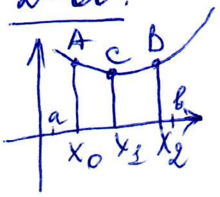
47 Критерий выпуклости ф-ии в терминах монотонности углового коэфф-а. Теорема о непрерывности выпуклой ф-ии.

Лемма: (критерий выпуклости) Пусть ф-я $f(x)$ опред $[a,b]$ и $x_0 \in [a,b]$. Обозначим $\varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Тогда

1) $f(x) \cup [a,b] \Leftrightarrow \varphi_{x_0}(x) \uparrow$ на $[a;b] \setminus \{x_0\}$

2) $f(x) \cap [a,b] \Leftrightarrow \varphi_{x_0}(x) \downarrow$ на $[a,b] \setminus \{x_0\}$

Д-во:



1) $x_1, x_2 \in [a,b]$ $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$

$\varphi_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0} = k_{AC}$; $\varphi_{x_0}(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = k_{AB}$

$f(x) \cup [a,b] \Leftrightarrow k_{AC} \le k_{AB}$.

2) Д-ся ан-но. ч.т.д.

Теорема (о непрер-ти). Выпуклая $f(x)$ является непрер-й. Пусть $f(x)$ выпуклая, опред. на $[a,b]$, тогда $f(x)$ непр. на $[a,b]$

Д-во: $f(x) \cup [a,b]$. Возьмем $x_0 \in [a,b]$ и рассм. $\varphi_{x_0}(x) \uparrow [a,b] \setminus \{x_0\}$

$\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$ $\varphi_{x_0}(a) \le \varphi_{x_0}(x) \le \varphi_{x_0}(b) \Rightarrow \exists M > 0$ $\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, $|\varphi_{x_0}(x)| \le M$

тем самым справедливо $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le M \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \le M|x-x_0|$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, $\forall x$, $0 < |x-x_0| < \delta$ $|f(x)-f(x_0)| \le M|x-x_0| < \frac{M \cdot \varepsilon}{M} = \varepsilon$

т.е $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

т.е. $f(x)$ непр. в т. x_0. Аналогично для $x_0 = a$ и $x_0 = b$