(34) Теорема Ферма и Ролля.

<u>теорема</u> (Ферма) Пусть ф-ия $f(x)$ непрер. на интерв-е $U(x_0)$ и в точке x_0 достигает своего наиб. или наим. значения. Тогда, если $f(x)$ дифф-а в точке x_0, то $f'(x_0)=0$.

$$\underline{\text{Д-во:}}\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0,\ \text{т.к. } f(x)\le f(x_0).}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}\le 0,\quad x_0 \text{ точка } \max f(x)\ \forall x\in U(x_0)\ f(x)\le f(x_0)$$

$$\text{Ан-но}\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}\ge 0\Rightarrow 0\le f'(x_0)\le 0$$

$$f'(x_0)=0.$$

<u>теорема</u> (Ролля) Пусть $f(x)$ опред-а на $[a,b]$ и удовл. след. усл-м:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x)\in C_{[a,b]} \\ 2)\ \exists f'(x)\ \forall x\in(a,b) \\ 3)\ f(a)=f(b) \end{array}\right\}\ \text{тогда } \exists c\in(a,b)\ f'(c)=0.$$

<u>Д-во:</u> $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, если $m=M$, то $\forall x\in[a,b]$

$f(x)=M$, $f'(x)=M'=0$.

Если $m<M$, то рассм. точку c, $f(c)=m$ и точку d, $f(d)=M$, $c\ne d$

$$\left.\begin{array}{l} c=a \text{ или } c=b\Rightarrow d\in(a,b) \\ d=a \text{ или } d=b\Rightarrow c\in(a,b) \end{array}\right\}\Rightarrow f'(d)=0,\ f'(c)=0$$

ч.т.д.