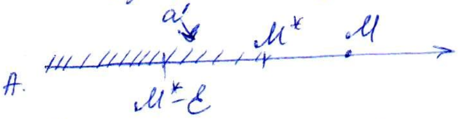
(1) Супремум и инфимум числового мн-ва. Аксиома о существовании супремума числ. мн-ва.

Опр. Пусть $A \in R$ (числовое множество)
Тогда 1) Число $M \in R$ называется верхней границей мн-ва A $\Leftrightarrow \forall a \in A,\ a \le M$.
2) Мн-во A наз-ся ограниченным сверху, если существует хотя бы одна верхняя граница M - мн-ва A.

Опр. Пусть A - огран. сверху числовое мн-во, тогда число $M^* \in R$ наз-ся супремумом (точной верхней гранью) ($M^* = \sup A$)
1) $\forall a \in A\quad a \le M^* \Leftrightarrow M^*$ наименьшая из верхних границ мн. A.
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a' \in A \quad a' > M^* - \varepsilon$

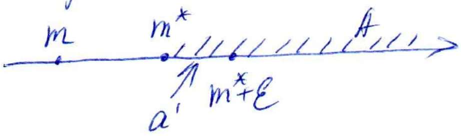


Для всякого огр. сверху числового мн. $\exists$ супремум $\sup A = M^* \in R$

$M^* = \sup A = \sup\{a\}$ $a \in A$.
Пример: $Q = \{\frac{p}{q}\}$ $A = \{\frac{p}{q} \in Q \mid (\frac{p}{q})^2 < 2\}$; $(\frac{p}{q})^2 < 2$ 1) $-2 < \frac{p}{q} < 2$
2) $-\sqrt{2} < \frac{p}{q} < \sqrt{2}$ $\Rightarrow \sup A = \sqrt{2}$
$\sup A = \sqrt{2} \notin Q$

Опр. Пусть $A \subset R$, тогда 1) $m \in R$ называется нижней гран. мн-ва $A \Leftrightarrow \forall a \in A\quad m \le a$
2) A наз-ся огранич. снизу числов. мн-ом $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists m$ - нижняя граница множества A.

Опр. Пусть A огран. снизу мн-во (числовое), тогда число $m^* \in R$ наз-ся точной верхней гранью (инфемумом), если $\Leftrightarrow m^*$ - наибольшая из нижних границ A. $\Leftrightarrow m^* = \inf A \in R \Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A,\ m^* \le a$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a' \in A,\ a' < m^* + \varepsilon$



$\inf A = \inf\{a\}$ $a \in A$.