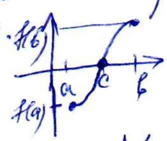
(22) Теорема об обращении в нуль непр-й на отрезке ф-ии
Теорема о промежуточных значениях непрер-й ф-ии.

Опр. Пусть $f(x)$ опред-а на $[a,b]$ $a,b \in R$, тогда $f(x)$ непр-а на $[a,b]$. (Пишем $f(x) \in C_{[a,b]}$ ($f(x)$ из класса функций непрерывных на отрезке $[a,b]$)).

если: 1) $\forall x_0 \in (a,b)$ $f(x)$ непр-а в точке x_0
2) $\exists f(a+0)=f(a)$ $\exists f(b-0)=f(b)$ (одностор. непрер-ть)

теорема (об обращении в нуль)! (Вейерштрасс) Пусть $f(x)$ опр-а, непр-а на $[a,b]$ и принимает значения разных знаков на концах отрезка, т.е $f(a)\cdot f(b)<0$, тогда
$\exists c \in [a,b]$, $f(c)=0$.



Д-во: От противного. $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \neq 0$ $I_1=[a_1;b_1] \in [a,b]$, $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. С помощью половинного деления построим новый участок: $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \Rightarrow I_2=[a_2;b_2]=\begin{cases}[a_1;c_1] \text{ если } f(c_1)>0\\ [c_1;b_1] \text{ если } f(c_1)<0\end{cases}$

Тогда $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$. Рассм. послед-ть $\{I_n\}$, $I_n=[a_n;b_n]$

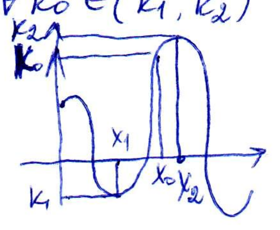
$\forall n \in N$ $I_{n+1} \in I_n$ $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$ $(n\to\infty) \Rightarrow$ по принципу вложенных отр-в.

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ $\forall n \in N$ $c \in I_n$ $a_n \leq c \leq b_n$, т.е концы отрезка так же стремятся к c.

$f(x)$ непр-а на $[a,b] \Rightarrow f(a_n)\to f(c)$ $f(a_n)<0$ $f(b_n)>0$
$f(b_n)\to f(c)$ $f(c)\leq 0$ $f(c)\geq 0$
$n\to\infty$ $0\leq f(c)\leq 0$, $f(c)=0$.

Получим противоречие $\exists c \in [a,b]$ $f(c)=0$ $f(a)\neq 0$ $f(b)\neq 0$
c попадает вовнутрь.

теорема (о промежуточном значении) Пусть ф-ия $f(x) \in C_{[a,b]}$ и $\exists x_1, x_2$, $x_1 \in [a,b]$ $f(x_1)=k_1 < f(x_2)=k_2$, тогда
$\forall k_0 \in (k_1;k_2)$ $\exists x_0$, лежащее между x_1 и x_2, $f(x_0)=k_0$



$x_1<x_0<x_2$
$f(x_0)=k_0$.

Д-во! Будем считать, что $x_1<x_2$, $f(x)\in C_{[x_1;x_2]}$

$g(x)=f(x)-k_0 \in C_{[x_1;x_2]}$
$g(x_1)=f(x_1)-k_0=k_1-k_0<0$
$g(x_2)=f(x_2)-k_0=k_2-k_0>0$
$g(x_1)\cdot g(x_2)<0 \Rightarrow \exists k_0 \in [x_1;x_2]$, $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-k_0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0)=k_0$ ч.т.д.