MAP 433 - DM 1

I - THEORIE

$\theta := (\beta_1, \dots \beta_p, \sigma^2) \in \Theta := \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^*$

$\varepsilon_i(\theta) = \sigma^{-1}\{y_i - (\beta_1 z_i^1 + \dots + \beta_p z_i^p)\}$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$Y = Z\beta + \sigma\varepsilon(\theta)$ où $Z \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (n observations, p features)

$Y; \varepsilon(\theta) \in \mathbb{R}^n$; $\beta \in \mathbb{R}^p$

I.1 : Estimation de β par les moindres carrés

$$u \mapsto J_n(u) = \sum_{i=1}^n (y_i - u_1 z_i^1 - \dots - u_p z_i^p)^2 = \|Y - Zu\|^2$$

1) Montrons que ~~tt~~ $\hat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}}\, J_n(u)$ est tel que

$$Z^T Y = Z^T Z u$$

On a ; Soit $u^* \in \underset{u \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}}\, J_n(u)$

$$\Rightarrow u^* \in \underset{u \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}}\, \|Y - Zu\|^2$$

$$\Rightarrow Zu^* = P_{Im(Z)}(Y)$$

$$\Rightarrow Zu^* = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

$$\Rightarrow Z^T Y = Z^T Z u^*, \text{ cqfd.}$$

2) Montrons que ;

$* \; Z^\# Z = I_p$

$Z^\# Z = (Z^T Z)^{-1} Z^T Z = I_p$ car $Z^T Z \in \mathbb{R}^{p\times p}$

$* \; Z Z^\# = H$

Z est de rang p. $\Rightarrow$ Z est surjective car $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$\Rightarrow Z^T Z$ bijective et inversible.

D'après la pc2, on a: $P^{\perp}_{Im(Z)}(x) = Z(Z^T Z)^{-1} Z^T x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$= Z Z^{\#} x$

D'où $Z Z^{\#} = H$

3) Montrons que l'EMC est unique et que :

$$\hat{\beta} = Z^{\#} y$$

D'après 1, $\forall \hat{u} \in \underset{u \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} J_n(u)$; on a: $Z^T y = Z^T Z \hat{u}$

Comme $Z^T Z \in GL_p(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{u} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y = Z^{\#} y$ qui est unique.

Ainsi, $\underline{\hat{\beta} = Z^{\#} y}$

4) Montrons que $E[\hat{\beta}] = \beta$

L'espérance étant linéaire,

On a : $E[\hat{\beta}] = E[Z^{\#} y]$

$= Z^{\#} E[y]$

$= Z^{\#} Z \beta$

$= \beta$ d'après 2.

D'où $\underline{\hat{\beta} \text{ est un estimateur sans biais de } \beta.}$

5- Mq $\forall \theta \in \Theta$; $Var_\theta(\hat{\beta}) = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1}$

Comme $Var_\theta(Y) = \sigma^2 I_n$,

On a : $Var_\theta(\hat{\beta}) = Var(Z^{\#} y) = \sigma^2 Z^{\#} Z^{\#T}$

$= \sigma^2 (Z^T Z)^{-1} Z^T Z (Z^T Z)^{-1} = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1}$

Soit $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. $\tilde{\beta} = BY$

6) Montrons que $\tilde{\beta}$ est ~~l'~~ un estimateur sans biais ssi

$BZ = I_p$

$\Rightarrow$) Comme $\tilde{\beta}$ est l'ESB de β;

$E_\theta(\tilde{\beta}) = BE[Y] = BZ\beta = \beta \quad \forall \theta \in \Theta$

$\Rightarrow BZ = I_p$

$\Leftarrow$) $E_\theta(\tilde{\beta}) = BZ\beta = \beta$

d'où $\tilde{\beta}$ est ~~l'~~ un ESB de β ssi $BZ = I_p$

7) Mq $\forall \theta \in \Theta$; $E_\theta[(\tilde{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^T] = \sigma^2 B(Z^{\#})^T = \sigma^2(Z^TZ)^{-1}$

$E_\theta[(\tilde{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)^T] = Cov(\tilde{\beta}, \hat{\beta})$

$= Cov(BY; Z^{\#}Y)$

$= BZ^{\#T} Cov(Y,Y)$, par linéarité de Cov.

$= \sigma^2 B(Z^{\#})^T$

$= \sigma^2 BZ(Z^TZ)^{-1}$

$= \sigma^2(Z^TZ)^{-1}$ car $BZ = I_p$.

Cqfd

8) Montrons que $\forall \theta \in \Theta$; $var_\theta(\tilde{\beta}) \geq var_\theta(\hat{\beta})$.

On a que : $\forall x \in \mathbb{R}^p$,

$x^T V(M-N)x \geq 0$ avec M,N des vecteurs aléatoires de même dimension p.

or $V(M-N) = V(M)+V(N)-2Cov(M,N)$

$\Rightarrow x^T V(M)x + x^T V(N)x \geq 2x^T Cov(M,N)x$

Pour $M = \tilde{\beta}$ et $N = \hat{\beta}$

On a donc : $Var_{\theta}(\hat{\beta}) + Var_{\theta}(\tilde{\beta}) - 2Cov_{\theta}(\tilde{\beta},\hat{\beta}) = V_{\theta}(\hat{\beta}-\tilde{\beta})$

Et : $x^T var_{\theta}(\tilde{\beta}) x + x^T var_{\theta}(\hat{\beta}) x \geq 2x^T Cov_{\theta}(\tilde{\beta},\hat{\beta}) x$

or $Cov_{\theta}(\tilde{\beta},\hat{\beta}) = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1} = var_{\theta}(\hat{\beta})$

$\Rightarrow \quad x^T Var_{\theta}(\tilde{\beta}) x \geq x^T var_{\theta}(\hat{\beta}) x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^p$

$\Rightarrow \quad Var_{\theta}(\tilde{\beta}) \succeq var_{\theta}(\hat{\beta})$.

I.2 : Estimation de σ^2

$\hat{Y} = Z\hat{\beta} = HY$. $\quad Y - Z\hat{\beta} = (I_n - H)Y$

$SSE := \|Y - HY\|^2$

9- Mq $\hat{\sigma}^2 = (n-p)^{-1} SSE = \frac{1}{n-p}\|Y - Z\hat{\beta}\|^2$ est un ESB de σ^2

On a : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}\|Y - Z\hat{\beta}\|^2$

$= \frac{1}{n-p} Tr[(Y - Z\hat{\beta})(Y - Z\hat{\beta})^T]$

$= \frac{1}{n-p} Tr[(I_n - H) Y Y^T (I_n - H)]$ car $I_n - H$ symétriq

$= \frac{1}{n-p} Tr[(I_n - H)^2 Y Y^T]$ car $Tr(AB) = Tr(BA)$

$= \frac{1}{n-p} Tr[(I_n - H) Y Y^T]$ car $I_n - H$ est une projection sur $Im(Z)^{\perp}$

$= \frac{1}{n-p} Tr(YY^T) - Tr(HYY^T)$

$\Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n-p} E[Tr(YY^T) - Tr(HYY^T)]$

$= \frac{1}{n-p} Tr[\sigma^2 I_n - \sigma^2 I_p]$ car H projette sur un espace de dim p

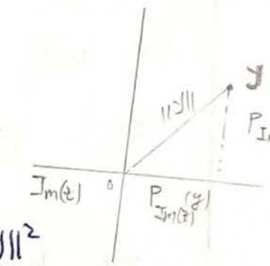
encore

$= \sigma^2$; cqfd.

10) Montrons que $\|Y\|^2 = RSS + SSE$

On sait que $HY = P^{\perp}_{Im(Z)}(Y) \Rightarrow Y - HY = P^{\perp}_{Im(Z)^{\perp}}(Y)$

$\Rightarrow HY \perp Y - HY$



Par Pythagore ; $\|Y\|^2 = \|Y - HY + HY\|^2$

$= \|Y - HY\|^2 + \|HY\|^2$

$\|Y\|^2 = RSS + SSE$; cqfd.

<u>I.3:</u> Cas de la regression linéaire gaussienne

Y issu de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathcal{N}_n(Z\beta, \sigma^2 I_n) ; \theta = (\beta, \sigma^2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^*_+\})$

11- Déterminons l'EMV

$$L(y_1, \dots, y, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - \cancel{Z}\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{n} \ln L(y, \theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{\ln \sigma^2}{2} - \frac{\|y - \cancel{Z}\beta\|^2}{2n\sigma^2}$$

On a vu que $\underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|y - Z\beta\|^2 = \hat{\beta}_{EMV} = Z^{\#} y$

Et minimiser $\|y - Z\beta\|^2$ revient à maximiser $L(y, \theta)$ en β.

$$* \ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln(y, \theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\|y - Z\hat{\beta}\|^2}{2n\sigma^4} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{EMV} = \frac{\|y - Z\hat{\beta}\|^2}{n}$$

ainsi ; $\underline{\underline{\hat{\theta}_{EMV} = (\hat{\beta}_{EMV}, \hat{\sigma}^2_{EMV}) = \left(Z^{\#} y ; \frac{\|y - Z\hat{\beta}_{EMV}\|^2}{n}\right)}}$ ou

encore

$$\hat{\theta}_{EMV} = \left(Z^{\#} y \,;\ \frac{n-p}{n}\,\hat{\sigma}^2\right)$$

12. Déterminons la distribution de l'EMC $\hat{\beta}$ sous $\mathbb{P}_\theta$; ~~sous~~ $\theta \in \Theta$

Soit $\theta \in \Theta$,

On sait que $\hat{\beta} = \underbrace{(Z^T Z)^{-1} Z^T}_{M} Y$

et $Y \sim \mathcal{N}_n(Z\beta, \sigma^2 I_n)$

$\Rightarrow \hat{\beta} \sim \mathcal{N}_n(MZ\beta \,; \sigma^2 M M^T)$

$MZ\beta = (Z^T Z)^{-1} Z^T Z \beta = \beta$.

$\sigma^2 M M^T = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1} Z^T Z (Z^T Z)^{-1} = \sigma^2 (Z^T Z)^{-1}$

Donc $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_n(\beta, \sigma^2 (Z^T Z)^{-1})$ $\forall \theta \in \Theta$

13. $\forall \theta \in \Theta$, déterminons la distribution de $\hat{\sigma}^2$

Soit $\theta \in \Theta$,

On a : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \| y - Z\hat{\beta} \|^2 = \frac{1}{n-p} \| (I_n - H) y \|^2$

~~où $y \sim \mathcal{N}_n(\beta, \sigma^2 (Z^T Z)^{-1})$~~

~~$Z\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_n(Z\beta ;$~~

* $\Pi = I_n - H$ est une projection. En fait, c'est la projection sur $\mathrm{Im}(Z)^\perp$. (de dim $n-p$)
* De plus, elle est symétrique ; donc orthogonale
* Enfin ; $y \sim \mathcal{N}_n(\beta, \sigma^2 I_n)$

D'après le théorème de Cochran ; $\frac{\| y - Z\hat{\beta} \|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n-p} \cdot \frac{\|Y - Z\hat{\beta}\|^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n-p} \chi \quad \text{où } \chi \sim \chi^2_{n-p}$$

14- $\forall \theta \in \Theta$, mq $\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$ sous $\mathbb{P}_\theta$

Le théorème de Cochran nous donne que :

$Y - Z\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp Z\hat{\beta} \quad \forall \theta \in \Theta$

$\Rightarrow \|Y - Z\hat{\beta}\|^2 \perp\!\!\!\perp Z\hat{\beta}$

$\Rightarrow \|Y - Z\hat{\beta}\|^2 \perp\!\!\!\perp \hat{\beta}$

$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{n-p} \chi \perp\!\!\!\perp \hat{\beta}$

Ainsi $\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$ sous $\mathbb{P}_\theta$

1.4 : Tests statistiques

15. Soit $x \in \mathbb{R}^p$; Montrons que sous $\mathbb{P}_\theta$

$$\frac{x^T\hat{\beta} - x^T\beta}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} \sim ST_{n-p}$$

On a :
$$\frac{x^T(\hat{\beta} - \beta)}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} = \frac{x^T(\hat{\beta} - \beta)}{\sqrt{\frac{\|Y - Z\hat{\beta}\|^2}{n-p}} \cdot \sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{x^T(\hat{\beta} - \beta)}{\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}}^{\sim \mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\frac{\|Y - Z\hat{\beta}\|^2}{n-p}}_{\sim \chi^2_{n-p}}}}$$

D'où, sous $\mathbb{P}_\theta$; $\frac{x^T\hat{\beta} - x^T\beta}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} \sim ST_{n-p}$

16) Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminons un intervalle de confiance bilatéral de niveau $1-\alpha$ pour $\beta^T x$

Posons $\dfrac{x^T\hat{\beta} - x^T\beta}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} = S$; $S \sim ST_{n-p}$

$\Rightarrow$ $x^T\hat{\beta} - \hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}\, S = x^T\beta = \beta^T x$ car $x^T\beta \in \mathbb{R}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ tq.

$$P(a \leq \beta^T x \leq b) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow$ $P(a \leq x^T\hat{\beta} - \hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}\, S \leq b) = 1 - \alpha$.

$\Rightarrow$ $P\left(-\dfrac{b - x^T\hat{\beta}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} \leq S \leq -\dfrac{a - x^T\hat{\beta}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}\right) = 1 - \alpha$

On prend $\dfrac{b - x^T\hat{\beta}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} = -q^{ST_{n-p}}_{\frac{\alpha}{2}}$ et $\dfrac{a - x^T\hat{\beta}}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{I}_{1-\alpha} = \left[-\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}\, q^{ST_{n-p}}_{1-\frac{\alpha}{2}} + x^T\hat{\beta} \,;\, -\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}\, q^{ST_{n-p}}_{\frac{\alpha}{2}} + x^T\hat{\beta}\right]$$

17- Soit $\alpha \in]0,1[$

Construisons un test de l'hypothèse :

$H_0 : \beta^T x = 0$ contre $H_1 : \beta^T x \neq 0$ de niveau α

Soit k_α

On rejette H_0 si $\hat{\beta}^T x > k_\alpha$ et on choisit k_α de telles sorte $P_\theta(T(\beta^T x) > k_\alpha) \leq \alpha$ avec T statistique choisie

on prend $T(\beta^T x) = \dfrac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}$

Ainsi $P_{\theta_0}\Big(\underbrace{\frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}}_{\sim \cancel{\mathcal{N}(0,1)}\ \text{sous } H_0 \atop ST_{n-1}} > k_\alpha \Big) \leq \alpha$

$\Rightarrow \quad 1 - F(k_\alpha) \leq \alpha$

$\Rightarrow \quad F(k_\alpha) \geq 1-\alpha.$ avec F : fp d'une $\cancel{\mathcal{N}(0,1)}$ ST_{n-p}

On prend $k_\alpha = q_{1-\alpha}^{ST(n-p)}$

Ainsi ϕ, fonction de test est telle que

$$\phi(z) = 1 \text{ lorsque } \frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} \geq k_\alpha = q_{1-\alpha}^{ST(n-p)}$$

18- p-valeur du test.

$$\hat{\alpha}(y) = \inf\{\alpha \mid \phi_\alpha(z) = 1\}.$$

$$= \inf\{\alpha \mid T(x) > k_\alpha\}$$

$$= \inf\Big\{\alpha \mid \frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ^{-1})x}} \geq q_{1-\alpha}^{ST(n-p)}\Big\}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}(y) \text{ est tq } \frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} = q_{1-\hat{\alpha}}.$$

$$\Rightarrow 1-\hat{\alpha} = F\Big(\frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}\Big)$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}(y) = 1 - F\Big(\frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}}\Big)$$

$$\hat{\alpha}(y) = P\Big(S > \frac{\hat{\beta}^T x}{\hat{\sigma}\sqrt{x^T(Z^TZ)^{-1}x}} \,\Big|\, y\Big)$$

19- Soit $A \in \mathbb{R}^{q\times p}$ de rang $q \leq p$

Montrons que sous P_θ ;

$$\frac{1}{q\hat{\sigma}^2}\underbrace{\{A(\hat{\beta}-\beta)^T\}\,[A(Z^TZ)^{-1}A^T]^{-1}\,\{A(\hat{\beta}-\beta)\}}_{U} \sim F_{(q,n-p)}$$

On a $\dfrac{U}{q\hat{\sigma}^2} = \dfrac{U}{(n-p)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \cdot \dfrac{n-p}{q\,\sigma^2} = \dfrac{\frac{\cancel{U}}{q\sigma^{-2}}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} = \dfrac{\frac{\sigma^{-2}U}{q}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$

On sait que $\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$ (9.14)

$\Rightarrow U \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$

$A(\hat{\beta}-\beta) \sim \mathcal{N}\left(0\,;\sigma^2 A(Z^TZ^{-1})^{-1}A^T\right)$ (*)

$\dim[A(Z^TZ^{-1})A^T] = (q,q)$ (**)

(*) et (**) $\Rightarrow \sigma^{-2}A(\hat{\beta}-\beta)[A(Z^TZ)^{-1}A^T]^{-1}\{A(\hat{\beta}-\beta)\} \sim \chi^2_q$

ainsi $\dfrac{\sigma^{-2}U}{q}$ "=" $\dfrac{\chi^2_q}{q}$ et $\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ "=" $\dfrac{\chi^2_{n-p}}{n-p}$

de plus $\dfrac{\sigma^{-2}U}{q} \perp\!\!\!\perp \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$

Ainsi $\dfrac{\frac{\sigma^{-2}U}{q}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma}} \sim F_{(q,n-p)}$

D'où $\dfrac{1}{q\hat{\sigma}^2}\{\underset{q,p\ \ p,1}{A(\hat{\beta}-\beta)^T}\}\,\underset{q,q}{[A(Z^TZ)^{-1}A^T]^{-1}}\,\{\underset{q,1}{A(\hat{\beta}-\beta)}\}$

$1,q$

suit une loi de Fisher à $(q,n-p)$ dégrés de liberté

20) Déterminons un intervalle de confiance pour (β_1,β_2).

Soit $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \in \mathbb{R}^{2\times p}.$

On a : $rg(A) = 2 \leq p$

$$A(\hat{\beta} - \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p - \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix}$$

Posons $M = \left[A(Z^T Z)^{-1} A^T\right]^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 & \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 & \hat{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + m_{12}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \\ m_{21}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) + m_{22}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \end{bmatrix}$$

$$F(\beta_1, \beta_2) = m_{11}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 + (m_{12} + m_{22})(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) + m_{22}(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2$$

Ainsi, la région de confiance est telle que :

$$P\left(\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} F(\beta_1, \beta_2) \in R_\alpha\right) \leq 1 - \alpha.$$

Soit ~~α~~ On peut avoir : $R_\alpha = \left[q_{\frac{\alpha}{2}}^{F(2,n-p)} ; q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{F(2,n-p)}\right].$

ainsi $P\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{F(\beta_1, \beta_2)}{2\hat{\sigma}^2} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow P\left(2\hat{\sigma}^2 q_{\frac{\alpha}{2}} \leq F(\beta_1, \beta_2) \leq 2\hat{\sigma}^2 q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Cette ~~intervalle~~ région peut être representée numériquement en prenant des valeurs (sur un cercle par exemple) arbitraires et tester si l'inégalité est verifiée.