(17) Арифметические операции над пределами ф-ий. Односторон-е пределы. Критерий существования предела в терминах односторонних пределов. Предел на бесконечности и бесконечный предел.

Теор. (Арифмет. операции): Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрест-ти $\overset{\circ}{U}(a)$, $a \in R$ $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in R$, тогда

1) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2) $\forall \lambda \in R$ $\exists \lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a), g(x) \neq 0$, $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Д-во! $\{x_n\}$ $x_n \in \overset{\circ}{U}(a)$ $x_n \to a\ (n\to\infty) \Rightarrow f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B\ (n\to\infty)$

1) $f(x_n) + g(x_n) \to A+B\ (n\to\infty) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$

2) $\lambda f(x_n) \to \lambda A\ (n\to\infty) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A.$

3) $f(x_n)\cdot g(x_n) \to A\cdot B \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = A\cdot B.$

4) $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{A}{B} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Опр. (одностороп. предел) 1) $f(x)$ определена $(a; a+\delta)$ $\delta>0$, тогда говорят $\exists \lim$ справа ф-ии $f(x)$ при $x\to a$ $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ 0<x-a<\delta\ |f(x)-A|<\varepsilon.$

2). Пусть $f(x)$ определена на $(a-\delta; a)$ $\delta>0$, тогда $\exists$ предел слева $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ a-\delta<x<a\ |f(x)-A|<\varepsilon.$

теорема (Критерий существ. предела): Пусть $f(x)$ опр. на $\overset{\circ}{U}(a)$ тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \exists f(a+0)$; $\exists f(a-0)$, $f(a-0) = f(a+0) = A$ (одност. предела)

Д-во! 1) необход-ть. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ a-\delta<x<a$ или $a<x<a+\delta$ $|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow \exists f(a-0) = A$ или $\exists f(a+0) = A$

$\exists f(a-0), \exists f(a+0)$ и $f(a-0) = f(a+0) = A$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\ a-\delta_1<x<a\ |f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0\ \forall x\ a<x<a+\delta_2\ |f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \exists\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$

$\forall x, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Предел на ∞ и бесконечные предела!

1) Беск. предел для дельта окрестности точки x, $\forall A\ |f(x)|>A$

2) При $x\to\infty$ $\exists A\ |f(x)-A|<\varepsilon$

Замеч. $f(x)$ опред. $\overset{\circ}{U}(a)$, $a\in R$, тогда 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists\delta>0$ $\forall x, 0<|x-a|<\delta\ |f(x)|>E$. 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x$, $0<|x-a|<\delta$, $f(x)>E$. 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x$, $0<|x-a|<\delta$, $f(x)<E$ 4) Аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ окр-ти ∞.