(77) Линейность и аддитивность определенного инт-а.

1°. Св-ва интегр-ов, выражаемые равенствами.

1) Аддитивность опр. инт-а.

Пусть $f(x) \in R_{[a,b]}$, тогда $\forall c, a < c < b$, $f(x) \in R_{[a,c]}$; $f(x) \in R_{[c,b]}$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Д-во: Рассм. разбиен. $T: a = x_0 < \dots < x_i = c < x_{i+1} < \dots < x_{i+j} = b$

$$\sum_{k=1}^{i} f(\xi_k)\Delta x_n + \sum_{k=i+1}^{i+j} f(\xi_k)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{i+j} f(\xi_k)\Delta x_n$$

$\downarrow \int_a^c f(x)dx$, $\downarrow \int_c^b f(x)dx$, $\downarrow \int_a^b f(x)dx$

при условии $\lambda_T \to 0$

переход к пределу $\lambda_T \to 0$ в рав-ве получим утверждение 1.

Зам. $\forall a, b \in R$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если интегр-л существ-т.

2) Линейность опр. инт-а.

Если $f(x), g(x) \in R_{[a,b]} \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in R$ $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$, в частности $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Д-во: $\sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_n + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_n$, $\lambda_T \to 0$

$\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$

3) нормировка $\int_a^b dx = b - a$, $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

Д-во: $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_n$ – длина отрезка не зависит от т. $M \to b - a$

$\Rightarrow \int_a^b dx = b - a$.