(23) Теорема об ограниченности непр-й ф-ии на отрезке и теорема о достижимости ею своих наибольшего и наименьшего значений.

Теорема (об огранич-ти) Пусть $f(x)\in C_{[a,b]}$, тогда $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, т.е $\exists m, M\in R$ $\forall x\in[a,b]$ $m\le f(x)\le M$.

Д-во: От против-го: Предположим, что $f(x)$ не ограничена сверху $\forall M\ \exists x(M)\in[a,b]$ $f(x(M))>M$.

$I_1=[a_1,b_1]=[a,b]$, $f(x)$ не ограниченна сверху.

$I_2=[a_2;b_2]$, $b_2-a_1=\frac{b-a}{2}$, $I_2<I_1$, $f(x)$ не огранич. сверху на I_2

$I_n=[a_n;b_n]$, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0$ $I_n<I_{n-1}$ $f(x)$ не огранич. сверху на I_n

$\{I_n\}$ послед-ть вложенных отрезков. $\forall n\in N$ выберем $x_n\in I_n$

$f(x_n)>n$. По принципу вложенных отрезков $\exists c\in R$ $\forall n\in N$,

$c\in I_n$ $a_n\le x_n\le b_n$ $\Rightarrow x_n\to c\ (n\to\infty)\Rightarrow f(x_n)\to f(c)\ (n\to\infty)$

$a_n\to c \leftarrow b_n$

$f(a_n)\to f(c)$, $f(b_n)\to c\ (n\to\infty)$. $\exists n_0\in N$, $n_0>f(c)$ (по аксиоме Архимеда)

$f(x_n)\to f(c)\Rightarrow f(x_n)\ge n_0 \Rightarrow \begin{cases} f(c)=n_0 \\ n_0>f(c)\end{cases}$ - противоречие $\Rightarrow f(x)$ огран. сверху.

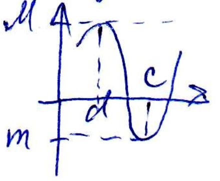
$n\ge n_0$ $\quad f(c)\ge n_0$

Ан-но $f(x)$ - огран-а снизу.

Теорема (о достижимости sup и inf значений) Пусть $f(x)\in C_{[a;b]}$

Обозначим через m и M, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Тогда $\exists c, d\in[a,b]$ $f(c)=m$, $f(d)=M$.



Д-во: Методом от прот-го. Предполож, что $\neg\exists c\in[a,b]$, $f(c)=m$, т.е $\forall c\in[a,b]$ $f(c)>m$.

Рассм. ф-ю $g(x)=\frac{1}{f(x)-m}\in C_{[a,b]}\Rightarrow g(x)$ огранич. сверху,

т.е $\exists M^*>0$ $\forall x\in[a,b]$ $g(x)\le M^*\Rightarrow \frac{1}{f(x)-m}\le M^*$, $f(x)-m\ge\frac{1}{M^*}$

$\forall x\in[a,b]$ $f(x)\ge m+\frac{1}{M^*}$, $m>\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\Rightarrow$ 1) $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\ge m$ 2) $\forall\varepsilon$ $(\varepsilon=\frac{1}{M^*})$ $x\in[a,b]$

$f(x)\le m+\frac{1}{M^*}$, $m+\frac{1}{M^*}=m+\varepsilon>f(x')$

$\exists x'<m+\frac{1}{M^*}$ противоречие, из I аксиомы порядка $\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists c\in[a,b]$ $f(c)=m$, Ан-но, что $\exists d\in[a,b]$ $f(d)=M$.