금융 분석과 모델링

모듈 - 3

강사: 장순용 박사

순서

파생상품 개요

파생상품:

- 파생상품 (derivatives): 기초자산 (underlying asset)에 의해서 그 가치가 결정되는 계약.

⇒ 파생상품의 예: 선도, 선물, 옵션, 스왑, 스왑션, 선물옵션, 등.

⇒ 기초자산의 예: 현물, 주가, 금리, 환율, 지수, 등.

또다른 금융상품

삼성지수를 기초자산으로 삼은 파생상품이 있다
금을 기초자산으로 삼은 파생상품이 있다~ 금사겠다라는 계약서 자체가 파생상품임
파생상품은 계약서임

파생상품 개요

심플구조

파생상품의 종류:

선도나 선물은 기초자산이 오르면 따라 오르는 선형구조
옵션은 일직선이 아니라 꺾임 (구조가 있음)

- 손익구조에 의해서 분류:

선물과 선도는 의무와 권리가 동시에 생김=>미래 불확실성에 대한 리스크관리위해
미래에 대한 전망을 보고 미리 확정해두는 것
근데 투기를 하고픈사람도 있음(부동산투기)

1). 손익구조가 선형인 파생상품:

인수인계

→ 선도 (forward): 미래 시점에 약정한 조건으로 기초자산을 인수도하는 계약.

장외파생상품.

시장이 아니라 그냥 개인과개인사이에 얼마줄테니 파시오하는거
아직 안나온거 미리 사가는거

→ 선물 (future): 선도와 유사한 개념. 장내파생상품.

시장안에서 규격에 맞춰 거래하는 거 - 배추 1톤에 얼마~라고 쓴 계약서

→ 스왑 (swap): 일정 시점에 자금 흐름을 서로 교환하기로 하는 계약.

파생상품 개요

복잡구조

파생상품의 종류:

선도, 선물은 계약할때 돈 안내도 됨 - 오를지 내릴지 모르
유리해도 행사해야되고, 불리해도 행사해야 함

콜옵션과 풋옵션은 권리만 있음, 의무없음
계약을 체결할 때 프리미엄이라는 권리에 해당하는 돈을 내야함

옵션은 유리하면 행사 불리하면 휴지조각 됨
옵션을 살 때 지불한 프리미엄만큼 손해보는 것

- 손익구조에 의해서 분류:

2). 옵션형 파생상품: 손익구조가 중간에 꺾이는 형태를 보인다.

바닐라 옵션

→ 콜옵션 (call option): 미래 일정시점에 약정한 조건으로 기초자산을 살 권리.

→ 풋옵션 (put option): 미래 일정시점에 약정한 조건으로 기초자산을 팔 권리.

200에 팔 권리가 있는데
100으로 폭락함
=> 행사해야 함
가격이 싸졌지만 나는 비싸게 팔 수 있다는 거

→ 이색옵션 (exotic option): 바닐라 옵션 보다 복잡한 손익구조.

3). 합성형 파생상품:

시장가격이 300이 되면
행사안함

→ 선물옵션 (futures option): 선물과 옵션의 결합.

권리긴 하지만 시장상황에 따라
달라짐

→ 스왑션 (swaption): 스왑과 옵션의 결합.

권리는 만기일이 존재함

파생상품 개요

파생상품의 종류:

- 장내거래 여부에 의해서 분류:

우리가 배울 거

1). 장내 파생상품: 거래소에 상장되어서 거래되는 선물, 옵션, 등. 불특정다수가 불특정다수를 대상으로 사고

→ 거래 내용, 조건 등이 표준화 됨.

→ 거래소가 결제이행 책임을 부담함. 만기가 됐을 때 결제를 보증해줌(조건이 유리하던 불리하던 거래소가 책임)

→ 반대거래, 일일정산, 증거금 등 결제 안정화 제도가 있다.

2). 장외 파생상품 (OTC): 거래소에 바깥에서 거래되는 선도, 스왑, 등. 기업과 기업사이, 은행과 기업사이 거래하는 것
본인들끼리 믿고 함, 중재자 없음

파생상품 개요

파생상품의 기능:

- 리스크의 헤지 (hedging): 미래의 불확실성 "리스크"를 흡수해서 관리. 계약서를 갖고있으니 시장이 변해도 무관
- 투기 (speculation): 기초자산을 직접 매매하는 것보다 적은 금액으로 파생상품을 매매 함으로서 레버리지 (지렛대) 효과를 누림. 옵션이 10이면 프리미엄은 5만원
  5만원으로 10범 - 이런 임팩트효과가 레버리지효과임(투기수단이 될 수도)
- 가격 발견 기능: 미래 현물가격에 대한 시장의 기대심리 반영. 권리금인 프리미엄도 시장에 의해 결정
  프리미엄이 오른다는건 유리한 시장이 형성될거라는 기대심리
- 시장의 효율성 제고: 저렴한 거래비용으로 long 또는 short 가능.

권리를 사서 행사하려고long

권리를 팔고 선불을 받는 입장 short

파생상품 개요

파생상품의 요소:

- 기초자산 (underlying): 거래대상.

코스피 200파생상품지수

예). KOSPI200 지수. 코스피 거래량 많은 200개 모아둔거

- 계약 단위 (contract size): 한 계약의 크기.

예). KOSPI200 선물은 지수×25만원.

- 결제월 (delivery month): 만기가 되어서 현금 결제가 이루어지는 달.

예). KOSPI200 선물은 3, 6, 9, 12 월.

파생상품 개요

파생상품의 요소:

- 가격 표시 방법 (price quotation).

  예). KOSPI200선물은 KOSPI200 지수로 가격을 표시.

- 최소 호가 단위 (tick size): 최소 가격 변경 단위. 호가단위만큼 올라갔다 내려갔다 함

  예). KOSPI200 선물은 0.05 ⇒ 12,500원. 12500원단위로 오르락내리락, 지수단위로는 0.05씩

- 가격제한폭: 시장의 과열을 방지하기 위해 정해 놓은 1일 최대 변동 범위.

- 정산가격: 최종 약정 가격.

- 미결제 약정수량: 반대매매로 청산되지 않은 매입, 매도 포지션의 합계.

반대매매
파는사람이 다시 사들이면 선물계약 없어짐
전체해서 계속팔기만 하면 시장에 개수가 넘쳐남
사버리면 전체개수 줄어듬
반대매매란 파는사람이 사고 사는사람이 다시 되파는거
롱에 있던사람이 숏, 숏하던 사람이 롱하는거

순서

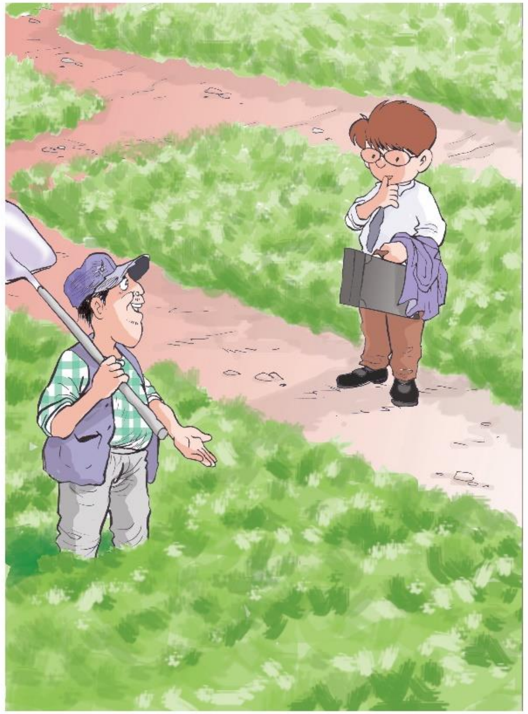
선물의 원리

선도거래:

- 선도거래 (Forward): 미래의 일정 시점에 사전에 약정한 가격으로 기초자산을 인수인도하기로 하는 계약 (장외 파생상품).

미래시점에 대한 인수인도의 계약

⇒ 미래의 불확실성에 대비함.



예). A씨: 콩농사에 종사.

B씨: 콩을 가지고 두부를 만들어 판다.

"만기일이 되면 A는 B에 콩 5천 톤을 인도하는 것을 약속한다. 가격은 톤당 50만원으로 한다."

선물의 원리

선물거래 vs 선도거래:

- 선물 (Future): 선도거래와 유사한 장내 파생상품이다.

큰기관끼리의 거래

개인끼리의 거래

선도거래	선물거래
당사자 사이의 계약.	거래소를 통한 계약. 불특정 다수 대 불특정 다수.
X 1톤이라는 단위없음	선물계약은 규격화/표준화 됨. 다수의 동일한 계약이 거래됨.
X 증거금없이 그냥 서로 믿고 거래	거래소가 결제이행 책임을 부담함. 이행보증금 성격의 증거금이 있음.
X	반대 매매를 통해서 만기일 이전에 계약에서 이탈할 수 있다.

1:1계약이라 이탈한다고 하면 상대방이 안된다고 함
나에게 불리인상황이 상대방은 이익상황이므로

만기일까지 가면 손실나겠다하면 반대매매로
이탈해버림(자유로운 이탈)

콩 1톤당 얼마로 규격화

거래소가 증거금 요구
돈없이 거래할 수 없음
내가 수익을 얻거나 손해를
얻을 수 있음
손실을 얻는경우 그거에 대
한 돈을 내야함 그게 바로
증거금
증거금을 통해 손실이 났을
경우 보장을 해주겠다는 것
손실나도 거래소는 증거금
있으니 피해안봄

선물의 원리

선물거래 vs 선도거래:

콩 1톤 달라하면
그시점에 바로 가져옴
인수인도시점과 계약일
같음

주식사고 몇년이고 가지고
있을 수 있음

현물거래 (주식)	선물거래
현물거래에서는 계약이 체결되는 시점과 실제 매매가 성립되는 시점이 같다.	계약은 지금 체결하고 실제 매매는 미래의 정해진 시점에 행해짐.
보유 기간에는 제한이 없다.	만기일까지 유지할 수 있는가 하면, 반대매매를 통해서 중도 청산할 수 있다.
공매도(short)가 있으나 제약이 있다.	자유로운 양방향 거래.

계약은 지금하고
인수인도는 미래에
인수인도시점과 계약
일이 다름

만기일까지만
가지고 있거나,
반대매매통해
이탈

사는입장에서 있을수 있지, 남의 주식을 팔수는 없다
공매도는 없는것을 파는것(꿔서 파는것)
현물이 있어야 판다

내가 콩이없어도 콩 팔수 있음
주식없어도 주식팔수 있다
공매도 입장이 될수 있다
현물이 없어도 팔수있다

선물의 원리

선물가격: 스킵

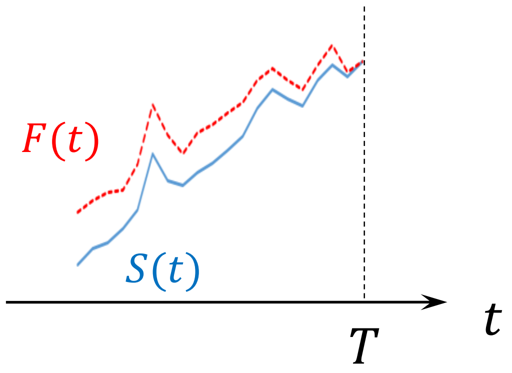
- 선물가격 $F(t)$는 매매 대상 자산을 미래의 정해진 시점에 사고팔기로 하는 가격이다.
- 이론 가격은 다음과 같다.

$$F(t) = S(t)\, e^{r_0(T-t)}$$

$\Leftarrow S(t)$ =기초자산의 가격, T =만기일, t =현재의 시점, r_0 =무위험 이자률.

$\Leftarrow T - t$는 만기일까지의 잔존 시간이며, 단위는 1년.

$\Leftarrow$ 만기 전에는 $F(t) \geq S(t)$이며 만기일에는 $F(t) = S(t)$.



선물의 원리

선물가격의 no arbitrage 원리:

- 선물의 이론가격은 헤지 관계를 유지하는 가격이고, 미래의 예측, 확률, 기대값 등과는 **무관**하다.
- 무위험 차익거래가 불가능하다는 원칙 "no arbitrage"를 기반으로 도출된 선물가격이 바로 $F(t) = S(t)\, e^{r_0(T-t)}$이다.

선물의 원리

선물가격의 no arbitrage 원리:

- 만약에 $F(t) < S(t)\ e^{r_0(T-t)}$와 같은 부등식 상황이 발생한다면,

1. 트레이더는 선물 매수계약(long)을 한다. 선물계약의 체결 당시에는 현금 이동이 없다. 그리고, 동시에 기초자산을 꾸어서 공매도(short)한다. 그러면 트레이더는 $S(t)$만큼의 현금을 갖게 된다.
2. 트레이더는 현금을 은행에 예금해서 이자율 r_0에 의한 이자를 받을 수 있다. 만기일까지 연속복리를 적용하면 원금은 $S(t)\ e^{r_0(T-t)}$로 불어나게 된다.
3. 트레이더는 만기일에 금액 $F(t)$를 지불하고 기초자산을 받아서 공매도(short) 포지션을 정리한다.
4. 트레이더의 수중에는 $S(t)e^{r_0(T-t)} - F(t) > 0$ 만큼의 무위험 현금 차익이 남는다.

$\Rightarrow$ 이것은 무위험 차익거래 불가능 원칙을 어기는 모순적인 상황이 된다.

선물의 원리

선물가격의 no arbitrage 원리:

- 만약에 $F(t) > S(t)\, e^{r_0(T-t)}$와 같은 부등식 상황이 발생한다면,

1. 트레이더는 선물 매도계약(short)을 한다. 선물계약의 체결 당시에는 현금 이동이 없다. 동시에 은행에서 $S(t)$만큼의 현금을 빌려서 기초자산을 현물시장에서 매수(long)한다 .

2. 트레이더는 만기일에 기초자산을 인도하고 선물가격 $F(t)$를 현금으로 받는다.

3. 트레이더는 현금을 은행에 빌렸기 때문에 상환해야 하는 금액은 $S(t)\, e^{r_0(T-t)}$로 불어난다. 선물계약 이행으로 얻은 현금 $F(t)$에서 일부를 은행 부채 상환에 사용할 수 있다.

4. 트레이더의 수중에는 $F(t) - S(t)e^{r_0(T-t)} > 0$ 만큼의 무위험 현금 차익이 남는다.

$\Rightarrow$ 이것 또한 무위험 차익거래 불가능 원칙을 어기는 모순적인 상황이 된다.

선물의 원리

선물가격의 no arbitrage 원리:

- No arbitrage 가격은

$$F(t) = S(t)\, e^{r_0(T-t)}$$

⇒ 실제 시장에서의 선물가격은 수급의 균형으로 형성된다.

⇒ 시장의 상태에 대해서 짐작해 볼수 있는 단서 제공.

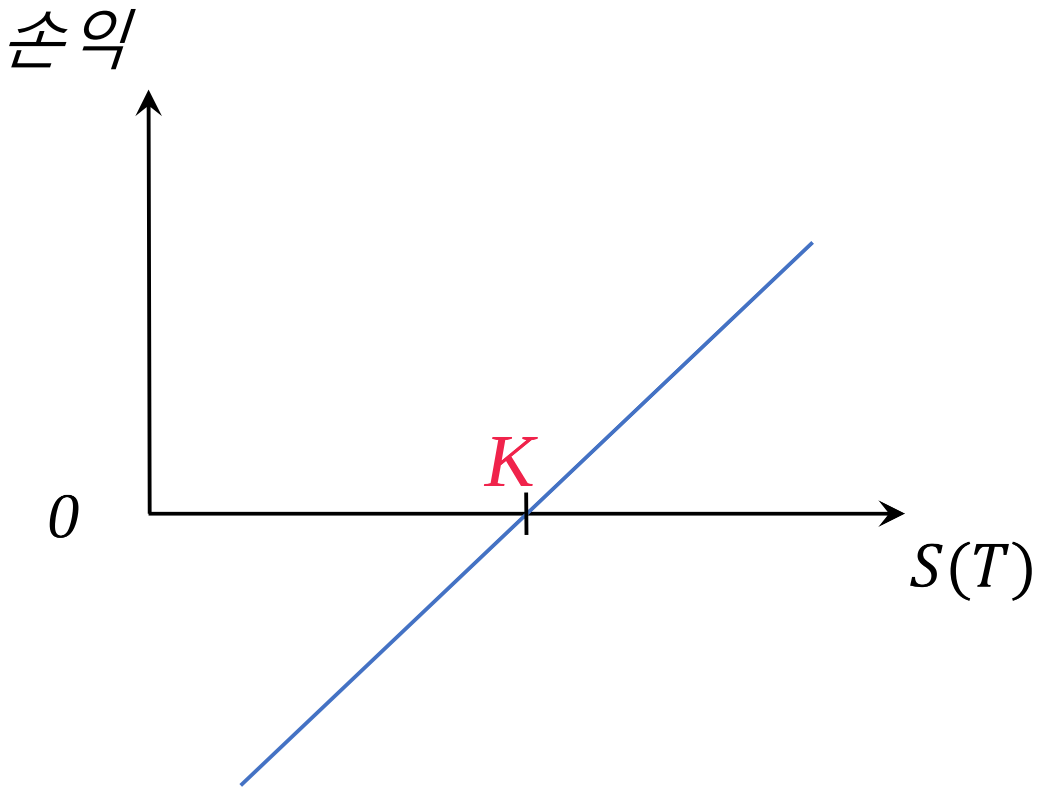
선물의 원리

결제 안정화 제도:

- 반대거래: 만기일 이전에 언제든지 계약에서 벗어날 수 있음.
- 일일정산: 주기적으로 손익을 정산하여 최종결제의 부담을 분산시키기 위한 제도.
- 증거금: 이행 보증금 성격의 증거금을 거래 당사자에게 부과한다.

선물의 원리

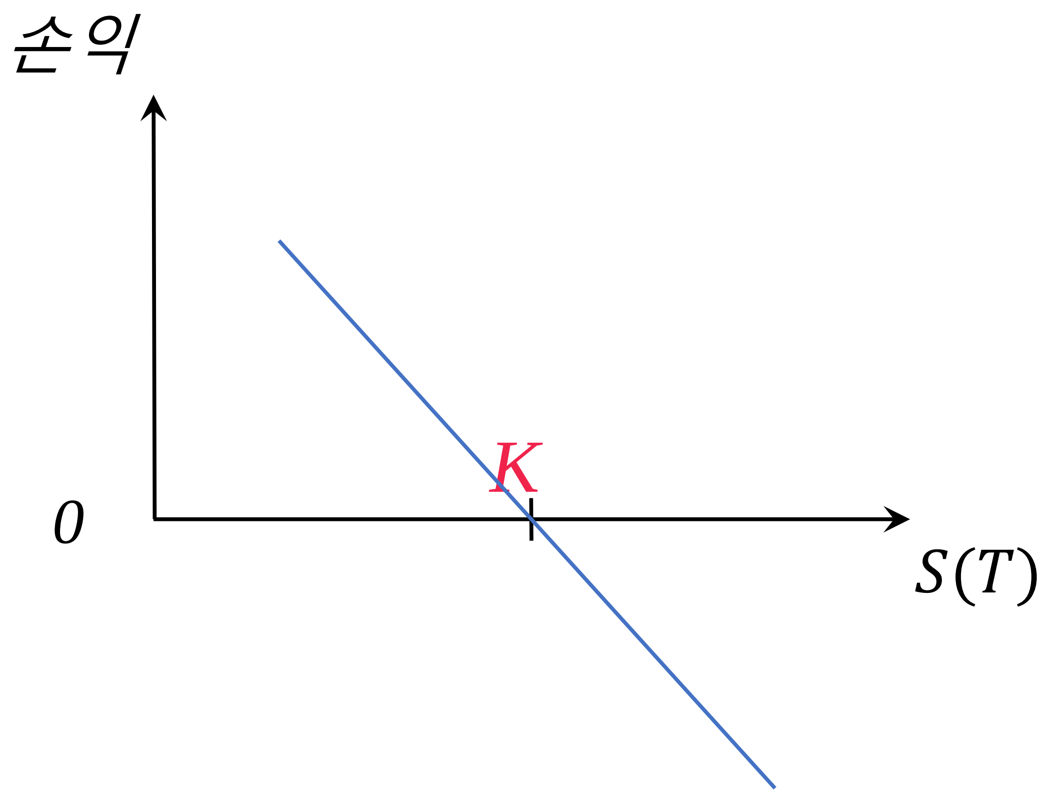
선물거래의 손익구조 (만기일): Long 포지션.



K =행사가격

선물의 원리

선물거래의 손익구조 (만기일): Short 포지션.



K =행사가격

순서

옵션가격

옵션:

- 옵션은 기초자산에 대한 계약이다.

  → 콜옵션 (call option): 기초 자산을 특정 조건에 매입할 수 있는 권리.

  → 풋옵션 (put option): 기초 자산을 특정 조건에 매도할 수 있는 권리.

- 옵션은 매수와 매도가 가능하다.

  → 매수 포지션 (long): 프리미엄을 지불하고 권리를 취득. 이익에는 한계가 없다 (콜). 가입자입장

  → 매도 포지션 (short): 프리미엄을 받고 의무를 짐. 손실에는 한계가 없다 (콜). 보험사입장

  프리미엄 받으니까

옵션가격

옵션의 종류:

- 기초자산에 의한 분류:

  개별주식을 기초자산삼아 만든거

  → 지수옵션, 개별주식옵션, 선물옵션, 등.

- 행사 방식에 의한 분류:

  → 유럽식 옵션 (European): 만기일에만 행사 가능. 예) KOSPI200 지수 옵션. 대한미국 대표 옵션

  반대매매는 언제나 가능 , 행사만 만기일에 한다

  → 미국식 옵션 (American): 만기 이전에도 행사 가능.

옵션가격

옵션가격:

불리한 조건에 대한 프리미엄의 가치는 0임

- 옵션가격 (프리미엄)은 내재가치와 시간가치의 합이다.

이 조건으로 만기일까지 유지된다는 가정하의 옵션의 가치

$$\text{옵션가격} = \text{내재가치} + \text{시간가치}$$

행사당일이 아닌 잔여기간이 남으면 시간가치가 붙음

$\Leftarrow$ 내재가치는 현재의 기초자산 가격이 만기까지 유지된다는 가정하의 옵션가격.

(S = 기초자산의 가격, K = 행사가격, T =만기시점)

$$C(T) = Max(0, S - K)$$

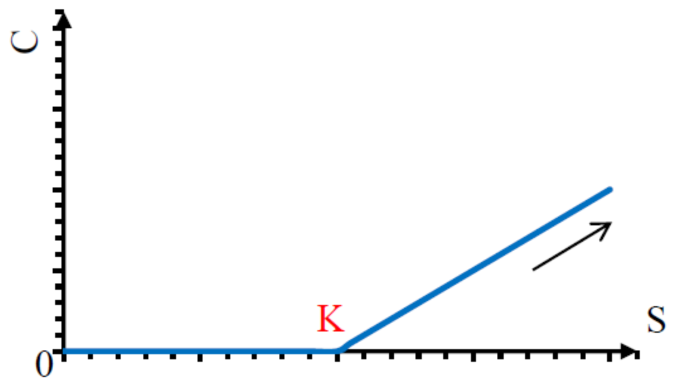
$$P(T) = Max(0, K - S)$$

$\Leftarrow$ 시간가치는 옵션 만기까지의 시간과 변동성 등에 의해서 정해진다.

옵션가격

옵션가격: 내재가치

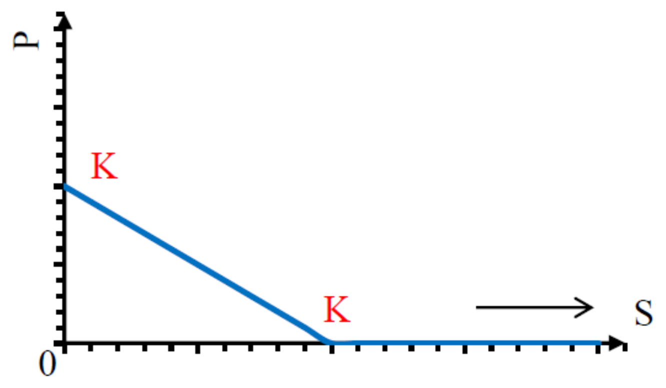
- 현재의 기초자산 가격이 만기까지 유지된다는 가정하의 옵션가격.



콜옵션 Long 포지션의

내재가치.

$C(T) = Max(0, S - K)$



풋옵션 Long 포지션의

내재가치.

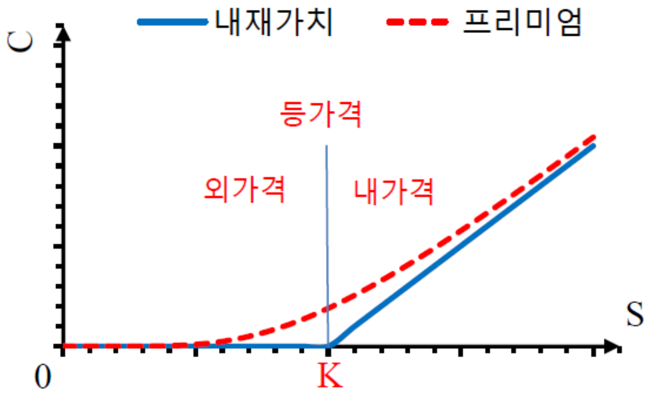
$P(T) = Max(0, K - S)$

옵션가격

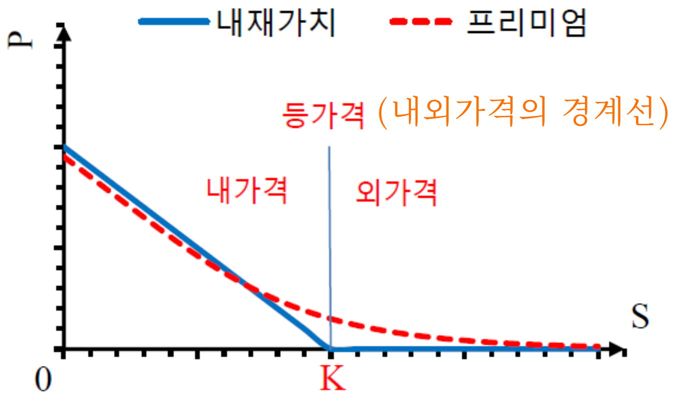
옵션가격: 시간가치

시간이 남았다면 시간가치를 더해 좀 더 높게 형성됨
차이가 시간가치
점선이 직선에 수렴하는것이 시간이 지나면 발생하는 현상

- 내재가치 이외의 가치.



콜옵션 Long 포지션의 프리미엄.



풋옵션 Long 포지션의 프리미엄.

→ 외가격(外價格, OTM): 내재가치가 없이 시간가치만 있음.

→ 내가격(內價格, ITM): 시간가치와 내재가치 둘 다 있음.

→ 등가격(等價格, ATM): 기초자산의 현물가격이 행사가격과 동일한 경우. 행사가격=기초자산가격

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형: 편미분방정식

- 블랙-숄즈 모형은 "블랙-숄즈 편미분 방정식"으로 요약할 수 있다. 콜옵션/풋옵션의 구분없이 옵션의 가격을 V로 통일해서 나타내기로 한다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r_0 S \frac{\partial V}{\partial S} - r_0 V = 0$$

⇒ 콜옵션/풋옵션의 차이는 만기일의 payoff 조건에 의해서 결정된다.

⇒ 옵션가격 V는 다음과 같은 변수와 파라미터의 함수이다.

⇒ 변수는 항시 변하는 수치이며 파라미터는 한 번 정해 놓으면 "될수있으면" 변하지 않는 수치이다.

기초자산가격,만기까지가격

$$V(\underbrace{S, t}_{\text{변수}};\ \underbrace{\sigma, K, T, r_0}_{\text{파라미터}})$$

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형:

1). 기초자산의 가격변동은 랜덤워크인 “기하 브라운 운동” 으로 묘사할 수 있다.

⇒ 자산가격의 확률적 특성은 대수정규분포 (log normal)을 따른다.

⇒ 이것은 “수익률이 정규분포를 따른다”와 동일한 의미이다.

⇒ 파라미터로는 수익률의 평균 μ와 표준편차 σ가 있다.

⇒ 표준편차 σ는 변동성(volatility)의 대표적인 척도이기도 하다.

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형:

2). 무위험 이자율 r_0 을 가정한다.

$\Rightarrow$ 만기일 까지의 무위험 이자율이 변동하지 않는 것을 전제한다.

3). 기초자산이 주식이라면 배당금은 없다고 가정한다.

$\Rightarrow$ 이것은 불가결의 전제조건은 아니며, 비교적 쉽게 배당금 지불 효과를 옵션가격에 포함시킬 수 있다.

$\Rightarrow$ 이 조건을 전제해서 쉽게 이해할 수 있는 해를 구한다.

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형:

4). 동적인 델타 헤지가 가능하다는 가정을 한다.

⇒ 블랙-숄즈 모형에서는 소위 “델타 헤지”를 적용한다.

⇒ 그런데 이 델타 헤지는 시간이 지남에 따라서 동적으로 조정해 주어야 한다.

5). 기초자산을 매매하는데 추가 비용이 없다.

⇒ 매수호가와 매도호가의 차이 (스프레드)는 무시한다.

⇒ 매매시 추가될 수 있는 수수료도 무시한다.

6). 무위험 차익거래가 불가능하다 (no arbitrage 원칙).

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형: 실습내용

- 콜옵션의 가격 C와 풋옵션의 가격 P는 다음과 같은 블랙-숄즈 공식으로 계산할 수 있다.

$$C(t) = S(t)N(d_1) - K\, e^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

$$P(t) = -S(t)\, N(-d_1) + K\, e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

$\Leftarrow N(x)$는 표준정규 누적확률이다.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$\Leftarrow N(x)$은 다음과 같은 한계값을 갖는다: $N(-\infty) = 0,\ N(0) = \frac{1}{2},\ \ N(+\infty) = 1.$

옵션가격

블랙-숄즈 옵션가격 모형:

- 콜옵션의 가격 C와 풋옵션의 가격 P는 다음과 같은 블랙-숄즈 공식으로 계산할 수 있다.

$$C(t) = S(t)N(d_1) - K\,e^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

$$P(t) = -S(t)\,N(-d_1) + K\,e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

$\Leftarrow$ d_1과 d_2는 다음과 같다. 이들은 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$와 같이 연관된다.

$$d_1 = \frac{Log\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r_0+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = \frac{Log\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r_0-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

옵션가격

내재 변동성 (Implied volatility):   스킵

- 원래 블랙-숄즈는 변동성이 만기일까지 변함이 없다는 가정을 전제함.
- 그런데 이론가격과 시장가격은 거의 항상 일치하지 않는 것을 확인할 수 있다. 그리고 괴리율 또한 일정하지 않은 것을 알 수 있다.
- 내재 변동성 σ_{imp}은 다음 등식을 충족시키며 블랙-숄즈 공식이 제시하는 이론가격과 시장가격이 서로 일치하도록 만들어 준다.

$$V_{\text{블랙-숄즈}}(S, t; \sigma, K, T, r_0) = V_{\text{시장}}$$

$\Leftarrow S, t, K, T, r_0$을 고정시켜 놓고 변동성 σ만을 변수로 취급해서 등식을 푼다.

옵션가격

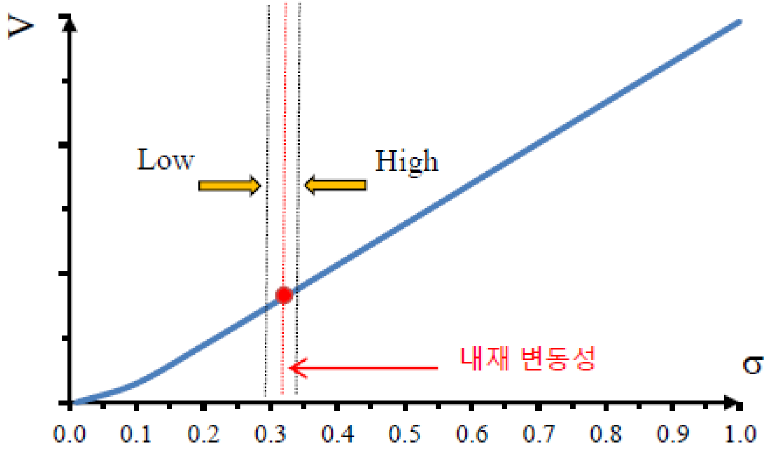
내재 변동성 (Implied volatility):

- 내재 변동성 σ_{imp}은 이진 검색 알고리즘을 사용해서 쉽게 구할 수 있다.

⇒ 임의의 하한 Low와 상한 High를 정하고 검색구간을 좁혀가는 알고리즘이다.

⇒ 일정 회수 반복하면 하한 Low 와 상한 High가 서로 수렴한다.

⇒ 이후 Low와 High의 중간지점이 바로 구하고자 하는 내재 변동성이다.

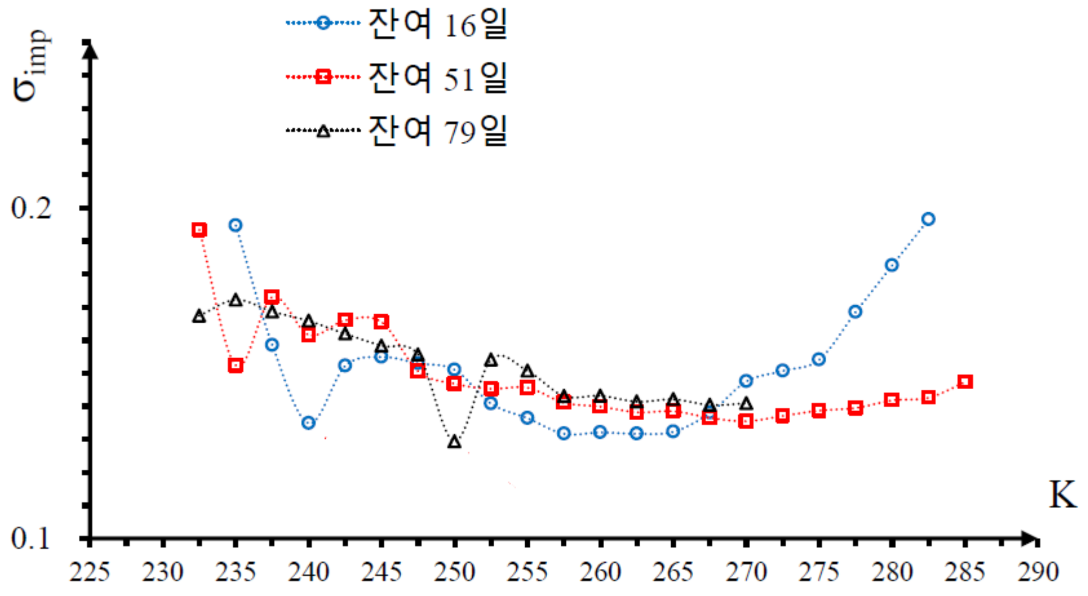


옵션가격

변동성 미소 (Volatility smile):

- 만기일에 가까워질수록 외가격 부분의 내재 변동성이 증가하는 것을 볼 수 있다.

⇒ 미소 짓는 입과 비슷한 형상이기 때문에 “변동성 미소”라 부른다.



실습 #0303

→ 사용: **ex_0303.ipynb** ←

실습 #0304

→ 사용: **ex_0304.ipynb** ←

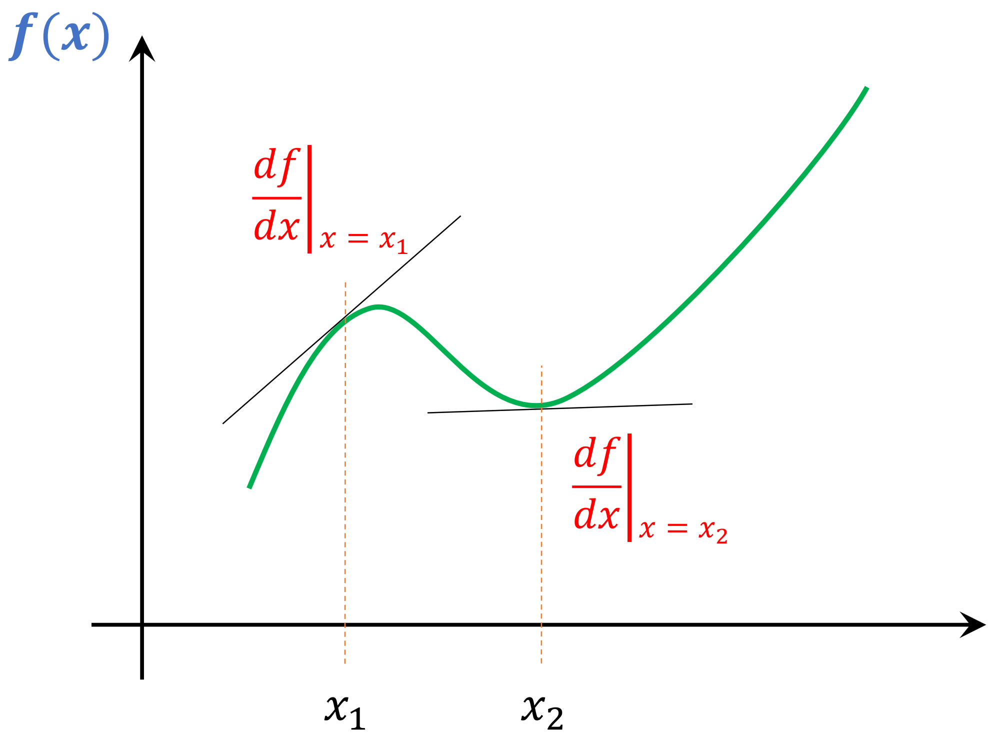
스킵

순서

옵션의 민감도

미분:

- 함수 $f(x)$의 미분은 특정 지점에서의 변화율 (기울기)를 의미한다.



옵션의 민감도

옵션의 민감도: 델타 (delta) Δ

- 델타 Δ는 기초자산 S의 가격상승에 따르는 옵션가격의 변화율이다.

  ⇒ 델타의 수치는 기초자산이 1포인트 상승했을 때의 옵션가격의 변동 수치이다.

  ⇒ 델타는 다음과 같이 미분으로 계산할 수 있다.

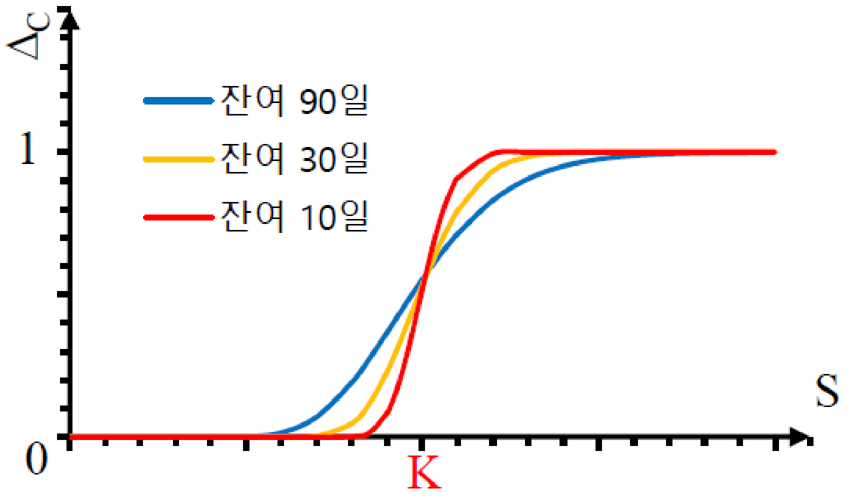
$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} \quad , \quad \Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S}$$

⇒ 블랙-숄즈 공식을 직접 대입해서 계산한 델타 민감도는 다음과 같다.

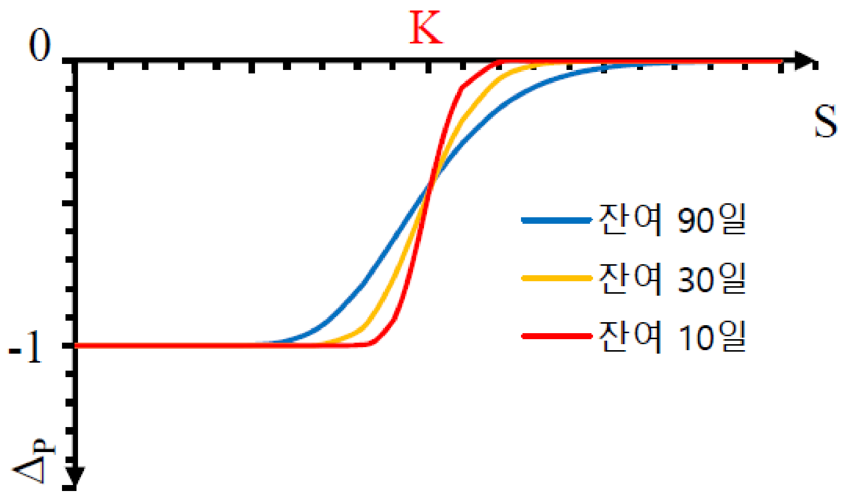
$$\Delta_C = N(d_1) \quad , \quad \Delta_P = N(d_1) - 1$$

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 델타 (delta) Δ



콜옵션 매수(Long) 포지션의 델타.



풋옵션 매수(Long) 포지션의 델타.

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 감마 (gamma) Γ

- 감마 Γ는 기초자산 S의 가격상승에 따르는 델타 Δ 민감도의 변화율이다.

$\Rightarrow$ 델타 자체가 변화율이므로 감마는 "변화율의 변화율"인 것이다.

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad , \quad \Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

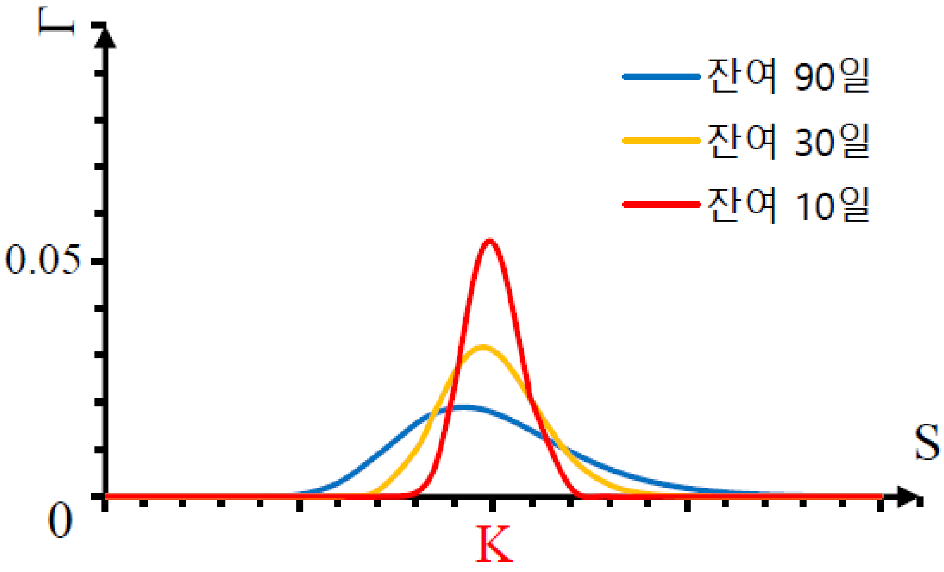
$\Rightarrow$ 블랙-숄즈 공식을 직접 대입해서 계산한 감마 민감도는 다음과 같다.

$$\Gamma = \Gamma_C = \Gamma_P = \frac{f(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$$

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$는 표준정규확률분포이다: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 감마 (gamma) Γ



콜/풋옵션 매수(Long) 포지션의 감마.

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 세타 (theta) Θ

- 세타 Θ는 시간 t의 흐름에 따르는 옵션가격의 변화율을 나타낸다.

$\Rightarrow$ 시간의 단위는 1년이므로 세타에 $\frac{1}{365}$ 를 곱해주어서 나타내기도 한다.

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad , \quad \Theta_P = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ 블랙-숄즈 공식을 직접 대입해서 계산한 세타 민감도는 다음과 같다.

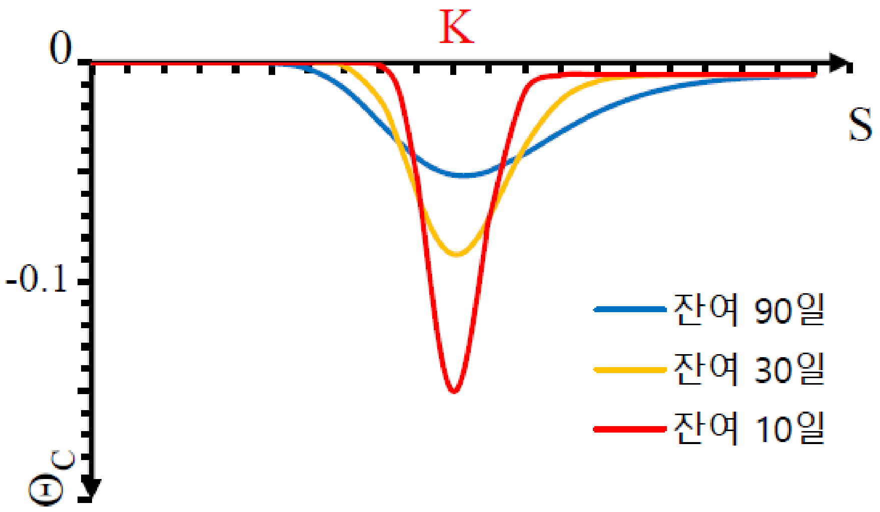
공통

$$\Theta_C = \boxed{-\frac{\sigma S f(d_1)}{2\sqrt{T-t}}} - r_0 K\, e^{-r_0(T-t)} N(d_2)$$

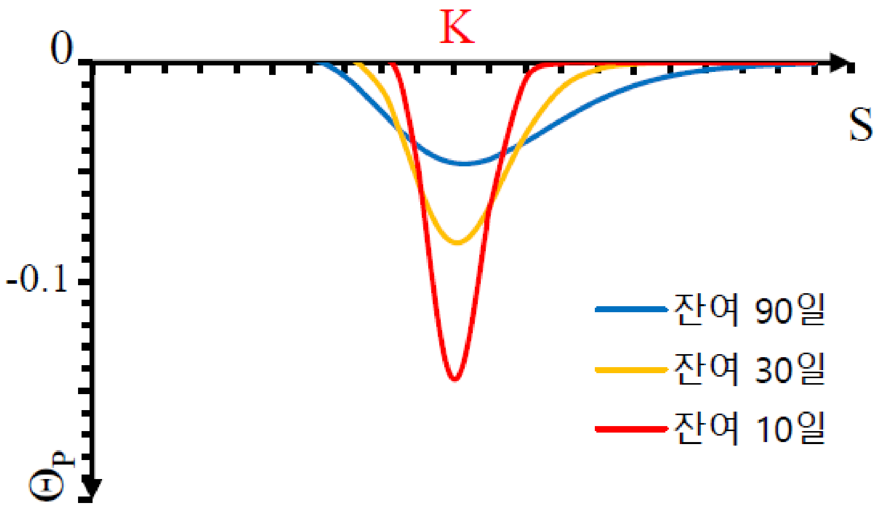
$$\Theta_P = \boxed{-\frac{\sigma S f(d_1)}{2\sqrt{T-t}}} + r_0 K\, e^{-r_0(T-t)} N(-d_2)$$

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 세타 (theta) Θ



콜옵션 매수(Long) 포지션의 세타.



풋옵션 매수(Long) 포지션의 세타.

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 베가 (vega) υ

- 베가 υ는 변동성 σ의 증가에 따르는 옵션가격의 변화율을 나타낸다.

$$\upsilon_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad , \quad \upsilon_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

⇒ 블랙-숄즈 공식을 직접 대입해서 계산한 베가 민감도는 다음과 같다.

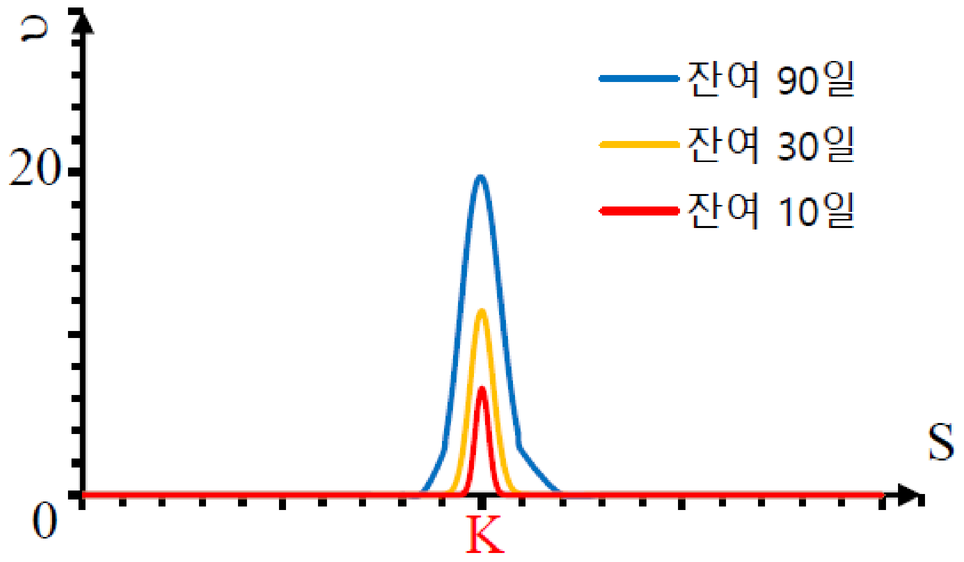
$$\upsilon = \upsilon_C = \upsilon_P = S\sqrt{T-t}\, f(d_1)$$

⇒ 베가 민감도와 감마 민감도 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\upsilon = S^2(T-t)\Gamma$$

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 베가 (vega) υ



콜/풋옵션 매수(Long) 포지션의 베가.

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 로 (rho) ρ

- 로 ρ는 무위험 이자율 r_0의 상승에 따르는 옵션가격의 변화율을 나타냄.

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r_0} \quad , \quad \rho_P = \frac{\partial P}{\partial r_0}$$

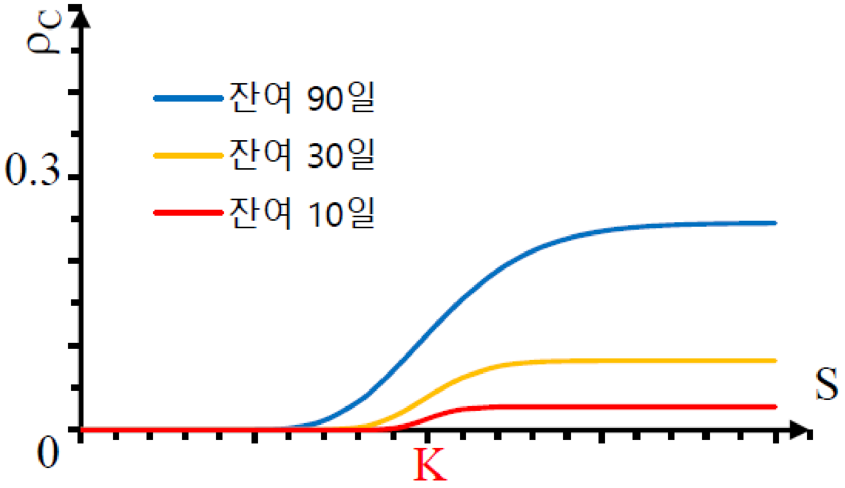
⇒ 블랙-숄즈 공식을 직접 대입해서 계산한 로 민감도는 다음과 같다.

$$\rho_C = K(T-t)e^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

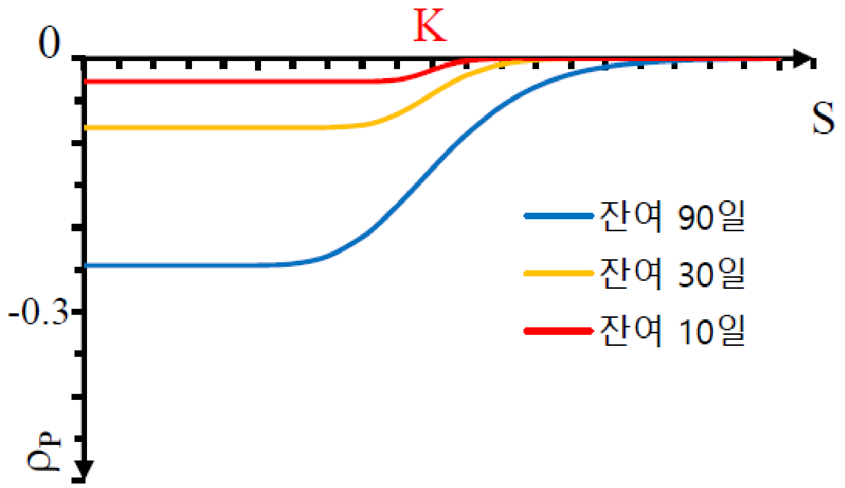
$$\rho_P = -K(T-t)e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

옵션의 민감도

옵션의 민감도: 로 (rho) ρ



콜옵션 매수(Long) 포지션의 로.



풋옵션 매수(Long) 포지션의 로.

실습 #0305

→ 사용: **ex_0305.ipynb** ←

스킵

순서

채권의 원리

채권의 유형:

- 발행 주체에 의한 분류:

⇒ 국채 : 국가가 발행.

⇒ 지방채: 지방자치단체가 발행.

⇒ 특수채: 특수 법인이 발행.

⇒ 금융채: 금융기관이 발행.

⇒ 회사채: 일반회사가 발행.

채권의 원리

채권의 유형:

- 이자 지급방법에 의한 분류:

⇒ 이표채 (coupon bond): 정기적으로 이자를 지급받고 만기에 원금을 상환 받음.

⇒ 순수 할인채 (discount bond): 중도이자 없음. 만기까지의 이자가 반영되어서 할인된 가격으로 매매됨.

⇒ 복리채: 생략된 중도이자가 복리로 재투자 되는 것을 가정하여 만기시 원금과 함께 상환받는다.

채권의 원리

채권의 유형:

- 이자율에 의한 분류:

⇒ 고정금리부 사채: 가장 보편적 형태. 시장의 금리와는 상관없이 고정적 이자를 지급하는 채권.

⇒ 변동금리부 사채 (FRN, Floating Rate Note): 변동적 이자율을 적용함.

채권의 원리

채권의 유형:

- 담보와 보증조건에 의한 분류:

⇒ 담보부 사채: 담보가 설정되어 있다.

⇒ 무담보부 사채: 담보가 없고, 현금 창출능력, 신용도만을 기초로 하여 발행됨.

신용도에 따라서 이자율에 차이가 있다.

⇒ 보증 사채: 제3자가 원금 상환을 보증함.

⇒ 무보증 사채: 제3의 보증 없이 발행기관의 신용도만을 기초로 하여 발행.

채권의 원리

현재가치:

- 미래에 발생할 현금 흐름을 현재의 가치로 환산하는 것.

$\Rightarrow$ $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$와 같은 일정 주기의 현금 흐름을 가정할 때 현재가치는 다음과 같다.

$$PV = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n}$$

$$= \sum_{t=0}^{n} \frac{x_t}{(1+r)^t}$$

$\Leftarrow$ n = 만기까지의 주기의 수.

$\Leftarrow$ r = 무위험 이자율. 전제된 주기에 해당함.

채권의 원리

현재가치:

문제: 다음 두 가지 투자 방법 중 현재가치가 더 높은 것은? (이자율=10%)

a). 지금 100을 투자하고 1년 후 100, 2년 후 200을 받는다.

b). 지금 100을 투자하고 3년 후 350을 받는다.

채권의 원리

현재가치:

문제: 다음 두 가지 투자 방법 중 현재가치가 더 높은 것은? (이자율=10%)

a). 지금 100을 투자하고 1년 후 100, 2년 후 200을 받는다.

이 경우 현금 흐름은 다음과 같다: {−100,100,200}. 그러면 현재가치는 다음과 같다.

$$PV_a = -100 + \frac{100}{1+0.1} + \frac{200}{(1+0.1)^2} = 156.2$$

현재가치:

문제: 다음 두 가지 투자 방법 중 현재가치가 더 높은 것은? (이자율=10%)

b). 지금 100을 투자하고 3년 후 350을 받는다.

이 경우 현금 흐름은 다음과 같다: $\{-100, 0, 0, 350\}$. 그러면 현재가치는 다음과 같다.

$$PV_b = -100 + \frac{350}{(1+0.1)^3} = 162.96$$

$\Rightarrow$ 현재가치는 b가 더 높다.

채권의 원리

현재가치:

- 주기적으로 일정금액 A를 영속적으로 받는 경우 (perpetual annuity).

$\Rightarrow$ $t=1$부터 $\{A, A, \dots\}$와 같은 현금 흐름의 현재가치는 다음과 같다.

$$PV = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$= \frac{A}{r}$$

$\Leftarrow$ 무한등비급수이므로 쉽게 구할 수 있다.

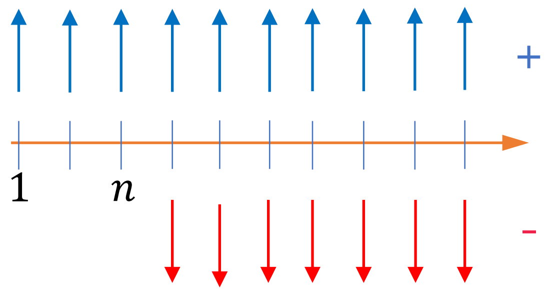
$\Leftarrow$ 무한등비급수 $S = 1 + c + c^2 + c^3 + \cdots$ 라면 $S = \frac{1}{1-c}$이다.

채권의 원리

현재가치:

- 주기적으로 일정금액 A를 n회 받는 경우.

  $\Rightarrow t = 1$부터 $\{A, A, \dots, A\}$와 같은 현금 흐름의 현재가치는 다음과 같다.



$$PV = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^{n}}$$

$$= \frac{A}{r} - \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{A}{r}$$ $\Leftarrow$ 두 개의 무한급수의 차이.

$$= \frac{A}{r}\left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}\right]$$

채권의 원리

순수 할인채의 이론 가격:

- F가 액면가이고 r이 채권수익률이라면 이론가격 B는 다음과 같다.

$$B = \frac{F}{(1+r)^n}$$

$\Leftarrow$ n개의 복리이자 기간을 전제함.

채권의 원리

이표채의 이론 가격:

- 매 기간 이표 “coupon”을 행사하여 이자 C를 받는다. 또한 만기에서는 원금을 상환 받는다.

$$B = \left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t}\right] + \frac{F}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{C}{r}\left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}\right] + \frac{F}{(1+r)^n}$$

채권의 원리

현재가치:

문제: 액면가 100,000원 만기 5년 순수 할인채의 이론 가격은?

1년 수익률 r은 5%이다.

채권의 원리

현재가치:

문제: 액면가 100,000원 만기 5년 순수 할인채의 이론 가격은?

1년 수익률 r은 5%이다.

$$B = \frac{F}{(1+r)^n} = \frac{100000}{(1+0.05)^5} = 78352.6 \text{ 원}$$

채권의 원리

현재가치:

문제: 액면가 10,000원 만기 5년 이표채의 이론 가격은?

1년 수익률 r은 6%이며 1년 이자 C는 5%이다.

채권의 원리

현재가치:

문제: 액면가 10,000원 만기 5년 이표채의 이론 가격은?

1년 수익률 r은 6%이며 1년 이자 C는 5%이다.

$$B = \frac{C}{r}\left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}\right] + \frac{F}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{500}{0.06}\left[\frac{(1+0.06)^5 - 1}{(1+0.06)^5}\right] + \frac{10000}{(1+0.06)^5}$$

$= 9578.8$ 원

순서

채권의 특성

채권가격과 채권수익률의 관계:

- 채권수익률 r이 높을 수록 채권의 가격 B는 낮아진다. (F =액면가).

예). 액면가 10,000원, 만기 3년, 이자 $C = 10\%$ 이표채의 가격.

$\Rightarrow$ 채권수익률 r이 8%인 경우: $r < C$이며 $B > F$ 이다 (at premium).

$$B = \frac{1000}{0.08}\left[\frac{(1+0.08)^3-1}{(1+0.08)^3}\right] + \frac{10000}{(1+0.08)^3} = 10515.4$$

$\Rightarrow$ 채권수익률 r이 10%인 경우: $r = C$이며 $B = F$ 이다 (at par).

$$B = \frac{1000}{0.1}\left[\frac{(1+0.1)^3-1}{(1+0.1)^3}\right] + \frac{10000}{(1+0.1)^3} = 10000$$

채권의 특성

채권가격과 채권수익률의 관계:

- 채권수익률 r이 높을 수록 채권의 가격 B는 낮아진다. (F =액면가).

예). 액면가 10,000원, 만기 3년, 이자 $C = 10\%$ 이표채의 가격.

$\Rightarrow$ 채권수익률 r이 12%인 경우: $r > C$이며 $B < F$ 이다 (at discount).

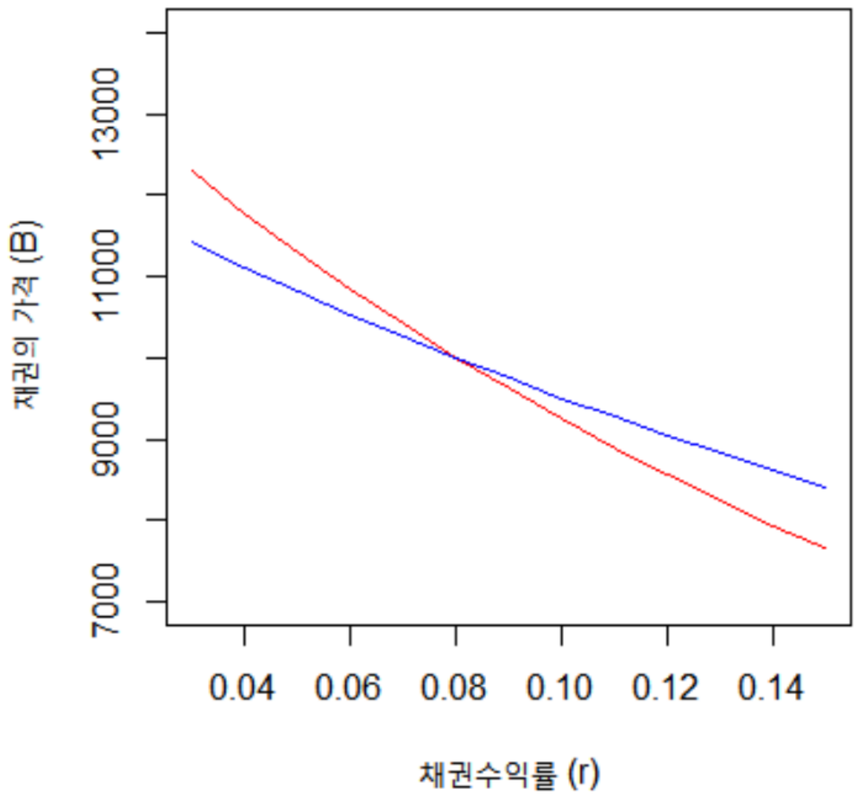
$$B = \frac{1000}{0.08}\left[\frac{(1+0.08)^3-1}{(1+0.08)^3}\right] + \frac{10000}{(1+0.08)^3} = 9619.63$$

채권의 특성

채권가격과 채권수익률의 관계:

- 채권수익률과 채권가격 사이의 그래프는 Convex한 형상을 보인다.

$\Rightarrow$ 만기가 길수록 채권수익률의 변동에 대한 채권가격의 변동폭이 크다.



$\Leftarrow$ 이 그래프는 $C = 8\%$의 경우이다. 그러므로 $r = 8\%$이면 만기와 무관하게 $B = F$ (at par) 이다.

채권의 특성

만기수익률 (YTM):

- 만기수익률 λ는 채권의 시장가격에 내포되어 있는 수익률을 의미한다.

  $\Rightarrow$ 시장가격으로 매입하여 만기까지 보유한다는 전제.

  $\Rightarrow$ 단순한 수식으로 계산하기 어렵다. 컴퓨터를 사용하여 계산함.

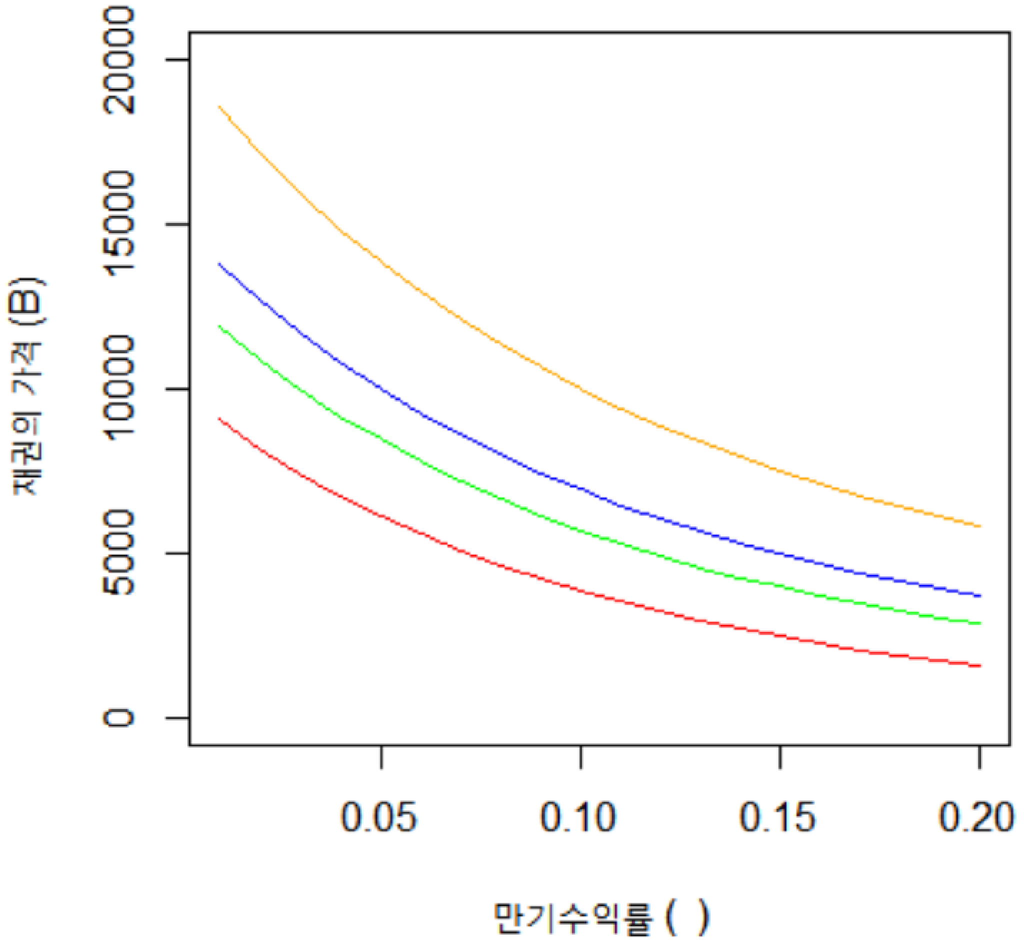
  $\Rightarrow$ 만기수익률은 발행조건, 위험도, 만기 등의 요인으로 변동이 있을 수 있다.

- 회사채 같이 위험도가 비교적 높은 채권에 추가되는 수익률의 차이를 신용스프래드라고 부른다. 비교대상은 위험이 낮은 국고채가 될 수 있다.

신용스프래드 = 채권의 수익률 – 무위험 채권의 수익률

만기수익률 (YTM):

- 만기수익률 λ는 채권의 시장가격에 내포되어 있는 수익률을 의미한다.



$\Leftarrow$ 10년채. $F = 10000.$

실습 #0306

→ 사용: **ex_0306.ipynb** ←

모듈 #3 : 끝

문의:

sychang1@gmail.com