Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Filip Piskorski

Informatyka - 3 sem

WIEiT, AGH

1. Problem

Proszę rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe transportu ciepła:

$$- k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 \; dla \; x \in [0,1] \\ 2 \; dla \; x \in (1,2] \end{cases}$$

Szukaną funkcją jest funkcja u:

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in R$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Proces wyprowadzenia tych wzorów zaczynam od pomnożenia obustronnie przez v i obustronne scałkowania po dziedzinie. Po tych operacjach dostaję wzór:

$$- \int_0^2 ku''v \, dx = 0$$

Następnie rozdzielam całkę na dwie, aby móc wstawić wzór na k(x):

$$- \int_0^1 1u''v \, dx - \int_1^2 2u''v \, dx = 0$$

Korzystam z całkowania przez części:

$$- [u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v' \, dx - [2u'v]_1^2 + \int_1^2 2u'v' \, dx = 0$$

Potem rozwijam całki po brzegu, podstawiam $u'(0) = 20 - u(0)$ z warunku brzegowego i przenoszę $20v(0)$ na drugą stronę:

$$- u'(1)v(1) + u'(0)v(0) - 2u'(2)v(2) + 2u'(1)v(1) + \int_0^1 u'v' \, dx + \int_1^2 2u'v' \, dx = 0$$

$$- u'(1)v(1) + 20v(0) - u(0)v(0) - 2u'(2)v(2) + 2u'(1)v(1) + \int_0^1 u'v' \, dx + \int_1^2 2u'v' \, dx = 0$$

$$- u'(1)v(1) - u(0)v(0) - 2u'(2)v(2) + 2u'(1)v(1) + \int_0^1 u'v' \, dx + \int_1^2 2u'v' \, dx = - 20v(0)$$

Następnie lewą stronę oznaczam jako B(u,v), a prawą jako L(v).

$$B(u,v) = -u'(1)v(1) - u(0)v(0) - 2u'(2)v(2) + 2u'(1)v(1) + \int_0^1 u'v'\,dx + \int_1^2 2u'v'\,dx$$

$$L(v) = -20v(0)$$

Nasze równanie przyjmuje więc postać

$$B(u,v) = L(v)$$

3. Przybliżanie funkcji

Funkcję u(x) będziemy chcieli przybliżyć przez sumę elementów pomnożonych przez wagi.

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{n} w_i e_i$$

Mając na uwadze jednak warunek brzegowy Dirichleta możemy wywnioskować, że $w_n = 0$. Możemy więc ograniczyć zakres poszukiwań do elementów od 0 do n-1.

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i$$

Wcześniejsze równanie możemy więc zapisać w ten sposób:

$$B(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i,\ v) = L(v)$$

I korzystając z liniowości funktora B przekształcić do postaci:

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i,\ v) = L(v)$$

Którą możemy rozważać dla funkcji testowych $v = e_j$ dla każdego j od 0 do n-1.

Dostajemy więc z tego liniowy układ równań który w postaci macierzowej można zapisać jako B*W = L , gdzie znanymi są nam B i L, a szukaną wektor wag W. Macierz i wektory definiujemy w następujący sposób:

$$B = \begin{bmatrix} B_{0\,0} & B_{1\,0} & \dots & B_{n-1\,0} \\ B_{0\,1} & B_{1\,1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{0\,n-1} & \dots & \dots & B_{n-1\,n-1} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \dots \\ L_{n-1} \end{bmatrix}$$

Aby znaleźć wagi funkcji testowych trzeba rozwiązać ten układ równań.

4. Funkcje testowe

Wzór na funkcje testowe znaleziony na wikipedii wygląda tak:

$$e_k = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} & x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 & dla\, reszty \end{cases}$$

Z niego bardzo łatwo wyprowadzić wzór na pochodną tej funkcji

$$e'_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} & x \in [x_{k-1}, x_k) \\ \frac{-1}{x_{k+1} - x_k} & x \in (x_k, x_{k+1}] \\ 0 & dla\, reszty \end{cases}$$

A dla obliczenia xk posłużę się wyprowadzonym przeze mnie wzorem

$$x_k = (\max\ -\ \min)\frac{k}{n} + min$$

gdzie:
max - maksymalny element dziedziny
min - minimalny element dziedziny
n - liczba elementów

Takie funkcje gwarantują równomierny rozkład elementów po przedziale.