Tema 1. Anàlisi d'algorismes

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Transparències d' Antoni Lozano
(amb edicions menors d'altres professors)

Q1 2022 – 23

EDA, grups 40/50

- Teoria: Amalia Duch
- Problemes/Laboratori: `https://www.cs.upc.edu/eda/`
- Email: duch@cs.upc.edu
- Despatx: 228, edifici Ω
- Avaluació:
  NPP = nota de l'examen parcial de paper (entre 0 i 10)
  NO = nota de l'examen d'ordinador (entre 0 i 10)
  NF = nota de l'examen final (entre 0 i 10)
  NJ = nota del joc (entre 0 i 10)

  NOTA = mín(10, màx (22.5%NPP + 22.5%NF + 45%NO + 20%NJ,
  45%NF + 45%NO + 20%NJ))

Temari

1. Anàlisi d'Algorismes. Cost en temps i espai. Cas pitjor, millor i mitjà. Notació asimptòtica. Càlcul del cost d'algorismes iteratius i recursius.
2. Algorismes de Dividir i Vèncer. Mergesort. Quicksort. Algorisme de Karatsuba per multiplicar nombres llargs. Algorisme de Strassen per multiplicar matrius. Altres exemples.
3. Diccionaris. Operacions. Taules. Taules ordenades. Llistes. Llistes ordenades. Taules de dispersió. Arbres binaris de cerca. Arbres AVL.
4. Cues amb Prioritats. Operacions. Heaps. Heapsort.
5. Grafs. Operacions. Representació en matrius d'adjacència. Representació en llistes d'adjacència. Representació implícita. Recorregut en fondària (DFS). Recorregut en amplada (BFS). Ordenació topològica. Algorisme de Dijkstra per camins mínims un-a-tots.
6. Algorismes de Generació i Cerca Exhaustiva. Principis. Exemples.
7. Nocions d'Intractabilitat i d'Indecidibilitat. Introducció bàsica a les classes P i NP, a les reduccions i a la NP-Completesa.

1 Temps de càlcul i espai de memòria
- Eficiència dels algorismes
- Mida de l’entrada i cost
- Ordre de magnitud

2 Notació asimptòtica
- Notació asimptòtica: definicions
- Notació asimptòtica: propietats
- Formes de creixement

3 Cost dels algorismes
- Algorismes no recursius
- Algorismes recursius
- Teoremes mestres

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Eficiència dels algorismes

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Eficiència dels algorismes

Objectius:

- Comparar solucions algorísmiques alternatives
- Millorar els algorismes existents
- Predir els recursos que farà servir un algorisme

Eficiència dels algorismes

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Eficiència dels algorismes

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Eficiència dels algorismes

Consideracions sobre l'eficiència:

- Depèn de la mida de les entrades
- És un concepte relatiu: hi intervenen compilador, màquina, ...
- Aquests factors afecten de forma lineal

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent. Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 2: el mur infinit

Mur infinit

Estem davant d'un mur que s'allarga indefinidament en totes dues direccions. Volem trobar l'única porta que el travessa, però no sabem a quina distància està ni en quina direcció. Tot i que és fosc, portem una espelma que ens permet veure la porta quan ja hi som a prop.

Exemple 2: el mur infinit

Primera solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 3 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 4 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre un metre més en direcció contrària)

Exemple 2: el mur infinit

Segona solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 4 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 8 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre el doble de distància en direcció contrària)

Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E,
el cost d'A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \to \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T per cada entrada pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa mida,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Eficiència dels algorismes

Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E,
el cost d'A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \to \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T per cada entrada pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa mida,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Eficiència dels algorismes

Donat un algorisme A amb conjunt d'entrades E,
el cost d'A (en temps, o en espai) es pot expressar com una funció

$$T : E \to \mathbb{R}^+.$$

Però calcular T per cada entrada pot ser complicat i poc manejable.

És més útil agrupar les entrades amb la mateixa mida,
i estudiar el cost sobre aquestes entrades en conjunt.

Mida de l'entrada i cost

Mida

La mida d'una entrada x és el nombre de símbols necessari per codificar-la. Es representa amb $|x|$.

Tipus d'entrades

- Nombres naturals $\longrightarrow$ codificació en valor (en "unari")

$$|15| = 15$$

- Nombres naturals $\longrightarrow$ codificació en binari

$$|15| = 4 \text{ perquè } 15_{10} = 1111_2$$

- Llistes, vectors $\longrightarrow$ nombre de components

$$|(23,\ 1,\ 7,\ 0,\ 12)| = 5$$

Mida de l'entrada i cost

Mida

La mida d'una entrada x és el nombre de símbols necessari per codificar-la. Es representa amb $|x|$.

Tipus d'entrades

- Nombres naturals $\longrightarrow$ codificació en valor (en "unari")

$$|15| = 15$$

- Nombres naturals $\longrightarrow$ codificació en binari

$$|15| = 4 \text{ perquè } 15_{10} = 1111_2$$

- Llistes, vectors $\longrightarrow$ nombre de components

$$|(23,\ 1,\ 7,\ 0,\ 12)| = 5$$

Mida de l'entrada i cost

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x)T(x)$,

  on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

  Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Poc útil.

Mida de l'entrada i cost

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x)T(x)$,

  on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

  Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Poc útil.

Mida de l'entrada i cost

- **Cas pitjor.** $T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Ofereix garanties sobre uns límits que l'algorisme no superarà.

- **Cas mig.** $T_{mig}(n) = \sum_{x \in E, |x|=n} Pr(x)T(x)$,

  on $Pr(x)$ és la probabilitat d'escollir l'entrada x entre totes les de mida n

  Cal definir com es distribueix la probabilitat, i sol ser difícil de calcular.

- **Cas millor.** $T_{millor}(n) = \min\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}$

  Poc útil.

Ordre de magnitud

Taula 1 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Comparació de funcions polinòmiques i exponencials.

cost	10	20	30	40	50
n	0.00001 s	0.00002 s	0.00003 s	0.00004 s	0.00005 s
n^2	0.0001 s	0.0004 s	0.0009 s	0.0016 s	0.0025 s
n^3	0.001 s	0.008 s	0.027 s	0.064 s	0.125 s
n^5	0.1 s	3.2 s	24.3 s	1.7 min	5.2 min
2^n	0.001 s	1.0 s	17.9 min	12.7 dies	35.7 anys
3^n	0.059 s	58 min	6.5 anys	3855 segles	2×10^8 segles

Ordre de magnitud

Taula 2 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Efecte de les millores tecnològiques en algorismes polinòmics i exponencials

cost	tecnologia actual	tecnologia $\times 100$	tecnologia $\times 1000$
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^2	N_2	$10N_2$	$31.6N_2$
n^3	N_3	$4.64N_3$	$10N_3$
2^n	N_4	$N_4 + 6.64$	$N_4 + 9.97$
3^n	N_5	$N_5 + 4.19$	$N_5 + 6.29$

Ordre de magnitud

Taula 3 (R. Sedgewick, *Algorithms in C++*)

En moltes aplicacions, l'única possibilitat de resoldre entrades enormes és fent servir algorismes eficients.

Un algorisme ràpid permet resoldre un problema en una màquina lenta, però una màquina ràpida no ajuda quan fem servir un algorisme lent.

operacions per segon	mida del problema 1 milió			mida del problema 10^3 milions		
	n	$n \log n$	n^2	n	$n \log n$	n^2
10^6	segons	segons	setmanes	hores	hores	mai
10^9	instant	instant	hores	segons	segons	dècades
10^{12}	instant	instant	segons	instant	instant	setmanes

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

  (sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
  (així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f, $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que "creixen com f o més a poc a poc".

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint "f és $\mathcal{O}(g)$" o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

  (sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
  (així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f, $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que "creixen com f o més a poc a poc".

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint "f és $\mathcal{O}(g)$" o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

  (sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
  (així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f, $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que "creixen com f o més a poc a poc".

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint "f és $\mathcal{O}(g)$" o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Necessitem una notació que:

- permeti expressar una fita superior de

$$T_{pitjor}(n) = \max\{T(x) \mid x \in E \wedge |x| = n\}.$$

  (sabrem que l'algorisme no superarà la fita)

- que sigui independent de constants multiplicatives
  (així no dependrà de la implementació)

Notació O gran

Donada una funció f, $\mathcal{O}(f)$ representa la classe de funcions que "creixen com f o més a poc a poc".

Formalment, $g \in \mathcal{O}(f)$ si existeixen $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n).$$

En lloc de $f \in \mathcal{O}(g)$, s'escriu molt sovint "f és $\mathcal{O}(g)$" o, també, $f = \mathcal{O}(g)$.

Ordre de magnitud

Exemple

Sigui $f(n) = 3n^3 + 5n^2 - 7n + 41$. Llavors, podem afirmar que $f \in \mathcal{O}(n^3)$.

Per justificar-ho, només cal trobar c i n_0 que compleixin:

$$\forall n \geq n_0 \;\; f(n) \leq cn^3.$$

Però $3n^3 + 5n^2 - 7n + 41 \leq 8n^3 + 41$. Triem $c = 9$. Llavors,

$$8n^3 + 41 \leq 9n^3 \iff 41 \leq n^3,$$

que es compleix a partir de $n_0 = 4$. Per tant,

$$\forall n \geq 4 \quad f(n) \leq 9n^3,$$

i llavors $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$ amb $c = 9$ i $n_0 = 4$.

(De fet, és fàcil trobar constants c i n_0 més petites.)

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los de forma decreixent.
Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Primera solució

Ordenar els nombres en un vector de forma decreixent i retornar el k-èsim.

- amb un algorisme d'ordenació bàsic (bombolla, inserció): $\mathcal{O}(n^2)$
- amb un algorisme d'ordenació eficient: $\mathcal{O}(n \log n)$

Exemple 1: el problema de selecció

Problema de selecció

Donada una llista de n naturals, determinar el k-èsim més gran.

Segona solució

Escriure els k primers en un vector i ordenar-los. Cada element següent es tracta per separat:

- si és més petit que el k-èsim del vector, es descarta;
- si no, se situa correctament en el vector i s'elimina el més petit.

Retornar l'element de la k-èsima posició.

$\mathcal{O}((k \log k) + (n - k) \cdot k)$

- Si k és constant, és $\mathcal{O}(k \cdot n) = \mathcal{O}(n)$
- Si $k = \lceil n/2 \rceil$, és $\mathcal{O}(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2)$

Exemple 2: el mur infinit

Mur infinit

Estem davant d'un mur que s'allarga indefinidament en totes dues direccions. Volem trobar l'única porta que el travessa, però no sabem a quina distància està ni en quina direcció. Tot i que és fosc, portem una espelma que ens permet veure la porta quan ja hi som a prop.

Exemple 2: el mur infinit

Primera solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 3 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 4 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre un metre més en direcció contrària)

Temps quan la porta està a distància n:

$$T(n) = 2\sum_{i=1}^{n-1} i + n = 2\frac{(n-1)n}{2} + n = n^2 \in \mathcal{O}(n^2).$$

(recordem que $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$)

Exemple 2: el mur infinit

Segona solució

- Avancem 1 metre i tornem a l'origen
- Retrocedim 2 metres i tornem a l'origen
- Avancem 4 metres i tornem a l'origen
- Retrocedim 8 metres i tornem a l'origen
- (recorrem sempre el doble de distància en direcció contrària)

Si la porta es troba a distància $n = 2^k$, aleshores

$$T(n) = 2\sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^k = 2(2^k - 1) + 2^k = 3n - 2 \in \mathcal{O}(n).$$

$$\left(\text{recordem que } \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1\right)$$

Tema 1. Anàlisi d'algorismes

Notació asimptòtica: definicions

- La notació asimptòtica permet classificar les funcions segons com creixen “a la llarga”.
- Se centra en el comportament de les funcions per a entrades grans. Per exemple, $10^6 n > n^2$ fins a un cert valor de n que podem trobar així:

$$10^6 n > n^2 \iff 10^6 > n.$$

  Per a $n \geq 10^6$, doncs, n^2 és més gran que $10^6 n$. En aquest cas, direm que la funció $g(n) = 10^6 n$ està fitada per $f(n) = n^2$ asimptòticament.
- La notació $\mathcal{O}(g)$, anomenada ”O gran”, representa el conjunt de funcions fitades asimptòticament per g.

Notació asimptòtica: definicions

Notació Θ ((a): fita exacta asimptòtica)

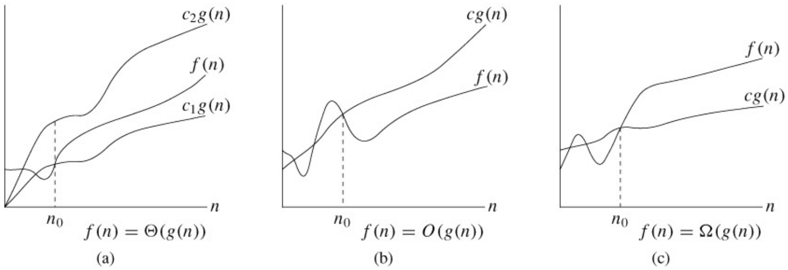
$$\Theta(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Notació O gran ((b): fita superior asimptòtica)

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Notació Ω ((c): fita inferior asimptòtica)

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$



Notació Θ

Notació Θ (fita exacta asimptòtica)

$\Theta(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \;\; c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$

Exemples

- $75n \in \Theta(n)$
- $1023n^2 \notin \Theta(n)$
- $n^2 \notin \Theta(n)$
- $2^n \notin \Theta(2^{n^2})$
- $\Theta(n) \neq \Theta(n^2)$

Notació O gran

Notació O gran (fita superior asimptòtica)

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Exemples

- $3n^2 + 5n - 7 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $n + 15 \in \mathcal{O}(n)$
- $\mathcal{O}(n^5) \subseteq \mathcal{O}(n^6)$
- $n^3 \notin \mathcal{O}(n^2)$
- $n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

Notació Ω

Notació Ω ((c): fita inferior asimptòtica)

$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq c \cdot g(n)\}$

Exemples

- $2^n \in \Omega(n)$
- $n^2 \in \Omega(n)$
- $n \in \Omega(n)$
- $n \notin \Omega(n^2)$
- $\Omega(n^6) \subseteq \Omega(n^5)$

Notació asimptòtica: propietats

Relacions entre $\mathcal{O}$, Ω i Θ

Donades dues funcions f i g:

- $f \in \Omega(g) \iff g \in \mathcal{O}(f)$
- $\Theta(f) = \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$
- $f \in \Theta(g) \iff f \in \mathcal{O}(g)$ i $f \in \Omega(g)$

Notació asimptòtica: propietats

Regles del límit

- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{O}(g)$ però $f \notin \Omega(g)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \;\Rightarrow\; f \in \Omega(g)$ però $f \notin \mathcal{O}(g)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, on $0 < c < \infty \;\Rightarrow\; f \in \Theta(g)$ i $g \in \Theta(f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat.* $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat.* $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització.* $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte.* $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa.* Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització*. $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització*. $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització*. $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització*. $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de l'O gran

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \mathcal{O}(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \mathcal{O}(g) \wedge g \in \mathcal{O}(f) \Rightarrow h \in \mathcal{O}(f)$
- *Caracterització*. $g \in \mathcal{O}(f) \iff \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \mathcal{O}(f_1 + f_2) = \mathcal{O}(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \mathcal{O}(f_1) \wedge g_2 \in \mathcal{O}(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{O}(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Propietats de Θ

Donades les funcions f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 i h:

- *Reflexivitat*. $f \in \Theta(f)$
- *Transitivitat*. $h \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(f) \Rightarrow h \in \Theta(f)$
- *Simetria*. $g \in \Theta(f) \Longleftrightarrow f \in \Theta(g) \Longleftrightarrow \Theta(g) = \Theta(f)$
- *Suma*. $g_1 \in \Theta(f_1) \wedge g_2 \in \Theta(f_2) \Rightarrow g_1 + g_2 \in \Theta(f_1 + f_2) = \Theta(\max(f_1, f_2))$
- *Producte*. $g_1 \in \Theta(f_1) \wedge g_2 \in \Theta(f_2) \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \Theta(f_1 \cdot f_2)$
- *Invariància multiplicativa*. Per a tota constant $c \in \mathbb{R}^+$, $\Theta(f) = \Theta(c \cdot f)$

Notació asimptòtica: propietats

Notació de classes

Si $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ són classes de funcions (com ara $\mathcal{O}(f)$ o $\Omega(f)$), definim:

- $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$
- $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{f \cdot g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$

Regles de la suma i el producte (segona versió)

Donades dues funcions f i g:

- $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g) = \mathcal{O}(\max\{f, g\})$
- $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$
- $\Theta(f) + \Theta(g) = \Theta(f + g) = \Theta(\max\{f, g\})$
- $\Theta(f) \cdot \Theta(g) = \Theta(f \cdot g)$

Notació asimptòtica: propietats

Notació de classes

Si $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ són classes de funcions (com ara $\mathcal{O}(f)$ o $\Omega(f)$), definim:

- $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \{f + g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$
- $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 = \{f \cdot g \mid f \in \mathcal{F}_1 \wedge g \in \mathcal{F}_2\}$

Regles de la suma i el producte (segona versió)

Donades dues funcions f i g:

- $\mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f + g) = \mathcal{O}(\max\{f, g\})$
- $\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$
- $\Theta(f) + \Theta(g) = \Theta(f + g) = \Theta(\max\{f, g\})$
- $\Theta(f) \cdot \Theta(g) = \Theta(f \cdot g)$

Notació asimptòtica: propietats

Polinomis

Sigui $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0$ amb $a_k > 0$. Aleshores $p(n) \in \Theta(n^k)$

Logarismes

Siguin $a, b > 1$. Aleshores $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$

Logarismes, polinomis i exponencials

Siguin $a > 0, b > 0, c > 1$:

- $(\ln n)^a \in \mathcal{O}(n^b)$ però $(\ln n)^a \notin \Omega(n^b)$ [de fet, $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$]
- $n^b \in \mathcal{O}(c^n)$ però $n^b \notin \Omega(c^n)$ [de fet, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{c^n} = 0$]

Exercici: Compara asimptòticament

n^{412}	vs	1.02^n	$243n^2$	vs	n^3	2^n	vs	3^n
$(\log n)^{923}$	vs	$n^{0.0001}$	$n(\ln n)^4$	vs	$n^2 \ln n$	$(log_2 7)^n$	vs	$(log_4 7)^n$
$(\ln n)^{7842}$	vs	1.001^n	$n\,2^n$	vs	$n^3\,1.5^n$	$2^{\sqrt{\log n}}$	vs	n

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Formes de creixement

Costos freqüents

- Constant $\Theta(1)$. Decidir si un nombre és parell o senar.
- Logarítmic $\Theta(\log n)$. Cerca binària.
- Radical $\Theta(\sqrt{n})$. Test bàsic de primalitat.
- Lineal $\Theta(n)$. Cerca seqüencial en un vector.
- Quasilineal $\Theta(n \log n)$. Ordenació eficient d'un vector.
- Quadràtic $\Theta(n^2)$. Suma de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Cúbic $\Theta(n^3)$. Producte de dues matrius quadrades de mida $n \times n$.
- Polinòmic $\Theta(n^k)$, per a $k \geq 1$ constant. Enumerar combinacions (n elements presos de k en k).
- Exponencial $\Theta(k^n)$, per a k constant. Cerca en un espai de configuracions (d'amplada k i alçada n).
- Altres funcions: $\Theta(n!)$, $\Theta(n^n)$.

Algorismes no recursius

Càlcul del cost (en temps):

- El cost d'una operació elemental és $\Theta(1)$. Això inclou:
  - una assignació de tipus bàsics (`int, bool, double`, ...)
  - un increment o decrement d'una variable de tipus bàsic
  - una operació aritmètica
  - una lectura o escriptura de tipus bàsic
  - una comparació
  - l'accés a una component d'un vector
- Avaluar una expressió té cost igual a la suma dels costos de les operacions que s'hi fan (incloses les crides a les funcions, si n'hi ha).
- El cost de `return E` és la suma del cost de l'avaluació de l'expressió E més el cost de copiar (assignar) el resultat.
- El cost del pas de paràmetres per referència és $\Theta(1)$
- El cost de construir o copiar un vector de mida n (assignació, pas per valor, return) és $\Theta(n)$

Algorismes no recursius

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1 i el d'un fragment F_2 és C_2, llavors el cost de la composició seqüencial

  $$F_1 ; F_2$$

  és $C_1 + C_2$.

  En general, si N és constant i cada fragment F_k té cost C_k, el cost de la composició seqüencial

  $$F_1 ; F_2 ; \ldots ; F_N$$

  és $C_1 + C_2 + \cdots + C_N$

Algorismes no recursius

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1, el d'un fragment F_2 és C_2 i el d'avaluar B és D, llavors el cost de la composició alternativa

  $$\texttt{if } (B)\ F_1;\ \texttt{else } F_2$$

  és $D + C_1$ si es compleix B, i $D + C_2$ altrament.
  En tot cas, el cost és $\leq D + \max(C_1, C_2)$.

- Si el cost de F durant la k-èsima iteració és C_k, el d'avaluar B és D_k i el nombre d'iteracions és N, llavors el cost de la composició iterativa

  $$\texttt{while } (B)\ F;$$

  és $\left(\sum_{k=1}^{N} C_k + D_k\right) + D_{N+1}$.

Algorismes no recursius

- Si el cost d'un fragment F_1 és C_1, el d'un fragment F_2 és C_2 i el d'avaluar B és D, llavors el cost de la composició alternativa

  $$\texttt{if } (B)\ F_1;\ \texttt{else } F_2$$

  és $D + C_1$ si es compleix B, i $D + C_2$ altrament.
  En tot cas, el cost és $\leq D + \max(C_1, C_2)$.

- Si el cost de F durant la k-èsima iteració és C_k, el d'avaluar B és D_k i el nombre d'iteracions és N, llavors el cost de la composició iterativa

  $$\texttt{while } (B)\ F;$$

  és $\left(\sum_{k=1}^{N} C_k + D_k\right) + D_{N+1}$.

Exemple d'ordenació per selecció

Passos per ordenar 5, 6, 1, 2, 0, 7, 4, 3 segons l'algorisme de selecció.
En vermell, els elements ja ordenats.
En groc, els elements intercanviats pel màxim.

5	6	1	2	0	7	4	3
5	6	1	2	0	3	4	7
5	4	1	2	0	3	6	7
3	4	1	2	0	5	6	7
3	0	1	2	4	5	6	7
2	0	1	3	4	5	6	7
1	0	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7

Ordenació per selecció

```
0 int posicio_maxim (const vector<int>& v, int m) {
1   int k = 0;
2   for (int i = 1; i <= m; ++i)
3      if (v[i] > v[k]) k = i;
4   return k; }

5 void ordena_seleccio (vector<int>& v, int n) {
6     for (int i = n-1; i >= 0; --i) {
7         int k = posicio_maxim(v, i);
8         swap(v[k], v[i]); }}
```

- **2, 6** Iteracions bucles: $m-1+1=m$, $n-1+1=n$.
- **7** Cost $\Theta(i)$.
- **altres** Instruccions de cost constant: $\Theta(1)$.

$$t_{sel}(n) = \Theta(1) + \sum_{i=1}^{n}(\Theta(i) + \Theta(1)) = \Theta(\sum_{i=1}^{n} i) = \Theta(\frac{n(n+1)}{2}) = \Theta(n^2)$$

Exemple d'ordenació per inserció

Passos per ordenar 5, 6, 1, 2, 0, 7, 4, 3 segons l'algorisme d'inserció.
En vermell, els elements ja ordenats.
Entre parèntesis, el nombre de posicions que s'ha desplaçat l'element inserit.

5	6	1	2	0	7	4	3	(0)
5	6	1	2	0	7	4	3	(0)
1	5	6	2	0	7	4	3	(2)
1	2	5	6	0	7	4	3	(2)
0	1	2	5	6	7	4	3	(4)
0	1	2	5	6	7	4	3	(0)
0	1	2	4	5	6	7	3	(3)
0	1	2	3	4	5	6	7	(4)

Algorismes no recursius

Ordenació per inserció

```
0 void ordena_insercio (vector<int>& v, int n) {
1     for (int k = 1; k <= n-1; ++k) {
2         int t = k-1;
3         while (t >= 0 and v[t+1] < v[t]) {
4             swap(v[t], v[t+1]);
5             --t;
  }   }   }
```

- 0 Pas de paràmetres: $\Theta(1)$.
- 1 Iteracions bucle: $(n-1)-1+1 = n-1 = \Theta(n)$.
- 1,2 Condició d'iteració i línia 2: $\Theta(1)$.
- 3 Iteracions bucle: entre 0 i $k-1-0+1 = k$.
- 4,5 Assignacions de cost $\Theta(1)$.

$$\Theta(1) + (\Theta(n) \times \Theta(1)) \leq t_{ins}(n) \leq \Theta(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k)$$

Algorismes no recursius

Tenim que el cost d'ordenar per inserció n elements és $t_{ins}(n)$ on:

$$\Theta(1) + (\Theta(n) \times \Theta(1)) \le t_{ins}(n) \le \Theta(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k)$$

Però

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \in \Theta(n^2).$$

Aleshores,

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \Theta(k) = \Theta(\sum_{k=1}^{n-1} k) = \Theta(n^2)$$

i

$$\Theta(n) \le t_{ins}(n) \le \Theta(n^2).$$

Algorismes recursius

El cost d'un algorisme recursiu s'expressa sovint en forma de recurrència.

Definició

Una recurrència és una equació o una inequació que descriu una funció expressada en termes del seu valor per a entrades més petites.

Exemple

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Per exemple, $C(1) = 1$, $C(2) = 1 + 2 = 3$ i $C(3) = 3 + 3 = 6$.
Però voldríem una fórmula no recurrent per calcular el valor!

Resoldre la recurrència vol dir donar una forma tancada pel terme n-èsim.

El cost d'un algorisme recursiu s'expressa sovint en forma de recurrència.

Definició

Una recurrència és una equació o una inequació que descriu una funció expressada en termes del seu valor per a entrades més petites.

Exemple

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Per exemple, $C(1) = 1$, $C(2) = 1 + 2 = 3$ i $C(3) = 3 + 3 = 6$.
Però voldríem una fórmula no recurrent per calcular el valor!

Resoldre la recurrència vol dir donar una forma tancada pel terme n-èsim.

Algorismes recursius

$$C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ C(n-1) + n, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Solució

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1) + n \\ &= C(n-2) + (n-1) + n \\ &= C(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= C(1) + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2). \end{aligned}$$

Algorismes recursius

Per trobar una recurrència que descrigui el cost d'un algorisme recursiu, hem de determinar:

- el paràmetre de recursió n (típicament la mida de l'entrada),
- el cost del cas inductiu
  - nombre de crides recursives
  - valors del paràmetre recursiu de les crides
  - cost dels càlculs extra no recursius

Cerca lineal recursiva

Mirar si un nombre x apareix en un vector a entre les posicions 0 i $n-1$ comparant-lo amb $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$.
Si el troba, retorna l'índex de la posició que conté x.
Altrament, retorna -1.

```
int cerca_lineal(const vector<int>& a, int n, int x) {
    if (n == 0) return -1;
    else if (a[n-1] == x) return n-1;
    else return cerca_lineal(a, n-1, x);
}
```

El paràmetre de la recursió és n, la mida del vector.
Definim la recurrència per a $T(n)$, el cost (en el cas pitjor) de l'algorisme:

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$$

Algorismes recursius

$T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ (i $T(0) = \Theta(1)$)

Solució

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + \Theta(1) \\
&= T(n-2) + 2 \cdot \Theta(1) \\
&= T(n-3) + 3 \cdot \Theta(1) \\
&\vdots \\
&= T(1) + (n-1) \cdot \Theta(1) \\
&= T(0) + n \cdot \Theta(1) \\
&= (n+1) \cdot \Theta(1) \\
&= \Theta(n+1) = \Theta(n).
\end{aligned}
$$

Algorismes recursius

Cerca binària recursiva

Mirar si un nombre *x* apareix en un vector ordenat *a* entre les posicions *i* i *j* per cerca binària.
Si el troba, retorna l'índex de la posició que conté *x*.
Altrament, retorna -1.

```
int cerca_binaria(const vector<int>& a,int i,int j,int x)
{  if (i <= j) {
       int k = (i + j) / 2;
       if       (x < a[k])
           return cerca_binaria(a, i, k-1, x);
       else if (x > a[k])
           return cerca_binaria(a, k+1, j, x);
       else
           return k;
   }
   else return -1;
}
```

Algorismes recursius

```
int cerca_binaria(const vector<int>& a,int i,int j,int x)
{  if (i <= j) {
       int k = (i + j) / 2;
       if       (x < a[k])
           return cerca_binaria(a, i, k-1, x);
       else if (x > a[k])
           return cerca_binaria(a, k+1, j, x);
       else
           return k;
   }
   else return -1;
}
```

El paràmetre de recursió és $n = j - i + 1$, la mida de l'interval a explorar. Definim la recurrència per a $T(n)$, el cost (en cas pitjor) de l'algorisme:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

Algorismes recursius

$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ (i $T(0) = \Theta(1)$).

Solució

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + \Theta(1) \\
&= T(n/4) + 2 \cdot \Theta(1) \\
&= T(n/8) + 3 \cdot \Theta(1) \\
&\vdots \\
&= T(n/2^{\log_2 n}) + \log_2 n \cdot \Theta(1) \\
&= T(1) + \log_2 n \cdot \Theta(1) \\
&= T(0) + (\log_2 n + 1) \cdot \Theta(1) \\
&= (\log_2 n + 2) \cdot \Theta(1) = \Theta(\log n + 2) = \Theta(\log n).
\end{aligned}
$$

Teoremes mestres

Per sistematitzar l'anàlisi del cost dels algorismes recursius, els classifiquem en dos grups en funció de com divideixen el problema d'entrada en subproblemes en les crides recursives.

Sigui A un algorisme amb una entrada de mida n que fa a crides recursives i una feina addicional no recursiva de cost $g(n)$. Llavors, si en les crides recursives els subproblemes tenen tots mida

- $n - c$, el cost d'A ve descrit per la recurrència

$$T(n) = a \cdot T(n - c) + g(n)$$

- n/b, el cost d'A ve descrit per la recurrència

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + g(n)$$

Teoremes mestres

Les dues menes de recurrències anteriors:

- subtractives: $T(n) = a \cdot T(n-c) + g(n)$
- divisores: $T(n) = a \cdot T(n/b) + g(n)$

es poden resoldre amb els teoremes mestres que veurem a continuació.

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències subtractives

Sigui $T(n)$ la recurrència

$$T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n-c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències subtractives

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n-c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 1

Hem vist que el cost de l'algorisme recursiu de cerca lineal es pot descriure amb la recurrència $T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ i $T(0) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 1$, $a = 1$, $c = 1$, $k = 0$. Llavors, $T(n)$ pertany al segon cas:

$$T(n) \in \Theta(n^{k+1}) = \Theta(n).$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències subtractives

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n-c) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 2

En la recurrència $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$, tenim els valors

$$a = 1,\ c = 1,\ k = 1.$$

Llavors, $T(n)$ pertany al segon cas:

$$T(n) \in \Theta(n^{k+1}) = \Theta(n^2).$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències subtractives

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \le n < n_0 \\ a \cdot T(n-c) + g(n), & \text{si } n \ge n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \ge 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \ge 0$.

Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{k+1}), & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n/c}), & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Exemple 3

En la recurrència $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + \Theta(n)$, tenim els valors

$$a = 2,\ c = 1,\ k = 1.$$

Llavors, $T(n)$ pertany al tercer cas:

$$T(n) \in \Theta(2^n).$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències divisores

Sigui $T(n)$ la recurrència

$$T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències divisores

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Exemple 1

Hem vist que el cost de l'algorisme recursiu de cerca binària es pot descriure amb la recurrència $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ per a $n \geq 1$ i $T(0) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $k = 0$, $\alpha = 0$. Llavors, $T(n)$ pertany al 2n cas:

$$T(n) \in \Theta(n^k \log n) = \Theta(\log n).$$

Exemple 2

Funció principal de l'ordenació per fusió (*mergesort*).

```
template <typename elem>
void ordenacio_fusio (vector<elem>& a, int e, int d) {
    if (e < d) {
        int m = (e + d) / 2;
        ordenacio_fusio(a, e, m);
        ordenacio_fusio(a, m + 1, d);
        fusionar(a, e, m, d);
}   }
```

Tenint en compte que el cost de la crida `fusionar(a, e, m, d)` és $\Theta(n)$ (on $n = d - e + 1$), el cost total es pot expressar amb la recurrència:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \text{ per a } n \geq 2, \text{ i } T(1) = \Theta(1).$$

Teoremes mestres

Teorema mestre de recurrències divisores

Sigui $T(n) = \begin{cases} f(n), & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a \cdot T(n/b) + g(n), & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$

on $n_0 \in \mathbb{N}$, $b > 1$, f és una funció arbitrària i $g \in \Theta(n^k)$ per a $k \geq 0$.

Sigui $\alpha = \log_b(a)$. Aleshores,

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{si } \alpha < k \\ \Theta(n^k \log n), & \text{si } \alpha = k \\ \Theta(n^\alpha), & \text{si } \alpha > k \end{cases}$$

Exemple 2

Hem vist que el cost de l'ordenació per fusió es pot descriure amb la recurrència $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ per a $n \geq 2$ i $T(1) = \Theta(1)$.

Per tant, $n_0 = 2$, $a = 2$, $b = 2$, $k = 1$, $\alpha = 1$. Llavors, $T(n)$ pertany al 2n cas:

$$T(n) \in \Theta(n^k \log n) = \Theta(n \log n).$$

- Els nombres de Fibonacci estan definits per la recurrència $f(k) = f(k-1) + f(k-2)$ per a $k \geq 2$, amb $f(0) = 1$ i $f(1) = 1$.

1a solució

```
int fib(int k) {
  if (k <= 1) return 1;
  else return fib(k-1) + fib(k-2);
}
```

- El cost segueix la recurrència $T(k) = T(k-1) + T(k-2) + \Theta(1)$
- No podem aplicar directament el teorema mestre per resoldre-la!

Podem aproximar i llavors aplicar el teorema mestre:
(noteu les inequacions i les O/Ω)

- $T(k) = T(k-1) + T(k-2) + \Theta(1) \leq 2T(k-1) + \Theta(1)$ dóna $T(k) = O(2^k)$, i
- $T(k) = T(k-1) + T(k-2) + \Theta(1) \geq 2T(k-2) + \Theta(1)$ dóna $T(k) = \Omega(\sqrt{2}^k)$

Es pot demostrar que $T(k) = \Theta(\phi^k)$, on $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*nombre d'or*)
Noteu que $\sqrt{2} = 1.414213562...$ i $\phi = 1.618033988...$

2a solució

```
int fib(int k) {
  if (k <= 1) return 1;
  int cur = 1;
  int pre = 1;
  for (int i = 1; i < k; ++i) {
    int tmp = pre;
    pre = cur;
    cur = cur + tmp;
  }
  return cur;
}
```

- Cada volta costa temps $\Theta(1)$
- El cost és proporcional al nombre de voltes: $\Theta(k)$

Algorisme d'exponenciació ràpida

```
template <typename T>
T pow(const T& a, int k) {
  if (k == 0) return identity(a);
  T b = pow(a, k/2);
  if (k % 2 == 0) return b*b;
  else            return a*b*b;
}
```

- Serveix per a calcular a^k
- $a^0 = 1$
- Si k és parell, $a^k = (a^{\frac{k}{2}})^2 = (a^{k \text{ div } 2})^2$
- Si k és senar, $a^k = a \cdot a^{k-1} = a \cdot (a^{\frac{k-1}{2}})^2 = a \cdot (a^{k \text{ div } 2})^2$

Anàlisi d'Algorismes per als Nombres de Fibonacci

Algorisme d'exponenciació ràpida

```
template <typename T>
T pow(const T& a, int k) {
  if (k == 0) return identity(a);
  T b = pow(a, k/2);
  if (k % 2 == 0) return b*b;
  else              return a*b*b;
}
```

- Assumim cost d'`identity`, $*$, construcció i còpia pel tipus T és $\Theta(1)$
- El cost $T(k)$ segueix la recurrència $T(k) = T(k/2) + \Theta(1)$
- Aplicant el teorema mestre tenim que $T(k) = \Theta(\log(k))$

Anàlisi d'Algorismes per als Nombres de Fibonacci

- Per inducció es pot demostrar que

$$\begin{pmatrix} f(k+1) \\ f(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} \text{ per tot } k \geq 0$$

3a solució

```
typedef vector<vector<int>> matrix;

int fib(int k) {
  matrix f = {{1, 1}, {1, 0}};
  matrix p = pow(f, k);
  return p[1][0] + p[1][1];
}
```

- Ja hem vist que el cost és $\Theta(\log(k))$

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

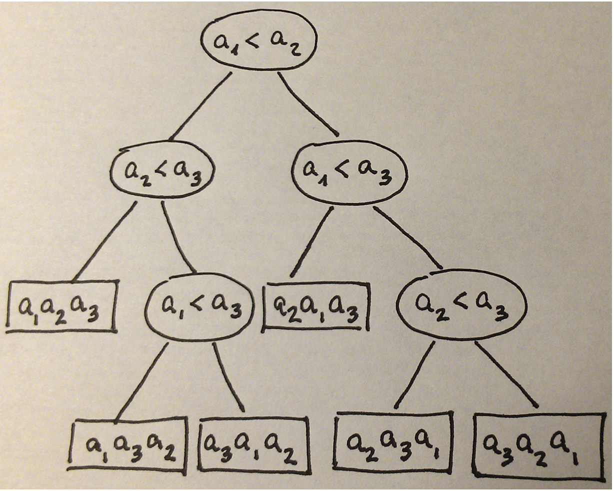
En termes de cost asimptòtic, l'algorisme d'ordenació per fusió és òptim:

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Es pot argumentar fent servir arbres per representar els algorismes d'ordenació basats en comparacions.

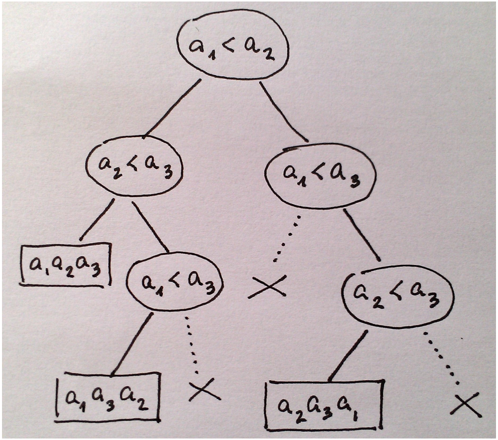
Suposem que volem ordenar a_1, a_2 i a_3. Si $a_1 < a_2$, seguim per la branca esquerra; si no, per la dreta. Els rectangles representen les ordenacions trobades. L'alçada de l'arbre és el cost en cas pitjor.



Fita inferior dels algorismes d'ordenació

Considerem un arbre que ordena n elements:

- cada fulla correspon a una permutació de $\{1, 2, \ldots, n\}$
- cada permutació de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha d'aparèixer en alguna fulla
  (si una no hi aparegués, què passaria si es donés com a entrada?)



Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari d'alçada d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, l'alçada del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari d'alçada d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, l'alçada del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari d'alçada d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, l'alçada del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari d'alçada d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, l'alçada del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.

Fita inferior dels algorismes d'ordenació

- com que hi ha $n!$ permutacions de n elements, l'arbre té $\geq n!$ fulles
- tot arbre binari d'alçada d té $\leq 2^d$ fulles
- per tant, l'alçada del nostre arbre és almenys de $\log_2 n!$

El cost de l'algorisme representat per l'arbre és, per tant, $\Omega(\log n!)$. Com que

$$n! \geq n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot \lfloor n/2 \rfloor \geq (n/2)^{(n/2)}$$

tenim que

$$\log_2 n! \geq \log_2 (n/2)^{(n/2)} = \frac{n}{2} \log_2 (n/2) \in \Omega(n \log n).$$

Proposició

Tot algorisme d'ordenació basat en comparacions té cost $\Omega(n \log n)$.