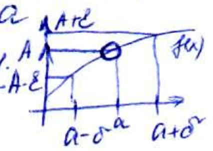
(16) Определение предела функции в точке (по Коши)
Критерий Гейне существования предела.

Опр 1 Пусть $D \subset R$, тогда говорят, что в области D определена функция $y = f(x)$, $x \in D$, если $\forall x \in D$ поставлено в соответствие число $y \in R$, D - обл. опред. ф-ии $f(x)$

Опр. (предел ф-ии по Коши). Пусть ф-ия $f(x)$ определена в некоторой проколотой области $\mathring{U}(a)$, $a \in R$, тогда говорим, что $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x$, $0 < |x-a| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геом. смысл.



Замечание: (Единственность предела)! Если $\exists \lim\limits_{x \to a} x_n = A$, то он единственный.

теор. (Критерий Гейне существ. предела) Пусть ф-ия $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, $a \in R$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in R \Leftrightarrow \forall \{x_n\}$, $x_n \in \mathring{U}(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow [x_n \to a \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x) \to A \ (n \to \infty)]$.

Док-во: I (Необход-ти). Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in R$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall x$,
$0 < |x - a| < \delta$, $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Возьмем $\{x_n\}$, $x_n \in \mathring{U}(a)$ и предположим, что $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$
$\delta > 0 \ \exists N \in N \ \forall n \geq N \ 0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow$
т.е $x_n \to a \ (n \to \infty)$. По числу $\delta > 0$ ... $\forall n \geq N$ $|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x) = A$, т.е
$\Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in N \ \forall n \geq N$
$f(x_n) \to A \ (n \to \infty) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}$, $x_n \in \mathring{U}(a)$
$[x_n \to a \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n \to \infty)] \Rightarrow$ необходимость док-а.

II. (Достаточность) Предположим, что выполнено услов-е Гейне,
т.е $\forall \{x_n\}$, $x_n \in \mathring{U}(a)$ $[x_n \to a \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to A \ (n \to \infty)]$
Докажем существование предела ф-ии методом от противн.
$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, \ 0 < |x - a| < \delta, \ |f(x) - A| < \varepsilon)$
$\exists \varepsilon^* > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x = x(\delta)$ $0 < |x(\delta) - a| < \delta$, $|f(x(\delta)) - A| \geq \varepsilon^* > 0$
$\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, $x(\delta_n) = x_n$, $\exists \varepsilon^* > 0 \ \forall n \geq 1 \ \exists x_n$, $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon^*$
0
$x_n \in \mathring{U}(a) \Rightarrow x_n \to a \ (n \to \infty) \Rightarrow$ по усл. Гейне $f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$
$\varepsilon^* > 0 \ \exists N^*, \forall n \geq N^*$ $|f(x_n) - A| < \varepsilon^* \Rightarrow$ $|f(x_{N^*}) - A| < \varepsilon^*$
$|f(x_{N^*}) - A| \geq \varepsilon^*$ | противор.

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (по Коши)