы след-ие соотношения:

1) Равенство комплексных чисел $a_1+b_1i=a_2+b_2i \Leftrightarrow a_1=a_2,\ b_1=b_2$.
2) Сложение $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
3) Умножение на R, $\alpha\in R$, $(a+bi)\cdot\alpha=\alpha a+\alpha bi$
4) Умножение компл-х чисел $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=$

$=[i\cdot i=i^2=-1]=a_1a_2+a_2b_1i+a_1b_2i-b_1b_2=$

$=a_1a_2-b_1b_2+(a_2b_1+a_1b_2)i$

Зам. Геометрическое представление!



$a+bi$ - точка на комплексной плоскости

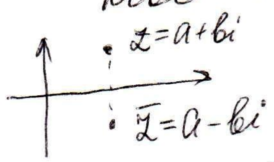
Ox - веществ. ось, $\{a+i0\}\Leftrightarrow\{a\}=R$, $R\subset C$, $a+i0=a$

Oy - мнимая ось $\{0+ib\}\Leftrightarrow 0+ib=bi$ - мнимое число

$a=Re(a+bi)$ - веществ. часть числа $a+bi$

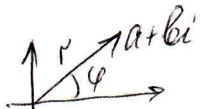
$b=Im(a+bi)\in R$ - мнимая часть числа

Зам. $z=a+bi \Rightarrow \bar z=a-bi$ число комплексно-сопряженное числу z



1) $\bar{\bar z}=z$
2) $\overline{(z_1+z_2)}=\bar z_1+\bar z_2$
3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar z_1\cdot\bar z_2$
4) $z+\bar z=2\,Re\,z$
5) $z-\bar z=2i\,Im\,z$
6) $z\bar z=a^2+b^2\in R$

Зам.



$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$ модуль комп. числа z

$\varphi=\arg z$ - аргумент комп. z; $tg\varphi=\frac{b}{a}$, $a\neq0$

$\varphi\in[0;2\pi)$ главное значение аргумента

$\varphi+2\pi k$, $k\in Z$ - аргумент z

$\begin{cases}a=r\cdot\cos\varphi\\ b=r\cdot\sin\varphi\end{cases}$

Зам. Тригонометрическая форма компл. числа - $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

1) $z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$=r_1r_2(\cos\varphi_1\quad\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1))=$

$=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

2) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2\pi k,\ k\in Z$

Зам. Деление комп-х чисел $z_1,z_2\in C$, $z_2\neq0$ это число

$\omega=\frac{z_1}{z_2}\Leftrightarrow z_1=\omega z_2$, $\omega=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l} r_1=\rho r_2\\ \varphi_1=\theta+\varphi_2-2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}\rho=\frac{r_1}{r_2},\ r_2\neq0 \text{ т.к. } z_2\neq0\\ \theta=\varphi_1-\varphi_2+2\pi k,\ k\in Z\end{array}$

2й способ: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar z_1}{z_2\bar z_2}=\frac{z_1\bar z_1}{|z_2|^2}=\omega$

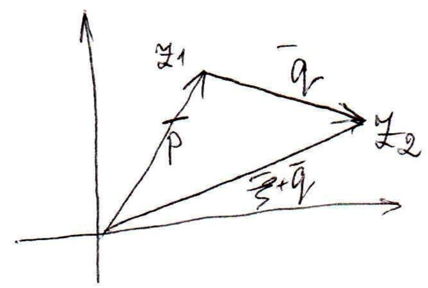
Пример: $\frac{2-i}{1+i}=\frac{(2-i)(i-1)}{(1+i)2}=\frac{1-3i}{(\sqrt{1^2+i^2})^2}=\frac{1-3i}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2+2\pi k,\ k\in Z$

Зам. 1) $|z_1-z_2|$ - расстояние между т. z_1 и т. z_2

$\bar p+\bar q$ по прав. треугольника $|q|=|z_1-z_2|$ расст-ие между точками



2) неравенство Δ

$\forall z_1,z_2\in C$ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$