금융 분석과 모델링

모듈 - 1

1. 시계열로 가져와 간단히 모델링
2. 리스크관리
3. 금융상품 - 파생상품에대해

강사: 장순용 박사

순서

어려운내용은 부록으로 뺌

시계열 모델링 개요

시계열이란?

→ 시간 순서대로 정렬된 수치 데이터.

→ 관측 값이 시간에 따라서 변한다.

→ 시간 단위를 전제한다. ⇒ 1분, 1초, 하루, 한달, 등.

변수 1,2,3이 아
→ 표기방법: $x_1, x_2, x_3, \cdots$ or X_t. 시점 1에서의 값, 시점2에서의 값(변수값아님) - x가 삼성전자면, 오늘 삼성전자의 종가, 내일 삼성의 종가~

→ 많은 경우 시계열의 현재는 과거와 "연결"된다. 즉, 자기상관계수 $\neq 0$.

현재와 오늘이 연결되야 함
자기와 연관이 있어야

시계열 모델링 개요

시계열의 사례:

→ 삼성전자, 애플, 구글과 같은 회사의 일일 주식가격.

→ 한 시간 단위로 교차로를 지나는 자동차 대수.

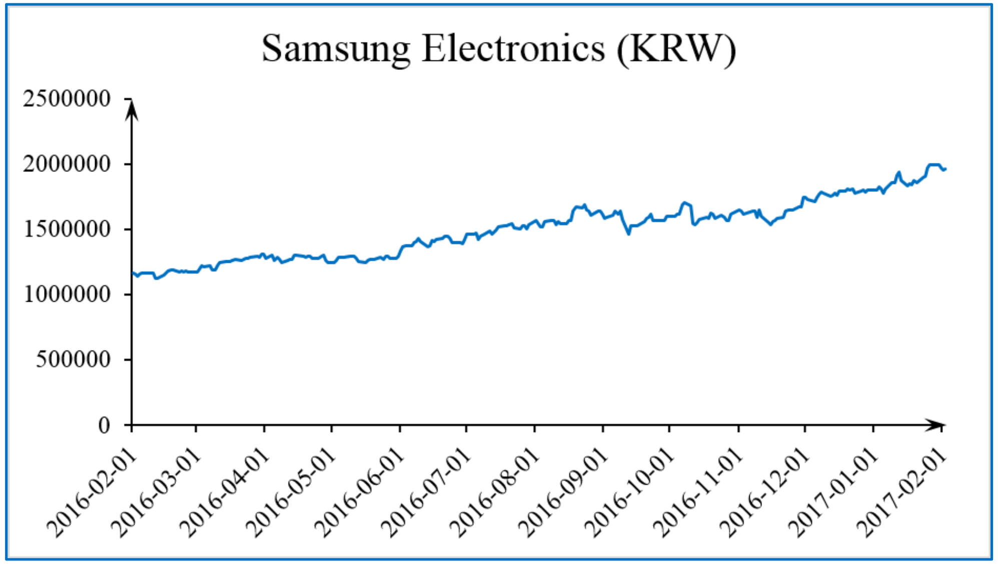
→ 달러화 대 원화 일일 환율.

시계열 모델링 개요

시계열의 사례:

정렬

SAMSUNG ELECTRONICS	
Date	**Price**
2017-02-02	1968000
2017-02-01	1956000
2017-01-31	1973000
2017-01-30	1995000
2017-01-27	1995000
2017-01-26	1995000
2017-01-25	1970000
2017-01-24	1908000
2017-01-23	1903000
2017-01-20	1860000



시계열 모델링 개요

비정상 시계열 (Non Stationary Time Series):

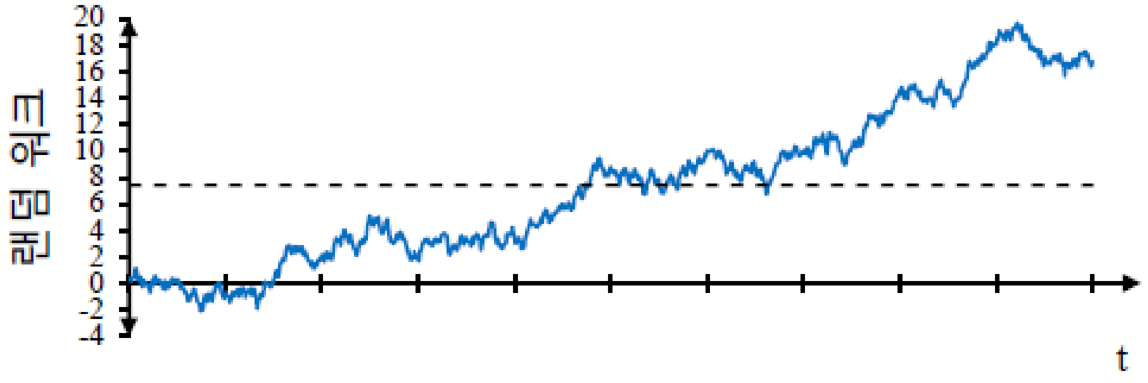
추세가 명확한 시계열, 오르던지 내리던지,전체에 대한 평균이 없음
특정구간에 대한 평균은 있음

→ 시간이 지나면 확률적 특성이 유지되지 않는다.

→ 평균, 분산, 자기상관계수 등이 시간이 지남에 따라서 변할 수 있다.

→ 시계열에 추세성 요소 (trend)가 있다. 예). 랜덤워크. 주식가격

주식가격시계열은 비정상시계열임
추세가 있음
올라갔다가 내려갔다가
평균이 똑같이 유지되지않음
어떤날은 39만원 어떤날은 89만
모델리은 정상시계열로



시계열 모델링 개요

정상 시계열 (Stationary Time Series):

평균기준으로 왔다갔다만

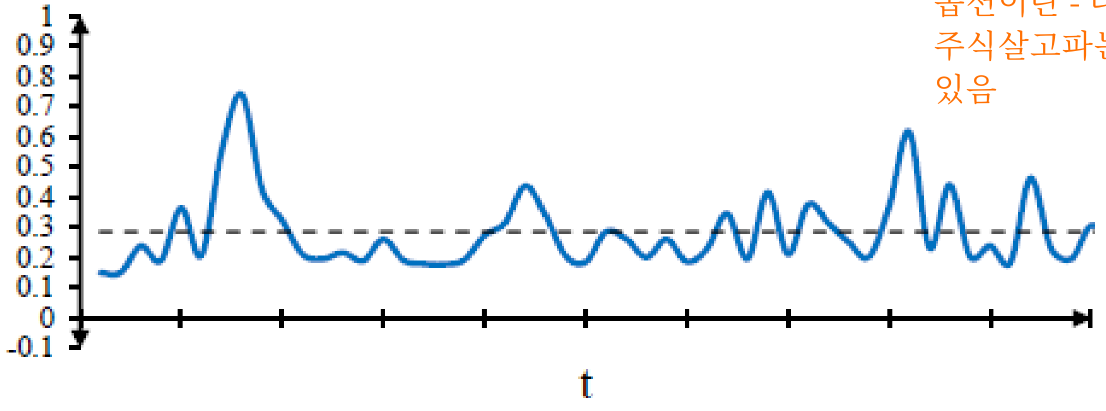
→ 시간이 지나도 모든 확률적 특성이 그대로 유지되는 시계열이다.

현실적으로 모든 확률적 특성이 그대로 유지되지 않음
따라서 약정상성시계열로 정의함(좀 더 유하게)

→ 이 조건은 너무나 엄격하기 때문에 “약정상성”으로 완화한다.

변동성이 중요함 - 파생상품에서는 변동성이 가격임
변동성을 예측하면 옵션을 사고팔수 있음

옵션이란 - 내돈 10가지원 100을 벌 수 있는 투자도구
주식살고파는거보다 짧은기간에 돈을 벌 수 있고, 잃을수 있음



시계열 모델링 개요

약정상 시계열 (Weak Stationary Time Series):

→ 평균이 일정하게 유지됨: $\bar{x} = E[x_t]$.

→ 분산이 일정하게 유지됨: $s^2 = Var(x_t) = Cov(x_t, x_t) = E[(x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x})]$.

→ 시점 i 와 시점 j 사이의 자기상관계수가 $Corr(x_i, x_j) = \rho(|i-j|)$와 같은 함수관계임.

시계열 하나에 대해서 상관계수 정하는거

즉, 시점 사이의 거리에 의해서 정해짐.

시계열 모델링 개요

자기공분산 (Auto-Covariance Function):

l은 얼마만큼 지연이 되었는가
현시점과 과거, l시점 이전사이의 공분산이 자기공분산임
현시점은 차이가 l만 되면 되니 cov(x, x)랑 같음

→ 자기공분산 수식: $\gamma(\ell) = Cov(x_t, x_{t-\ell}) = E[(x_t - \bar{x})(x_{t-\ell} - \bar{x})]$.

→ $\gamma(\ell) = Cov(x_{t-1}, x_{t-1-\ell}) = Cov(x_{t-2}, x_{t-2-\ell}) = \cdots$

→ 시계열의 전체적 분산과 연관된다: $s^2 = \gamma(0)$.

상관계수는 x와 y사이에 공분산나누기 각각의 표준편차

시계열에서도 자기공분산을 계산하고 자기상관계수를 계산

l이 1이상이냐, 0이냐에 따라 ~

시계열 모델링 개요

자기상관계수 (Auto-Correlation Function, ACF):

→ 자기공분산 $\gamma(\ell)$를 사용해서 정의할 수 있다: $\rho(\ell) = \gamma(\ell) / \gamma(0)$.

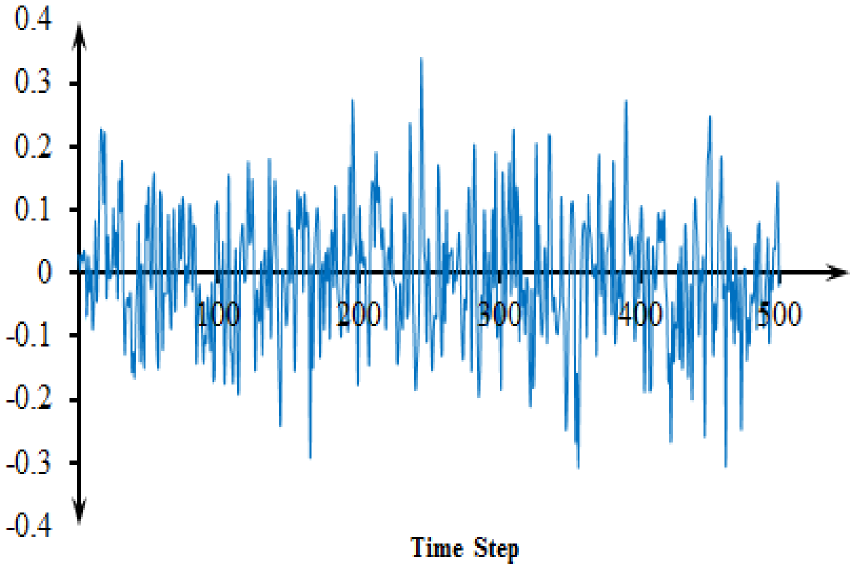
→ 모든 시계열에서 시점 사이의 차이가 0이면 $\rho(0) = 1$과 같다.

같은 시계열 변수대 다른시점끼리 비교
현재와 오늘, 미래와 어제

시계열 모델링 개요

자기상관계수 (Auto-Correlation Function, ACF):

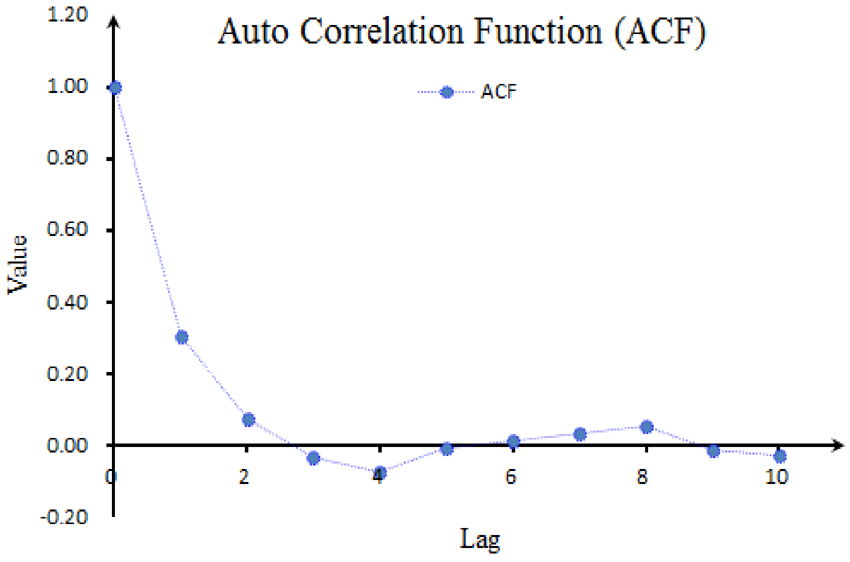
예). 강하지 않은 자기상관성.



시계열 모델링 개요

자기상관계수 (Auto-Correlation Function, ACF):

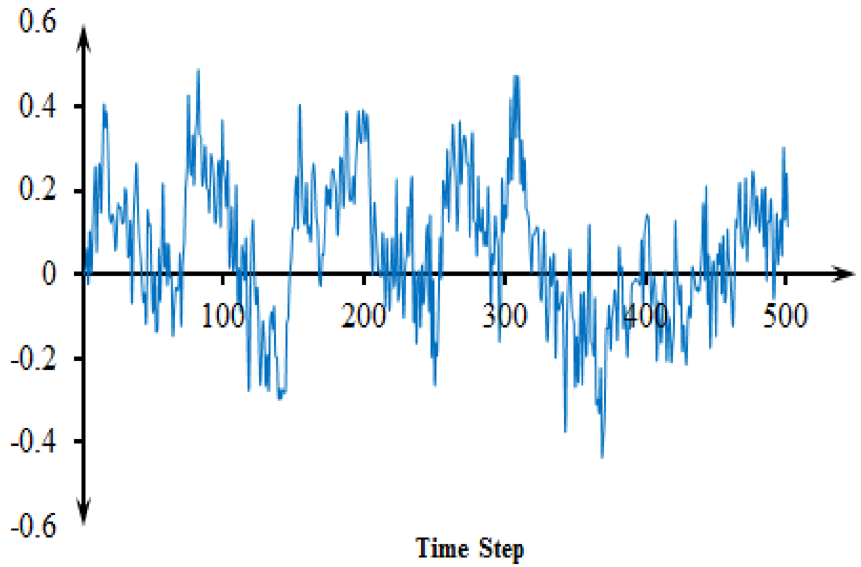
예). 강하지 않은 자기상관성.



시계열 모델링 개요

자기상관계수 (Auto-Correlation Function, ACF):

예). 상대적으로 강한 자기상관성.

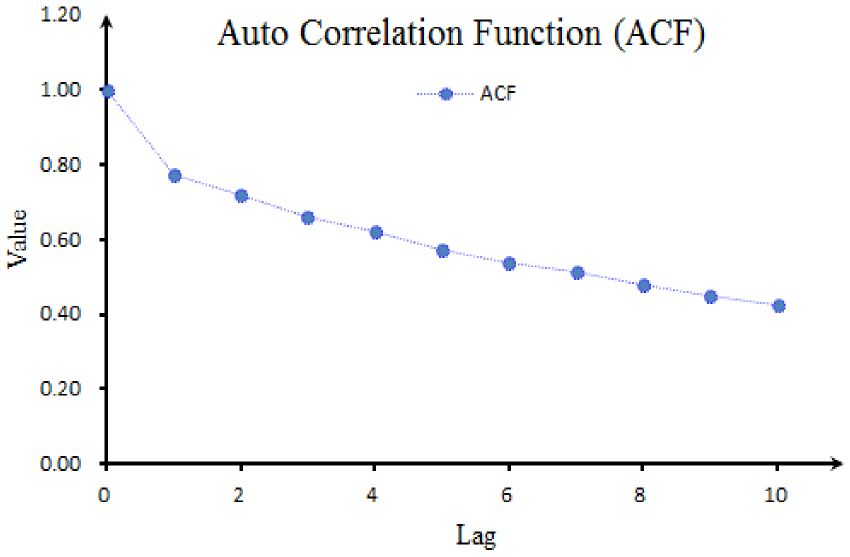


시계열 값이 오르면 시간이 지나서 떨어짐
시간이 지나야 그래프가 변동함 - > 자기상관성이
강한 경우

시계열 모델링 개요

자기상관계수 (Auto-Correlation Function, ACF):

예). 상대적으로 강한 자기상관성.



순서

1. 금융 분석과 모델링.
   1.1. 시계열 모델링 개요.
   1.2. 이동평균.
   1.3. 지수평활화 모형.
   부록 1. 시계열 모형의 활용.
   부록 2. 변동성 모델링.
   부록 3. 변동성 예측.

시계열에서 많이 계산하는거 이동평균
주식에서 많이 사

이동평균

이동평균 개요:

- 이동평균은 시계열의 부분집합으로 평균을 구하여 평활화 효과를 얻는 방법이다.
- 평활화의 목적은 노이즈와 같이 짧은 주기의 특징을 걸러내고 긴 주기의 추세를 밝혀 내는 것.

평활화란 영어로 스무스하게한다라는 의미
자잘한 추세는 없애버리고 큰 추세만 남긴다가 평활화의 목적

창문안에 있는 데이터만 가지고 평균 구하는거
창문옮기면서 보는것

이동평균

이동평균의 유형:

단순,가중이동평균은 주식에서 자주 쓰임

- 단순 이동평균은 다음과 같이 계산한다. N =moving window의 길이.

$$\text{단순 이동평균}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{t-i}$$

- 지수 이동평균은 다음과 같이 구한다. 0과 1사이의 α 파라미터로 평활화 정도를 조정할 수 있다.

$$\text{지수 이동평균}_t = \frac{\sum_{i=0}^{N-1}(1-\alpha)^i x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{N-1}(1-\alpha)^j}$$

현 시점에서 과거 5일, 과거 10일 평균을 구하고
내일은 내일기준을 과거 5일, 과거10일 평균을 구한다
평균을 움직이면서 구하는게
이동평균

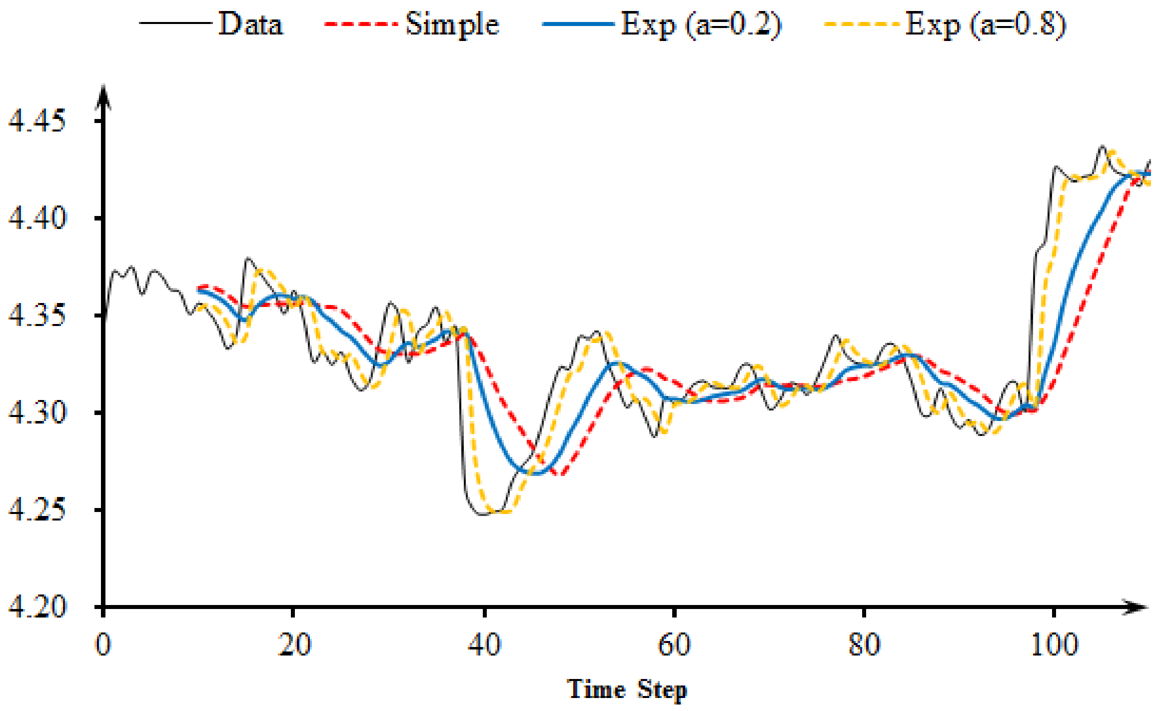
$\rightarrow \alpha$ 파라미터가 0에 가까울 수록 단순이동평균에 수렴한다.

$\rightarrow \alpha$ 파라미터가 1에 가까울 수록 원 시계열에 수렴한다.

강중치를 두어서 과거값을 더해주는것 - 가중평균
이동평균은 가중평균과 비슷하다

이동평균

이동평균의 유형:



원래 시계열과 단순이동 사이를 왔다갔다하는게 지수이동평균임
지수이동평균으로 컨트롤 가능

이동평균

이동평균의 유형:

- Running 이동평균은 지수 이동평균의 응용이다.

$\alpha = \frac{1}{N+1}$와 같은 지수 이동평균이다.

- 가중 이동평균을 계산하기 위해서는 두개의 시계열이 필요하다. $x_t, x_{t-1}, \cdots$ 과 무게를 계산하기 위한 $V_t, V_{t-1}, \cdots$.

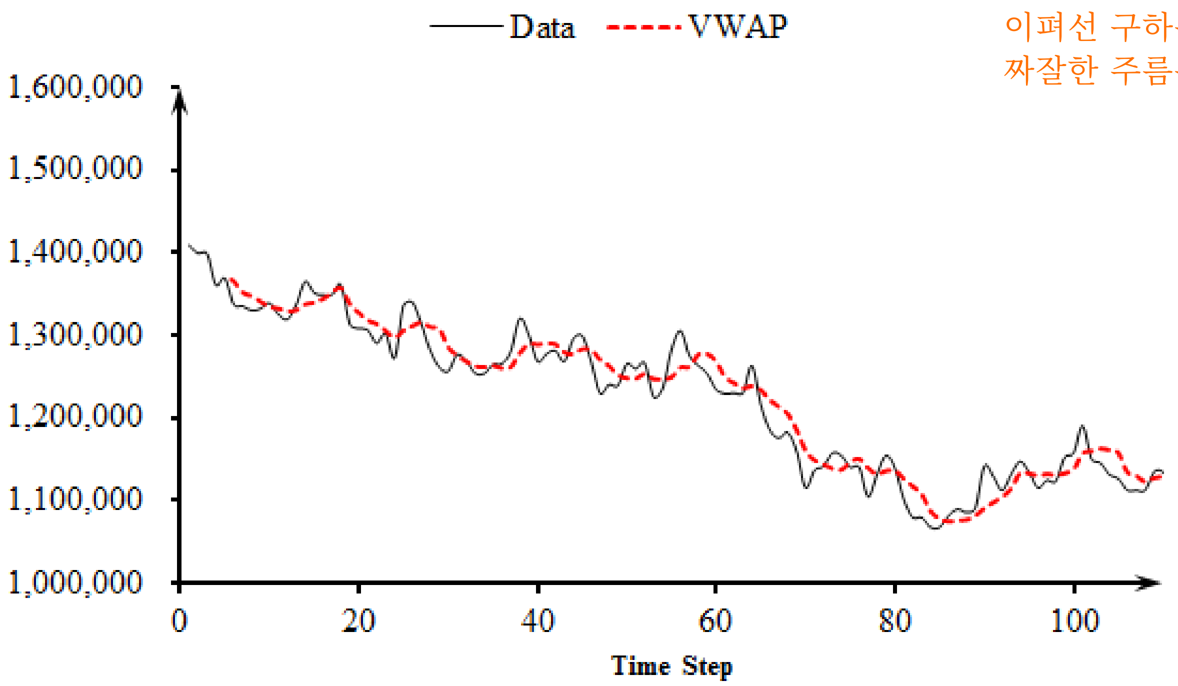
$$\text{가중 이동평균}_t = \frac{\sum_{i=0}^{N} w_{t-i} x_{t-i}}{\sum_{j=0}^{N} w_{t-j}} \qquad w_{t-i} = \frac{V_{t-i}}{\sum_{j=0}^{N} V_{t-j}}$$

거래량을 가중치로 삼아 가격의 평균을 구할때 사용
이동평균을 구하는데 같은 가중치로 구하는거보다 거래량이 많은날 가중치 많이 두는게 좋음

이동평균

이동평균의 유형:

이펴선 구하는이유
짜잘한 주름은 노이즈라 여기고 잡아주는 역할



가중이동평균으로 구한 주식가격의 VWAP (Volume Weighted Average Price)

거래량으로 가중치를 삼아 이동평균을 구한 것

순서

지수평활화 모형

지수평활화 모형: 시계열 예측모형

- 크게는 다음 두 가지 유형의 지수평활화 모형이 있다.

→ 가법모형 (Additive Model):

시계열 변동을 요인의 합으로 설명한다.

진폭이 일정할 때 적합하다.

→ 승법모형 (Multiplicative Model): 시계열의 요인들이 곱해지는

시계열 변동을 요인의 곱으로 설명한다.

진폭이 점점 증가/감소 할 때 적합하다.

지수평활화 모형

지수평활화 가법모형 (Additive Model):

- 시계열 X_t가 있을 때, 다음과 같은 관계를 가정한다:

현재 시계열이 여러 요소의 합으로 이루어져있다 - >현실반영을 항상 하진 않음 모델임

$$X_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$$

지수평활화 모형

지수평활화 가법모형 (Additive Model):

- 시계열 X_t가 있을 때, 다음과 같은 관계를 가정한다:

$$X_t = \color{red}{\ell_{t-1}} + b_{t-1} + \varepsilon_t$$

전 스텝의 "level".

이전 스텝의 레벨과 트렌드를 가지고 불확실성을 더

지수평활화 모형

지수평활화 가법모형 (Additive Model):

- 시계열 X_t가 있을 때, 다음과 같은 관계를 가정한다:

$$X_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$$

전 스텝의 "trend".

지수평활화 모형

지수평활화 가법모형 (Additive Model):

- 시계열 X_t가 있을 때, 다음과 같은 관계를 가정한다:

$$X_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$$

"불확실성"

평균(ε_t)=0

표준편차(ε_t)=σ_ε

지수평활화 모형

지수평활화 가법모형 (Additive Model):

- 시계열 X_t가 있을 때, 다음과 같은 관계를 가정한다:

$$X_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$$

- "level"과 "trend" 사이에는 다음과 같은 관계를 가정한다:

$$\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$$

평균과 추세를 더했더니
현 추세가 만들어졌다(이것도 가설이지만
앞의 것보다는 현실반영이 높음)

지수평활화 모형

가법모형의 예측:

- 스텝 t까지 데이터가 있고 미래 h 스텝을 예측하고자 한다: $\hat{X}_{t+h|t}$ t시점까지 데이터를 기반으로 h시점까지의 미래를 예측한다는 뜻
- 기대값으로 미래 예측을 하고자 한다. 이때 미래 ε_t의 기대값은 0이다.

$\Rightarrow$ 미래의 **평균 경로**를 구하고자 한다.

- 다음과 같은 수식으로 구할 수 있다.

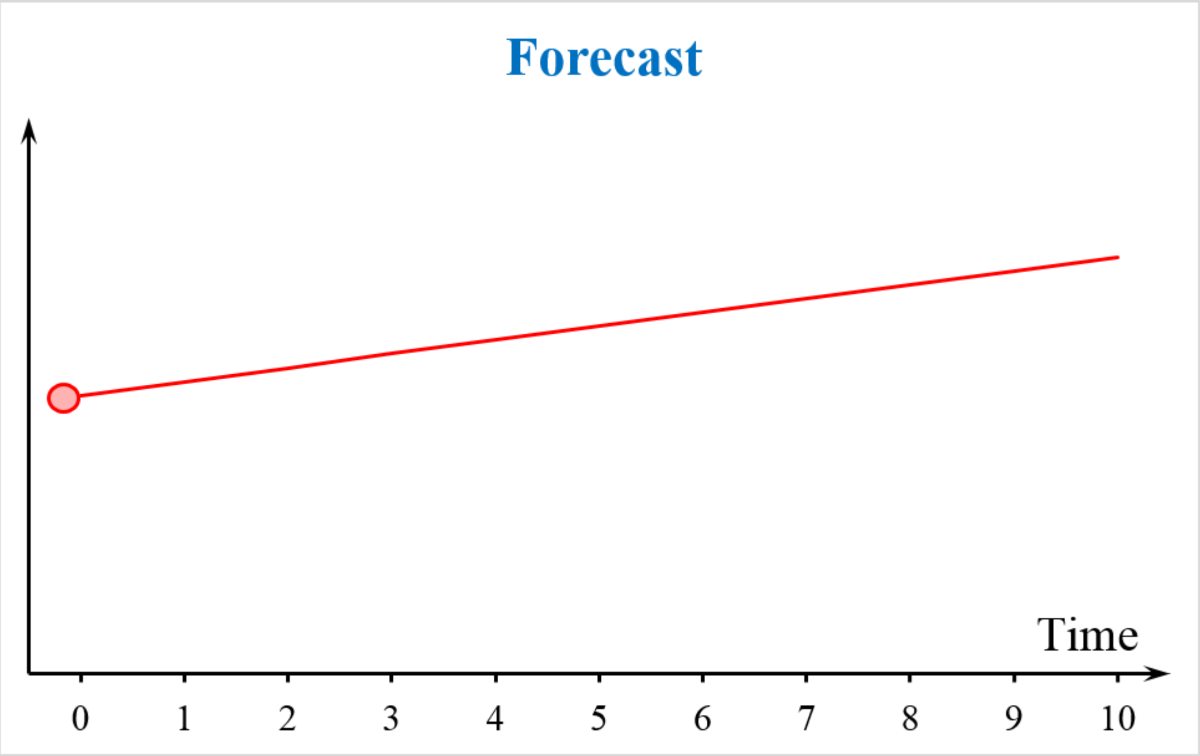
$$\hat{X}_{t+h|t} = \ell_t + hb_t$$

레벨은 그대로 두고 추세를 h와 곱해서 더해주면
미래예측이 된다

지수평활화 모형

가법모형의 예측:

- 미래의 평균 경로 예측은 다음과 같은 직선이다.



미래의 평균추세

지수평활화 모형

예측과 신뢰구간:

신뢰구간을 계산해야 정확해짐(불확실성을 포함)

- 평균 경로 뿐만이 아니라 신뢰구간을 계산하고자 한다.

→ 평균 경로 뿐만이 아니라 모든 가능한 경로를 고려해 본다.

→ 불확실성 ε_t의 효과를 미래 경로 예측에 포함시킨다.

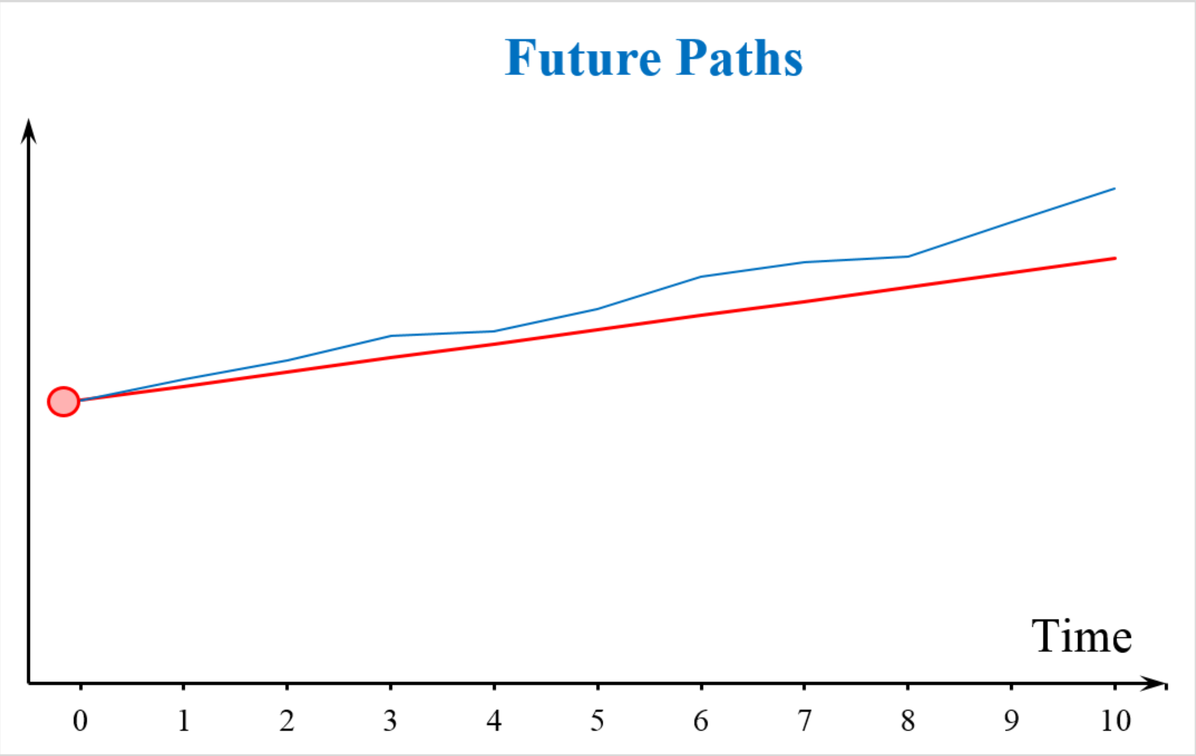
→ 시뮬레이션 방법을 적용한다.

지수평활화 모형

예측과 신뢰구간:

- 시뮬레이션 방법으로 구한 파란색 경로는 불확실성을 포함한다.

불확실성이라 경로가 들죽날죽함 그래서 다발로 묶어야

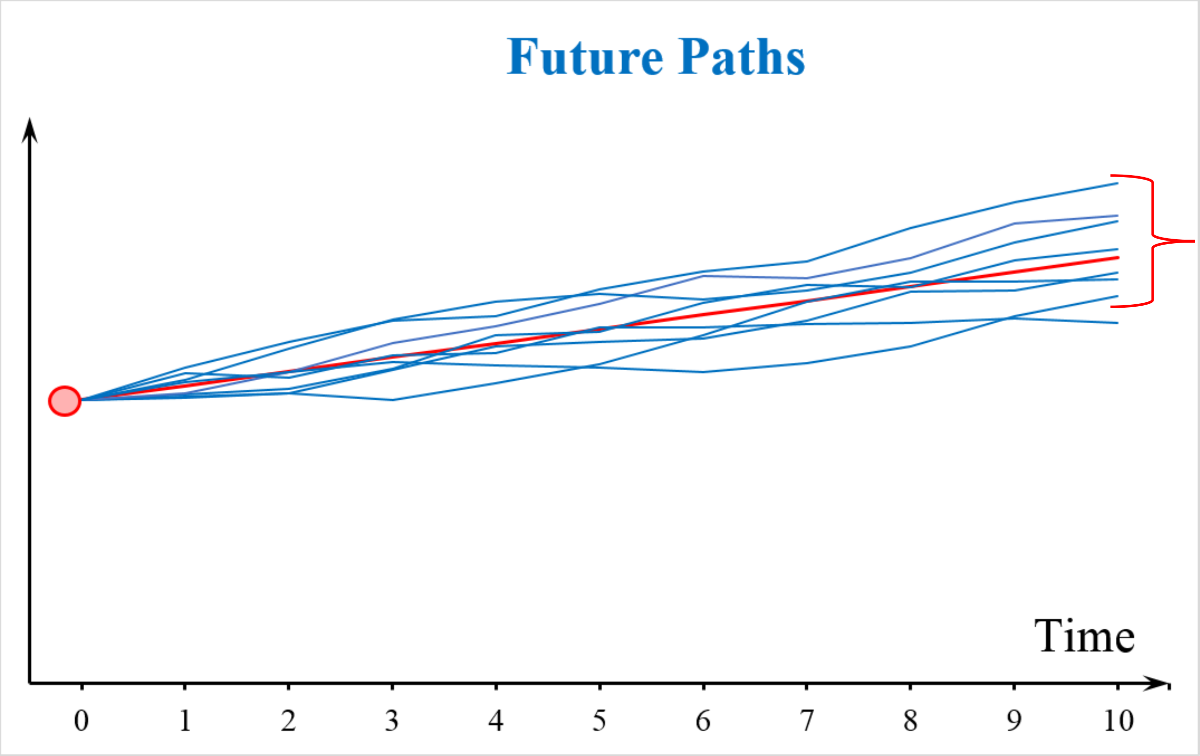


지수평활화 모형

예측과 신뢰구간:

- 경로의 확률 분포를 사용해서 신뢰구간을 구한다.

다발로 묶음 - > 신뢰구간 계산 가능해짐(불확실성이 모이니까)



지수평활화 모형

계절성 (주기성):

- 일정 주기로 반복되는 패턴이 있다면 모형을 확장하여 추가할 수 있다.

⇒ Holt-Winters 승법모형: 계절성을 나타내는 s_t를 승법으로 추가 (m =주기).

$$\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \frac{\varepsilon_t}{s_{t-m}}$$

레벨과 추세는 앞과 같음

$$b_t = b_{t-1} + \beta \frac{\varepsilon_t}{s_{t-m}}$$

$$s_t = s_{t-m} + \gamma \frac{\varepsilon_t}{\ell_{t-1} + b_{t-1}}$$

계절성을 추가함

지수평활화 모형

계절성 (주기성):

- 일정 주기로 반복되는 패턴이 있다면 모형을 확장하여 추가할 수 있다.

⇒ Holt-Winters 승법모형에 의한 h 스텝 미래 예측은 다음과 같다.

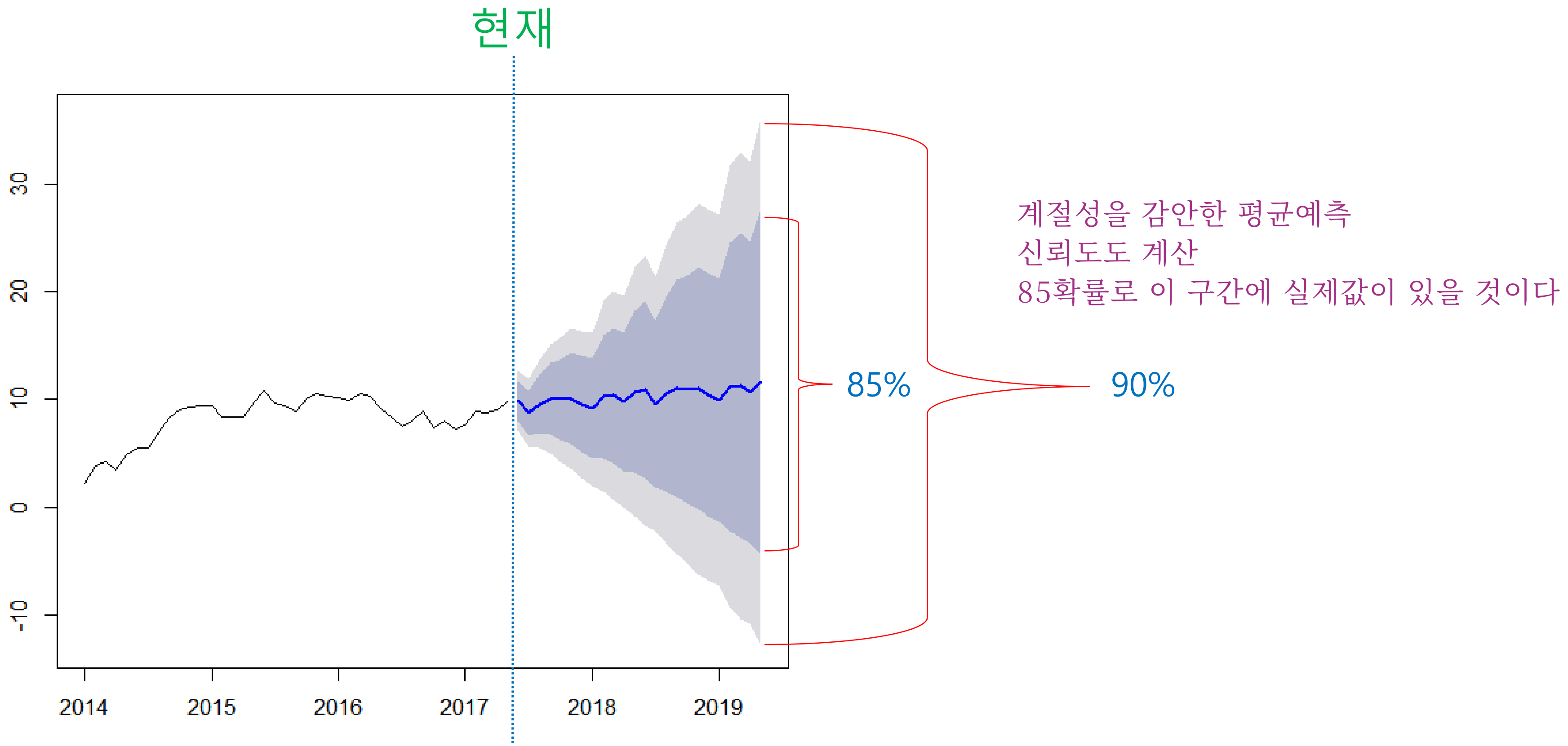
$$\hat{X}_{t+h|t} = (\ell_t + hb_t)s_{t-m+h_m^+}$$

여기에서 $h_m^+ = mod(h-1, m) + 1$와 같다.

지수평활화 모형

계절성 (주기성):

- Holt-Winters 승법모형을 활용한 1년 단위 (12개월) 주기성 포함 예측의 예.



실습 #0301

→ 사용: **ex_0301.ipynb** ←

실습 #0302

→ 사용: **ex_0302.ipynb** ←

순서

시계열 모형의 활용

AR 시계열 모형 (Auto-Regressive Model):

- AR(1) 모형:

$$x_t = \phi_0 + \phi_{\mathbf{1}} x_{t-\mathbf{1}} + \varepsilon_t$$

$\rightarrow$ 현재의 값 x_t가 **1**스텝 이전의 값 $x_{t-\mathbf{1}}$와 연관된다.

$\rightarrow$ 불확실 요소 ε_t를 “impact” or “innovation” 이라고 부른다.

$\rightarrow$ ε_t 는 정규확률분포를 따른다는 가정을 한다: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

$\rightarrow$ $|\phi_1| < 1$와 같으면 정상성이 유지된다.

$\rightarrow$ ϕ_0 는 독립 parameter가 아니다: $\phi_0 = \bar{x}\,(1 - \phi_1)$.

시계열 모형의 활용

AR 시계열 모형 (Auto-Regressive Model):

- AR(p) 모형:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_{\boldsymbol{p}} x_{t-\boldsymbol{p}} + \varepsilon_t$$

→ 현재의 값 x_t가 $\boldsymbol{p}$ 스텝 이전의 값 $x_{t-\boldsymbol{p}}$까지와 연관된다.

→ 정상성을 논하려면 특성근 (characteristic root)을 구해야 한다 → later.

→ ϕ_0 는 독립 parameter가 아니다: $\phi_0 = \bar{x}\left(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p\right)$.

시계열 모형의 활용

MA 시계열 모형 (Moving Average Model):

- MA(q) 모형:

$$x_t = \varepsilon_t + \bar{x} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_{\boldsymbol{q}} \varepsilon_{t-\boldsymbol{q}}$$

→ 현재의 값 x_t가 ***q*** 스텝 이전의 impact $\varepsilon_{t-\boldsymbol{q}}$까지와 연관된다.

→ θ_i가 모두 유한수(finite number)이면 MA 시계열 모형은 정상시계열에 해당한다.

→ "Square sumable": $\sum_{i=0}^{q} \theta_i^2 < \infty$

시계열 모형의 활용

ARMA 시계열 모형 (Auto-Regressive Moving Average Model):

- ARMA(p,q) 모형:

$$x_t = \varepsilon_t + \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

→ AR모형과 MA모형의 결합이다.

→ 정상성을 논하려면 AR의 모수 ϕ_i에 해당하는 특성근을 구해야 한다 → later.

→ ϕ_0 는 독립 parameter가 아니다: $\phi_0 = \bar{x}\left(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p\right)$

→ ARMA(p,0) = AR(p)이며 ARMA(0,q) = MA(q)이다.

시계열 모형의 활용

ARIMA 시계열 모형 (Auto-Regressive **Integrated** Moving Average Model):

- 차분 연산자 D:

$$
\begin{array}{cc}
Dx_t & x_t - x_{t-1} \\
D^2 x_t & x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} \\
D^3 x_t & x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} - x_{t-3} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

시계열 모형의 활용

ARIMA 시계열 모형 (Auto-Regressive **Integrated** Moving Average Model):

- 만약에 차분 연산자를 *d* 회 적용하여 정상화 할 수 있는 비정상 시계열이 있다면, ARIMA(p, **d**, q)로 모델링 할 수 있다.
- 그런데, 만약에 시계열이 등분산성 조건을 만족하지 않는다면 이것은 수학적 변환을 통해서 정상성을 확보해야 되는 경우이다.

시계열 모형의 활용

시계열 모형의 선별:

- AR(p) 모형의 길이는 PACF를 사용하여 선별한다.

$\rightarrow$ PACF는 ACF와도 유사하게 현시점과 과거 시점 사이의 상관성을 의미한다.

$\rightarrow$ PACF는 중간 시점의 기여를 제외한 ACF라고 해석할 수 있다.

- MA(q) 모형의 길이는 ACF를 사용하여 선별한다.

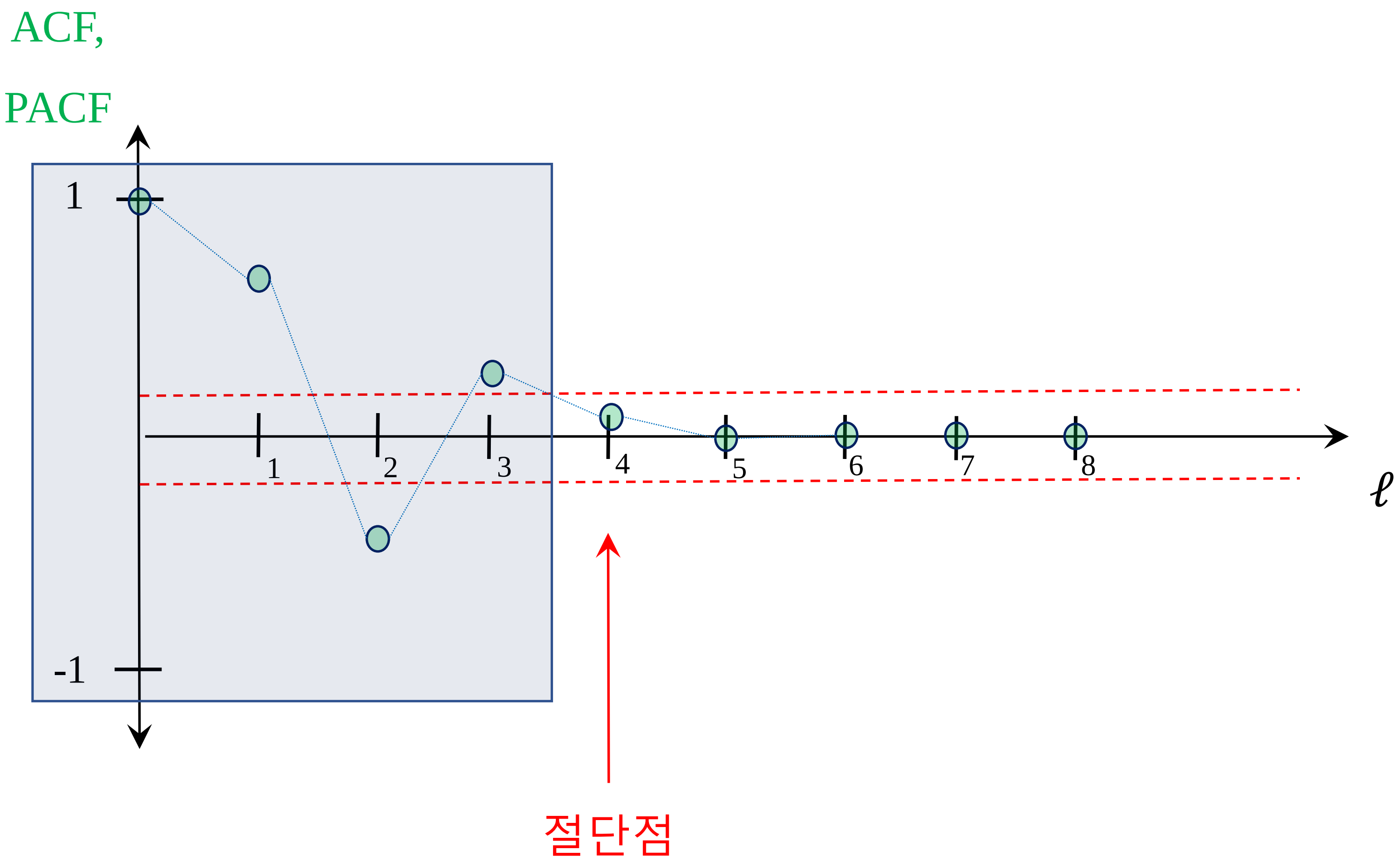
$\rightarrow$ White noise의 표준오차는 $\sigma_{wn} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. 그러므로 95% 신뢰구간은 다음과 같다:

$$[-1.96 \times \sigma_{wn}, +1.96 \times \sigma_{wn}]$$

- 위 신뢰구간의 바깥에 있는 ACF 또는 PACF가 모형의 길이를 정한다. $\Rightarrow$ 절단점 확인!

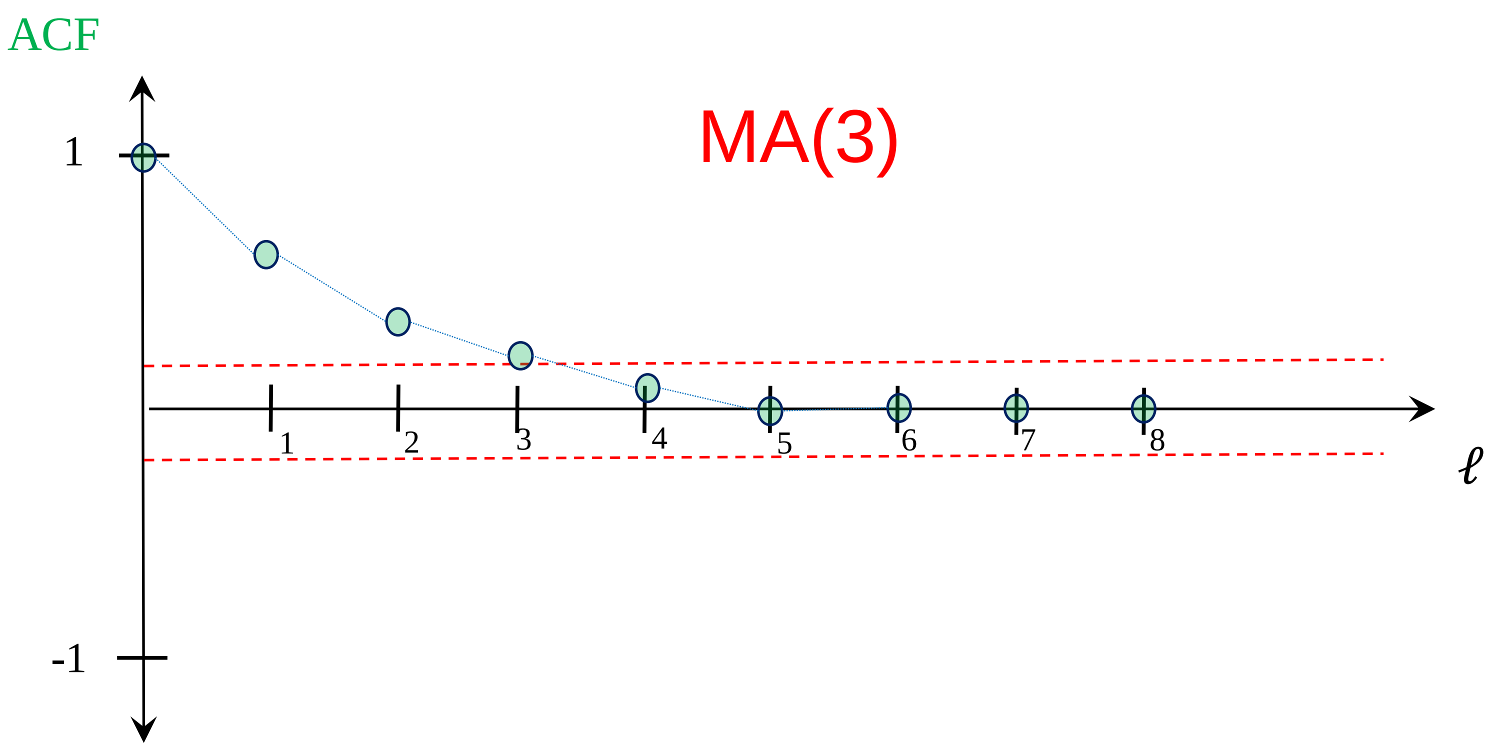
시계열 모형의 활용

시계열 모형의 선별:



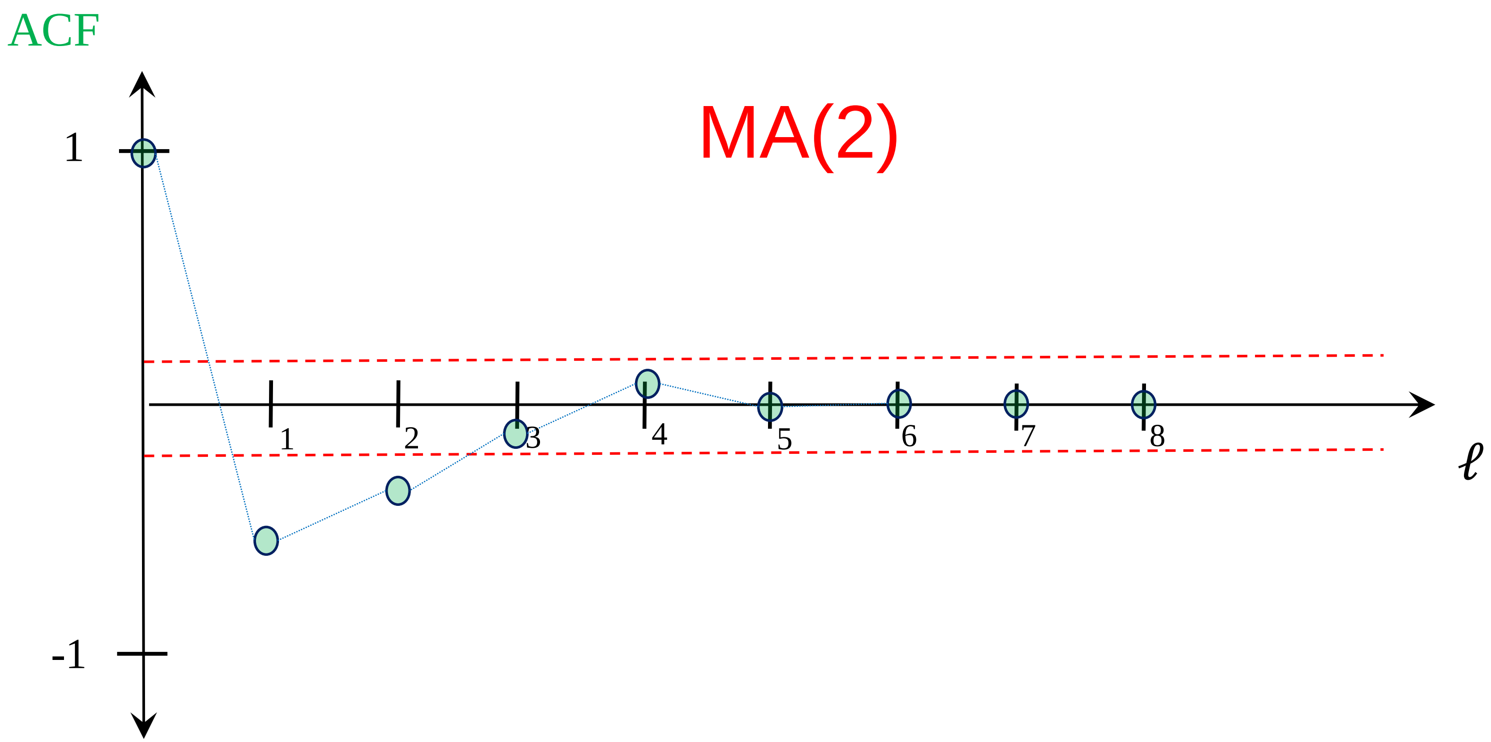
시계열 모형의 활용

시계열 모형의 선별: 다음 분석 그래프에 적절한 시계열 모형은?



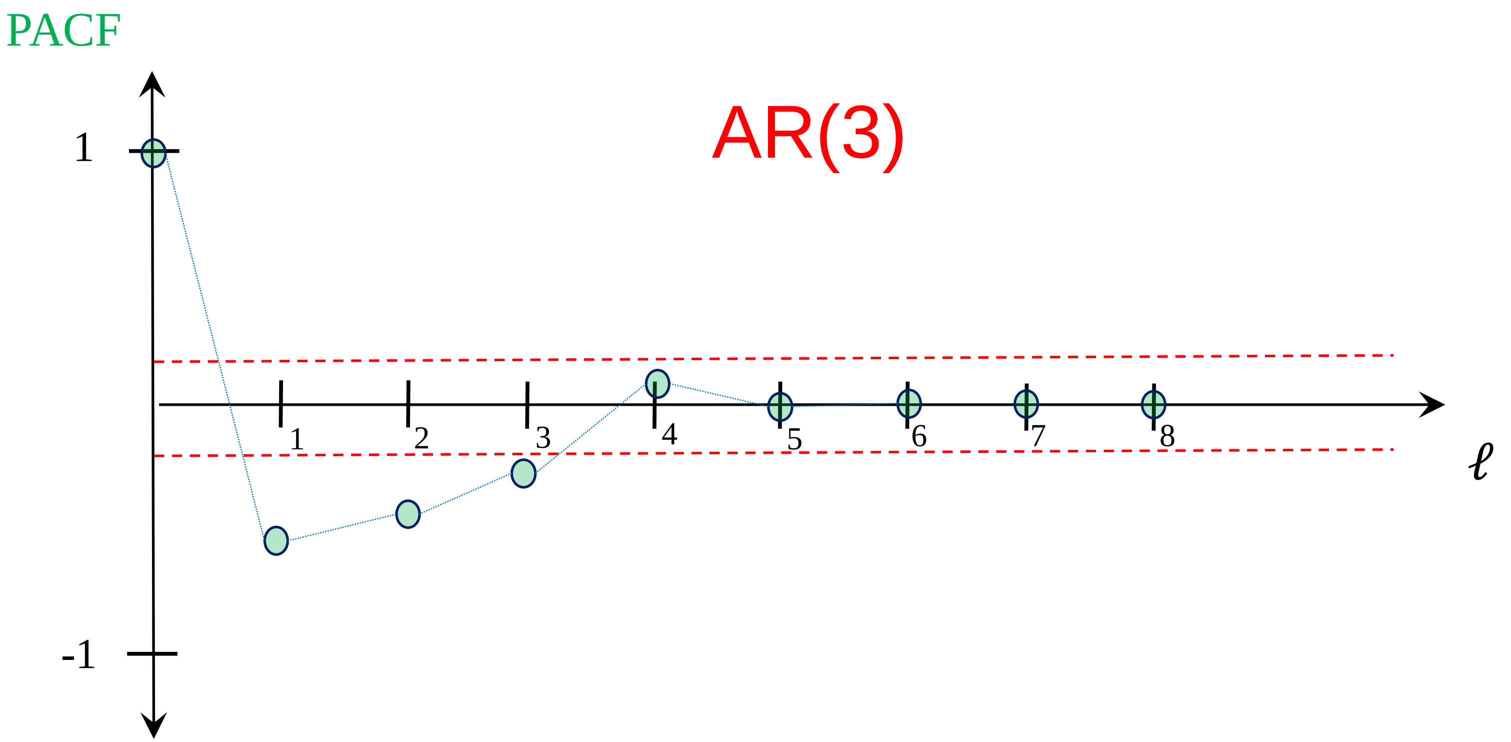
시계열 모형의 활용

시계열 모형의 선별: 다음 분석 그래프에 적절한 시계열 모형은?



시계열 모형의 활용

시계열 모형의 선별: 다음 분석 그래프에 적절한 시계열 모형은?



순서

변동성 모델링

변동성 모델링의 필요성:

- 변동성은 시계열의 표준편차로 나타낸다.
- 지금까지는 시계열이 약정상 조건을 충족하고 분산 (또는 표준편차)가 일정하다는 가정을 하였다.

⇒ 변동성은 고정적이라는 가정과 같다.

⇒ 정교한 모델링이 필요 없는 상황을 전제하였다.

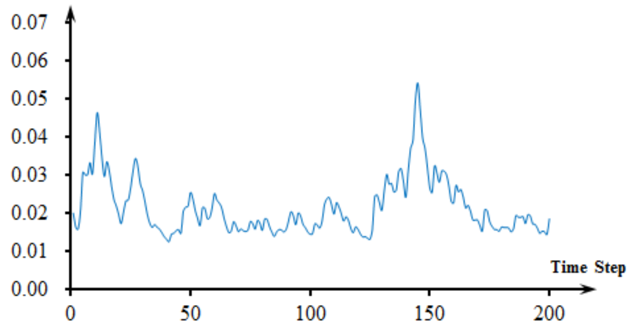
변동성 모델링

변동성 모델링의 필요성:

- 하지만, 실제 상황에서는 변동성이 고정적이지 않을 수도 있다.

⇒ 변동성도 전/후 사이에 일종의 상관성이 있다는 것을 알 수 있다.

"volatility clustering"



⇒ 옵션 파생상품에서는 변동성이 자산의 가격만큼 중요할 수 있다.

⇒ 그러므로 변동성의 정교한 모델링과 예측 방법이 필요하다.

•

변동성 모델링

변동성 모델링 개요:

- 지금까지는 impact가 $\varepsilon_t \sim N(0, \boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2})$와 같이 고정적인 $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2}$에 의해서 생성됨을 전제하였다.
- 이제는 impact가 시간에 따라서 변하는 $\boldsymbol{\sigma_t^2}$에 의해서 생성된다는 전제를한다 $\Rightarrow \varepsilon_t \sim N(0, \boldsymbol{\sigma_t^2})$.

$\rightarrow$ 그리고 $\boldsymbol{\sigma_t^2}$의 시계열을 모형화 해본다!

변동성 모델링

ARCH 모형:

- ARCH(p)모형은 다음을 전제한다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

$\rightarrow$ ARCH(p)모형에는 $p+1$ 개의 모수(parameters) α_i가 있다.

$\rightarrow$ 다음과 같은 제약조건이 적용된다.

$$\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$$

변동성 모델링

ARCH 모형:

- ARCH(p)모형은 다음을 전제한다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

→ ε_t^2의 unconditional mean σ^2은 먼 미래의 σ_t^2예측과 같다.

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right)}$$

→ $\alpha_0 = \sigma^2\Big[1 - \underbrace{\boxed{\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right)}}_{<1}\Big]$와 같으니까 독립 모수의 갯수는 p 이다.

변동성 모델링

GARCH 모형:

- GARCH(p,q)모형은 다음을 전제한다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

→ GARCH(p,q)모형에는 $p+1$ 개의 α_i와 q개의 β_i 가 있다.

→ 다음과 같은 제약조건이 적용된다.

$$\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$$

변동성 모델링

GARCH 모형:

- GARCH(p,q)모형은 다음을 전제한다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

→ GARCH(p,0)모형은 ARCH(p)모형과 같다.

변동성 모델링

GARCH 모형:

- GARCH(*p*,*q*)모형은 다음을 전제한다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

→ ε_t^2의 unconditional mean σ^2은 먼 미래의 σ_t^2예측과 같다.

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}$$

→ $\alpha_0 = \sigma^2 \left[1 - \underbrace{\boxed{\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}}_{<1}\right]$와 같으니까 독립 모수의 갯수는 $p+q$ 이다.

순서

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 현재의 시간 스텝을 t라고 할때, 스텝 $t+1$에 대한 예측값은 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$과 같이 hat 액센트로 표기하기로 한다.
- I가 과거 데이터(정보)를 의미할 때 예측값은 다음 조건부 기대값으로 구할 수 있다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = E\left[\sigma_{t+1}^2 | I\right]$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 그런데, 과거와 현재 시점의 조건부 기대값은 다음과 같다.

$$E[\sigma_t^2|I] = \sigma_t^2 \text{ (현재의 값 그대로)}$$

$$E\left[\sigma_{t-1}^2|I\right] = \sigma_{t-1}^2 \text{ (과거의 값 그대로)}$$

$$E[\varepsilon_t^2|I] = \varepsilon_t^2 \text{ (현실화 된 값 그대로)}$$

$$E\left[\varepsilon_{t-1}^2|I\right] = \varepsilon_{t-1}^2 \text{ (현실화 된 값 그대로)}$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- GARCH 모형에 의하면 스텝 $t+1$에서는 다음 관계가 성립된다.

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_t^2 + \alpha_2\,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3\,\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \ \alpha_p\,\varepsilon_{t-p+1}^2$$

$$+\beta_1\sigma_t^2 + \beta_2\,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3\,\sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q+1}^2$$

- 등호 양편의 조건부 기대값을 구하면 $t+1$ 스탭의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_t^2 + \alpha_2\,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3\,\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \ \alpha_p\,\varepsilon_{t-p+1}^2$$

$$+\beta_1\sigma_t^2 + \beta_2\,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3\,\sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q+1}^2$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 이제는 스텝 $t+2$에 대한 예측을 하고자 하는데 impact의 기대값이 다음과 같음에 유의한다.

$$\hat{\varepsilon}_{t+1} = E[\varepsilon_{t+1}|I] = 0$$

$$\hat{\varepsilon}^2_{t+1} = E\left[\varepsilon^2_{t+1}|I\right] = \hat{\sigma}^2_{t+1}$$

- 그러므로 스텝 $t+2$에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}^2_{t+2} = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\sigma}^2_{t+1} + \alpha_2\,\varepsilon^2_t + \alpha_3\,\varepsilon^2_{t-1} + \cdots + \alpha_p\,\varepsilon^2_{t-p+2}$$

$$+\beta_1\hat{\sigma}^2_{t+1} + \beta_2\,\sigma^2_t + \beta_3\,\sigma^2_{t-1} + \cdots + \beta_q\sigma^2_{t-q+2}$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 또 한 스텝 더 나가서, $t+3$에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \alpha_2\, \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \alpha_3\, \varepsilon_t^2 + \cdots + \alpha_p\, \varepsilon_{t-p+3}^2$$

$$+\beta_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \beta_2\, \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \beta_3\, \sigma_t^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q+3}^2$$

- 마지막으로, 먼 미래 ($\boldsymbol{h} \to \infty$)의 예측은 unconditional mean으로의 수렴을 의미한다.

$$\hat{\sigma}_{t+\boldsymbol{h}}^2 \to E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 이제는, GARCH(1,1) 모형의 예측에 대해서 자세히 알아본다.
- GARCH(1,1)모형은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

- 그리고, $\sigma^2 = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$와 같은 unconditional mean의 조건을 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha_1 \left(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2\right) + \beta_1\left(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2\right)$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 스텝 $t+1$의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2 = \alpha_1 \left(\varepsilon_t^2 - \sigma^2\right) + \beta_1\left(\sigma_t^2 - \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sigma^2 + \alpha_1 \left(\varepsilon_t^2 - \sigma^2\right) + \beta_1\left(\sigma_t^2 - \sigma^2\right)$$

- 다음 스텝 $t+2$의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 - \sigma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)\left(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{t+2}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)\left(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2\right)$$

변동성 예측

GARCH 모형의 예측:

- 한 스탭씩 미래의 예측값을 구해나가면 h 스탭에서는 다음과 같은 예측이 가능하다.

그대로 임

$$\hat{\sigma}^2_{t+h} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}\left(\boxed{\hat{\sigma}^2_{t+1}} - \sigma^2\right)$$

→ $0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1$ 와 같은 제약조건이 충족된다면 $(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \to 0$으로 수렴한다.

→ 그러면 $\hat{\sigma}^2_{t+h} \to \sigma^2$ 와 같이 수렴함을 쉽게 확인할 수 있다.

모듈 #1 : 끝

문의:

sychang1@gmail.com