

21) определение непрерывности ф-ии в точке. Теорема об арифм-х операциях над непрерывными ф-иями. Непрерывность сложной ф-ии. Классификация точек разрыва.

Опр. Пусть ф-я $f(x)$ опред. в окрестности т. x_0 , т.е. $V(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$, тогда мы говорим, что $f(x)$ непрер-а в т. $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Опр. (односторонняя непрерывность): 1) Пусть $f(x)$ опр-а на промежутке $[x_0; x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, $f(x)$ непрер-на справа от т. x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.
2) $f(x)$ опред. на $[x_0 - \delta; x_0]$, $\delta > 0$, $f(x)$ непрер-а слева т. x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Зам. Если $f(x)$ опред-а в $V(x_0)$, то $f(x)$ непрер-на в т. $x_0 \Leftrightarrow$ когда $f(x)$ непрер-на справа и слева x_0 .

Опр. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$, D - объединение промежутков, тогда $f(x)$ непрер-а в области D , непрер-а в обл-и D . Если $f(x)$ непрер-а \Leftrightarrow 1) $f(x)$ непрер-а во всякой внутренней точке промежутков области D .
2) $f(x)$ односторонне непрер-а на концах промежутков, которые являются числами и в которых ф-ия $f(x)$ опр-а.

Обозначение $f(x) \in C(D)$ ($f(x)$ принадлежит классу непрер. ф-ий в области D)

теор. (Арифм. опр.) Пусть $f(x), g(x)$ непрер. в т. x_0 , тогда 1) $f(x) + g(x)$ непрер. в т. x_0 ; 2) $\forall a \in \mathbb{R}, af(x)$ непрер. в т. x_0 .
3) $f(x) \cdot g(x)$ непрер. в т. x_0 ; 4) $g(x) \neq 0$ в $V_\delta(\cdot)$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрер. в т. x_0 .

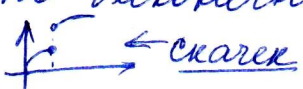
Д-во из теоремы об арифм-х дейст. над пределами.

теорема (непрер-ть сложной ф-ии): Пусть $f(x)$ непрер-а в x_0 , а ф-я $g(y) = f(y)$ непрер-а в т. $y_0 = g(x_0)$, тогда сложная ф-я $f(g(x))$ опред-а в некоторой окрестн. т. x_0 и непрер-а в x_0 .

Д-во: $f(y)$ непрер-а в т. $y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y |y - y_0| < \delta, |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$.

$y = g(x)$ непрер-а в т. $x_0 \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists \delta' > 0 \forall x |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta$. Сложная ф-я $f(g(x))$ непрер-а в x_0 и определена в окр-ти $V_\delta(x_0)$.

Опр. (Точки разрыва) Пусть $f(x)$ опр-а в $V(x_0)$, тогда x_0 наз-ся точк. разрыва ф-ии. 1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A, A \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B, B \in \mathbb{R}$, то x_0 наз-т разрыв первого уровня ($A \neq B$). При этом если $A = B$, то разрыв наз-т устранимым. 2) Остальные т-ы разрыва наз-т точками разрыва II рода. При этом $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$, то разрыв бесконечной (пример гиперболы $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$)

 скачок