60 Определение первообразной. Теорема об общем виде первообр-ых непрерывной ф-ии. Неопределенный интеграл. Его простейшие свойства.

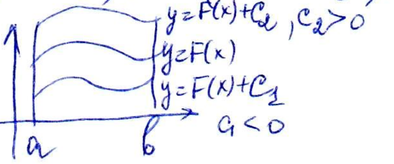
Опр. Пусть ф-ия $f(x)$ определена и непрерывна на $(a;b)$, т.е. $f(x) \in C_{(a;b)}$. Тогда ф-ия $F(x)$ называется первообразной ф-ии $f(x)$ на $(a;b)$, если $F(x)$ дифф-ма на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$ $F'(x) = f(x)$

теорема (О мн-ве перв-х) Пусть $f(x) \in C_{(a;b)}$ и $F(x)$ некоторая ее первообразная на $(a;b)$. Тогда ф-ция $\Phi(x)$ яв-ся первообр. к $f(x)$ на $(a;b)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ постоян. C $\forall x \in (a;b)$, $\Phi(x) = F(x) + C$. И тем самым число первообр. бесконечно.

Д-во: ($\Leftarrow$) $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow F(x)+C$ перв. к $f(x)$ на $(a;b)$

($\Rightarrow$) $F'(x) = f(x)$; $\Phi'(x) = f(x)$. Рассм. $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$ по т. критерий монотонности и постоянства ф-ии, если $\Phi(x) - F(x) = 0$, $\exists C = const$ $\Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$ ($\forall x \in (a,b)$).

Геом. смысл.



$\forall M_0(x_0, y_0)$ $a < x_0 < b$, $y_0 \in R$ $\exists F(x)$ график которой проходит через эту точку.

$y = F(x) + y_0 - F(x_0)$, $C = y_0 - F(x_0)$

$x = x_0 \Rightarrow y = y_0$.

Опр. Пусть $f(x) \in C_{(a;b)}$, тогда неопр. интегралом от $f(x)$ на (a,b) наз-ся его первообр-я, записанная в виде

$\int \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{подинтегр-ое выражение}} = F(x) + C$, где $F(x)$ некоторая пер-я, C - const.

подинтегр-я ф-ия

Св-ва:

1) $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$

2) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

3) $\int (f(x) + g(x)) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4) $\int A f(x)dx = [A \neq 0] = A \int f(x)dx$.