(29) Теорема о непрерывности дифф-й фии. Произв-я суммы, произв-я и частного дифф-х фий. Производная сложной фии.

<u>теорема</u> (о непрер.) если $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то $f(x)$ непрерывна в т. x_0.

<u>Д-во:</u> $f(x)$ дифф-а в т. $x_0 \Rightarrow \forall x \in U(x_0)$ $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)(A + \alpha(x))$ где $\alpha(x)$ б.м. $(x \to x_0)$. Найдем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x_0) + (x-x_0)(A+\alpha(x))\right) =$
$= f(x_0) + \lim\limits_{x\to x_0}\overset{\to 0}{(x-x_0)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0}\overset{\to A}{(A+\alpha(x))} = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ непрер. в т. x_0

<u>теор.</u> (Арифм. операции) Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ диффер-ы в т x_0
Тогда 1) $u(x) + v(x)$ дифф-а в т x_0 $(u+v)' = u' + v'$
2) для всякой $c = const$ $cu(x)$ дифф-а в т. x_0 $(cu(x))' = cu'(x)$
3) $u(x)\cdot v(x)$ дифф-а в т. x_0 $(uv)' = u'v + u\cdot v'$
4) если $v(x) \neq 0$ в $U(x_0)$ $\frac{u(x)}{v(x)}$ дифф-а в x_0 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

<u>Д-во:</u> $u_0 = u(x_0)$ $v_0 = v(x_0)$ $u_0' = u'(x_0)$ $v_0' = v'(x_0)$
1) $(u+v)' = u' + v'$
$\frac{(u+v) - (u_0+v_0)}{x-x_0} = \frac{(u-u_0)+(v-v_0)}{x-x_0} = \frac{u-u_0}{x-x_0} + \frac{v-v_0}{x-x_0} \to u_0' + v_0' (x\to x_0)$
2) $\frac{cu - cu_0}{x-x_0} = c\frac{u-u_0}{x-x_0} = cu_0' (x\to x_0) \to (cu)' = cu'$ в т. x_0
3) $\frac{uv - u_0v_0}{x-x_0} = \frac{uv - u_0v + u_0v - u_0v_0}{x-x_0} = \frac{v(u-u_0) + u_0(v-v_0)}{x-x_0} \to \frac{u_0'v + uv_0'}{(x\to x_0)}$; $(uv)' = u'v + uv'$ в т. x_0
4) $\frac{1}{x-x_0}\cdot\left(\frac{u}{v} - \frac{u_0}{v_0}\right) = \frac{uv_0 - u_0v}{v\cdot v_0(x-x_0)} = \frac{uv_0 - u_0v_0 - (u_0v - u_0v_0)}{v\cdot v_0(x-x_0)} = \frac{1}{v\cdot v_0}\cdot\left(\frac{u-u_0}{x-x_0}\cdot v_0 - \frac{v-v_0}{x-x_0}\cdot u_0\right)$
$= \frac{1}{v\cdot v_0}\left(u_0'v_0 - v_0'u_0\right) \Rightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ в т. x_0.

<u>теорема</u> (Произв. сложн. фии) Пусть $z = f(y)$ опред-а в $U(y_0)$ и дифф-а в т. y_0, а фия $y = g(x)$ опред-а в окр-ти $U(x_0)$, $g(x_0) = y$ и дифф-а в т. x_0. Произв-я $(f(g(x)))' = f_y'(y_0)\cdot g'(x_0)$ в т. x_0.

<u>Д-во:</u> $\forall y \in U(y_0)$ $f(y) - f(y_0) = (y-y_0)(A + \alpha(y))$ где A - произв.
$\alpha(y) \to 0$ в т. y_0.
$\forall x$ $U(x_0)$ $y = g(x) \in U(y_0)$, $g(x) = g(x_0) + (x-x_0)(B + \beta(x))$
$\beta(x) \to 0$ в т. x_0. $\Rightarrow$
$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (x-x_0)(A + \alpha(g(x)))(B + \alpha(x)) = (x-x_0)(C + \gamma(x))$
$C = AB = const$. $\gamma(x) = \underbrace{B\alpha(g(x))}_{\underset{x\to x_0}{\to 0}} + \underbrace{A\beta(x)}_{\underset{x\to x_0}{\to 0}} + \underbrace{\alpha(g(x))\cdot\beta(x)}_{\underset{x\to x_0}{б.м.}} \Rightarrow$ это б.м. $x\to x_0$

$f(g(x))$ дифф-а в т. x_0 и ее произв-я $(f(g(x)))' = AB$.