28) Определение дифференцируемости ф-ии в точке. Производная, критерий дифференцируемости. Геометр. смысл производной. Односторонние произв-е.

Опр. Пусть $f(x)$ опред-а в нек-й окрест-ти $U(x_0)$ в точке x_0, тогда говорим, что ф-ия $f(x)$ дифференц-а в т. x_0, если
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Обозначение: $f'(x_0)=\frac{d f(x_0)}{dx}$ — производная.

Пример 1) $c'=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0}=\lim 0=0$

2) $(x')=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$

3) $(ax+b)'=a$ $\lim \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0}=a$

4) $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{ax^2+bx+c-ax_0^2-bx_0^2-c}{x-x_0}=$
$=\lim \frac{a(x^2-x_0^2)+b(x-x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0} a(x+x_0)+b=$
$=2ax+b.$

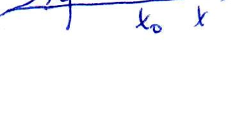
5) $(a^x)'=a^x\ln a$
$\lim \frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\lim\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\lim\frac{(x-x_0)\cdot\ln a}{x-x_0}$
$=a^x\ln a.$

Теорема (Критерий дифф). Пусть $f(x)$ опред. в нек. окрестности $U(x_0)$ тогда $f(x)$ дифф-ма в т. x_0, тогда когда $\exists$ постоянная A, такая что б.м. функция $\alpha(x)$ $(x\to x_0)$: $\forall x\in U(x_0)$ $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)(A+\alpha(x))$ причем $A=f'(x_0)$

Д-во! $\Rightarrow$ (необх.) Пусть $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ Положим $A=f'(x_0)$
$\alpha(x)$ б.м.ф-ия $x\to x_0$
$\alpha(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A\Rightarrow\exists\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, т.е
$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)(A+\alpha(x))$.
$\forall x\in U(x_0)\to$ $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)(A+\alpha(x))\Rightarrow$

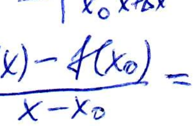
$\Leftarrow$ (дост.) Пусть $\exists A$, $\alpha(x)\to 0$ $(x-x_0)$: $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)(A+\alpha(x))$
$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A+\alpha(x)\to A+0=A$ $(x\to x_0)\Rightarrow\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ дифф-а в т. x_0 и $f'(x_0)=A$. ч.т.д.

Геометр. смысл произв.



$M_0(x_0, f(x_0))$
$M(x, f(x))$
MM_0: $y-f(x_0)=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{угловой коэффициент}=f'(x_0)}(x-x_0)$
если $x\to x_0$ то l (касательная): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, т.е $f'(x_0)$ угловой коэффициент касательной к графику ф-ии.

Зам.



$\Delta x=x-x_0$ приращение аргумента x,
$x=x_0+\Delta x$, где Δx приращение аргумента x, $\Delta f(x_0)$ приращение
$x\to x_0$, то $\Delta x\to 0$, $f(x)=f(x_0)+\Delta f(x_0)$, ф-ии, соответствующее Δx. ; $\Delta f(x_0)=f(x+\Delta x)-f(x_0)$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{d f(x_0)}{dx}$ $(x\to x_0)$ dx — дифференциал аргумента.
$d f(x_0)$ — дифф-л ф-ии.

Опр (одност. произв.) 1) Рассм. предел $f'(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — левост. произв-я.
2) $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — правостор. произв-я.