42 Теоремы о правиле Лопиталя.

Теор. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пусть $f(x), g(x)$ удовлетворяют след. условиям:

1) $f(x), g(x)$ опред., непрер., дифф-ы в некот. окрестн. $\overset{\circ}{U}(x_0)$
2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, т.е $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$
3) $\forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $g(x)\neq 0$
4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, $A\in R$

$\Rightarrow$ тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

Д-во! $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Доопределим ф-ии $f(x), g(x)$ в т x_0 нулевыми значениями $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$, $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)$ $\delta>0$, $f(x), g(x)\in C_{[x_0;x]}$

$\exists f'(x), g'(x)$ на $(x_0;x)$, $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in \overset{\circ}{U}(x_0)$

по т. Коши $\exists c\in(x_0;x)$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

$\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, т.к $\exists$ прав. и левост. пределы, то существует и больной предел.

Зам! Правило Лопиталя справедливо и для одност. пред-ов.

Зам. $x_0\to+\infty, -\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Д-во! $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\begin{bmatrix} t=\frac{1}{x}\\ x=\frac{1}{t}\end{bmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'(x)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(x)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

теорема: Правило Лопиталя для $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непр., дифф на $U(x_0)$, $g'(x)\neq 0$

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, тогда

$\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.