【每日一题】9 月 1 日

1、设 A、B 是两个随机事件，$0 < P(B) < 1$，$AB = \bar{A}\,\bar{B}$，则 $P(A \mid \bar{B}) + P(\bar{A} \mid B) =$______.

【解】从条件 $AB = \bar{A}\,\bar{B}$ 有：

$$(AB)(\bar{A}\,\bar{B}) = (AB)(AB) = AB,\ (AB)(\bar{A}\,\bar{B}) = (\bar{A}\,\bar{B})(\bar{A}\,\bar{B}) = \bar{A}\,\bar{B}.$$

但是对任何事件 A, B 都有 $(AB)(\bar{A}\,\bar{B}) = AB\bar{A}\,\bar{B} = \emptyset$.

因此有 $AB = \bar{A}\,\bar{B} = \emptyset$ ，$A \cup B = \overline{\bar{A}\,\bar{B}} = \bar{\emptyset} = \Omega$.

于是 A 与 B 为对立事件，即 $\bar{A} = B$ ，$\bar{B} = A$.

因此 $P(A \mid \bar{B}) + P(\bar{A} \mid B) = P(\bar{B} \mid \bar{B}) + P(B \mid B) = 2$.

【每日一题】9 月 2 日

2、设 A、B 是两个随机事件，$P(A) = 0.4$, $P(B \mid A) + P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 1$, $P(A \cup B) = 0.7$, 求 $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

【解】对于任何概率不为零的事件 $\bar{A}$, 一定有$P(B \mid \bar{A}) + P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 1$, 结合题设条件：$P(B \mid A) + P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 1$, 可以得到$P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$, 即$A$与$B$相互独立. 应用加法公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B)$$

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(\bar{A})} = 0.5$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B) = 0.8$$

或者从 A 与 B 独立知 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也独立，因此有：

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \qquad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A)P(B)$$

由左式可得 $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(B) = 0.5$, 代入右式可得：$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.8$.

【每日一题】9 月 3 日

3、一条旅游巴士观光线共设 10 个站，若一辆车上载有 30 位乘客从起点开出，每位乘客都等可能地在 10 个站中任意一站下车，且每个乘客不受其他乘客下车与否的影响，规定旅游车只在有乘客下车时才停车，求：

(1) 这辆车在第 i 站停车的概率以及在第 i 站不停车的条件下在第 j 站停车的概率；

(2) 判断事件“第 i 站不停车”与“第 j 站不停车”是否相互独立.

【解】设事件 $A_m =$“第 m 位乘客在第 i 站下车”$(m = 1,2,\cdots,30)$, $B_n =$“第 n 站停车”, $n = 1,2,\cdots,10$.

(1) 依题意 $A_1, A_2, \cdots, A_{30}$ 相互独立，$P(A_m) = \frac{1}{10}$, $m = 1,2,\cdots,30$.

$$P(\bar{B}_i) = P(\bar{A}_1\,\bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{30}) = \prod_{m=1}^{30} P(\bar{A}_m) = \left(\frac{9}{10}\right)^{30},$$

$P(B_i)=1-P(\bar{B}_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{30}$.

类似地，$P(B_j)=1-P(\bar{B}_j)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{30}$.

在第 i 站不停车，即 B_i 不发生的条件下，每位乘客都等可能地在第 i 站以外的 9 个站中任意一站下车，也就是说每位乘客在第 j 站下车的概率为 $\frac{1}{9}$，因此有：

$$P(B_j \mid \bar{B}_i)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{30}.$$

(2) 由于 $P(B_j \mid \bar{B}_i)\neq P(B_j)$，因此 $\bar{B}_i$ 与 B_j 不独立，从而 B_i 与 B_j 不独立. 或者由计算：

$$P(\bar{B}_i)P(\bar{B}_j)=\left(\frac{9}{10}\right)^{60},P(\bar{B}_i\bar{B}_j)=P(\bar{B}_i)P(\bar{B}_j \mid \bar{B}_i)=\left(\frac{9}{10}\right)^{30}\left(\frac{8}{9}\right)^{30}\neq P(\bar{B}_i)P(\bar{B}_j),$$

可知 $\bar{B}_i$ 与 $\bar{B}_j$ 不独立，从而 B_i 与 B_j 也不独立.

【每日一题】9 月 4 日

4、一批玻璃杯整箱出售，每箱装有 12 只，其中含有 0 个，1 个，2 个次品的概率分别为 0.6, 0.2, 0.2. 一顾客需买该产品 5 箱，他的购买方法是：任取一箱，打开后任取 3 只进行检查，若无次品就买下该箱，若有次品则退回另取一箱检查，求他需要检查的箱数 X 的概率分布及检查箱数不超过 6 箱的概率 β.

【解】设 A_i 表示一箱中有 i 个次品，$i=0,1,2$；B 表示一箱通过检查.
已知 $P(A_0)=0.6$，$P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.2$，由全概率公式可得：

$$P(B)=P(A_0B+A_1B+A_2B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B \mid A_i)$$

$$=0.6\times\frac{C_{12}^3}{C_{12}^3}+0.2\times\left(\frac{C_{11}^3}{C_{12}^3}+\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}\right)=0.6+0.2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{11}\right)\approx 0.859,$$

于是 X 的概率分布为 $P\{X=k+5\}=C_{k+4}^4p^4\cdot q^k\cdot p=C_{k+4}^4p^5q^k, k=0,1,2,\cdots$；
或 $P\{X=k\}=C_{k-1}^4p^4\cdot q^{k-5}\cdot p=C_{k-1}^4p^5q^{k-5}, k=5,6,\cdots$,
其中 $p=0.859, q=0.141$.

$$\beta=P\{X=5\}+P\{X=6\}=p^5+C_5^4p^5q\approx 0.859^2+5\times 0.859^5\times 0.141$$
$$\approx 0.4677+0.3297=0.7974.$$

【每日一题】9 月 5 日

5、设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<-1,\\ a+b\cdot\arcsin x & ,-1\le x<1,\\ 1 & ,\quad x\ge 1,\end{cases}$$

求使得 $\left|F(a)-\frac{n}{4}\right|$ 达到最小的正整数 n.

【解】由于连续型随机变量 X 的分布函数是连续函数，因此 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，当然在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处也连续，于是有

$$0=F(-1-0)=F(-1)=a-\frac{\pi}{2}b$$

$$1=F(1)=F(1-0)=a+\frac{\pi}{2}b$$

解以 a,b 为未知量的二元一次方程组，可得 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\pi}$.

当$-1\le x<1$ 时，

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x$$

$$F(a)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}$$

由于 $\left|F(a)-\frac{n}{4}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{n}{4}\right|\ge 0$ ，且只有当 $n=\frac{8}{3}$ 时为 0，$n\ne\frac{8}{3}$ 时大于 0. 比较 $n=2$ 与 $n=3$ 的两个值：

当 $n=2$ 时，$\left|F(a)-\frac{n}{4}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right|=\frac{1}{6}$，

当 $n=3$ 时，$\left|F(a)-\frac{n}{4}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{12}$，

因此可知，当 $n=3$ 时，$\left|F(a)-\frac{n}{4}\right|$ 达到最小，其最小值为 $1/12$.

【每日一题】9 月 6 日

6、连续进行射击直到第二次击中目标为止，假定每次射击的命中率为 $p(0<p<1)$ ，X_1 表示首次击中目标所需进行的射击次数，X_2 表示从首次击中到第二次击中目标所进行的射击次数；Y 表示第二次击中目标所需进行的射击总次数，求 X_1,X_2,Y 的概率分布.

【解】显然 X_1,X_2,Y 都是离散型随机变量，X_1 与 X_2 的取值都是$1,2,\cdots$ ，而 Y 的取值为 $2,3,\cdots$.

$$P\{X_i=n\}=pq^{n-1}, n=1,2,\cdots, q=1-p, i=1,2,$$

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}pq^{n-2}\cdot p=(n-1)p^2q^{n-2}, n=2,3,\cdots.$$

或根据 $Y=X_1+X_2$ 且 X_1 与 X_2 相互独立，可得

$$P\{Y=n\}=P\{X_1+X_2=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X_1=m,X_2=n-m\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X_1=m\}P\{X_2=n-m\}=\sum_{m=1}^{n-1}pq^{m-1}\cdot pq^{n-m-1}$$

$$=(n-1)p^2q^{n-2}, n=2,3,\cdots.$$

【每日一题】9 月 7 日

7、在一个为期擂台赛中，甲、乙两位选手轮流对擂主丙进行攻擂，每人一局甲先开始，直到将擂主丙攻下为止，规定只要丙输一局则为守擂失败，如果甲、乙对丙的胜率分别为 p_1 与 $p_2(1<p_1,p_2<1)$. 求：

(1) 甲攻擂次数 X_1 的概率分布；

(2) 乙攻擂次数 X_2 的概率分布；

(3) 擂主丙对甲、乙二人守擂总次数 X_3 的概率分布.

(4) 假设乙对丙的胜率 p_2 是 $1/4$ ，若使甲、乙二人攻擂成功概率相等，求甲对丙的胜率.

【解】

(1) 由于每次对局的胜率都不收其他局胜、负的影响，故这是一个独立试验序列问题.

事件“$X_1=n$”表示“甲与丙对阵 n 局”，即“甲、乙各自与丙在前 $n-1$ 次对局中均失败，在第 n 次对局中甲胜丙”或“甲、乙各自与丙在前 $n-1$ 次对局中均失败，在第 n 次甲、丙对局中甲失败，但在乙、丙第 n 次对局中乙胜丙”，则：

$$P\{X_1=n\}=(q_1q_2)^{n-1}(p_1+q_1p_2), n=1,2,\cdots.$$

其中 $q_i=1-p_i, i=1,2.$

(2)“$X_2=0$”表示甲与丙第一次对局攻擂成功，乙未上场. $P\{X_2=0\}=p_1$；“$X_2=n$”$(n\geq 1)$表示“甲、乙与丙各对阵 $n-1$ 次均失败，甲、丙第 n 次对阵中甲又失败，但乙、丙第 n 次对阵中乙胜丙”或者“甲、乙与丙各对阵 n 次均失败，甲在第 $n+1$ 次与丙再对阵时胜丙”，则：

$$P\{X_2=n\}=(q_1q_2)^{n-1}(q_1p_2+q_1q_2p_1)=q_1(p_2+q_2p_1)(q_1q_2)^{n-1}, n=1,2,\cdots.$$

(3) 显然若丙的守擂次数为奇数，则表示甲守擂成功，否则为乙守擂成功.

“$X_3=2n-1$”表示“丙在前$2n-2$次守擂均成功，第 $2n-1$ 次守擂失败”，即“甲、乙先与丙各对局 $n-1$ 次均失败，而在甲与丙的第 n 次对局中甲胜丙”，因此有

$$P\{X_3=2n-1\}=(q_1q_2)^{n-1}p_1, n=1,2,\cdots.$$

类似分析可知$P\{X_3=2n\}=(q_1q_2)^{n-1}q_1p_2, n=1,2,\cdots.$

(4) 设事件 A 表示“甲攻擂成功”，则

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X_3=2n-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}p_1(q_1q_2)^{n-1}=\frac{p_1}{1-q_1q_2}$$

若要甲、乙二人攻擂胜率相同，则 $P(A)=1/2$ ，即

$$\frac{p_1}{1-q_1q_2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ p_1=\frac{p_2}{1+p_2}$$

将 $p_2=1/4$ 代入上式，得 $p_1=1/5$.

【每日一题】9 月 8 日

8、设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=n\}=\frac{1}{2^n}$, $n=1,2,\cdots$,求 $Y=\tan\frac{\pi}{3}X$ 的分布函数.

【解】由于 X 取值为所有正整数，因此 Y 的取值只有$-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

事件 $\left\{\tan\frac{\pi}{3}X=-\sqrt{3}\right\}$ 是可列个两两互不相容事件 $\{X=2\},\{X=5\},\cdots,\{X=3n-1\},\cdots$ 的和，根据概率的可列可加性，有

$$P\left\{Y=-\sqrt{3}\right\}=P\left\{\tan\frac{\pi}{3}X=-\sqrt{3}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=3n-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n-1}}=\frac{2}{7}.$$

类似地有 $P\{Y=0\}=P\left\{\tan\frac{\pi}{3}X=0\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=3n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}=\frac{1}{7}$.

由于事件$\left\{Y=-\sqrt{3}\right\},\{Y=0\},\left\{Y=\sqrt{3}\right\}$是一个完备事件组，因此有

$$P\left\{Y=\sqrt{3}\right\}=1-P\left\{Y=-\sqrt{3}\right\}-P\{Y=0\}=\frac{4}{7}.$$

于是 Y 的分布函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{3},\\ \frac{2}{7}, & -\sqrt{3}\leq x<0,\\ \frac{3}{7}, & 0\leq x<\sqrt{3},\\ 1, & \sqrt{3}\leq x.\end{cases}$$

【每日一题】9 月 9 日

9、将一枚均匀的硬币接连掷 5 次.

(1)求正面出现次数 X 的概率分布.

(2)在反面至少出现一次的条件下，求正面与反面出现次数之比 Y 的概率分布.

【解】

(1) 掷 5 次硬币，正面出现次数 X 的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5. 每次掷出正面的概率为$\frac{1}{2}$，因此

X 服从参数为 $\left(5,\frac{1}{2}\right)$ 的二项分布：

$$P\{X=k\}=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}=C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^5, k=0,1,2,3,4,5,$$

即 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32}\end{pmatrix}$.

(2) 为求比值 Y 的分布，先求 X_1 的分布，X_1 表示在“掷 5 次硬币至少出现了一次反面”的条件下正面出现的次数，则 X_1 的取值为 0, 1, 2, 3, 4. 设 A 表示事件“5 次中至少出”，则

$$P(A)=1-P\{X=5\}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}.$$

随机变量 X_1 的概率分布为

$$P\{X_1=k\}=P\{X=k|A\}=\frac{P(X=k)}{P(A)}$$

即 $X_1\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\ \frac{1}{31}&\frac{5}{31}&\frac{10}{31}&\frac{10}{31}&\frac{5}{31}\end{pmatrix}$.

由已知条件 $Y=\frac{X_1}{5-X_1}$，则 Y 相对于 X_1 的 5 个取值为$0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4$，于是由 X_1 的概率分布可得 Y 的概率分布为

$$Y\sim\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&\frac{2}{3}&\frac{3}{2}&4\\ \frac{1}{31}&\frac{5}{31}&\frac{10}{31}&\frac{10}{31}&\frac{5}{31}\end{pmatrix}.$$

【每日一题】9 月 10 日

10、设随机变量 U 服从标准正态分布 $N(0,1)$，随机变量

$$X=\begin{cases}-1\text{，若 } U\le 0\text{，}\\ \ \ 1\text{，若 } U>0\text{；}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1\text{，若 } |U|\le 1.96\text{，}\\ \ \ 1\text{，若 } |U|>1.96\text{.}\end{cases}$$

求(1) X 与 Y 的联合分布；(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【解】

(1)随机变量(X,Y) 只可能取$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$ 与 $(1,1)$ 各值.

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le 0,|U|\le 1.96\}=P\{-1.96\le U\le 0\}$$
$$=\Phi(0)-\Phi(-1.96)=0.5-0.025=0.475\,.$$

类似地，可以依次计算出其他三个概率值，略去计算过程，将计算结果列于下表

Y \ X	-1	1
-1	0.475	0.025
1	0.475	0.025

(3) 从(1)中联合分布表可以得到关于 X 与 Y 的边缘概率分布分别为

$X\sim\begin{bmatrix}-1&1\\0.5&0.5\end{bmatrix}$，$Y\sim\begin{bmatrix}-1&1\\0.95&0.05\end{bmatrix}$.

$E(X)=0$，$E(Y)=-0.9$，

$E(XY)=(-1)\times(-1)\times0.475+(-1)\times1\times0.025+1\times(-1)\times0.475+1\times1\times0.025$
$=0$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

由于 $cov(X,Y)=0$，因此我们不必计算 $D(X)$ 与 $D(Y)$，直接得出 $\rho_{XY}=0$.

【每日一题】9 月 11 日

11、设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，其分布参数 $\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$，$\rho=$

$\sqrt{3}/2$. 求证：
(1) 关于 X 的边缘分布是正态分布；
(2) 在 $X=x$ 条件下，关于 Y 的条件分布也是正态分布.

【解】
(1) 依题意，(X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)},$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2\left(x^2-\sqrt{3}xy+y^2\right)}\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{-2\times\frac{1}{4}}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-\frac{x^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

计算结果表明 $f_X(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率密度，即 $X\sim N(0,1)$.

(2) $f_{Y|X}(\,y\mid x\,)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)}\cdot\sqrt{2\pi}e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$.

这一结果恰是正态分布 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x,\frac{1}{4}\right)$ 的概率密度，因此说明在 $X=x$ 条件下， Y 的条件分布

为正态分布 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x,\frac{1}{4}\right)$.

【每日一题】9 月 12 日
12、设随机变量 X_1 与 X_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+Y_1x+Y_2=0$ 的两个根，并且 X_1 与 X_2 相互独立都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 分布.

(1) 求随机变量 Y_1 与 Y_2 的联合分布；
(2) 求 DY_1 , DY_2 , $cov(Y_1,Y_2)$;
(3) 若 $U=Y_1+Y_2$, $V=Y_1-Y_2$ ，求 DU , DV , $cov(U,V)$.

【解】
(1) 依题意，有 $Y_1=-(X_1+X_2)$, $Y_2=X_1X_2$.显然 Y_1 , Y_2 都是离散型随机变量，并且其分布分别为：

$$Y_1\sim\begin{bmatrix}-2&-1&0\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\qquad Y_2\sim\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$P\{Y_1=-2,Y_2=0\}=P\{X_1+X_2=2,X_1X_2=0\}=0$$

根据边缘分布与联合分布的关系可以逐一求出 p_{ij} ，列表如下：

Y_1 \ Y_2	0	1	$P\{Y_1=i\}$
-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P\{Y_2=j\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

(2) $EY_1=-1\,,EY_1^2=\frac{3}{2},DY_1=\frac{1}{2}$；

$EY_2=\dfrac{1}{4}\,,DY_2=\dfrac{3}{16}\,;EY_1Y_2=-2\times1\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}\,;$

$cov(Y_1,Y_2)=EY_1Y_2-EY_1EY_2=-\dfrac{1}{4}.$

(3) 由于 $D(Y_1\pm Y_2)=DY_1\pm 2cov(Y_1,Y_2)+DY_2$,所以有

$$D(U)=D(Y_1+Y_2)=\frac{3}{16}\,,DV=\frac{19}{16},$$

$$cov(U,V)=cov(Y_1+Y_2,Y_1-Y_2)=DY_1-DY_2=\frac{5}{16}.$$

【每日一题】9 月 13 日

13、设二维随机变量 (U,V) 的联合概率密度为：

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\,,$$

求证：(1)$X=U+V$ 服从正态分布；(2)$Y=U^2+V^2$ 服从指数分布.

【解】

(1)由题设条件可知，(U,V) 服从二维正态分布，因其相关系数 $\rho=0$ ，则 U 与 V 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$. 根据独立随机变量和的卷积公式，X 的概率密度 $f_X(x)$ 为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\varphi(x-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-u)^2}{2}}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[2\left(u-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{2}\right]}du$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(u-\frac{x}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

计算得知 $X\sim N(0,2)$.

(3) 当 $y\le 0$ 时， Y 的分布函数 $F_Y(y)=0$.当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{U^2+V^2\le y\}=\iint_{u^2+v^2\le y}f(u,v)dudv$$

$$=\iint_{u^2+v^2\le y}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv\xrightarrow{\text{令 } u=r\cos\theta\,,v=r\sin\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{y}}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}dr=1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}.$$

因此 Y 的分布函数为：

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0 & , y\le 0,\end{cases}$$

即 Y 服从参数为 1/2 的指数分布.

【每日一题】9 月 14 日

14、设 A_1, A_2 是两个随机事件，随机变量 $X_i=\begin{cases}-1, \text{若 } A_i \text{ 发生},\\ 1, \text{若 } \bar{A}_i \text{ 发生},\end{cases}$ $(i=1,2)$，已知 X_1 与 X_2 不相关，则：

(A) X_1 与 X_2 不一定独立.　　(B) A_1 与 A_2 一定独立.

(C) A_1 与 A_2 不一定独立.　　(D) A_1 与 A_2 一定不独立.

【解】$EX_i=P(\bar{A}_i)-P(A_i)=1-2P(A_i), i=1,2$

$$\begin{aligned}E(X_1X_2)&=P\{X_1=-1,X_2=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}-P\{X_1=1,X_2=-1\}\\&\quad+P\{X_1=1,X_2=1\}\\&=P(A_1A_2)-P(A_1\bar{A}_2)-P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)\\&=P(A_1A_2)-[P(A_1)-P(A_1A_2)]-[P(A_2)-P(A_1A_2)]+1-P(A_1)-P(A_2)\\&\quad+P(A_1A_2)\\&=4P(A_1A_2)-2P(A_1)-2P(A_2)+1\end{aligned}$$

$$EX_1EX_2=[1-2P(A_1)][1-2P(A_2)]=4P(A_1)P(A_2)-2P(A_1)-2P(A_2)+1.$$

因 X_1 与 X_2 不相关，故 $E(X_1X_2)=EX_1EX_2$.

$\Rightarrow$ $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，即 A_1 与 A_2 相互独立，应选(B).

【每日一题】9 月 15 日

15、设随机点 (X,Y) 在单位圆内的联合密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}C[1-(x^2+y^2)], & x^2+y^2\le 1,\\ 0 & , \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 C；

(2) 判断 X, Y 的独立性与相关性；

(3) 设随机点的极坐标为 (R,θ)，求 (R,θ) 的联合密度，并判断 R,θ 的独立性.

【解】

(1)

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} C[1-(x^2+y^2)]\,dxdy \xRightarrow{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta} C\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr$$

$$=C\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}C=1$$

故 $C=\frac{2}{\pi}$.

(2)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}[(1-x^2)-y^2]dy = \frac{4}{\pi}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{8}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, |x| \le 1,
\end{aligned}
$$

即 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ 同理$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}, & |y| \le 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$

由于 $f_X(x) \cdot f_Y(y) \ne f(x,y)$，所以 X,Y 不独立

又因为

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{8}{3}\pi\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = 0\,,(\text{对称区间奇函数})$$

$$EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{2}{\pi}xy(1-x^2-y^2)dxdy = 0\,,$$

所以 $cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = 0$. 由此可知 X,Y 既不独立，也不相关.

(3)直角坐标到极坐标的变换 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$. 其雅克比行列式 $J = r$，故 (R,θ) 的联合密度为：

$$f(r,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}r(1-r^2), & 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又

$$f_R(r) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi}r(1-r^2)d\theta, & 0 \le r \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 4r(1-r^2), & 0 \le r \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{\pi}r(1-r^2)dr = \frac{1}{2\pi}, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $f(r,\theta) = f_R(r) \cdot f_\theta(\theta)$，故随机变量 R,θ 相互独立.

【每日一题】9 月 16 日

16、一条生产线生产的产品正品率为 $p(0 < p < 1)$，连续检查 5 件，X 表示在查到次品之前已经取到的正品数，求 X 的数学期望.（在两次检查之间各件产品的质量互不影响）

【解】求离散型随机变量 X 的数学期望需要先确定 X 的概率分布，易见 X 只取 $0,1,\cdots,5$ 共 6 个可能值. 当 $n < 5$ 时，事件 $\{X = n\}$ 表示抽查 $n+1$ 件产品，前 n 件为正品，第 $n+1$ 件为次品；当 $n = 5$ 时，$\{X = 5\}$ 表示抽查的 5 件均为正品. X 的概率分布为：

$$P\{X = n\} = \begin{cases} qp^n, & n = 0,1,\cdots,4, \\ p^5, & n = 5 \end{cases}, \qquad q = 1-p$$

于是

$$EX=\sum_{n=0}^{5}nP\{X=n\}=\sum_{n=1}^{4}nqp^n+5p^5=pq\sum_{n=1}^{4}np^{n-1}+5p^5=pq\left(\sum_{n=1}^{4}p^n\right)'+5p^5$$
$$=pq\frac{1-5p^4+4p^5}{(1-p)^2}+5p^5=\frac{p}{1-p}(1-p^5).$$

【每日一题】9 月 17 日

17、某商店销售某种季节性商品，每售出一件获利 5(百元)，季度末未售出的商品每件亏损 1(百元), 以 X 表示该季节此种商品的需求量，已知 X 等可能的取值[1, 100]中的任一正整数，问商店应提前储存多少件该种商品，才能使获利的期望值达到最大.

【解】设提前储存 n 件商品，则商店获利为 $Y=g(X;n)$ ，依题意 n 应使 EY 达到最大，为此先写出利润函数 $Y=g(X;n)$ ，由题设知，当商店有 n 件产品时，该季节商店获利为：

$$Y_n=g(X,n)=\begin{cases}5n\quad, & n\le X\le 500\\ 5X-(n-X), & 1\le X<n\end{cases}=\begin{cases}5n\ , & n\le X\le 100\\ 6X-n\ , & 1\le X\le n\end{cases}$$

（单位：百元）, 其中需求量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{100}(k=1,2,\cdots,100)$ ，故

$$EY_n=Eg(X,n)=\sum_{k=1}^{100}g(k,n)P\{X=k\}$$
$$=\frac{1}{100}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(6k-n)+\sum_{k=n}^{100}5n\right]$$
$$=\frac{1}{100}\left[6\cdot\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}-n(n-1)+5n(100-n+1)\right]$$
$$=\frac{1}{100}(503n-3n^2),$$

n 应使 EY_n 达到最大. 为求 n ，我们考虑 $h(x)=503x-3x^2$ ，令 $h'(x)=503-6x=0$ ，解得 $x=\frac{503}{6}=83.8$ ，故 $n=84$ ，即商店最佳进货量为 84 件.

【每日一题】9 月 18 日

18、设随机变量 X,Y 分别服从正态分布 $N(1,1)$ 与 $N(0,1)$ ，$E(XY)=-0.1$ ，则根据切比雪夫不等式 $P\{-4<X+2Y<6\}\ge$ ________.

【解】

$$E(X+2Y)=EX+2EY=1\,,$$
$$cov(X,Y)=EXY-EXEY=-0.1\,,D(X+2Y)=DX+4cov(X,Y)+4DY=4.6$$
$$P\{-4<X+2Y<6\}=P\{|X+2Y-1|<5\}\ge 1-\frac{D(X+2Y)}{5^2}=0.816\,.$$

【每日一题】9 月 19 日

19、随机变量序列 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且满足大数定律，则 X_i 的分布可以是 ( ).

(A) $P\{X_i=m\}=\frac{c}{m^3}$, $m=1,2,\cdots$. (B) X_i 服从参数为 $\frac{1}{i}$ 的指数分布

(C) X_i 服从参数为 i 的泊松分布 (D) X_i 的概率密度 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

【解】相互独立的随机变量 $X_1,X_2,\cdots$, 如果 $X_1,X_2,\cdots$ 同分布，只要 EX_i 存在，则 $X_1,X_2,\cdots$ 服从辛钦大数定理；若 $X_1,X_2,\cdots$ 不同分布，但 X_i 的期望、方差应都存在，且方差要一致有界，则 $X_1,X_2,\cdots$ 满足切比雪夫大数定律.据此分析：

在(A)中，X_i 同分布，$EX_i=\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\frac{c}{m^3}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c}{m^2}$,由于级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ 是收敛的，因此 EX_i 存在，$X_1,X_2,\cdots$ 满足辛钦大数定律，应选(A).

进一步分析，在(B)中，$DX_i=\left(\frac{1}{i}\right)^{-2}=i^2$；在(C)中，$DX_i=i$，它们均不能对 i 一致有界，因此不满足切比雪夫大数定律.

在(D)中，由于 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=+\infty$，因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx=+\infty$.故 EX_i 不存在，所以不能满足辛钦大数定律.

【每日一题】9 月 20 日

20、设统计量 Y 服从 F 分布 $F(m,n)$，$F_\alpha(m,n)$ 满足 $P\{Y\geq F_\alpha(m,n)\}=\alpha$，则 $F_{1-\alpha}(m,n)$ 等于( ).

(A) $1-F_\alpha(m,n)$. (B) $1-F_\alpha(n,m)$. (C) $\frac{1}{F_\alpha(m,n)}$. (D) $\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

【解】若 $Y\sim F(m,n)$，则 $\frac{1}{Y}\sim F(n,m)$，依题意

$$P\{Y\geq F_{1-\alpha}(m,n)\}=1-\alpha,\ P\{Y\leq F_{1-\alpha}(m,n)\}=\alpha,$$
$$P\left\{\frac{1}{Y}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\right\}=\alpha.$$

但是 $P\left\{\frac{1}{Y}\geq F_\alpha(n,m)\right\}=\alpha$，所以 $F_\alpha(n,m)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$，$F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$，应选(D).

【每日一题】9 月 21 日

21、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\theta>0.$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.求 θ 的矩估计量与极大似然估计量.

【解】总体 X 的概率密度中只有一个未知参数，在求 θ 的矩估计量时我们首先考虑 X 的期望，但是 $f(x)$ 是一个偶函数，其数学期望为 0，无法得到 θ 与 EX 的关系进行 θ 的矩估计，为此我们应该计算 X 的二阶原点矩 EX^2：

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx\,,$$

注意到被积函数中$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0 & , \ x\le 0\end{cases}$是参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，因此积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

可以看作是参数为$\frac{1}{\theta}$的指数分布的随机变量 Y 的二阶原点矩，其值为

$$EY^2=DY+(EY)^2=\theta^2+\theta^2=2\theta^2\,.$$

又 $$EX^2=2\theta^2\,,\ \theta=\sqrt{\tfrac{1}{2}EX^2}\,,$$

于是 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}=\frac{1}{2^n\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\,,$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,,$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0\,,$$

解上述方程得 θ 的最大似然估计量为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

【每日一题】9 月 22 日

22、设某地区在一个月内发生重大交通事故的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $(\lambda>0)$，现有九个月的样本观测值：

$$7\,,0\,,3\,,2\,,0\,,5\,,4\,,2\,,4\,,$$

求一个月内无重大交通事故的概率 p 的最大似然估计值.

【解】对于样本观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其似然函数为：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i!}\right)\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\mathrm{e}^{-n\lambda}\,,$$

$$\ln L(\lambda)=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda,\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n,$$

解似然方程$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0\ \Rightarrow\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{X}$.

因此λ的最大似然估计值为$\hat{\lambda}=\bar{X}$, 即$\hat{\lambda}=\frac{1}{9}(7+0+3+2+0+5+4+2+4)=3$，由于$p=P\{X=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$，根据最大似然估计的不变性，$p$的最大似然估计值为$\hat{p}=\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}}=\mathrm{e}^{-3}\approx 0.05$.

【每日一题】9 月 23 日

23、设总体方差ξ的方差$\sigma^2=4$，均值为a，$\bar{\xi}$为样本容量n为 100 的样本均值，试分别用切比雪夫不等式与中心极限定理求出一个最小界限，使得$\bar{\xi}-a$落在这个界限之间的概率为 0.90.

【解】因为$\bar{\xi}-a$的均值为 0，故可设所求界限为$(-x,x)$.由切比雪夫不等式，得

$$0.9=P\{|\bar{\xi}-a|<x\}=1-P\{|\bar{\xi}-a|\geq x\}\geq 1-\frac{D(\bar{\xi})}{x^2}=1-\frac{0.04}{x^2}.$$

所以

$$\frac{0.04}{x^2}\geq 0.1,x\leq\sqrt{\frac{0.04}{0.1}}=0.63.$$

从而所求界限为$(-0.63,0.63)$.

因为$\frac{\bar{\xi}-a}{\sqrt{D(\xi)}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以

$$0.9=P\{|\bar{\xi}-a|<x\}=P\left\{\left|\frac{\bar{\xi}-a}{\sqrt{D(\xi)}/\sqrt{n}}\right|<\frac{10}{2}x\right\}\approx 2\Phi(5x)-1.$$

所以$\Phi(5x)=0.95$，查表得$5x=1.64$，所以$x=0.33$，从而所求界限为$(-0.33,\ 0.33)$.

【每日一题】9 月 24 日

24、设$\xi_1,\cdots,\xi_n$为总体$\xi\sim N(a,4)$的样本，$\bar{\xi}$为样本均值，试问样本容量n至少为多大才能使：

(1) $E\left[|\bar{\xi}-a|^2\right]\leq 0.1$,　　(2) $E\left[|\bar{\xi}-a|\right]\leq 0.1$,　　(3) $P\{|\bar{\xi}-a|\leq 0.1\}\geq 0.95$.

【解】

(1) 因为$\bar{\xi}\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，所以

$$0.1\geq E\left(|\bar{\xi}-a|^2\right)=D(\bar{\xi})=\frac{4}{n},$$

所以 $n \geq 40$.

(2) 因为 $\bar{\xi} - a \sim N\left(0, \frac{4}{n}\right)$ ，所以

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a)}{2} \sim N(0,1),$$

$$0.1 \geq E\left|\bar{\xi} - a\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{nx^2}{8}} dx \quad \left[令 \frac{\sqrt{n}}{2} x = t\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{t}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{4}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}.$$

所以 $n \geq 255$.

(3) $P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| \leq 0.1\right\} = P\left\{\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{2}\right| \leq 0.05\sqrt{n}\right\} = 2\Phi\left(0.05\sqrt{n}\right) - 1 \geq 0.95$ ，

所以 $0.05\sqrt{n} \geq 1.96$ ，所以 $n \geq 1537$.

【每日一题】9 月 25 日

25、设总体 ξ 服从几何分布，即 $P\{\xi = k\} = pq^{k-1}, k = 1,2,\cdots,$ 其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$ ，求 $M = \max\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}, K = \min\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 的概率分布.

【解】

$$\begin{aligned}
P\{M = m\} &= P\{M \leq m\} - P\{M \leq m - 1\} \\
&= [P\{\xi \leq m\}]^n - [P\{\xi \leq m - 1\}]^n \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m} pq^{i-1}\right]^n - \left[\sum_{i=1}^{m-1} pq^{i-1}\right]^n \\
&= [1 - q^m]^n - [1 - q^{m-1}]^n, m = 1, 2, \cdots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{K = k\} &= P\{K \geq k\} - P\{K \geq k + 1\} = [P\{\xi \geq k\}]^n - [P\{\xi \geq k + 1\}]^n \\
&= q^{n(k-1)} - q^{nk} = (1 - q^n)q^{n(k-1)}, k = 1, 2, 3, \cdots.
\end{aligned}$$

【每日一题】9 月 26 日

26、设总体 $\xi \sim N(20, 3)$ ，现从中抽取容量分别为 10 与 15 的两个独立样本，试问这两个样本均值之差的绝对值大于 0.3 的概率是多少？

【解】因为 $\xi \sim N(20, 3)$ ，所以

$$\bar{\xi}_{10} \sim N(20, 0.3) \ , \ \bar{\xi}_{15} \sim N\left(20, \frac{1}{5}\right),$$

从而

$$\zeta \triangleq \bar{\xi}_{10} - \bar{\xi}_{15} \sim N(0, 0.5),$$

于是

$$\begin{aligned}
P\{|\zeta| > 0.3\} &= 1 - P\{|\zeta| \leq 0.3\} = 1 - P\left\{\sqrt{2}|\zeta| \leq \sqrt{2} \times 0.3\right\} \\
&= 1 - \left[2\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right) - 1\right] = 2 - 2\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= 2 - 2\Phi(0.424) = 0.673\,.$$

【每日一题】9 月 27 日

27、设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为总体 $\xi \sim N(a,\sigma^2)$ 的样本.$E(\xi) = a\,, D(\xi) = \sigma^2$，定义 $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - a|$.

试证：$E(d) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\,, D(d) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

【解】

$$E(d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E|\xi_i - a| = E|\xi - a|$$

$$= \sigma E|U| \quad \left(\text{其中} U \sim N(0,1)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\,.$$

$$D(d) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(|\xi_i - a|) = \frac{1}{n} D(|\xi - a|) = \frac{\sigma^2}{n} D\left(\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right|\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left[E\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right|^2 - \left(E\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right|\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\sigma^2}{n}\,.$$

【每日一题】9 月 28 日

28、设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m}$ 为总体 $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本.

(1)确定 a 和 b，使 $a(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2 + b(\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i)^2$ 服从 χ^2 分布，

(2)确定 c，使 $c\sum_{i=1}^{n}\xi_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2}$ 服从 t 分布，

(3)确定 d，使$d\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \Big/ \sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2$ 服从 F 分布.

【解】

(1)因为 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(0, n\sigma^2)$，所以 $\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，从而 $\frac{1}{n\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2 \sim \chi^2(1)$.同理 $\frac{1}{m\sigma^2}(\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i)^2 \sim \chi^2(1)$.

又因 $(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2$ 与 $(\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i)^2$ 独立，故

$$\frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2+\frac{1}{m\sigma^2}\left(\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i\right)^2\sim\chi^2(2)\,,$$

从而

$$a=\frac{1}{n\sigma^2}\,,b=\frac{1}{m\sigma^2}\,.$$

(2)因为 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{\sigma\sqrt{n}}\sim N(0\,,1)\,,\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(m)$，且 $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 与 $\sum_{i=n+1}^{n+m}\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right)^2$ 独立，所以由 t 分布知，

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Bigg/\sqrt{\frac{1}{m\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2}=\sqrt{\frac{m}{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Bigg/\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2}\sim t(m)\,.$$

故 $c=\sqrt{\frac{m}{n}}$.

(3) 因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sim\chi^2(n)\,,\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2\sim\chi^2(m)$，且 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ 与 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2$ 独立，由 F 分布定义知，

$$\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Bigg/\frac{1}{m\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2=\frac{m}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Bigg/\sum_{i=n+1}^{n+m}\xi_i^2\sim F(n,m)\,.$$

故

$$d=\frac{m}{n}.$$

【每日一题】9 月 29 日

29、设总体 ξ 的数学期望为 a，$\hat{a}_1$ 与 $\hat{a}_2$ 分别为 a 的两个无偏估计量，它们的方差分别为 σ_1^2 、σ_2^2，相关系数为 ρ，试确定常数 $c_1>0\,,c_2>0\,,c_1+c_2=1$，使得 $c_1\hat{a}_1+c_2\hat{a}_2$ 有最小的方差.

【解】设 $\hat{a}=c_1\hat{a}_1+c_2\hat{a}_2$，则

$$D(\hat{a})=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+2c_1c_2\rho\sigma_1\sigma_2\,.$$

由拉格朗日乘子法，令

$$F(c_1,c_2)=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+2c_1c_2\rho\sigma_1\sigma_2+\lambda(c_1+c_2-1)\,,$$

解方程组

$$\begin{cases}2c_1\sigma_1^2+2c_2\rho\sigma_1\sigma_2+\lambda=0\,,\\2c_2\sigma_1^2+2c_1\rho\sigma_1\sigma_2+\lambda=0\,,\\c_1+c_2=1,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\ , \\ c_2 = \dfrac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\ . \end{cases}$$

【每日一题】9 月 30 日

30、设总体 $\xi \sim U(0,\theta), 0 < \theta < +\infty, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 为 ξ 的样本.试证 $\frac{4}{3}\xi_{(3)}$ 与 $4\xi_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量，问哪个比较有效？

【解】由于

$$f_{\xi_{(3)}}(x) = \frac{3}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2, 0 < x < \theta,$$

$$f_{\xi_{(1)}}(x) = \frac{3}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2, 0 < x < \theta,$$

所以

$$E\left(\frac{4}{3}\xi_{(3)}\right) = \frac{4}{3}\int_0^\theta x \cdot \frac{3}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 dx = \theta,$$

$$E\left(4\xi_{(1)}\right) = 4\int_0^\theta x \cdot \frac{3}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 dx = \theta.$$

即 $\frac{4}{3}\xi_{(3)}$ 与 $4\xi_{(1)}$ 都是 θ 的无偏估计量.

因为

$$E\left(\frac{4}{3}\xi_{(3)}\right)^2 = \frac{16}{9}E\left(\xi_{(3)}^2\right) = \frac{16}{9}\int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3}{\theta}\frac{x^2}{\theta^2}dx = \frac{16}{15}\theta^2,$$

$$E\left(4\xi_{(1)}\right)^2 = 16\int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 dx = \frac{8\theta^2}{5},$$

所以

$$D\left(\frac{4}{3}\xi_{(3)}\right) = \frac{16\theta^2}{15} - \theta^2 = \frac{\theta^2}{15}, D\left(4\xi_{(1)}\right) = \frac{8\theta^2}{5} - \theta^2 = \frac{3\theta^2}{5}.$$

故 $\frac{4}{3}\xi_{(3)}$ 比 $4\xi_{(1)}$ 更有效.

【每日一题】10 月 1 日

31、一个袋子中有 N 个均匀的硬币，其中有 θ 个普通的，其余 $N-\theta$ 个两面都是正面.从袋中随机摸出一个硬币，把它连掷两次，记下结果，但不查看它属于那种硬币，又把它放回袋中.如此重复 n 次.如果掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别记为 n_0, n_1, n_2，求 θ 的矩估计量 θ_1 与极大似然估计量 θ_2.(提示：$n = n_0 + n_1 + n_2, \bar{\xi} = \frac{n_1 + 2n_2}{n}$.)

【解】设 ξ 为从袋中任摸一个硬币重复掷两次出现正面的次数，则 ξ 能取的值为 0、1、2. 再设

$$A = \text{“摸出的是普通硬币”}.$$

由全概率公式，有

$$P\{\xi=0\}=P(A)P\{\xi=0\mid A\}+P(\bar{A})P\{\xi=0\mid \bar{A}\}$$
$$=\frac{\theta}{N}C_2^0(0.5)^0(0.5)^{2-0}+0=\frac{\theta}{4N},$$
$$P\{\xi=1\}=P(A)P\{\xi=1\mid A\}+P(\bar{A})P\{\xi=1\mid \bar{A}\}$$
$$=\frac{\theta}{N}C_2^1(0.5)^1(0.5)^{2-1}+0=\frac{\theta}{2N},$$
$$P\{\xi=2\}=P(A)P\{\xi=2\mid A\}+P(\bar{A})P\{\xi=2\mid \bar{A}\}$$
$$=\frac{\theta}{N}C_2^2(0.5)^2(0.5)^{2-2}+\frac{N-\theta}{N}\cdot 1=\frac{4N-3\theta}{4N}.$$

所以

$$E(\xi)=0\times\left(\frac{\theta}{4N}\right)+1\times\left(\frac{\theta}{2N}\right)+2\times\left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)=\frac{2N-\theta}{N}.$$

由矩法估计原理，得

$$\frac{2N-\theta}{N}=\bar{\xi},$$

其中

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

而 ξ_i 为第 i 次摸出的硬币连掷两次正面出现的次数.故

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}(0\times n_0+1\times n_1+2\times n_2)=\frac{n_1+2n_2}{n},$$

从而得

$$\frac{2N-\theta}{N}=\frac{n_1+2n_2}{n}.$$

解出 θ ，即得 θ 的矩法估计量

$$\hat{\theta}_1=\frac{N}{n}(2n_0+n_1).$$

由于在试验之前，n_0, n_1, n_2 均为随机变量，不妨设它们为 N_0, N_1, N_2 ，再由上述，θ 的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta}{4N}\right)^{\delta(\xi_i)}\cdot\left(\frac{\theta}{2N}\right)^{\delta(\xi_i-1)}\cdot\left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{\delta(\xi_i-2)}$$
$$=\left(\frac{\theta}{4N}\right)^{N_0}\left(\frac{\theta}{2N}\right)^{N_1}\left(\frac{4N-3\theta}{4N}\right)^{N_2},$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为 ξ 的样本.而

$$\delta(x)=\begin{cases}1, x=0,\\ 0, x\neq 0,\end{cases}$$

从而似然方程为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=\frac{N_0}{\theta}+\frac{N_1}{\theta}-\frac{3N_2}{4N-3\theta}=0\,.$$

解之，即得 θ 的极大似然估计量

$$\hat{\theta}_2=\frac{4N}{3n}(N_0+N_1)\,.$$

带入本次的样本数据，我们可以得到极大似然估计量为:

$$\hat{\theta}_2=\frac{4N}{3n}(n_0+n_1)\,.$$

【每日一题】10 月 2 日

32、设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{10}$ 为总体 $\xi\sim B(1,p)$ 的样本.如果对未知参数 p 的假设 $H_0:p=0.2\,,H_1:p=0.5\,,H_0$ 的拒绝域为

$$\mathcal{X}_0=\left\{(x_1,\cdots,x_{10}):\sum_{i=1}^{10}x_i\le 1\text{或}\sum_{i=1}^{10}x_i\ge 5\right\},$$

求犯两类错误的概率 α 与 β .

【解】因为当 H_0 成立时，$\sum_{i=1}^{10}\xi_i\sim B(10,0.2)$ ，所以

$$\alpha=P_0\left\{\sum_{i=1}^{10}\xi_i\le 1\text{或}\sum_{i=1}^{10}\xi_i\ge 5\right\}=1-P_0\left\{2\le\sum_{i=1}^{10}\xi_i\le 4\right\}$$

$$=1-\sum_{k=2}^{4}C_{10}^{k}0.2^k\times 0.8^{10-k}=1-0.5914=0.4086\,.$$

当 H_1 成立时，$\sum_{i=1}^{10}\xi_i\sim B(10,0.5)$ ，所以

$$\beta=P\{\,\bar{\mathcal{X}}_0\mid H_1\text{真}\}=P_1\left\{2\le\sum_{i=1}^{10}\xi_i\le 4\right\}=\sum_{k=2}^{4}C_{10}^{k}0.5^k\times 0.5^{10-k}=0.3662\,.$$

【每日一题】10 月 3 日

33、设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_9$ 为总体 $\xi\sim N(a,1)$ 的样本，对假设 H_0： $a=1\,,H_1:a=2\,,H_0$ 的拒绝域为 $\mathcal{X}_0=\{\bar{\xi}>1.5\}$.

(1)求犯两类错误的概率 α 与 β .

(2)如果 $(x_1,x_2,\cdots,x_9)=(1.8,1.7,1.4,1.5,1.9,2.0,1.7,1.7,1.6)$ ，问 H_0 是否成立?

【解】

(1) 因为当 H_0 成立时，$3(\bar{\xi}-1)\sim N(0,1)$ ，所以

$$\alpha=P_0\{\bar{\xi}>1.5\}=P_0\{3(\bar{\xi}-1)>1.5\}=1-\Phi(1.5)=0.0668\,.$$

因为当 H_1 成立时，$3(\bar{\xi}-2)\sim N(0,1)$ ，所以

$$\beta=P\{\,\bar{\mathcal{X}}_0\mid H_1\text{真}\}=P_1\{\bar{\xi}\le 1.5\}=P_1\{3(\bar{\xi}-2)\le -1.5\}$$
$$=\Phi(-1.5)=1-\Phi(1.5)=0.0668\,.$$

(2) 因为 $\bar{x}=1.7>1.5$ ，所以拒绝 H_0 . 即认为 H_0 不成立.

【每日一题】10 月 4 日

34、设有 n 个球，每个球都等可能地被放到 N 个不同盒子中的任一个，每个盒子所放球数不限. 试求

(1) 指定的 $n(n\leq N)$ 个盒子中各有一球的概率 p_1 ；

(2) 恰好有 $n(n\leq N)$ 个盒子中各有一球的概率 p_2 .

【解】因为每个球都可放到 N 个盒子中的任一个，所以 n 个球放的方式共有 N^n 种，它们是等可能的.

(1) 因为各有一球的 n 个盒子已经指定，余下的没有球的 $N-n$ 个盒子也同时被指定，所以只要考虑 n 个球在这指定的 n 个盒子中各放 1 个的放法数. 设想第 1 个球有 n 种放法，第 2 个球只有 $n-1$ 种放法，…… ，第 n 个球只有 1 种放法，所以根据乘法原理，其可能总数为 $n!$ ，于是其概率为

$$p_1=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 本小题与(1)的差别在于：此 n 个盒子可以在 N 个盒子中任意选取. 此时可分两步做：第一步从 N 个盒子中任取 n 个盒子准备放球，共有 $\binom{N}{n}$ 种取法；第二步将 n 个球放入选中的 n 个盒子中，每个盒子各放 1 个球，共有 $n!$ 种放法. 所以根据乘法原理共有

$$\binom{N}{n}\cdot n!=P_N^n=N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$$

种放法. 其实这个放法数可以更直接地考虑成：第 1 个球可放在 N 个盒子中的任一个，第二个球只可放在余下的 $N-1$ 个盒子中的任一个，…… ，第 n 个球只可放在余下的 $N-n+1$ 个盒子中的任一个，由乘法原理即可得以上放法数. 因此所求概率为

$$p_2=\frac{P_N^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

【每日一题】10 月 5 日

35、口袋中有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球，从中有放回地任取 m 次，求取出的 m 个球的最大号码为 k 的概率.

【解】记事件 A_k 为“取出的 m 个球的最大号码为 k ”. 如果直接考虑事件 A_k ，则比较复杂，因为“最大号码为 k ”可以包括取到 1 次 k 、取到 2 次 k 、…… 、取到 m 次 k .

为此我们记事件 B_i 为“取出的 m 个球的最大号码小于等于 $i(i=1,2,\cdots,n)$ ”则 B_i 发生只需每次从 $1,2,\cdots,i$ 中取球即可，所以由古典概率知

$$P(B_i)=\frac{i^m}{n^m},i=1,2,\cdots,n.$$

又因为 $A_k=B_k-B_{k-1}$ ，且 $B_{k-1}\subset B_k$ ，则

$$P(A_k)=P(B_k-B_{k-1})=P(B_k)-P(B_{k-1})$$

$$= \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}\ , k = 1,2,\cdots,n\,.$$

【每日一题】10 月 6 日

36、某地区居民的肝癌发病率为 0.0004，现用甲胎蛋白进行普查.医学研究表明，化验结果是可能存有错误的.已知患有肝癌的人其化验结果 99%呈阳性（有病），而没患肝癌的人其化验结果 99.9%呈阴性（无病）.现某人的检查结果呈阳性，问他真的患肝癌的概率是多少？

【解】记 B 为事件“被检查者患有肝癌”，A 为事件“检查结果呈阳性”.由题设知

$$P(B) = 0.0004\,, P(\bar{B}) = 0.9996\,,$$

$$P(A \mid B) = 0.99\,, P(A \mid \bar{B}) = 0.001\,.$$

我们现在的目的是求 $P(B \mid A)$.由贝叶斯公式得

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})}$$

$$= \frac{0.0004 \times 0.99}{0.0004 \times 0.99 + 0.9996 \times 0.001} = 0.284\,.$$

【每日一题】10 月 7 日

37、某种型号电子元件的寿命 X (以小时记)具有以下的概率密度函数

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}\ , & x > 1000\,, \\ 0\ , & \text{其他}. \end{cases}$$

现有一大批此种元件（设各元件工作相互独立），问：

(1) 任取 1 只，其寿命大于 1500 小时的概率是多少？

(2) 任取 4 只，4 只寿命都大于 1500 小时的概率是多少？

(3) 任取 4 只，4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

(4) 若已知一只元件的寿命大于 1500 小时，则该元件的寿命大于 2000 小时的概率是多少？

【解】先计算 X 的分布函数，

$$F(x) = \int_{1000}^{x} p(t)dt = -\frac{1000}{t}\bigg|_{1000}^{x} = 1 - \frac{1000}{x}\ , x > 1000.$$

(1) $P(X > 1500) = 1 - F(1500) = 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

(2) 各元件工作独立，因此所求概率为

$$P\big(4\text{ 只元件寿命都大于 }1500\big) = [P(X > 1500)]^4 = [1 - F(1500)]^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}.$$

(3) 所求概率为

$$P\big(4\text{ 只中至少有 1 只寿命大于 }1500\big)$$

$$= 1 - P\big(4\text{ 只元件寿命都小于等于 }1500\big)$$

$$= 1 - [F(1500)]^4$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{81}.$$

(4) 这是求条件概率 $P(X > 2000 \mid X > 1500)$，记

$$A = \{X > 1500\}, B = \{X > 2000\}.$$

因为 $P(A) = 2/3$ ，$P(B) = 1/2$ ，且 $B \subset A$，所以

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{4}.$$

【每日一题】10 月 8 日

38、为保证设备正常工作，需要配备一些维修工.如果各台设备发生故障的概率是相互独立的，且每台设备发生故障的概率都是 0.01.试在一下各种情况下，求设备发生故障而不能及时修理的概率.

(1)1 名维修工负责 20 台设备；

(2)3 名维修工负责 90 台设备；

(3)10 名维修工负责 500 台设备.

【解】

(1) 以 X_1 表示 20 台设备同时发生故障的台数，则 $X_1 \sim b(20,0.01)$.用参数为 $\lambda = np = 20 \times 0.01 = 0.2$ 的泊松分布作近似计算，得所求概率为

$$P(X_1 > 3) \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.2^k}{k!} \mathrm{e}^{-0.2} = 1 - 0.982 = 0.018\,.$$

(2) 以 X_2 表示 90 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_2 \sim b(90,0.01)$.用参数为 $\lambda = np = 90 \times 0.01 = 0.9$ 的泊松分布作近似计算，得所求概率为

$$P(X_2 > 3) \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.9^k}{k!} \mathrm{e}^{-0.9} = 1 - 0.987 = 0.013\,.$$

注意，此种情况下，不但所求概率比(1)中有所降低，而且 3 名维修工负责 90 台设备相当于每个维修工负责 30 台设备，工作效率是(1)中的 1.5 倍.

(3) 以 X_3 表示 500 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_3 \sim b(500,0.01)$.用参数为 $\lambda = np = 500 \times 0.01 = 5$ 的泊松分布作近似计算，得所求概率为

$$P(X_3 > 10) \approx 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} \mathrm{e}^{-5} = 1 - 0.986 = 0.014\,.$$

注意，此种情况下所求概率与(2)中基本一样，而 10 名维修工负责 500 台设备相当于每个维修工负责 50 台设备，工作效率是(2)中的 1.67 倍，是(1)中的 2.5 倍.

【每日一题】10 月 9 日

39、在长为 a 的线段上任取两个点 X 与 Y 相互独立，求此两点间的平均长度.

【解】因为 X 和 Y 都服从$(0,a)$ 上的均匀分布，且 X 与 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0<x<a\,,0<y<a\,,\\ 0, & \text{其他}\,.\end{cases}$$

从而可以得到两点间的平均长度为

$$\begin{aligned}E(|X-Y|)&=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}dxdy\\&=\frac{1}{a^2}\left\{\int_0^a\int_0^x(x-y)\,dydx+\int_0^a\int_x^a(y-x)\,dydx\right\}\\&=\frac{1}{a^2}\left\{\int_0^a\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)dx\right\}=\frac{a}{3}.\end{aligned}$$

【每日一题】10 月 10 日

40、设一袋中装有 m 个颜色各不相同的球，每次从中任取一个，有放回地摸取 n 次，以 X 表示在第 n 次摸球中摸到球的不同颜色的数目，求 $E(X)$.

【解】直接写出 X 的分布列较为困难，其原因在于：若第 i 种颜色的球被取到过，则此种颜色的球又可被去到过一次、二次…… n 次，情况较多，而其对立事件“第 i 种颜色的球没被取到过”的概率容易写出为

$$P\left(\text{第}i\text{种颜色的球在第}n\text{次摸球中一次也没被摸到}\right)=\left(1-\frac{1}{m}\right)^n.$$

为此令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{种颜色的球在第}n\text{次摸球中至少被摸到一次,}\\ 0, & \text{第}i\text{种颜色的球在第}n\text{次摸球中一次也没被摸到.}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m.$$

这些 X_i 相当于是计数器，分别记录下第 i 种颜色的球是否被取到过，而 X 是取到过的不同颜色总数，所以 $X=\sum_{i=1}^m X_i$.由

$$P(X_i=0)=\left(1-\frac{1}{m}\right)^n,$$

可得

$$E(X_i)=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n,$$

所以

$$E(X)=mE(X_i)=m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right].$$

【每日一题】10 月 11 日

41、(投资组合风险)设有一笔资金，总量记为 1(可以是 1 万元，也可以是 100 万元等)，如今要投资甲、乙两种证券. 若将资金 x_1 投资于甲证券，将余下的资金 $1-x_1=x_2$ 投资于

乙证券，于是 (x_1, x_2) 就形成了一个投资组合. 记 X 为投资甲证券的收益率，Y 为投资乙证券的收益率，它们都是随机变量. 如果已知 X 与 Y 的均值(代表平均收益)分别为 μ_1 和 μ_2，方差(代表风险)分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，X 和 Y 间相关系数为 ρ. 试求该投资组合的平均收益与风险(方差)，并求使投资组合风险最小的 x_1 是多少？

【解】因为组合收益为

$$Z = x_1 X + x_2 Y = x_1 X + (1 - x_1) Y,$$

所以该组合的平均收益为

$$E(Z) = x_1 E(X) + (1 - x_1) E(Y) = x_1 \mu_1 + (1 - x_1) \mu_2.$$

而该组合风险(方差)为

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var[x_1 X + (1 - x_1) Y] \\ &= x_1^2 Var(X) + (1 - x_1)^2 Var(Y) + 2x_1(1 - x_1) Cov(X, Y) \\ &= x_1 \sigma_1^2 + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2 + 2x_1(1 - x_1) \rho \sigma_1 \sigma_2. \end{aligned}$$

求最小的组合风险，即求 $Var(Z)$ 关于 x_1 的极小点，为此令

$$\frac{d\big(Var(Z)\big)}{dx_1} = 2x_1 \sigma_1^2 - 2(1 - x_1) \sigma_2^2 + 2\rho \sigma_1 \sigma_2 - 4x_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 = 0,$$

从中解得

$$x^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2}.$$

它与 μ_1, μ_2 无关. 又因为 $Var(Z)$ 中 x_1^2 的系数为正，所以以上的 x_1^* 可使组合风险达到最小.

【每日一题】10 月 12 日

42、设二维随机变量 (X, Y) 服从 $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 上的均匀分布，试求给定 $Y = y$ 的条件下 X 的条件密度函数 $p(x \mid y)$.

【解】因为

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由此得 Y 的边际密度函数为

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

所以当$-1 < y < 1$ 时，有

$$\begin{aligned} p(x \mid y) &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1 - y^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

【每日一题】10 月 13 日

43、口袋中有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球，从中任取 1 球. 若取到 1 号球，则得 1 分，且停止摸球；若摸到 i 号球 $(i \geq 2)$，则得 i 分，且将此球放回，重新摸球. 如此下去，试求得到的平均总分数.

【解】记 X 为得到的总分数，Y 为第一次取到的球的号码. 则

$$P(Y=1)=P(Y=2)=\cdots=P(Y=n)=\frac{1}{n}.$$

又因为 $E(X \mid Y=1)=1$，而当 $i \geq 2$ 时，$E(X \mid Y=i)=i+E(X)$.所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X \mid Y=i) P(Y=i)=\frac{1}{n}[1+2+\cdots+n+(n-1)E(X)].$$

由此解得

$$E(X)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【每日一题】10 月 14 日

44、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自均匀总体 $U(0,\theta)$ 的一个样本，试对设定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 给出的 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间.

【解】我们采用枢轴量法分三步进行.

(1) 我们已知 θ 的最大似然估计为样本的最大次序统计量 $x_{(n)}$，而 $x_{(n)}/\theta$ 的密度函数为

$$p(y;\theta)=ny^{n-1}, 0<y<1,$$

它与参数 θ 无关，故可取$x_{(n)}/\theta$作为枢轴量 G .

(2) 由于$x_{(n)}/\theta$的分布函数为 $F(y)=y^n, 0<y<1$，故 $P\left(c \leq x_{(n)}/\theta \leq d\right)=d^n-c^n$，因此我们可以选择适当的 c 和 d 满足

$$d^n-c^n=1-\alpha.$$

(3) 利用不等式变形可容易地给出 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间为 $\left[x_{(n)}/d, x_{(n)}/c\right]$，该区间的平均长度为 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)E\left(x_{(n)}\right)$. 不难看出，在 $0 \leq c<d \leq 1$ 及 $d^n-c^n=1-\alpha$ 的条件下，当 $d=1, c=\sqrt[n]{\alpha}$ 时，$\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ 取最小值，这说明 $\left[x_{(n)}, x_{(n)}/\sqrt[n]{\alpha}\right]$ 是 θ 的此类区间估计中置信水平为 $1-\alpha$ 最短置信区间.

【每日一题】10 月 15 日

45、从 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

(1) $A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；

(2) $A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$；

(3) $A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

【解】记为 $A=\{三个数字中不含\ 0\}$ ，$B=\{三个数字中不含\ 5\}$.则

$$P(A)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{10},P(B)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{10},P(AB)=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{15}.$$

又因为 $A_1=AB,A_2=A\cup B,A_3=\bar{A}B$ ，所以

(1)$P(A_1)=P(AB)=\frac{7}{15}$.

(2)$P(A_2)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2\times\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{14}{15}$.

(3)$P(A_3)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{7}{30}$.

【每日一题】10 月 16 日

46、设猎人在猎物 100 米处对猎物打第一枪，命中猎物的概率为 0.5.若第一枪未命中，则猎人继续打第二枪，此时猎物与猎人已相距 150 米.若第二枪仍未命中，则猎人继续打第三枪，此时猎物与猎人已相距 200 米.若第三枪还未命中，则猎物逃脱.加入该猎人命中猎物的概率与距离成反比，试求该猎物被击中的概率.

【解】记 X 为猎人与猎物的距离，因为该猎人命中猎物的概率与距离成反比，所以有 $P(X=x)=k/x$. 又因为在 100 米处命中猎物的概率为 0.5，所以 $0.5=P(X=100)=k/100$ ，从中解得 $k=50$.若以事件 A,B,C 依次记“猎人在 100 米、150 米、200 米处击中猎物”，则 $P(A)=1/2$,$P(B)=1/3$,$P(C)=1/4$. 因为各次射击是独立的，所以

$$\begin{aligned}P(命中猎物)&=P(A)+P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\bar{B}C)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

【每日一题】10 月 17 日

47、甲、乙、丙三人进行比赛，规定每局两个人比赛，胜者与第三人比赛，依次循环，直至有一人连胜两次为止，此人即为冠军.而每次比赛双方取胜的概率都是 $1/2$ ，现假定甲、乙两人先比，试求各人得冠军的概率.

【解】记事件 A,B,C 分别为“甲、乙、丙获冠军”，事件 A_i ,B_i ,C_i 分别为“第 i 局中甲、乙、丙获胜”. 则

$$\begin{aligned}P(A)=&[P(A_1A_2)+P(A_1C_2B_3A_4A_5)+P(A_1C_2B_3A_4C_5B_6A_7A_8)+\cdots]+\\&[P(B_1C_2A_3A_4)+P(B_1C_2A_3B_4C_5A_6A_7)+\cdots]\\=&\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)\\=&\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)+\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{5}{16}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right)=\frac{5}{14}.$$

因为甲、乙两人所处地位是对称的，所以 $P(B)=P(A)=5/14$.
由此又可得 $P(C)=1-P(A)-P(B)=4/14=2/7$.

【每日一题】10 月 18 日
48、设圆的直径服从区间 (0,1) 上的均匀分布，求圆的面积的密度函数.

【解】设圆的直径为 X ，则圆的面积$Y=\pi X^2/4$ ，而 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因为 $y=g(x)=\pi x^2/4$ 在区间 (0,1) 上为严格单调增函数，其反函数为 $x=h(y)=\sqrt{4y/\pi}$ ，且 $h'(y)=1/\sqrt{\pi y}$ ，所以圆面积 $Y=\pi X^2/4$ 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}p_X\left(\sqrt{\frac{4y}{\pi}}\right)\left|\frac{1}{\sqrt{\pi y}}\right|, & 0<y<\frac{\pi}{4}, \\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\frac{\pi}{4}, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

【每日一题】10 月 19 日
49、设二维随机变量 (X,Y) 服从圆心在原点的单位圆内的均匀分布，求极坐标

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}, \theta=arctan\frac{y}{x} \ , \theta\in[0,2\pi]$$

的联合密度函数.(此题（X, Y）和（R, θ）一一对应)

【解】因为 (X,Y) 服从圆心在原点的单位圆内的均匀分布，所以 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0<x^2+y^2<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)$ ，则

$$J^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r}.$$

由于 $|J|=r$. 由此得 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ 和 $\theta=\arctan(Y/X)$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned}p_{R,\theta}(r,\theta)&=p_{X,Y}\big(x(r,\theta),y(r,\theta)\big)|J| \\ &=r/\pi \ , \quad 0<r<1, 0<\theta<2\pi.\end{aligned}$$

【每日一题】10 月 20 日

50、设随机变量 U_1 和 U_2 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，试证明：

(1) $Z_1 = -2\ln U_1 \sim Exp(1/2)$, $Z_2 = 2\pi U_2 \sim U(0,2\pi)$;

(2) $X = \sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 和 $Y = \sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态随机变量.

【解】

(1) 设 $z_1 = -2\ln u_1$ ，则 $u_1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_1}$, $\frac{du_1}{dz_1} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_1}$. 所以当 $z_1 > 0$ 时，$Z_1 = -2\ln U_1$ 的密度函数为

$$p_{z_1}(z_1) = p_{U_1}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_1}\right)\left|\frac{du_1}{dz_1}\right| = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z_1},$$

即 $Z_1 \sim Exp(1/2)$. 又设 $z_2 = 2\pi u_2$ ，则 $u_2 = \frac{z_2}{2\pi}$, $\frac{du_2}{dz_2} = \frac{1}{2\pi}$ ，所以当 $0 < z_2 < 2\pi$ 时，$Z_2 = 2\pi U_2$ 的密度函数为

$$p_{z_2}(z_2) = p_{U_2}\left(\frac{z_2}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

即 $Z_2 \sim U(0,2\pi)$.

(2) 因为 $x^2 + y^2 = -2\ln u_1$ ，所以 $u_1 = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$ ，又因为$\frac{y}{x} = \tan(2\pi u_2)$ ，所以 $u_2 = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$，由此得

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\},$$

所以 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{U_1,U_2}(u_1,u_2)\cdot|J| = \frac{1}{2\pi}exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}, -\infty < x,y < \infty,$$

这说明 X 和 Y 是相互独立的标准正态随机变量.

51、把一颗骰子独立地掷 n 次，求 1 点出现的次数与 6 点出现次数的协方差及相关系数.

【解】记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次投掷，出现 1 点}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次投掷，出现 6 点}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则 1 点出现的次数 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,1/6)$ ；6 点出现的次数 $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \sim b(n,1/6)$.从而有

$$E(X) = E(Y) = \frac{n}{6},\ Var(X) = Var(Y) = \frac{5n}{36}.$$

我们的目的是求 $Cov(X,Y)$ ，故下面先求 $E(XY)$. 由于

$$XY = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i + 2\sum_{i<j} X_i Y_i$$

且因为 X_i 和 Y_j 均为仅取 0, 1 值的随机变量，所以 $\{X_i Y_i = 1\} = \{X_i = 1, Y_i = 1\} = \emptyset$（第$i$次投掷时，不可能既出现 1 点、同时又出现 6 点），因此当 $i = j$ 时，有

$$P(X_iY_i=1)=0\ ,\ P(X_iY_i=0)=1-P(X_iY_i=1)=1\,.$$

由此得 $E(X_iY_i)=0$，而当 $i\neq j$ 时，由于 X_i 与 Y_i 相互独立，所以 $E(X_iY_j)=E(X_i)E(Y_j)=1/36$. 综上可得

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2\sum_{i<j}E(X_iY_j)-\frac{n^2}{36}$$

$$=\frac{n(n-1)}{36}-\frac{n^2}{36}=-\frac{n}{36},$$

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{-n/36}{5n/36}=-\frac{1}{5}.$$

52、设 a 为区间 $(0,1)$ 上的一个定点，随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，以 Y 表示点 X 到 a 的距离. 问 a 为何值时 X 与 Y 不相关.

【解】由题设条件知 $X\sim U(0,1)\,,Y=|X-a|\,,E(X)=1/2$. 又因为

$$E(Y)=\int_0^1|x-a|\,dx=\int_0^a(a-x)\,dx+\int_a^1(x-a)\,dx=a^2-a+\frac{1}{2}.$$

$$E(XY)=\int_0^a x(a-x)\,dx=\int_a^1 x(x-a)\,dx=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

$$Cov(X,Y)=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12},$$

所以由 $Cov(X,Y)=0$ 可得方程

$$4a^3-6a^2+1=0\,,$$

此方程等价于

$$(2a-1)(2a^2-2a-1)=0\,,$$

从中解得在 $(0,1)$ 内的实根为 $a=0.5$，即 $a=0.5$ 时，X 与 Y 不相关.

53、设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 min，且各件产品的组装时间是相互独立的.

(1)试求组装 100 件产品需要 15 h 至 20 h 的概率；

(2)保证有 95%的可能性，问 16 h 内最多可以组装多少件产品？

【解】记 X_i 为组装第 i 件产品的时间（单位：min），则由 $X_1\sim Exp(\lambda)\,,E(X_i)=1/\lambda=10$，知 $Var(X_i)=1/\lambda^2=100$.

(1) 根据题意所求概率如下，再用林德伯格-莱维中心极限定理可得

$$P\left(15\times 60\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le 20\times 60\right)\approx\Phi\left(\frac{1200-100\times 10}{\sqrt{100\times 100}}\right)-\Phi\left(\frac{900-100\times 10}{\sqrt{100\times 100}}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.8185\,.$$

(2) 设 16 h 内最多可以组装 k 件产品. 则根据题意可列出概率不等式

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k}X_i\le 16\times 60\right\}\ge 0.95\,,$$

再用林德伯格-莱维中心极限定理可得

$$\Phi\left(\frac{960-10k}{\sqrt{100k}}\right)\ge 0.95\,,$$

由此查表得$\frac{960-10k}{10\sqrt{k}} \ge 1.645$，从中解得 $k = 81$.

54、甲、乙两个校对员彼此独立对同一本书的样稿进行校对，校完后，甲发现 a 个错字，乙发现 b 个错字，其中共同发现的错字有 c 个，试用矩估计给出如下两个未知参数的估计：
(1)该书样稿的总错别字个数；
(2)未被发现的错别字个数.

【解】

(1) 设该书样稿中错别字总数为 θ，甲校对员识别出错字的概率为 p_1，乙校对员识别出错字的概率为 p_2，由于甲、乙是彼此独立地进行校对，则同一错字能被甲乙同时识别的概率为 p_1p_2，根据频率替换的思想有

$$\hat{p}_1 = \frac{a}{\theta}, \hat{p}_2 = \frac{b}{\theta}, \widehat{p_1p_2} = \frac{c}{\theta}.$$

由独立性可得矩法方程 $\frac{a}{\theta}\cdot\frac{b}{\theta} = \frac{c}{\theta}$，解之得 $\hat{\theta} = \frac{ab}{c}$.

(2) 未被发现的错字个数的估计等于总错字个数的估计减去甲、乙发现的错字个数，即 $\frac{ab}{c} - a - b + c = \frac{(a-c)(b-c)}{c}$.

55、已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现随机地抽取 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下：

482 493 457 510 446 435 418 394 469.

(1) 求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%的置信区间；
(2) 若已知 $\sigma = 30$，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%的置信区间；
(3) 求 σ 的置信水平为 95%的置信区间.

【解】

(1) 经计算得，$\bar{x} = 457.5, s = 35.2176$，在 σ 未知时，μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}\right].$$

查表得，$t_{1-\alpha/2}(9) = 2.2622$，因而 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left[457.5 - 2.2622 \times 35.2176/\sqrt{10}, 457.5 + 2.2622 \times 35.2176/\sqrt{10}\right]$$
$$= [432.306, 482.6936].$$

(2) 在 $\sigma = 30$ 已知时，μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right].$$

查表得，$u_{1-\alpha/2} = 1.96$，因而 μ 的置信水平为 95%的置信区间为

$$\left[457.5 - 1.96 \times 30/\sqrt{10}, 457.5 + 1.96 \times 30/\sqrt{10}\right] = [438.905, 476.0942].$$

(3) 此处，$(n-1)s^2 = 11162.5141$，取 $\alpha = 0.05$，查表得 $\chi^2_{0.025}(9) = 2.7004$，$\chi^2_{0.975}(9) = 19.0228$，因而 σ^2 的置信水平为 95 的置信区间为

$$\left[\frac{11162.5141}{19.0228}, \frac{11162.5141}{2.7004}\right] = [586.7966, 4133.6521],$$

由此可以得到 σ 的置信水平为 95%的置信区间为[24.2239,64.2935].

56、设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $U(0,\theta)$ 的一个样本，对如下的检验问题

$$H_0: \theta \le \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1: \theta > \frac{1}{2},$$

已给出拒绝域 $W=\{x_{(n)}\geq c\}$，其中 $x_{(n)}$ 为样本的最大次序统计量.
(1) 求此检验的势函数；
(2) 若要求检验犯第一类错误的概率不超过 0.05(即$\alpha(\theta)\leq 0.05$)，如何确定 c？
(3) 若在(2)的要求下进一步要求检验在 $\theta=\frac{3}{4}$ 处犯第二类错误的概率不超过 0.02(即 $\beta(\theta)\leq 0.02$)，n 至少要取多少？
(4) 如今 $n=20$，$x_{(20)}=0.48$，对此检验问题作出判断.

【解】
(1) 此检验的势函数为

$$\begin{aligned} g(\theta) &= P(x_{(n)}\geq c)=1-P(x_{(n)}<c) \\ &= 1-P(x_1<c,x_2<c,\cdots,x_n<c) \\ &= \begin{cases} 0, & \theta\leq c, \\ 1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n, & \theta>c. \end{cases} \end{aligned}$$

可见在 $\theta>c$ 时，势函数 $g(\theta)$ 是 θ 的严增函数.
(2) 在 H_0 成立下，犯第一类错误的概率为 $\alpha(\theta)=g(\theta)$，故由题意知，应有

$$g(\theta)=1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n\leq 0.05, \qquad \theta\leq\frac{1}{2}.$$

由于 $g(\theta)$ 是增函数，故 $g(\theta)$ 在 $\theta=\frac{1}{2}$ 处达到最大值，故只要使

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=1-(2c)^n=0.05$$

即可实现，由此解出 $c=\frac{1}{2}(0.95)^{1/n}$.
(3) 在备择假设 H_1 成立下，犯第二类错误的概率为

$$\beta(\theta)=1-g(\theta)=\left(\frac{c}{\theta}\right)^n, \theta>\frac{1}{2}.$$

现要求在 $\theta=\frac{3}{4}$ 处有 $\beta(\theta)\leq 0.02$,即 $\left(\frac{c}{3/4}\right)^n\leq 0.02$，若把(2)中的 $c=\frac{1}{2}(0.95)^{1/n}$ 代入，可得

$$n\geq\frac{\ln 95-\ln 2}{\ln 3-\ln 2}=9.52.$$

可见，若取 $n=10$ 即可使 $\theta=\frac{3}{4}$ 处犯第二类错误的概率不超过 0.02.
(4) 若样本量 $n=20$，则其拒绝域为

$$W=\{x_{(n)}\geq c_0\}, \text{其中} c_0=\frac{1}{2}(0.95)^{1/20}=0.4987.$$

如今 $x_{(n)}=0.48<c_0$，故应接受原假设 $H_0:\theta\leq\frac{1}{2}$.

57、测得两批电子器件的样品的电阻（单位：Ω）为

$$A\text{批}(x): 0.140\ \ 0.138\ \ 0.143\ \ 0.142\ \ 0.144\ \ 0.137$$

$$B\text{批}(x): 0.135\ \ 0.140\ \ 0.142\ \ 0.136\ \ 0.138\ \ 0.140$$

设这两批器材的电阻值分别服从分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两样本独立.

(1) 试检验两个样本的方差是否相等(取 $\alpha = 0.05$)；
(2) 试检验两个样本的均值是否相等(取 $\alpha = 0.05$).

【解】
(1) 对于检验两总体方差是否一致，应使用 F 检验，此处，有样本数据计算可得到

$$\bar{x} = 0.1407\,,\bar{y} = 0.1385\,,s_x = 0.0028\,,s_y = 0.0027\,.$$

若取 $\alpha = 0.05$ ，则 $F_{0.975}(5,5) = 7.15\,,F_{0.025}(5,5) = \frac{1}{F_{0.975}(5,5)} = 0.1399$ ，其拒绝域为 $W = \{F \le 0.1399 \text{ 或 } F \ge 7.15\}$，而

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{0.0028^2}{0.0027^2} = 1.0754\,.$$

由于 F 值没有落入拒绝域内，可以认为两个总体的方差相等.

(2) 因为在(1)中已经接受了两总体方差一致，从而在检验均值情况时，可以用样本 t 检验，当 $\alpha = 0.05$ 时， $t_{0.975}(10) = 2.2281$ ，拒绝域为 $\{|t| \ge 2.2281\}$ ，这里有

$$s_w = \left(\frac{5 \times 0.0028^2 + 5 \times 0.0027^2}{6+6-2}\right)^{1/2} = 0.00275\,,$$

$$t = \frac{0.1407 - 0.1385}{0.00275\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} = 1.3856 < 2.2281\,,$$

故接受 H_0 ，可认为两总体的均值相等.

58、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma > 0), X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n \ge 2)$ 为来自该总体的简单随机样本，其样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$.记统计量 $Y_1 = \sum_{i=1}^{2n}(X_i - \bar{X})^2$,$Y_2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{n+i})^2$,$Y_3 = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ ，则这 3 个统计量的数学期望 $E(Y_1)\,,E(Y_2)\,,E(Y_3)$ 的大小关系为（　）

(A) $E(Y_1) > E(Y_2) > E(Y_3)$.　　　　(B) $E(Y_1) > E(Y_3) > E(Y_2)$.
(C) $E(Y_3) > E(Y_1) > E(Y_2)$.　　　　(D) $E(Y_2) > E(Y_1) > E(Y_3)$.

【解】对于 Y_1 ，由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n \ge 2)$ 是来自正态总体的简单随机样本，其样本方差 $S^2 = \frac{1}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n}(X_i - \bar{X})^2$ 满足 $\frac{(2n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2n-1)$.于是，

$$E\left[\frac{(2n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = E\left(\frac{Y_1}{\sigma^2}\right) = 2n-1\,,E(Y_1) = (2n-1)\sigma^2\,.$$

对于 Y_2 ，

$$E(X_i - X_{n+i}) = \mu - \mu = 0\,,D(X_i - X_{n+i}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2\,.$$

于是，$X_i - X_{n+i} \sim N(0.\sigma^2)\,,\frac{X_i - X_{n+i}}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$, 且 $X_1 - X_{n+1}\,,X_2 - X_{n+2}, \cdots X_n - X_{2n}$ 相互独立. 因此，$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - X_{n+i}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - X_{n+i}}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] = n\,,E(Y_2) = E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{n+i})^2\right] = 2n\sigma^2\,.$$

对于 Y_3 ，由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n \ge 2)$ 是来自正态总体的简单随机样本，故 X_i 与 $X_{n+i}(i = 1,2\cdots,n)$ 相互独立.

$$E(X_i+X_{n+i})=\mu+\mu=2\mu\,,D(X_i+X_{n+i})=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2\,.$$

于是， $X_1+X_{n+1}\,,X_2+X_{n+2},\cdots,X_n+X_{2n}$ 可看作来自正态总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，

其样本均值为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$ ，样本方差为$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Y_3$.

因此$\frac{Y_3}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\,,E\left(\frac{Y_3}{2\sigma^2}\right)=n-1\,,E(Y_3)=2(n-1)\sigma^2$.

综上所述， $E(Y_2)>E(Y_1)>E(Y_3)$ ，应选 D.

59、已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x\,;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\,,\\ 0, & \text{其他}\,,\end{cases}$$

其中 θ 为大于 0 的位置参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $E(\hat{\theta})$;

(3) 求 α ，使得 $E\left(\alpha\hat{\theta}-\theta\right)^2$ 最小.

【解】

(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i\,;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\,,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & \theta\ge\max\limits_{1\le i\le n}x_i\,,\\ 0, & \text{其他}\,.\end{cases}$$

又由于$\frac{1}{\theta^n}$是关于 θ 的单调减少函数，故当 $\theta\ge\max\limits_{1\le i\le n}x_i$ 时， $L(\theta)$ 取值最大.

因此， θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}X_i\,.$$

(2) 由于 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，故 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\,,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\,,\\ 1, & x\ge\theta\,.\end{cases}$$

设随机变量 $Y=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$.计算 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=0$.

当 $0\le y<\theta$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{\max_{1\le i\le n}X_i\le y\right\}=P\{X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n<y\}$$

$$\xRightarrow{\text{独立性}}P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_n<y\}=F_X^n(y)=\left(\frac{y}{\theta}\right)^n\,.$$

当 $y\ge\theta$ 时， $F_Y(y)=1$.于是，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\,,\\ \dfrac{y}{\theta}, & 0\le y<\theta\,,\\ 1, & y\ge\theta\,.\end{cases}$$

对 $F_Y(y)$ 求导，可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta\,,\\ 0, & 其他\,.\end{cases}$$

因此，

$$E(\hat{\theta})=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^{\theta}y\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^{\theta}=\frac{n}{n+1}\theta\,.$$

(3) 将 $E(\alpha Y-\theta)^2$ 记为 α 的函数 $g(\alpha)$，则

$$g(\alpha)=E(\alpha Y-\theta)^2=\alpha^2E(Y^2)-2\alpha\theta E(Y)+\theta^2\,.$$

计算 $E(Y^2)$.

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f_Y(y)dy=\int_0^{\theta}y^2\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^{\theta}=\frac{n}{n+2}\theta^2\,.$$

于是，

$$g(\alpha)=\alpha^2\cdot\frac{n}{n+2}\theta^2-2\alpha\cdot\frac{n}{n+1}\theta^2+\theta^2=\left(\frac{n}{n+2}\alpha^2-\frac{2n}{n+1}\alpha+1\right)\theta^2\,.$$

令$\frac{d[g(\alpha)]}{d\alpha}=\left(\frac{2n}{n+2}\alpha-\frac{2n}{n+1}\right)\theta^2=0$，解得 $\alpha=\frac{n+2}{n+1}$. 该点是 $g(\alpha)$ 的唯一驻点. 又因为 $g''(\alpha)=\frac{2n}{n+2}\theta^2>0$，所以该唯一驻点是 $g(\alpha)$ 的极小值点，也是最小值点.

因此，当 $\alpha=\frac{n+2}{n+1}$时，$E\left(\alpha\hat{\theta}-\theta\right)^2$ 最小.

60、已知 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$，则下列统计量服从参数为 9 的 t 分布的是( )

(A)$\frac{X_{10}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}}$.　　(B)$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}}$.

(A)$\frac{X_{10}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2}}$.　　(A)$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2}}$.

【解】由于 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，故 $X_i-\mu\sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,10)$ 且相互独立，从而 $\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(9)$.
因此，

$$\frac{X_{10}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}}\sim t(9)\,,$$

应选 A.
下面说明选项 B、C、D 不正确.
由于 $\bar{X}-\mu$ 与 $\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2$ 不相互独立，$X_{10}-\mu$ 与 $\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2$ 也不相互独立，故选项 B 和 C 错误.

由于 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{10}\right)$，故 $\sqrt{10}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$.于是，

$$\frac{\sqrt{10}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2}}\sim t(9)\,.$$

选项 D 错误.