(9) Теорема об арифметических операциях над сход-ся посл-ми.

теор.: Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $a, b \in \mathbb{R}$, тогда

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda a = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Д-во: по теореме существуют б.м. посл-ти $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ $\forall n \geq 1$,
$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$.

1) $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, где $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ - б.м. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2) $\lambda x_n = \lambda a + \lambda \alpha_n$, где $\{\lambda \alpha_n\}$ б.м. (это произвед-е б.м. $\{\alpha_n\}$ на огран. $\{\lambda\}$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda a$

3) $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n = ab + \delta_n$, где $\delta_n = b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n \beta_n$
это б.м. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$.

теорема: (пред. частного) Пусть $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ две посл-ти, для которых
1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$; 2) $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \neq 0$, $b \neq 0$, тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

Д-во: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ б.м.п.

$$\gamma_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{b y_n} = \frac{(a+\alpha_n) b - (b + \beta_n) a}{b y_n} = \frac{\overbrace{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}}{b y_n} =$$

$= \frac{b\alpha_n}{b y_n} - \frac{a\beta_n}{b y_n} = \alpha_n \cdot \frac{1}{y_n} - \frac{a}{b y_n} \cdot \beta_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$|y_n| > \frac{|b|}{2} > 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{b} \Rightarrow \exists M = \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots \frac{1}{|y_{n_0-1}|}; \frac{2}{|b|}\right\} > 0$

$\forall n < n_0$ $\frac{1}{|y_n|} < \max\left\{\frac{1}{|y_1|}; \dots 1\right\} \leq M$; $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \leq M_0$

$\Rightarrow$ тогда послед. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничен-я посл-ть; $\left\{-\frac{a}{b y_n}\right\}$ - огран., т.к.

$\underbrace{\alpha_n \cdot \frac{1}{y_n}}_{\text{б.м.}}$; $\underbrace{-\frac{a}{b y_n}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\beta_n}_{\text{б.м}} \Rightarrow \gamma_n = \alpha \cdot \frac{1}{y_n} - \frac{a}{b y_n} \cdot \beta_n \to$ б.м. $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \underbrace{\gamma_n}_{\text{б.м.}} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$