

圏論と量子力学への応用

よの

2021 年 10 月 11 日

まえがき

注記

この pdf は圏論的量子力学 (Categorical Quantum Theory) について説明したものである。圏論的量子力学では「ストリング図式」と呼ばれる概念を用いて証明をおこなうことが多いが、この pdf にストリング図式は出てこない。ストリング図式は圏論の議論を視覚的に捉えることができるため重宝されるが、ここではそれに頼らない厳密な証明を心掛けている。それに伴い ‘Categories for Quantum Theory’[c4qt] では掘り下げられていない数学的な議論も書いたつもりである。ここで壺大整域 [Alg-d] や nlab[nlab], ‘圏論の技法’[gihou], ‘Tensor Categories’[EGNO] を参考にした。詳しくは章ごとに参考にした文献を最初に紹介するので適宜参照してほしい。特に文献によって定義が異なる概念には注釈を加えている。

構成

この pdf を読むにあたって前提知識は特に仮定しない。準備として 1 章で圏論の基本的な事柄, 2 章で Hilbert 空間と線形作用素について説明しているので参考にしてほしい。3 章でモノイダル圏, 4 章で圏上の線形代数, 5 章でダガー圏, 6 章で双対対象, 7 章でモノイダル圏上のモノイドについて説明する。8 章で Born 則, 9 章で量子複製不可能定理について圏上で議論する。巻末で 2-category と豊穡圏について補完する。

圏論的物理学とは

圏論的物理学とは圏論を用いて物理を定式化しようとする分野である。物理は考えている系とその間の移り変わりに着目する学問と言えるだろう。^{*1} 圏論では「対象」といわれるものと、その間の移り変わりである「射」の組である圏を定義し、議論を展開する。圏論的物理学は「対象」を物理的な系, 「射」を系間の操作とする「圏」を考える。圏論的量子力学では「対象」を Hilbert 空間, 「射」を有界線形作用素とする「圏」を考える。

^{*1} 私個人の強い主張である。

目次

1	圏論の基礎	4
1.1	圏と関手	4
1.2	圏の構成例	6
1.3	圏同値と自然変換	7
1.4	極限	8
2	Hilbert 空間	11
2.1	Hilbert 空間	11
3	モノイダル圏	12
3.1	モノイダル圏	12
3.2	モノイダル関手	18
3.3	モノイダル同値とモノイダル自然変換	20
3.4	厳格化定理と coherence 定理	21
4	圏上の線形代数	23
4.1	scalar	23
4.2	直和	24
4.3	重ね合わせ則	27
4.4	射の行列表示	29
5	ダガー圏	32
5.1	ダガー圏	32
5.2	ダガー核	33
5.3	ダガー複積	34
5.4	モノイダルダガー圏	37
6	双対化可能	38
6.1	双対対象	38
6.2	ピボタル圏	42
6.3	コンパクト閉圏とリボン圏	44
6.4	ダガーコンパクト閉圏	45
6.5	trace と dimension	45
6.6	重ね合わせ則と双対化	46

7	モノイダル圏上のモノイド	47
7.1	モノイド	47
7.2	コモノイド	49
7.3	Cayley の埋め込み定理	50
8	Born 則	51
8.1	状態と効果	51
8.2	積状態ともつれ状態	51
8.3	Born 則	52
9	量子複製不可能定理	55
9.1	一様削除と削除不可能定理	55
9.2	一様複製と複製不可能定理	57
10	付録 1: 2-category	58
11	付録 2: 豊穣圏	58

1 圏論の基礎

1 章では 3 章以降を読むために必要な圏論の基本的な事柄をまとめる。圏, 関手, 自然変換, 極限を知っている読者はこの章を飛ばしても構わない。[随伴] の節は 6 章の [双対対象] の章を読む時に参考になると思うが, 特に知っている必要はない。証明は [Alg-d] に譲る。

1.1 圏と関手

早速ではあるが圏の定義から説明する。圏論の成立までの歴史や発展については [Alg-d] を読んでほしい。

定義 1.1 (圏)

圏 (category) C とは集まり $\text{Ob}(C)$ と $\text{Mor}(C)$ の 2 つ組 $(\text{Ob}(C), \text{Mor}(C))$ ^{*2} で以下の条件を満たすものである。 $\text{Ob}(C)$ の元を対象 (object), $\text{Mor}(C)$ の元を射 (morphism) という。

- 任意の射 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して域 (domain) $A \in \text{Ob}(C)$ と余域 (codomain) $B \in \text{Ob}(C)$ が与えられている。この時 $A \xrightarrow{f} B$ や $f : A \rightarrow B$ と表し $\text{dom}(f) = A$, $\text{cod}(f) = B$ と書く。また

$$\text{Hom}_C(A, B) := \{f \in \text{Mor}(C) \mid A \xrightarrow{f} B\}$$

とする。

- 2 つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ に対して $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ となる時, f と g の合成射といわれる射 $g \circ f$ が定義出来て $A \xrightarrow{g \circ f} C$ となる。この時

$$\begin{aligned}\text{dom}(g \circ f) &= \text{dom}(f) \\ \text{cod}(g \circ f) &= \text{cod}(g)\end{aligned}$$

である。

- 射の合成は結合則を満たす。つまり $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $C \xrightarrow{h} D$ に対して

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

となる。

- 任意の対象 $A \in \text{Ob}(C)$ に対して恒等射 (identity morphism) といわれる射 $\text{id}_A : A \rightarrow A$ が存在して射の合成に関する単位元となる。つまり $A \xrightarrow{f} B$ に対して

$$f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$$

^{*2} 正しくは 6 つ組 $(\text{Ob}(C), \text{Mor}(C), \text{dom}, \text{cod}, \circ, \text{id})$ と書くべきであるが, 書き方は [Alg-d] 等に従った。

となる.

圏論的量子力学に主に登場する圏をいくつか定義する.

例 1.2 (圏 **Set**)

対象を集合, 射を写像とすると圏をなす. この圏を集合圏 **Set** とする.

対象を有限集合に制限したものの圏をなす. この圏を有限集合圏 **FSet** とする.

例 1.3 (圏 **Hilb**)

対象を Hilbert 空間, 射を有界線形作用素とすると圏をなす. この圏を Hilbert 空間圏 **Hilb** とする.

対象を有限次元 Hilbert 空間に制限したものの圏をなす. この圏を有限次元 Hilbert 空間圏 **FHilb** とする. ^{*3}

例 1.4 (圏 **Rel**)

対象を集合, 射を関係 R とすると圏をなす. この圏を関係圏 **Rel** とする.

対象を有限集合に制限したものの圏をなす. この圏を有限関係圏 **FRel** とする.

以降では圏の具体例として **Hilb** をだす. 圏論的量子力学の中心となるのは **Hilb**(を制限した **FHilb** ^{*4}) であるので, できるだけ詳しく説明する.

次に関手を定義する. これは圏と圏の間の準同型のようなものである.

定義 1.5 (関手)

C, D を圏とする. 関手 (functor) ^{*5} $F : C \rightarrow D$ とは $A \in \text{Ob}(C)$ に $F(A) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる写像で以下の条件を満たすものである.

- $A \xrightarrow{f} B$ の時 $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ である.
- $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ となる.
- 任意の対象 $A \in \text{Ob}(C)$ に対して $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ となる.

定義 1.6 (恒等関手)

C を圏, A を対象, f を射とする. 恒等関手 (identity functor) とは関手 $F : C \rightarrow C$ であって以下で定義されるものである.

- $F(A) := A$

^{*3} Hilbert 空間を知らない読者は 2 章を読んだ後, この定義によって圏をなすことを確かめてほしい.

^{*4} なぜ, 有限次元への制限である圏 **FHilb** が圏論的量子力学の中心となるかは 7 章以降で明らかになる.

^{*5} 関手には共変関手と反変関手の 2 種類があるが, この pdf では共変関手 (上で定義した関手) しか出てこない
ので反変関手については省略する. 反変関手も反転圏からの関手 $C^{\text{op}} \rightarrow C$ と見れば共変関手となるので実
質的には共変関手のみである.

- $F(f) := f$

恒等関手を Id_C と表す.

例 1.7 (忘却関手)

$F : \mathbf{Hilb} \rightarrow \mathbf{Set}$ を以下のように定義する. \mathbf{Hilb} の対象 H と射 f に対して

- $F(H) := H$
- $F(f) := f$

と定義するとこれは関手となる. このように構造を忘れる関手を忘却関手 (forgetful functor) という.

群において同型写像で結ばれる 2 つの群は同型と呼ばれる. この性質を一般の圏における対象について定義する.

定義 1.8 (同型)

A, B を対象とする.

- 射 $A \xrightarrow{f} B$ が同型射 (isomorphism) であるとはある射 $B \xrightarrow{g} A$ が存在して

$$g \circ f = \text{id}_A$$

$$f \circ g = \text{id}_B$$

を満たす時である.

- A と B が同型 (isomorphic) であるとはある同型射 $A \xrightarrow{f} B$ が存在する時である. この時 $A \cong B$ と表す.

1.2 圏の構成例

与えられた圏から新しい圏を構成する方法を説明する. ここでは反転圏と直積圏を定義する. (執筆中)

定義 1.9 (反転圏)

C を圏とする. この時, 圏 C の射の向きを全て逆にしたものも圏となり, これを反転圏 (opposite category) C^{op} とする.

定義 1.10 (直積圏)

C, D を圏とする. この時, 圏の直積 $C \times D$ を以下のように定義する.

- 対象を C の対象 A と D の対象 B の組 $\langle A, B \rangle$ とする.

- $\langle A_1, B_1 \rangle$ から $\langle A_2, B_2 \rangle$ への射は成分ごとの射の組とする.
- 射の合成は成分ごとにおこなう.
- 恒等射は成分ごとの恒等射の組とする.

これは圏をなす. この圏を直積圏 (product category) $C \times D$ とする.

1.3 圏同値と自然変換

2 節では圏の対象の間において同型を定義した. 3 節では圏の間の同型を定義する.

定義 1.11 (自然変換)

C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とする. 自然変換 (natural transformation) $\theta : F \Rightarrow G$ とは D の射の族

$$\theta := \{\theta_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{Ob}(C)}$$

であって, C の射 $A \xrightarrow{f} B$ に対して次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

定義 1.12 (自然同型)

各 θ_A が同型射となる自然変換を自然同型 (natural isomorphism) という. 自然同型 $\theta : F \Rightarrow G$ が存在する時, F と G は自然同型 (natural isomorphic) であるといい $F \cong G$ と表す.

定義 1.13 (圏同値)

C, D を圏とする. 圏 C, D が圏同値 (equivalence of categories) であるとはある関手 $F : C \rightarrow D$ と $G : D \rightarrow C$ が存在して

$$\begin{aligned} G \circ F &\cong \text{id}_C \\ F \circ G &\cong \text{id}_D \end{aligned}$$

を満たす時である. この時 $C \simeq D$ と表す.

1.4 極限

4 節では一般の極限ではなく, その具体例である直積, equalizer, 終対象とそれらの双対概念を定義する. 双対概念とは図式において全ての射の向きを逆にして得られる概念である. 直積, equalizer, 終対象の双対概念はそれぞれ余直積, coequalizer, 始対象である. *6

定義 1.14 (直積)

C を圏, A, B を対象とする. A と B の直積 (product) とは 3 つ組 $(A \times B, p_A, p_B)$ であって, 以下の条件を満たすものである.

- $A \times B$ は C の対象である.
- $A \times B \xrightarrow{p_A} A, A \times B \xrightarrow{p_B} B$ は C の射である. 射 p_A, p_B を射影という.
- ある対象 X と射 $X \xrightarrow{q_A} A$ と $X \xrightarrow{q_B} B$ が存在する時, 射 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : X \rightarrow A \times B$ が一意に存在して $q_A = p_A \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, q_B = p_B \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ となる. つまり, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \swarrow q_A & \downarrow \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & \searrow q_B & \\
 A & \xleftarrow{p_A} & A \times B & \xrightarrow{p_B} & B
 \end{array}$$

例 1.15

Hilb において直積は Hilbert 空間の直積で与えられる.

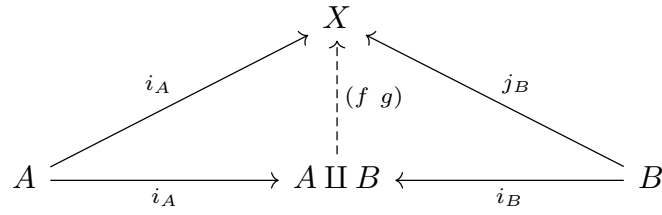
Rel において直積は非交和で与えられる.

定義 1.16 (余直積)

C を圏, A, B を対象とする. A と B の余直積 (coproduct) とは 3 つ組 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ であって, 以下の条件を満たすものである.

- $A \amalg B$ は C の対象である.
- $A \xrightarrow{i_A} A \amalg B, B \xrightarrow{i_B} A \amalg B$ は C の射である. 射 i_A, i_B を入射という.
- ある対象 X と射 $A \xrightarrow{j_A} X$ と $B \xrightarrow{j_B} X$ が存在する時, 射 $A \amalg B \xrightarrow{(f \ g)} X$ が一意に存在して $j_A = (f \ g) \circ i_A, j_B = (f \ g) \circ i_B$ となる. つまり, 次の図式を可換にする.

*6 双対概念は元の名前に余 (co) をつける事が一般的である.



例 1.17

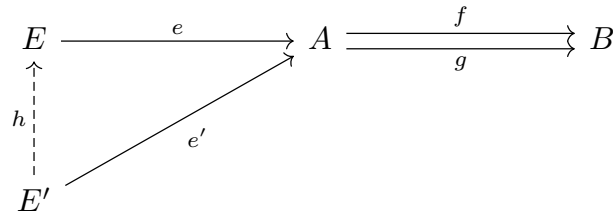
Hilb において余直積は Hilbert 空間の直和で与えられる.

Rel において余直積は非交和で与えられる.

定義 1.18 (equalizer)

C を圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f, g} B$ を射とする. f と g の equalizer ^{*7} とは 2 つ組 (E, e) であって, 以下の条件を満たすものである.

- E は C の対象である.
- $E \xrightarrow{e} A$ は C の射で $f \circ e = g \circ e$ を満たす.
- ある対象 E' と射 $E' \xrightarrow{e'} A$ が $f \circ e' = g \circ e'$ を満たす時, 射 $E' \xrightarrow{h} E$ が一意に存在して $e' = e \circ h$ となる. つまり, 次の図式を可換にする.



例 1.19

Hilb において $A \xrightarrow{f, g} B$ の equalizer は集合 $E := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ と包含写像 $E \xrightarrow{e} A$ で与えられる.

Rel において equalizer は存在しない.

定義 1.20 (核)

執筆中

定義 1.21 (coequalizer)

C を圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f, g} B$ を射とする. f と g の coequalizer ^{*8} とは 2 つ組 (E, e) であって, 以下の条件を満たすものである.

- E は C の対象である.
- $B \xrightarrow{e} E$ は C の射で $e \circ f = e \circ g$ を満たす.

^{*7} 日本語では差核といわれる.

^{*8} 日本語では余差核といわれる.

- ある対象 E' と射 $B \xrightarrow{e'} E'$ が $e' \circ f = e' \circ g$ を満たす時, 射 $E \xrightarrow{h} E'$ が一意に存在して $e' = h \circ e$ となる. つまり, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B & \xrightarrow{e} & E \\
 & & & \searrow e' & \downarrow h \\
 & & & & E'
 \end{array}$$

定義 1.22 (終対象)

C を圏とする. C の終対象 (terminal object) とは対象 I と射 x の 2 つ組 (I, x) であって, 任意の $A \in \text{Ob}(C)$ に対して射 $A \xrightarrow{x} I$ が一意に存在するものである. ^{*9}

例 1.23

Hilb において終対象は 0 次元 Hilbert 空間で与えられる.

Rel において終対象は空集合で与えられる.

定義 1.24 (始対象)

C を圏とする. C の始対象 (initial object) とは対象 I と射 a の 2 つ組 (I, a) であって, 任意の $A \in \text{Ob}(C)$ に対して射 $I \xrightarrow{a} A$ が一意に存在するものである. ^{*10}

例 1.25

Hilb において始対象は 0 次元 Hilbert 空間で与えられる.

Rel において始対象は空集合で与えられる.

定理 1.26

直積, equalizer, 終対象は存在すれば, 同型を除いて一意である.

証明

省略

補題 1.27

余直積, coequalizer, 始対象は存在すれば, 同型を除いて一意である.

証明

補題 1.26 において射の向きを全て逆にすれば良い.

^{*9} 直積の定義と同じように書くと「 C を圏とする. I が終対象であるとは対象 I であって, ある I' が圏 C の対象となる時, 射 $I' \xrightarrow{I} I$ が一意に存在する」となる.

^{*10} 直積の定義と同じように書くと「 C を圏とする. I が始対象であるとは対象 I であって, ある I' が圏 C の対象となる時, 射 $a \xrightarrow{I'} I$ が一意に存在する」となる.

2 Hilbert 空間

2 章では 3 章以降を読むために必要な Hilbert 空間論をまとめる. 以下の公理は一般の体 \mathbb{F} について考えることができるが, この pdf では係数体として複素数体 \mathbb{C} を考えれば十分なので, \mathbb{C} に限定して説明する. (執筆中)

2.1 Hilbert 空間

定義 2.1 (複素ベクトル空間)

複素ベクトル空間 (complex vector space) V とは, 集合 V と複素数体 \mathbb{C} に対して演算 $+: V \times V \rightarrow V$ と $\times: \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ が定義されていて, 任意の $a, b, c \in V$ と $s, t \in \mathbb{C}$ に対して, 以下の条件を満たすものである.

- 交換則: $a + b = b + a$
- 結合則: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 零ベクトルの存在: $a + 0 = a$
- 逆ベクトルの存在: $a + (-a) = 0$
- 単位則: $1 \times a = a$
- 加法分配則: $s \times (a + b) = s \times a + s \times b$
- スカラー分配則: $(s + t) \times a = s \times a + t \times a$
- スカラー結合則: $(s \times t) \times a = s \times (t \times a)$

定義 2.2 (内積空間)

内積空間 (inner space) ^{*11} H とはベクトル空間であって, 写像 $\langle - | - \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられていて, 任意の $a, b, c \in H, s, t \in \mathbb{C}$ に対して, 以下の条件を満たすものである.

- 正值性: $\langle a | a \rangle \geq 0$
- 正定値性: $\langle a | a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$
- 線形性: $\langle a | sb + tc \rangle = s \langle a | b \rangle + t \langle a | c \rangle$
- 対称性: $\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$ ^{*12}

定義 2.3 (Hilbert 空間)

Hilbert 空間 (Hilbert space) とは完備な内積空間である.

^{*11} 前 Hilbert 空間 (pre Hilbert space) ともいわれる.

^{*12} * は複素共役を表す.

3 モノイダル圏

圏論的量子力学に限らず、物理を圏論で記述する上で欠かせない圏がモノイダル圏である。「部分系と部分系を合わせたものが全系となる」という物理の基本要請をうまく数学的に定式化したものである。対象を系 (部分系) とする圏において、部分系と部分系を合成する操作は、その圏同士の直積を考えることと一致する。それを系 (全系) とみなす (つまり、また圏の対象となる) ということは、その直積圏から元の圏への関手が存在するということである。この考え方から、1 章で定義された単なる圏ではなく、直積圏から元の圏への関手を備えた圏を考えるべきであろう。モノイダル圏はこの関手を備えた圏である。モノイダル圏の定義に出てくる自然同型も、部分系の合成に重ねて考えると物理の基本要請を上手く捉えていることが分かるだろう。これは読者自身に考えてもらいたい。

3.1 モノイダル圏

1 節ではモノイダル圏, 組紐モノイダル圏, 対称モノイダル圏を定義して、基本的な性質を示す。定理の詳しい証明は [CWM] も参照してほしい。

定義 3.1 (モノイダル圏)

C を圏とする。モノイダル圏 (monoidal category) とは 6 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ であって以下の条件を満たすものである。

- テンソル積 (tensor product) 関手^{*13} $\otimes : C \times C \rightarrow C$ が存在する。
- I は C の対象である。これを単位対象 (unit object) という。
- α は対象 A, B, C に対して

$$(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} A \otimes (B \otimes C)$$

とする自然同型である。これを結合子 (associator) という。

- λ は対象 A に対して

$$I \otimes A \xrightarrow{\lambda_A} A$$

とする自然同型である。これを左単位子 (left unitor) という。

- ρ は対象 A に対して

$$A \otimes I \xrightarrow{\rho_A} A$$

とする自然同型である。これを右単位子 (right unitor) という。

^{*13} 双関手ともいう。

- 対象 A, B, C, D について以下の2つの図式^{*14}が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \\
\alpha_{A,B,C} \otimes \text{id}_D \nearrow & & \searrow \alpha_{A,B \otimes C,D} \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
\alpha_{A \otimes B,C,D} \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
\\
(A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
\rho_A \otimes \text{id}_B \searrow & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_B \\
& A \otimes B &
\end{array}$$

定理 3.2 (coherence 定理)

モノイダル圏において、以下の2つは同値である。

- 恒等射 id , 自然同型 α, λ, ρ , それらの逆射からテンソル積 \otimes と合成 \circ をとる操作で構成された射は、それぞれ domain と codomain が同一であれば射として等しい。
- モノイダル圏の公理に出てくる五角形等式と三角形等式が成立する。

この証明は難解であるので4節でおこなう。1つ目の条件を coherence 条件という。以下でモノイダル圏における諸性質を示すが、その中で1ヶ所 coherence 定理を用いていることに注意してほしい。

例 3.3

Hilb はモノイダル圏となる。 H, J, K を Hilbert 空間, 任意の元 $a \in H, b \in J, c \in H$ に対して

- テンソル積 $\otimes : \mathbf{Hilb} \times \mathbf{Hilb} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ は Hilbert 空間の通常のテンソル積
- 単位対象 I は1次元 Hilbert 空間 \mathbb{C}
- 結合子 $\alpha_{H,J,K}$ は

$$\alpha_{H,J,K} : (H \otimes J) \otimes K \rightarrow H \otimes (J \otimes K) : (a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$$

とする線形写像

- 左単位子 λ_H は

$$\lambda_H : \mathbb{C} \times H \rightarrow H : 1 \otimes a \mapsto a$$

^{*14} それぞれ五角形等式 (pentagon equation), 三角形等式 (triangle equation) といわれる。

とする線形写像

- 右単位子 ρ_H は

$$\rho_H : H \times \mathbb{C} \rightarrow H : a \otimes 1 \rightarrow a$$

とする線形写像

と定義すると、これはモノイダル圏となる。対象を有限次元 Hilbert 空間に制限した **FHilb** もモノイダル圏となる。これらをそれぞれ **Hilb**, **FHilb** と書く。^{*15}

補題 3.4

C をモノイダル圏とする。^{*16} この時、反転圏 C^{op} もモノイダル圏となる。

補題 3.5

定義を確かめればよい。

定理 3.6 (交換則)

A, B, C, D, E, F を対象, $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C, D \xrightarrow{h} E, E \xrightarrow{i} F$ を射とする。この時、次の等式が成立する。

$$(g \circ f) \otimes (i \circ h) = (g \otimes i) \circ (f \otimes h)$$

これを (テンソル積と合成の) 交換則 (interchange law) という。

証明

直積圏の定義とテンソル積関手が関手であることから

$$\begin{aligned} (g \circ f) \otimes (i \circ h) &= \otimes(g \circ f, i \circ h) \\ &= \otimes((g, i) \circ (f, h)) \\ &= (\otimes(g, i)) \circ (\otimes(f, h)) \\ &= (g \otimes i) \circ (f \otimes h) \end{aligned}$$

補題 3.7

C をモノイダル圏とする。関手 $I \otimes - : C \rightarrow C$ と $- \otimes I : C \rightarrow C$ は恒等関手 Id_C と圏同値になる。

^{*15} 例 1.3 で定義した圏 **Hilb** と同じ記法であるが、ほとんどの場合で混乱の恐れはないので同じ書き方をする。**Rel**, **FRel**, **Set**, **FSet** 等も同様である。

^{*16} 正しくは「 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ をモノイダル圏とする」と書くべきであるが、以降では簡易のために単に「 C をモノイダル圏とする」と書く。

証明

$$(I \otimes -) \circ \text{Id} \cong \text{Id}_C, \quad \text{Id} \circ (I \otimes -) \cong \text{Id}_C$$

は λ の自然性より明らか. $- \otimes I$ については ρ の自然性より分かる.

系 3.8

モノイダル圏における射 f, g に対して, $f \otimes \text{id}_I = g \otimes \text{id}_I$ または $\text{id}_I \otimes f = \text{id}_I \otimes g$ が成立する時 $f = g$ である.

証明

補題 3.6 より明らかである.

補題 3.9

モノイダル圏において以下の 2 つの図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} (I \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I,B,C}} & I \otimes (B \otimes C) \\ \lambda_B \otimes \text{id}_C \searrow & & \swarrow \lambda_{B \otimes C} \\ & B \otimes C & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{A,B,I}} & A \otimes (B \otimes I) \\ \rho_{A \otimes B} \searrow & & \swarrow \text{id}_A \otimes \rho_B \\ & A \otimes B & \end{array}$$

証明

上の可換図式について次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} ((I \otimes I) \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I \otimes I, B, C}} & (I \otimes I) \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha_{I, I, B \otimes C}} & I \otimes (I \otimes (B \otimes C)) \\ \downarrow \alpha_{I, I, B} \otimes \text{id}_C & \searrow (\rho_I \otimes \text{id}_B) \otimes \text{id}_C & \downarrow \rho_I \otimes \text{id}_{B \otimes C} & \swarrow \text{id}_I \otimes \rho_{B \otimes C} & \uparrow \text{id}_I \otimes \alpha_{I, B, C} \\ (I \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I, B, C}} & I \otimes (B \otimes C) & & \\ \uparrow (\text{id}_I \otimes \lambda_B) \otimes \text{id}_I & \nearrow & \downarrow \text{id}_I \otimes (\lambda_B \otimes \text{id}_C) & \swarrow & \\ (I \otimes (I \otimes B)) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I, I \otimes B, C}} & I \otimes ((I \otimes B) \otimes C) & & \end{array}$$

外側の五角形は五角形等式より可換である. 左と右上^{*17} の三角形は三角形等式より可換である. 中央の 2 つの四角形は α の自然性^{*18} より可換である. 図式のそれぞれの射が同型であることから右の三角形も可換である. $I \otimes -$ が圏同値を与えることから, この三角形の可

*17 ここで coherence 定理を使っている.

*18 α が自然変換であるという意味である.

換性は示したい図式の可換性と同値である.

下の図式についても同様に示すことができる.

定理 3.10

モノイダル圏において以下の等式が成立する.

$$\lambda_I = \rho_I : I \otimes I \rightarrow I$$

証明

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & I \otimes I & & \\
 & \nearrow \rho_I \otimes \text{id}_I & \uparrow \text{id}_I \otimes \lambda_I & \searrow \lambda_I & \\
 (I \otimes I) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{I, I, I}} & I \otimes (I \otimes I) & & I \\
 & \searrow \lambda_I \otimes \text{id}_I & \downarrow \lambda_{I \otimes I} & \nearrow \lambda_I & \\
 & & I \otimes I & &
 \end{array}$$

左上の三角形は三角形等式より可換である. 左下の三角形は補題 3.8 より可換である. 右の四角形は λ の自然性より可換である. これより外側の四角形は可換である. つまり

$$\lambda_I \circ (\rho_I \otimes \text{id}_I) = \lambda_I \circ (\lambda_I \otimes \text{id}_I)$$

である. λ は (自然) 同型であるので

$$\rho_I \otimes \text{id}_I = \lambda_I \otimes \text{id}_I$$

である. 補題 3.7 より

$$\rho_I = \lambda_I$$

が成立する.

$\lambda_I = \rho_I$ を直接, 図式を用いて証明する方法は [?] の 1 章の演習問題を参照してほしい.

ベクトル空間 A, B のテンソル積 $A \otimes B$ と $B \otimes A$ は一般には等しくないが, 等しくなる場合を考えるのは自然であろう. 圏論において $=$ は強すぎる条件であるので, 同型程度の違いは許すことにする.

定義 3.11 (組紐モノイダル圏)

C を圏とする. 組紐モノイダル圏 (braided monoidal category) とは 7 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $\otimes, I, \alpha, \lambda, \rho$ はモノイダル圏の定義と同じである.

- σ は対象 A, B に対して

$$A \otimes B \xrightarrow{\sigma_{A,B}} B \otimes A$$

とする自然同型である. これを組紐構造 (braiding structure) という.

- 対象 A, B, C に対して以下の2つの図式^{*19} が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A \\
\alpha_{A,B,C}^{-1} \swarrow & & \nwarrow \alpha_{B,C,A}^{-1} \\
(A \otimes B) \otimes C & & B \otimes (C \otimes A) \\
\sigma_{A,B} \otimes \text{id}_C \searrow & & \nearrow \text{id}_B \otimes \sigma_{A,C} \\
(B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B,A,C}} & B \otimes (A \otimes C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{A \otimes B, C}} & C \otimes (A \otimes B) \\
\alpha_{A,B,C} \swarrow & & \nwarrow \alpha_{C,A,B} \\
A \otimes (B \otimes C) & & (C \otimes A) \otimes B \\
\text{id}_A \otimes \sigma_{B,C} \searrow & & \nearrow \sigma_{A,C} \otimes \text{id}_B \\
A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A,C,B}^{-1}} & (A \otimes C) \otimes B
\end{array}$$

例 3.12

\mathbf{Hilb} は組紐モノイダル圏となる. σ は任意の $a \in H, b \in K$ に対して

$$\sigma_{H,K} : H \otimes K \rightarrow K \otimes H : a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

とする線形写像で与えられる. これを canonical な組紐構造という.

定義 3.13 (対称モノイダル圏)

対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) とは組紐モノイダル圏であって, 対象 A, B と自然同型 $\sigma_{A,B}$ が以下の等式を満たすものである.

$$\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$$

例 3.14

\mathbf{Hilb} は canonical な組紐構造により, 対称モノイダル圏となる.

補題 3.15

対称モノイダル圏において以下の等式が成立する.

$$\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}^{-1}$$

^{*19} 2 つ合わせて六角形等式 (hexagon equation) といわれる.

証明

$$\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$$

に左から $\sigma_{B,A}^{-1}$ を合成すればよい.

定理 3.16

対称モノイダル圏において以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} I \otimes A & \xrightarrow{\sigma_{A,I}} & A \otimes I \\ & \searrow \lambda_A \quad \swarrow \rho_A & \\ & A & \end{array}$$

証明

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} & & (A \otimes I) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{A,I,I}} & A \otimes (I \otimes I) \\ & \swarrow \sigma_{A,I} \otimes \text{id}_I & \downarrow \rho_A \otimes \text{id}_I & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_A & \searrow \sigma_{A,I \otimes I} \\ (I \otimes A) \otimes I & \xrightarrow{\lambda_{I \otimes A}} & A \otimes I & \xrightarrow{\sigma_{A,I}} & I \otimes A & \xleftarrow{\text{id}_I \otimes \text{id}_A} & (I \otimes I) \otimes A \\ & \searrow \alpha_{I,A,I} & \uparrow \lambda_{A \otimes I} & \uparrow \text{id}_I \otimes \lambda_A & \swarrow \alpha_{I,I,A} \\ & & I \otimes (A \otimes I) & \longrightarrow & I \otimes (I \otimes A) \end{array}$$

外側の六角形は六角形等式より可換である. 左下と右下の三角形は補題 3.8 より可換である. 中央上の三角形は三角形等式より可換である. 中央下の四角形は σ の自然性より可換である. 右上の四角形は λ の自然性より可換である. 図式内の射が全て同型射であることから, 左上の三角形は可換である. 補題 3.7 よりこれは示したい図式と同値である.

3.2 モノイダル関手

1 節ではモノイダル圏を定義し, **Hilb** が例となることを見た. 2 節ではモノイダル圏の間の関手を定義しよう.

定義 3.17 (モノイダル関手)

C, D をモノイダル圏とする. モノイダル関手 (monoidal functor) ^{*20} とは 3 つ組 (F, φ, φ_0) であって以下の条件を満たすものである.

^{*20} 定義に出てきた 2 つの自然同型が単に自然変換である時を lax モノイダル関手 (lax monoidal functor, weak monoidal functor) といい, 自然同型となる時に強モノイダル関手 (strong monoidal functor) ということが一般的である. 上の定義は強モノイダル関手であるが, 以降ではこの強モノイダル関手しか表れないので, [c4qt] に従ってこれを単にモノイダル関手という.

- $F : C \rightarrow D$ は関手である.
- 次の 2 つの自然同型が存在する.

$$\begin{aligned} F(A) \otimes' F(B) &\xrightarrow{\varphi_{A,B}} F(A \otimes B) \\ I' &\xrightarrow{\varphi_0} F(I) \end{aligned}$$

- 次の 3 つの図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} (F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) & \xrightarrow{\alpha'_{F(A), F(B), F(C)}} & F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) \\ \downarrow \varphi_{A,B} \otimes' \text{id}_{F(C)} & & \downarrow \text{id}_{F(A)} \otimes' \varphi_{B,C} \\ F(A \otimes B) \otimes' F(C) & & F(A) \otimes' F(B \otimes C) \\ \downarrow \varphi_{A \otimes B, C} & & \downarrow \varphi_{A, B \otimes C} \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{F(\alpha_{A,B,C})} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' I' & \xrightarrow{\rho'_{F(A)}} & F(A) \\ \downarrow \text{id}_{F(A)} \otimes' \varphi_0 & & \downarrow F(\rho_A^{-1}) \\ F(A) \otimes' F(I) & \xrightarrow{\varphi_{A,I}} & F(A \otimes I) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I' \otimes' F(A) & \xrightarrow{\lambda'_{F(A)}} & F(A) \\ \downarrow \varphi_0 \otimes' \text{id}_{F(A)} & & \downarrow F(\lambda_A^{-1}) \\ F(I) \otimes' F(A) & \xrightarrow{\varphi_{I,A}} & F(I \otimes A) \end{array}$$

例 3.18

$F : \mathbf{FSet} \rightarrow \mathbf{FRel}$ や $G : \mathbf{FSet} \rightarrow \mathbf{FHilb}$ はモノイダル関手となる.

以降ではモノイダル関手 (F, φ, φ_0) の F は $F : C \rightarrow D$ という関手を表すことにする.

定義 3.19 (組紐モノイダル関手)

C, D を組紐モノイダル圏とする. 組紐モノイダル関手 (braided monoidal functor) (F, φ, φ_0) とは, モノイダル関手 (F, φ, φ_0) であって以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\sigma'_{F(A), F(B)}} & F(B) \otimes' F(A) \\ \downarrow \varphi_{A,B} & & \downarrow \varphi_{A,B} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{F(\sigma_{B,A})} & F(B \otimes A) \end{array}$$

定義 3.20 (対称モノイダル関手)

C, D を対称モノイダル圏とする. 対称モノイダル関手 (symmetric monoidal functor) ^{*21} (F, φ, φ_0) とはその間の組紐モノイダル関手である.

^{*21} 対称モノイダル関手は組紐モノイダル関手と違って可換図式の条件が追加で課されない. これは組紐モノイダル圏はモノイダル圏に自然同型 $\sigma_{A,B}$ という「構造」が課されるが, 対称モノイダル圏は組紐モノイダル圏に $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$ という「性質」が追加されるだけという違いから生じるものである.

3.3 モノイダル同値とモノイダル自然変換

2つのモノイダル圏が同値であるとはどういうことであるか。それを定義するために必要な考え方がモノイダル同値である。モノイダル自然変換から、モノイダル圏の同値が自然に定義される。

以降ではモノイダル関手 $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ の F, G は $F, G : C \rightarrow D$ という関手を表すことにする。

定義 3.21 (モノイダル自然変換)

C, D をモノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ をモノイダル関手とする。モノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) とは自然変換 $\mu : F \Rightarrow G$ であって、以下の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & F(A \otimes B) \\ \mu_A \otimes' \mu_B \downarrow & & \downarrow \mu_{A \otimes B} \\ G(A) \otimes' G(B) & \xrightarrow{\varphi'_{A,B}} & G(A \otimes B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{\varphi_0} & F(I) \\ & \searrow \varphi'_0 & \downarrow \mu_I \\ & & G(I) \end{array}$$

定義 3.22 (組紐モノイダル自然変換)

C, D を組紐モノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ を組紐モノイダル関手とする。組紐モノイダル自然変換 (braided monoidal natural transformation) $\mu : F \Rightarrow G$ とはその間のモノイダル自然変換である。

定義 3.23 (対称モノイダル自然変換)

C, D を対称モノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ を対称モノイダル関手とする。対称モノイダル自然変換 (symmetric monoidal natural transformation) $\mu : F \Rightarrow G$ とはその間のモノイダル自然変換である。

定義 3.24 (モノイダル同値)

C, D をモノイダル圏, (F, φ, φ_0) をモノイダル関手とする。 C, D がモノイダル同値 (monoidal equivalence) であるとは、モノイダル関手 (F, φ, φ_0) に対してある関手 $G : D \rightarrow C$ が存在して

$$\begin{aligned} G \circ F &\cong \text{id}_C \\ F \circ G &\cong \text{id}_D \end{aligned}$$

が成立する時である。

定理 3.25

C, D をモノイダル圏, (F, φ, φ_0) をモノイダル関手とする. 以下の 2 つは同値である.

- C, D がモノイダル同値である.
- (F, φ, φ_0) がモノイダル関手であり, 通常の間手として圏同値を与える.

証明

省略

3.4 厳格化定理と coherence 定理

4 節では厳格化定理とモノイダル圏における coherence 定理を証明する. この節は読まなくても, 4 章以降を読み進める上で特に問題はない. (執筆中)

定義 3.26 (厳格モノイダル圏)

厳格モノイダル圏 (strict monoidal category) とはモノイダル圏であって, 自然同型 α, λ, ρ が全て恒等射となる時である. ^{*22}

例 3.27 (End)

C を圏とする. この時, $\mathbf{End}(C)$ を C 上の自己関手の圏とすると, 厳格モノイダル圏となる.

- 対象を C 上の自己関手 $F : C \rightarrow C$
- F から G への射は, 関手 F から G への自然変換とする.
- テンソル積を自己関手の合成 \circ とする.
- 単位対象を恒等関手 Id とする.
- 自然同型 α, λ, ρ をそれぞれ自己関手の合成とする.

定義 3.28 (厳格モノイダル関手)

厳格モノイダル関手 (strict monoidal functor) とはモノイダル関手 (F, φ, φ_0) であって, 自然同型 φ, φ_0 が恒等射となる時である.

例 3.29

恒等関手は厳格モノイダル関手である.

定理 3.30 (厳格化定理)

任意のモノイダル圏はある厳格モノイダル圏とモノイダル同値となる.

証明

^{*22} この場合, 五角形等式と三角形等式が満たされることは明らかである.

執筆中

定理 3.31 (coherence 定理)

モノイダル圏において以下の 2 つは同値である.

- 恒等射 id , 自然同型 α, λ, ρ , それらの逆射からテンソル積 \otimes と合成 \circ をとる操作で構成された射は, それぞれ domain と codomain が同一であれば射として等しい.
- モノイダル圏の公理に出てくる五角形等式と三角形等式が成立する.

証明

執筆中

4 圏上の線形代数

モノイダル圏における単位対象の間の射 $I \rightarrow I$ は線形代数における体のようにふるまう．
このため、射 $I \rightarrow I$ には特別な名前をつけて議論をする．

4.1 scalar

定義 4.1 (scalar)

モノイダル圏において scalar とは射 $I \rightarrow I$ である．

例 4.2

Hilb において scalar とは $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ である． $\mathbb{C} \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ に対して f, g が (有界) 線形作用素であるので、 $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(s) = sf(1)$$

となり、scalar は s と $f(1)$ の値で定まる．

Hilb において scalar の合成とは複素数の積である．つまり $\mathbb{C} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{C}$ に対して

$$(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(sf(1)) = sg(f(1)) = sg(1)f(1)$$

となり、scalar の合成は s と $f(1)$ と $g(1)$ の値で定まる．

定理 4.3

モノイダル圏において $I \xrightarrow{f,g} I$ は

$$f \circ g = g \circ f$$

を満たす．つまり、scalar は可換である．

証明

次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc}
 I \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_I} & & I \otimes I & \\
 \downarrow \text{id}_I \otimes g & \swarrow \rho_I & I & \xrightarrow{f} & I & \nwarrow \rho_I & \downarrow \text{id}_I \otimes g \\
 & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\
 & & I & \xrightarrow{f} & I & & \\
 & \swarrow \rho_I & & & & \nwarrow \rho_I & \\
 I \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_I} & & I \otimes I &
 \end{array}$$

定理 3.10 より $\lambda_I = \rho_I$ である. 中央の四角形が求めたい図式である. 側面の 4 つの四角形は λ と ρ の自然性より可換である. 外側の四角形は交換則より可換である.

$$\begin{aligned}(f \otimes \text{id}_I) \circ (\text{id}_I \otimes g) &= (f \otimes \text{id}_I) \circ (\text{id}_I \otimes g) \\ &= (\text{id}_I \otimes f) \circ (g \otimes \text{id}_I) \\ &= (\text{id}_I \otimes g) \circ (f \otimes \text{id}_I)\end{aligned}$$

以上より中央の四角形は可換である.

例 4.4

Hilb において複素数の積は可換である.

定義 4.5 (左 scalar 積)

執筆中

定義 4.6 (右 scalar 積)

執筆中

4.2 直和

2 つのベクトル空間 V, W の間には V の任意の元 a と W の元 0 に対して, 線形写像 $V \rightarrow W : a \mapsto 0$ が必ず存在する. この線形写像は 0 次元ベクトル空間 $\{0\}$ を用いて $V \rightarrow \{0\} \rightarrow W$ のように一意に分解される. この性質を一般の圏において議論する. 詳しい証明は [\[gihou\]](#) を参照してほしい.

定義 4.7 (零射)

圏が零射 (zero morphism) を持つとは以下の条件を満たす時である.

- 任意の対象 A, B に対して零射といわれる射 $A \xrightarrow{0_{A,B}} B$ が存在する.
- 零射と任意の射の合成は零射となる. つまり任意の対象 A, B, C と射 $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ に対して

$$\begin{aligned}0_{B,C} \circ f &= 0_{A,C} \\ g \circ 0_{A,B} &= 0_{A,C}\end{aligned}$$

が成立する.

以降では $0_{A,B}$ を混乱の恐れがない限り 0 と表す.

定義 4.8 (零対象)

圏の対象 I が零対象 (zero object) であるとは, I が終対象かつ始対象となる時である.

例 4.9

Hilb において零射は任意の元を 0 に送る零写像で与えられる。零対象は 0 次元ベクトル空間で与えられる。^{*23}

補題 4.10

零対象は同型を存在すれば除いて一意である。

証明

終対象と始対象が存在すれば同型を除いて一意であることから従う。

定理 4.11

零対象 0 を持つ圏において対象 A, B とする。この時、零対象を経由する射 $A \rightarrow 0 \rightarrow B$ は零射となる。

証明

零対象を経由する射が零射の定義を満たすことを確かめれば良い。

定理 4.12

零射が与えられた圏において A, B を対象とすると、以下の 3 つが成立する。

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ が存在する時、以下を満たす射 $A \xrightarrow{i'_A} A \times B, B \xrightarrow{i'_B} A \times B$ が一意に存在する。

$$\begin{aligned} p_A \circ i'_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ i'_B = \text{id}_B \\ p_A \circ i'_B &= 0, \quad p_B \circ i'_A = 0 \end{aligned}$$

- 余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在する時、以下を満たす射 $A \amalg B \xrightarrow{p'_A} A, A \amalg B \xrightarrow{p'_B} B$ が一意に存在する。

$$\begin{aligned} p'_A \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p'_B \circ i_B = \text{id}_B \\ p'_A \circ i_B &= 0, \quad p'_B \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ と余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在する時、以下を満たす射 $A \amalg B \xrightarrow{h} A \times B$ が一意に存在する。

$$\begin{aligned} p_A \circ h \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ h \circ i_B = \text{id}_B \\ p_A \circ h \circ i_B &= 0, \quad p_B \circ h \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

証明

省略

^{*23} 単位対象と零対象に同じ記号 I を用いているが、この例からも分かるように一般には一致しない。単位対象はモノイダル圏において定義されるが、零対象は一般の圏において (存在すれば) 定義されるものである。

定理 4.13

零射が与えられた圏において A, B を対象, $p'_A, p'_B, i'_A, i'_B, h$ を前の補題で得られた射とする. この時, 以下の 3 つは同値である.

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ が存在して $(A \times B, i'_A, i'_B)$ が A, B の余直積となる.
- 余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在して $(A \amalg B, p'_A, p'_B)$ が A, B の直積となる.
- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ と余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在して $A \amalg B \xrightarrow{h} A \times B$ は同型射となる.

証明

省略

定義 4.14 (直和)

零射が与えられた圏において A, B を対象とする. 上の命題のいずれかが成立する時, A と B の直和 (direct sum) が存在するという. この時 A と B の直和, つまり (余) 直積を $A \oplus B$ ^{*24} と表す.

直和の具体例は後に定義される複積で説明する.

補題 4.15

零射が与えられた圏において A, B を対象とする. A, B の直和 $A \oplus B$ が存在する時, 上の命題により射 p_A, p_B, i_A, i_B が存在して以下の命題を満たす.

- $(A \oplus B, p_A, p_B)$ は直積となる.
- $(A \oplus B, i_A, i_B)$ は余直積となる.
- 射 p_A, p_B, i_A, i_B に対して以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} p_A \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ i_B = \text{id}_B \\ p_A \circ i_B &= 0, \quad p_B \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

証明

直和の定義より明らかである.

定理 4.16

直和は存在すれば同型を除いて一意である.

証明

省略

^{*24} 正しくは「5 つ組 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ を直和とする」とすべきであるが, 以降では混乱の恐れがない時は単に「 $A \oplus B$ を直和とする」のように書く.

4.3 重ね合わせ則

ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $V \xrightarrow{f,g} W$ が与えられた時, 写像の和 $V \xrightarrow{f+g} W$ もまた線形写像となる. この性質を一般の圏において定義する.

定義 4.17 (重ね合わせ則)

C を圏とする. 圏 C が重ね合わせ則 (superposition rule) を持つとは, 任意の対象 A, B, C と射 $A \xrightarrow{f,f',f''} B, B \xrightarrow{g,g'} C$ が以下の条件を満たす時である.

- $\text{Hom}_C(A, B)$ は可換モノイド構造を持つ.
 - 可換性:

$$f + f' = f' + f$$

- 結合則:

$$(f + f') + f'' = f + (f' + f'')$$

- 単位射の存在: 単位射^{*25} といわれる射 $A \xrightarrow{u_{A,B}} B$ が存在して以下の等式を満たす.

$$f + u_{A,B} = f$$

- 双線形性: 合成を定める写像

$$- \circ - : \text{Hom}_C(B, C) \times \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(A, C) : (f, g) \mapsto g \circ f$$

が双線形性となる. つまり以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} (g + g') \circ f &= (g \circ f) + (g' \circ f) \\ g \circ (f + f') &= (g \circ f) + (g \circ f') \end{aligned}$$

- 単位射の合成は単位射となる. つまり以下の等式が成立する.

$$u_{B,C} \circ u_{A,B} = u_{A,C}$$

例 4.18

Hilb において重ね合わせ則は, Hilbert 空間の元 a と線形写像 f, g に対して $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$, 単位射を零射 $a \mapsto 0$ として与えられる. この時, 零射と単位射は一致する.

^{*25} これは零射とは関係ない. 一致するのは次の補題を参照してほしい.

補題 4.19

零対象と重ね合わせ則を持つ圏において零射と単位射は一致する. つまり任意の対象 A, B に対して

$$u_{A,B} = 0_{A,B}$$

が成立する.

証明

単位射が零射の定義を満たすことを確かめれば良い.

この補題より零対象と重ね合わせ則を持つ圏においては単位射を $0_{A,B}$ と書く.

補題 4.20

零対象と重ね合わせを持つ圏において, Hom に入る構造は可換モノイド構造と合成に関して双線形性のみになる. つまり単位射の合成が合成になるという条件を課さなくても良い.

証明

補題 4.14 より単位射と零射は一致する. 零射と零射の合成が零射となることは零射の定義から明らかである.

定義 4.21 (複積)

零対象と重ね合わせ則を持つ圏において A, B を対象とする. A, B の複積 (biproduct) ^{*26} とは5つ組 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $A \oplus B$ は C の対象である.
- p_A, p_B, i_A, i_B は $A \oplus B \xrightarrow{p_A} A, A \oplus B \xrightarrow{p_B} B, A \xrightarrow{i_A} A \oplus B, A \xrightarrow{i_B} A \oplus B$ という C の射で以下の等式を満たす.

$$p_A \circ i_A = \text{id}_A, p_B \circ i_B = \text{id}_B$$

$$p_A \circ i_B = 0, p_B \circ i_A = 0$$

$$i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = \text{id}_{A \oplus B}$$

例 4.22

Hilb において H, K を Hilbert 空間とすると, 複積はその直和 $H \oplus K$ で与えられる. H の任意の元 h と K の任意の元 k に対して, 射影 p_H, p_K はそれぞれ

$$p_H : H \oplus K \rightarrow H : (h, k) \mapsto h$$

$$p_K : H \oplus K \rightarrow K : (h, k) \mapsto k$$

^{*26} 通常はブレ加法圏において定義される概念であるが, 零対象と重ね合わせ則を持つ圏においても同様に定義することができる. この pdf ではブレ加法圏において定義される複積は出てこないで上で定義したものを複積ということにする. 複積ではなく双積と訳されることもある.

とする線形写像, 入射 i_H, i_K はそれぞれ

$$i_H : H \rightarrow H \oplus K : h \mapsto (h, 0)$$

$$i_K : K \rightarrow H \oplus K : h \mapsto (0, k)$$

とする線形写像で与えられる.

定理 4.23

零対象と重ね合わせ則を持つ圏において, 以下の 3 つは同値となる.

- $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ が複積となる.
- $(A \oplus B, p_A, p_B)$ が直積となる.
- $(A \oplus B, i_A, i_B)$ が余直積となる.

証明

省略

補題 4.24

複積と零対象を持つ圏において, 重ね合わせ則は一意に定まる.

証明

執筆中

4.4 射の行列表示

定義 4.25 (射の行列表示)

零射が与えられた圏において $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を直和とする.

- A から $B_i (1 \leq i \leq M)$ の族 $\{A \xrightarrow{f_i} B_i\}_{1 \leq i \leq M}$ に対して直積の普遍性より得られる射 $A \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$$

と表す. 特に $B_1 = \cdots = B_M = A$ の時, つまり $A \xrightarrow{f} A \oplus \cdots \oplus A$ は

$$\begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \vdots \\ \text{id}_A \end{pmatrix}$$

となり, これを対角射 (diagonal morphism) といい Δ_A または単に Δ と表す.

- $A_j (1 \leq j \leq N)$ から B への射の族 $\{A_j \xrightarrow{g_j} B\}_{1 \leq j \leq N}$ に対して余直積の普遍性より得られる射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{g} B$ を

$$g := (g_1 \quad \cdots \quad g_N)$$

と表す. 特に $A_1 = \cdots = A_n = B$ の時, つまり $B \oplus \cdots \oplus B \xrightarrow{g} B$ は

$$(\text{id}_B \quad \cdots \quad \text{id}_B)$$

となり, これを ∇_B または単に ∇ と表す.

- 射の族 $\{A_j \xrightarrow{f_{i,j}} B_i | 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}$ に対して, 直積と余直積より得られる射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を以下のように表す.

$$(f_{i,j}) := \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}$$

そしてこの行列表示を次のように定義する.

$$(f_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix} := \sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ p_m$$

定義 4.26

零射が与えられた圏において $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を直和, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を射とする. この時, $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ に対して, 自然な入射と射影を合成して

$$f_{i,j} = p_i \circ f \circ i_j$$

と定める. この時, f を定義した行列表示を用いて自然に

$$f = (f_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}$$

と表すことができる. 各 $f_{i,j}$ を射 f の (i,j) 成分という.

各成分において零射を 0, 恒等射を 1 と書くとより行列のように計算することができる.

定理 4.27

零射が与えられた圏において $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M, C_1 \oplus \cdots \oplus C_L$ を直和とする. 射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M \xrightarrow{g} C_1 \oplus \cdots \oplus C_L$ に対して行列表示が与えられているとする. この時, 合成射 $g \circ f$ の行列表示は行列の積のように表すことができる.

証明

省略

例 4.28

Hilb において射の行列表示は, 線形写像を行列とみなした時の通常の行列表示で与えられる. 射の行列表示の積は, この意味での通常の行列表示の積で与えられる.

5 ダガー圏

5.1 ダガー圏

ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $H \xrightarrow{f} K$ は一意な随伴 $K \xrightarrow{f^\dagger} H$ を持ち、これも線形写像となる。このダガーの性質を一般に圏において定義する。

定義 5.1 (ダガー関手)

C を圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f} B$ を射とする。ダガー関手 (dagger functor) $(-)^\dagger : C^{\text{op}} \rightarrow C$ とは関手であって以下の条件を満たすものである。

- $A^\dagger = A$
- $A \xrightarrow{f} B$ に対して $B \xrightarrow{f^\dagger} A$ で $(f^\dagger)^\dagger = f$ を満たす^{*27}

定義 5.2 (ダガー圏)

C を圏とする。ダガー圏 (dagger category) とはダガー関手 $(-)^\dagger : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を備えた圏 C である。

例 5.3

Hilb はダガー圏となる。ダガー関手 $(-)^\dagger : \mathbf{Hilb} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ は対象をそれ自身に、射をその随伴写像に移す対応で与えられる。

随伴の存在により、Hilbert 空間における内積を定義することができる。

定理 5.4

Hilb において H を対象, $\mathbb{C} \xrightarrow{a,b} H$ を射とする。この時, $\text{scalar } \mathbb{C} \xrightarrow{b} H \xrightarrow{a^\dagger} \mathbb{C}$ は内積 $\langle a | b \rangle$ に一致する。

証明

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \xrightarrow{b} H \xrightarrow{a^\dagger} \mathbb{C} &= a^\dagger(b(1)) \\ &= \langle 1 | a^\dagger(b(1)) \rangle \\ &= \langle a | b \rangle\end{aligned}$$

定義 5.5

ダガー圏において射 $A \xrightarrow{f} B$ が以下のそれぞれの条件を満たす時、特別な名前をつける。

^{*27} (共変) 関手であるが C の射で書くと $(g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$ となって反変関手のようにふるまうので注意してほしい。

- 射 $B \xrightarrow{g} A$ に対して $g = f^\dagger$ となる時, f を g の随伴射 (adjoint morphism) という.
- $f \circ f^\dagger = \text{id}_B, f^\dagger \circ f = \text{id}_A$ となる時, つまり $f^\dagger = f^{-1}$ となる時, f をユニタリ射 (unitary morphism) という.
- $f^\dagger \circ f = \text{id}_A$ となる時, f を等長射 (isometry morphism) という.
- $A = B$ で $f = f^\dagger$ となる時, f を自己随伴射 (self-adjoint morphism) という.
- $f^\dagger \circ f$ が射影となる時, f を部分等長射 (partial isometry morphism) という.
- $A = B$ であって, ある射 $A \xrightarrow{g} C$ に対して $f = g^\dagger \circ g$ となる時, f を正定射 (positive morphism) という.

補題 5.6

ダガー圏において, ある対象が終対象か始対象であれば零対象となる.

証明

省略

補題 5.7

零対象を持つダガー圏において A, B を対象とする. この時, 以下の等式が成立する.

$$0_{A,B}^\dagger = 0_{B,A}$$

証明

$A \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} B$ とすると $B \xrightarrow{b^\dagger} 0 \xrightarrow{a^\dagger} A$ であるので

$$\begin{aligned} 0_{A,B}^\dagger &= (b \circ a)^\dagger \\ &= a^\dagger \circ b^\dagger \\ &= 0_{B,A} \end{aligned}$$

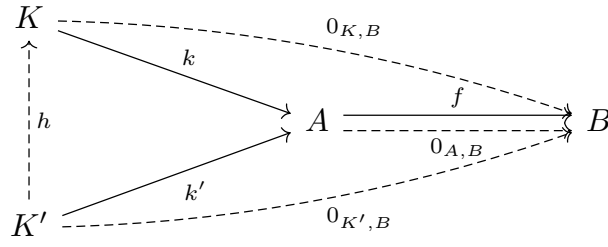
最後の等号において零射の一意性を使った.

5.2 ダガー核

定義 5.8 (ダガー核)

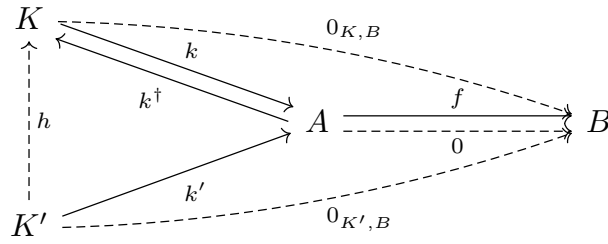
C を零対象を持つダガー圏とする. A, B を対象, $A \xrightarrow{f,g} B$ を射とすると, $A \xrightarrow{f} B$ のダガー核 (degger kernel) とは 2 つ組 (K, k) であって, 以下の条件を満たすものである.

- K は C の対象である.
- $K \xrightarrow{k} A$ は $f \circ k = 0_{K,B}$ を満たす C の等長射である.
- ある対象 K' と射 $K' \xrightarrow{k'} A$ が存在した時, $k' = k \circ h$ であって $f \circ k' = 0_{K',B}$ を満たす. つまり次の図式を可換にする.



補題 5.9

ダガー核において射 $K' \xrightarrow{h} K$ は一意に存在して $h = k^\dagger \circ k'$ である. つまり次の図式を可換にする. この射は一意なユニタリ同型射を除いて一意である. (unique up to unique unitary isomorphism)



証明

k が等長射であることと $k' = k \circ h$ であることより

$$\begin{aligned} h &= k^\dagger \circ k \circ h \\ &= k^\dagger \circ k' \end{aligned}$$

これより, ダガー核は存在すれば一意なユニタリ同型射を除いて一意である.

例 5.10

Hilb はダガー核をもつ. Hilbert 空間 H, K とその間の有界線形作用素 $H \xrightarrow{f} K$ のダガー核は $\ker(f) := \{a \in H | f(a) = 0\}$ から H への包含写像である. $\ker(f)$ が H から誘導される内積によって定まるので, 単に核ではなくダガー核となる.

補題 5.11 (非退化性)

執筆中

証明

省略

5.3 ダガー複積

定義 5.12 (ダガー複積)

零対象と重ね合わせ則を持つダガー圏, A, B を対象とする. ダガー複積 (dagger biproduct)

とは複積 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ であって

$$\begin{aligned} i_A^\dagger &= p_A \\ i_B^\dagger &= p_B \end{aligned}$$

を満たす時である.

補題 5.13

ダガー複積を持つダガー圏において, 行列の随伴はそのダガー転置である. つまり, 以下の等式が成立する.

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} f_{1,1}^\dagger & \cdots & f_{1,N}^\dagger \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M,1}^\dagger & \cdots & f_{M,N}^\dagger \end{pmatrix}$$

証明

$(A_1 \oplus A_2), (B_1 \oplus B_2)$ を複積としてその間の射を $(A_1 \oplus A_2) \xrightarrow{f} (B_1 \oplus B_2)$ とする.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}^\dagger &= \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ p_m \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_{m,n} \text{id}_{B_1 \oplus B_2} \circ i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \circ \text{id}_{A_1 \oplus A_2} \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_p i_p \circ i_p^\dagger \right) \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \left(\sum_q i_q \circ i_q^\dagger \right) \\ &= \sum_{p,q} i_p \circ i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q \circ i_q^\dagger \end{aligned}$$

ここでダガー関手の性質より

$$\begin{aligned}
i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q &= i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ (i_q^\dagger)^\dagger \\
&= i_p^\dagger \circ \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \right)^\dagger \\
&= \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \circ i_p \right)^\dagger
\end{aligned}$$

となる^{*28} ので

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q} i_p \circ i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q \circ i_q^\dagger &= \sum_{p,q} i_p \circ \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \circ i_p \right)^\dagger \circ i_q^\dagger \\
&= \sum_{p,q} i_p \circ \left(\sum_{m,n} i_q^\dagger \circ i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \circ i_p \right)^\dagger \circ i_q^\dagger \\
&= \sum_{p,q} i_p \circ (f_{p,q})^\dagger \circ i_p^\dagger
\end{aligned}$$

射の行列表示の定義より、これは右辺に一致する。最後の等式で直和の定義

$$\begin{aligned}
\text{id}_{A_n} &= p_n \circ i_n \\
0_{A_n, A_m} &= p_m \circ i_n \quad (m \neq n)
\end{aligned}$$

を用いた。

一般の有限複積についても同様に示すことができる。^{*29}

補題 5.14

ダガー複積を持つダガー圏において、ダガーは加法について分配則を持つ。つまり、対象 A, B と射 $A \xrightarrow{f,g} B$ に対して以下の等式が成立する。

$$(f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger$$

証明

^{*28} $(h \circ g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger \circ h^\dagger$ を使っているだけである。

^{*29} 射の行列表示の定義とダガー関手の定義から自明ではあるが、[c4qt] に従って証明をおこなった。

合成射の行列表示より

$$\begin{aligned}
 (f + g)^\dagger &= \left((f \ g) \circ \begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \text{id}_A \end{pmatrix} \right)^\dagger \\
 &= \begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \text{id}_A \end{pmatrix}^\dagger \circ (f \ g)^\dagger \\
 &= (\text{id}_A \ \text{id}_A) \circ \begin{pmatrix} f^\dagger \\ g^\dagger \end{pmatrix} \\
 &= f^\dagger + g^\dagger
 \end{aligned}$$

5.4 モノイダルダガー圏

Hilbert 空間 H_1, H_2, K_1, K_2 とその間の有界線形写像 $H_1 \xrightarrow{f} K_1, H_2 \xrightarrow{g} K_2$ に対して, テンソル積と随伴をとる操作は可換である. つまり $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$ が成立する. この性質をモノイダル積とダガーを備えた圏で一般に議論する.

定義 5.15 (モノイダルダガー圏)

モノイダルダガー圏 (monoidal dagger category) とはモノイダル圏かつダガー圏であって, 以下の条件を満たすものである.

- 任意の射 f, g に対して $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$
- 自然同型 α, λ, ρ が全てユニタリとなる.

定義 5.16 (組紐モノイダルダガー圏)

組紐モノイダルダガー圏 (braided monoidal dagger category) とはモノイダルダガー圏であって, 組紐構造 σ もユニタリである時である

定義 5.17 (対称モノイダルダガー圏)

対称モノイダルダガー圏 (symmetric monoidal dagger category) とは組紐モノイダルダガー圏であって, 組紐構造 σ が対称となる時である.

例 5.18

\mathbf{Hilb} は対称モノイダルダガー圏である. つまり $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$ となる.

6 双対化可能

圏論的量子力学で一番重要な概念は双対化可能性であるといっても過言ではない。双対化可能である圏はテンソル積や重ね合わせ則と相性が良い。また、線形代数に出てくるトレースや次元の類似概念を定義することができる。証明は [CWM] も参考にしてほしい。

6.1 双対対象

定義 6.1 (右双対)

C をモノイダル圏, A を対象とする。 C の対象 A^* が A の右双対 (right dual) であるとは射 $\text{ev}'_A : A \otimes A^* \rightarrow I$ と $\text{coev}'_A : I \rightarrow A^* \otimes A$ が存在して、以下の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccccc}
 A^* & \xrightarrow{\rho_{A^*}^{-1}} & {}^*A \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \text{coev}'_A} & A^* \otimes (A \otimes A^*) \\
 \text{id}_{A^*} \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A^*, A, A^*}^{-1} \\
 A^* & \xleftarrow{\lambda_A} & I \otimes A^* & \xleftarrow{\text{ev}'_A \otimes \text{id}_{A^*}} & (A^* \otimes A) \otimes A^* \\
 \\
 A & \xrightarrow{\lambda_A^{-1}} & I \otimes A & \xrightarrow{\text{coev}'_A \otimes \text{id}_A} & (A \otimes A^*) \otimes A \\
 \text{id}_A \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A, A^*, A} \\
 A & \xleftarrow{\rho_A} & A \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}'_A} & A \otimes (A^* \otimes A)
 \end{array}$$

射 $\text{ev}'_A : A \otimes A^* \rightarrow I$ を余単位射 (counit morphism), $\text{coev}'_A : I \rightarrow A^* \otimes A$ を単位射 (unit morphism) という。

定義 6.2 (左双対)

C をモノイダル圏, A を対象とする。 C の対象 *A が A の左双対 (left dual) であるとは射 $\text{ev}_A : {}^*A \otimes A \rightarrow I$ と $\text{coev}_A : I \rightarrow A \otimes {}^*A$ が存在して、以下の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccccc}
 {}^*A & \xrightarrow{\rho_{{}^*A}^{-1}} & {}^*A \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{{}^*A} \otimes \text{coev}_A} & {}^*A \otimes (A \otimes {}^*A) \\
 \text{id}_{{}^*A} \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{{}^*A, A, {}^*A}^{-1} \\
 {}^*A & \xleftarrow{\lambda_A} & I \otimes {}^*A & \xleftarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{{}^*A}} & ({}^*A \otimes A) \otimes {}^*A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\lambda_A^{-1}} & I \otimes A & \xrightarrow{\text{coev}_A \otimes \text{id}_A} & (A \otimes {}^*A) \otimes A \\
\text{id}_A \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A, {}^*A, A} \\
A & \xleftarrow{\rho_A} & A \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}_A} & A \otimes ({}^*A \otimes A)
\end{array}$$

射 $\text{ev}_A : {}^*A \otimes A \rightarrow I$ を評価射 (evaluation morphism), $\text{coev}_A : I \rightarrow A \otimes {}^*A$ を余評価射 (coevaluation morphism) という.

A^* や *A は A の双対対象 (dual object) といわれる.

定理 6.3

右双対 [左双対] は存在すれば, 同型を除いて一意である.

証明

省略

定義 6.4 (剛モノイダル圏)

C をモノイダル圏とする.

右剛モノイダル圏 (right rigid monoidal category) とは, C の任意の対象が右双対を持つ時である.

左剛モノイダル圏 (left rigid monoidal category) とは, C の任意の対象が左双対を持つ時である.

剛モノイダル圏 (rigid monoidal category) とは, 右剛モノイダル圏かつ左剛モノイダル圏である (つまり C の任意の対象が右双対と左双対を持つ) 時である.

圏における任意の対象が (右, 左) 双対対象を持つ時, 圏は (右, 左) 双対化可能 ((right, left) dualizable) であるという. 組紐モノイダル圏や対称モノイダル圏についても同様に定義することができる.

以下で見る例はこの pdf で最も重要な例の 1 つである. 左双対に関しては右双対と同様に示されるので, 以降の例では右双対にのみ着目することが多い.

例 6.5

FHilb は剛モノイダル圏である. 有限次元 Hilbert 空間 H はその双対 Hilbert 空間 H^* を右双対かつ左双対に持つ. 任意の $|\phi\rangle \in H, \langle\psi| \in H^*$ に対して, 余単位射 ev' は

$$\text{ev}'_H : H \otimes H^* \rightarrow \mathbb{C} : |\phi\rangle \otimes \langle\psi| \mapsto \langle\phi|\psi\rangle$$

H の任意の正規直交基底 $|i\rangle$ に対して, 単位射 coev' は

$$\text{coev}'_H : \mathbb{C} \rightarrow H \otimes H^* : 1 \mapsto \sum_i \langle i | \otimes | i \rangle$$

で与えられる.

余単位射は基底に依存していないが, 単位射は基底に存在しているように見える. しかし, この後で示されるように coev' の値は選択する直交基底によらない.

例 6.6

無限次元 Hilbert 空間は双対を持たない.

このことは後に証明する.

6 章の初めに述べたように, 双対化は圏論的量子力学において重要な役割を果たす. ここから圏論的量子力学の中心となる圏が, 有限次元に限定される **FHilb** であることが想像できるだろう. 今までに述べた例は **Hilb** についてあったが, 勿論 **FHilb** についても示される.

補題 6.7

剛モノイダル圏において対象 A の左双対が $*A$ であるとする. この時 $*A$ の右双対は A であり, $\text{ev}'_{*A} = \text{ev}_A, \text{coev}'_{*A} = \text{coev}_A$ となる. つまり $*(A^*) \cong A \cong (*A)^*$ である.

証明

執筆中

補題 6.8

剛モノイダル圏において $I^* = I = *I$ である.

証明

省略

定理 6.9

モノイダル関手は双対を保つ.

証明

執筆中

定義 6.10 (右双対射)

右剛モノイダル圏において対象 A, B の右双対が A^*, B^* であるとする. 射 $A \xrightarrow{f} B$ が存在す

る時, 射 $B^* \xrightarrow{f^*} A^*$ を以下の図式を可換にするように定義する.

$$\begin{array}{ccccc}
B^* & \xrightarrow{\lambda_{B^*}^{-1}} & I \otimes B^* & \xrightarrow{\text{coev}'_A \otimes \text{id}_B} & (A^* \otimes A) \otimes B^* \\
\downarrow f^* & & & & \searrow \alpha_{A^*, A, B^*} \\
& & & & A^* \otimes (A \otimes B^*) \\
& & & \swarrow \text{id}_{A^*} \otimes (f \otimes \text{id}_{B^*}) & \\
A^* & \xleftarrow{\rho_{A^*}} & A^* \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \text{ev}'_B} & A^* \otimes (B \otimes B^*)
\end{array}$$

射 f^* を f の右双対射 (right dual morphism) ^{*30} という.

定義 6.11 (左双対射)

左剛モノイダル圏において対象 A, B の左双対が $*A, *B$ であるとする. 射 $A \xrightarrow{f} B$ が存在する時, 射 $*B \xrightarrow{*f} *A$ を以下の図式を可換にするように定義する.

$$\begin{array}{ccccc}
*B & \xrightarrow{\rho_{*B}^{-1}} & *B \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{*B} \otimes \text{coev}_A} & *B \otimes (A \otimes *A) \\
\downarrow *f & & & & \searrow \alpha_{*B, A, *A}^{-1} \\
& & & & (*B \otimes A) \otimes *A \\
& & & \swarrow (\text{id}_{*B} \otimes f) \otimes \text{id}_{*A} & \\
*A & \xleftarrow{\lambda_{*A}} & I \otimes *A & \xleftarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{*A}} & (*B \otimes B) \otimes *A
\end{array}$$

射 $*f$ を f の左双対射 (left dual morphism) ^{*31} という.

例 6.12

FHilb において射 $V \xrightarrow{f} W$ の右双対射は $W^* \xrightarrow{f^*} V^*$ である.

右 [左] 双対と右 [左] 双対射をとる操作は関手となる.

定義 6.13 (右双対関手)

C を右剛モノイダル圏とする. この時, 右双対関手 (right duality functor) $(-)^* : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を以下のように定めると, これは関手となる.

- 対象 A に対して $(A)^* := A^*$
- 射 f に対して $(f)^* := f^*$

定義 6.14 (左双対関手)

C を左剛モノイダル圏とする. この時, 左双対関手 (left duality functor) $*(-) : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を以下のように定めると, これは関手となる.

^{*30} 単に右双対 (right dual) や右転置 (right transpose) ともいわれる.

^{*31} 単に左双対 (left dual) や左転置 (left transpose) ともいわれる.

- 対象 A に対して $*(A) := {}^*A$
- 射 f に対して $*(f) := {}^*f$

定理 6.15 (右双対の移動定理)

右剛モノイダル圏において対象 A, B の右双対が A^*, B^* であるとする. この時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B^* & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{B^*}} & B \otimes B^* \\
 \downarrow \text{id}_A \otimes f^* & & \downarrow \text{ev}'_B \\
 A \otimes A^* & \xrightarrow{\text{ev}'_A} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{coev}'_B} & B^* \otimes B \\
 \downarrow \text{coev}'_A & & \downarrow f^* \otimes \text{id}_B \\
 A^* \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes f} & A^* \otimes B
 \end{array}$$

証明

省略

定理 6.16 (左双対の移動定理)

左剛モノイダル圏において対象 A, B の左双対が ${}^*A, {}^*B$ であるとする. この時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc}
 {}^*B \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{{}^*B} \otimes f} & {}^*B \otimes B \\
 \downarrow {}^*f \otimes \text{id}_A & & \downarrow \text{ev}_B \\
 {}^*A \otimes A & \xrightarrow{\text{ev}_A} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{coev}_B} & B \otimes {}^*B \\
 \downarrow \text{coev}_A & & \downarrow \text{id}_B \otimes {}^*f \\
 A \otimes {}^*A & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{{}^*A}} & B \otimes {}^*A
 \end{array}$$

証明

省略

定義 6.17 (二重右双対関手)

執筆中

定義 6.18 (二重左双対関手)

執筆中

6.2 ピボタル圏

有限次元ベクトル空間 V には自然な同型 $V^{**} \cong V$ が存在する. 二重双対をとる対応を一般の圏において議論する.

定義 6.19 (右ピボタル圏)

C を剛モノイダル圏とする. C が右ピボタル圏 (right pivotal category) であるとは, モノイダル自然同型 $A \xrightarrow{\pi_A^*} A^{**}$ が存在する時である. ^{*32}

定義 6.20 (左ピボタル圏)

C を剛モノイダル圏とする. C が左ピボタル圏 (left pivotal category) であるとは, モノイダル自然同型 $A \xrightarrow{\pi_A^*} **A$ が存在する時である. ^{*33}

定理 6.21 (右ピボタル圏の移動定理)

剛モノイダル圏において A, B を対象, A^{**}, B^{**} をそれぞれ A, B の二重右双対とする. この時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc} B^* \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{B^*} \otimes f} & B^* \otimes B \\ \downarrow f^* \otimes \text{id}_A & & \downarrow \text{ev}_B \\ A^* \otimes A & \xrightarrow{\text{ev}_A} & I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{coev}_B} & B \otimes B^* \\ \downarrow \text{coev}_A & & \downarrow \text{id}_B \otimes f^* \\ A \otimes A^* & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{A^*}} & B \otimes A^* \end{array}$$

証明

省略

定理 6.22 (左ピボタル圏の移動定理)

執筆中

定義 6.23 (平衡モノイダル圏)

C を組紐剛モノイダル圏^{*34} とする. C が平衡モノイダル圏 (balanced monoidal category) であるとはツイスト (twist) ^{*35} と呼ばれる自然同型 $\theta_A : A \rightarrow A$ が存在して, 以下の図式を可換にする時である.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\ \downarrow \theta_{A \otimes B} & & \downarrow \sigma_{B,A} \\ A \otimes B & \xleftarrow{\theta_A \otimes \theta_B} & A \otimes B \end{array}$$

^{*32} 右ピボタル圏の定義として「剛モノイダル圏」→「右剛モノイダル圏」, 「モノイダル自然同型」→「モノイダル自然変換」とするものが一般的である. この定義であっても直ちに左剛モノイダル圏であって (つまり剛モノイダル圏である), 自然変換が可逆である (つまり自然同型となる) ことが分かるので上の定義を採用した.

^{*33} 左ピボタル圏の定義として「剛モノイダル圏」→「左剛モノイダル圏」, 「モノイダル自然同型」→「モノイダル自然変換」とするものが一般的である. この定義であっても直ちに右剛モノイダル圏であって (つまり剛モノイダル圏である), 自然変換が可逆である (つまり自然同型となる) ことが分かるので上の定義を採用した.

^{*34} 組紐剛モノイダル圏ではなく単に組紐モノイダル圏とする定義もある.

^{*35} 平衡自然変換 (balancing transformation) とも呼ばれる.

6.3 コンパクト閉圏とリボン圏

定義 6.24

対称剛モノイダル圏を特にコンパクト閉圏 (compact closed category) という.

補題 6.25

コンパクト閉圏は $\theta_A = \text{id}_A$ という自明なツイストを持つ.

証明

コンパクト閉圏は対称モノイダル圏であるので, 次の図式が可換になることは明らかである.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\
 \text{id}_{A \otimes B} \downarrow & & \downarrow \sigma_{B,A} \\
 A \otimes B & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{id}_B} & A \otimes B
 \end{array}$$

補題 6.26

コンパクト閉圏はモノイダル閉圏である.

(対称) 剛モノイダル圏^{*36}において name, coname という射が定義される. coname は射 $A \xrightarrow{f} B$ を分解するものであり, 量子削除不可能定理の証明等で非常に有用である.

定義 6.27 (name, coname)

右剛モノイダル圏において, 対象 A, B の右双対をそれぞれ A^*, B^* , $A \xrightarrow{f} B$ を射とする. この時, 射 $I \xrightarrow{\text{name}} A^* \otimes B, A \otimes B^* \xrightarrow{\text{coname}} I$ をそれぞれ以下の図式を可換にするように定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{name}} & A^* \otimes B \\
 \text{coev}'_A \searrow & & \nearrow \text{id}_{A^*} \otimes f \\
 & A^* \otimes A &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes B^* & \xrightarrow{\text{coname}} & I \\
 f \otimes \text{id}_{B^*} \searrow & & \nearrow \text{ev}'_B \\
 & B \otimes B^* &
 \end{array}$$

定理 6.28 (Choi-Jamiołkowski 対応)

右剛モノイダル圏において, 対象 A, B の右双対をそれぞれ A^*, B^* , $A \xrightarrow{f} B$ を射とする. こ

^{*36} 今までのように右双対, 左双対においてそれぞれ定義される概念であるが, 実際はコンパクト閉圏において使われることがほとんどである. よって, ここでは右剛モノイダル圏についてのみ述べることにした.

の時, 以下の図式は可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\rho_A^{-1}} & A \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \text{coev}'_B} & B \otimes (B^* \otimes B) \\
 \downarrow f & & & & \downarrow \alpha_{B, B^*, B}^{-1} \\
 B & \xleftarrow{\lambda_B} & I \otimes B & \xleftarrow{\text{ev}'_B \otimes \text{id}_B} & (B \otimes B^*) \otimes B
 \end{array}$$

つまり, 射 $A \xrightarrow{f} B$ は coname を用いて分解されるということである.

定義 6.29 (右リボン圏)

C を平衡モノイダル圏とする. C が右リボン圏 (right ribbon category, right tortile category) であるとは自然同型 θ_A が

$$(\theta_A)^* = \theta_{A^*}$$

を満たす時である.

定義 6.30 (左リボン圏)

C を平衡モノイダル圏とする. C が左リボン圏 (left ribbon category, left tortile category) であるとは自然同型 θ_A が

$${}^*(\theta_A) = \theta_{*A}$$

を満たす時である.

6.4 ダガーコンパクト閉圏

執筆中

6.5 trace と dimension

定義 6.31 (右 trace)

右ピボタル圏において A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{f} A^{**}$ に対して scalar

$$I \xrightarrow{\text{coev}'_A} A^* \otimes A \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes f} A^* \otimes A^{**} \xrightarrow{\text{ev}_{A^{**}}} I$$

を A の右 trace といい, $\text{Tr}_A^*(f)$ や単に $\text{Tr}^*(f)$ と表す.

定義 6.32 (左 trace)

左ピボタル圏において A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{f} {}^{**}A$ に対して scalar

$$I \xrightarrow{\text{coev}_A} A \otimes {}^*A \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{{}^*A}} {}^{**}A \otimes {}^*A \xrightarrow{\text{ev}_{{}^*A}} I$$

を A の左 trace といい, ${}^*\mathrm{Tr}_A(f)$ や単に ${}^*\mathrm{Tr}(f)$ と表す.

定義 6.33 (右 dimension)

ピボタル圏において A を対象とする. 対象 A の右 dimension とは scalar: $\mathrm{Tr}^*(\mathrm{id}_A)$ であり, これを ${}^*\mathrm{dim}(A)$ と表す.

定義 6.34 (左 dimension)

ピボタル圏において A を対象とする. 対象 A の左 dimension とは scalar: ${}^*\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_A)$ であり, これを $\mathrm{dim}^*(A)$ と表す.

trace や dimension は線形代数に出てくる「トレース」や「次元」と似た性質を持つ. scalar はモノイダル圏において定義されたが, trace と dimension はピボタル圏において定義される. 以下で示す性質においてさまざまな条件が課されることに注意してほしい.

定義 6.35

ピボタル圏において以下の命題が成立する.

- 射 $A \xrightarrow{f} B$ と $B \xrightarrow{g} A$ に対して

$$\mathrm{Tr}_A(g \circ f) = \mathrm{Tr}_B(f \circ g)$$

- C が重ね合わせ則を持つ時, 射 $A \xrightleftharpoons[g]{f} A$ に対して

$$\mathrm{Tr}(f + g) = \mathrm{Tr}(f) + \mathrm{Tr}(g)$$

- C が複積を持つ時,

6.6 重ね合わせ則と双対化

執筆中

7 モノイダル圏上のモノイド

モノイダル圏のテンソル積によって、その対象に対して乗法を考えることができる。これがモノイドの概念につながる。実際、モノイダル圏におけるモノイドの概念はモノイダル圏において非常に重要である。そしてこれは従来のモノイドの一般化となっている。

7.1 モノイド

定義 7.1 (モノイド)

C をモノイダル圏とする。 C のモノイド (monoid) とは対象 A と射 $A \otimes A \xrightarrow{m} A, I \xrightarrow{u} A$ の3つ組 (A, m, u) であって、以下の2つの図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{A,A,A}} & A \otimes (A \otimes A) \\ m \otimes \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} A \xleftarrow{m} & A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes A & \xleftarrow{\lambda_A^{-1}} & A & \xrightarrow{\rho_A^{-1}} & A \otimes I \\ u \otimes \text{id}_A \downarrow & & \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes u \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xleftarrow{m} & A \otimes A \end{array}$$

m を乗法 (multiplication), u を単位 (unit) という。

例 7.2

FHilb において、Hilbert 空間 H の基底 $\{e_i\}$ は

$$\begin{aligned} m : H \otimes H &\rightarrow H : e_i \otimes e_i \mapsto e_i \\ u : H &\rightarrow I : e_i \mapsto 1 \end{aligned}$$

によってモノイド構造が与えられる。

補題 7.3

上の2つ目の可換図式と次の図式が可換であることは同値である。

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes u} & A \otimes I \\ & \searrow \lambda_A & \downarrow m & \swarrow \rho_A & \\ & & A & & \end{array}$$

証明

省略

定義 7.4 (可換モノイド)

C を組紐モノイダル圏とする. ^{*37} C のモノイド (A, m, u) が可換 (commutative) であるとは, 上の 2 つに加えて以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ & \searrow \sigma_{A,A} & \nearrow m \\ & A \otimes A & \end{array}$$

この時, (A, m, u) を可換モノイド (commutative monoid) という.

例 7.5

FHilb において基底 $\{e_i\}$ は可換モノイドとなる.

定義 7.6 (モノイド準同型)

C をモノイダル圏とし, C のモノイドを $(A, m, u), (A', m', u')$ とする. モノイド準同型 (monoid homomorphism) とは射 $A \xrightarrow{f} A'$ であって, 以下の 2 つの図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ A' \otimes A' & \xrightarrow{m'} & A' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & I & \\ u \swarrow & & \searrow u' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

例 7.7

FHilb においてモノイド準同型は基底の間の任意の関数

$$f : H \rightarrow H : \{d_i\} \mapsto \{e_j\}$$

で与えられる.

(可換) モノイドとモノイド準同型は圏をなす.

定義 7.8 (圏 **Mon**)

モノイドとモノイド準同型は圏をなす. この圏をモノイド圏 **Mon** とする.

定義 7.9 (圏 **CMon**)

可換モノイドとモノイド準同型は圏をなす. この圏を可換モノイド圏 **CMon** とする.

^{*37} 対称モノイダル圏とする定義もある.

7.2 コモノイド

モノイダル圏においてモノイドの双対概念としてコモノイドが定義される。つまり、コモノイドはモノイダル圏 C^{op} におけるモノイドである。圏論的量子力学においてはコモノイドの概念が重要である。詳しくは9章で述べることにする。

定義 7.10 (コモノイド)

C をモノイダル圏とする。 C のコモノイド (comonoid) とは対象 A と射 $A \xrightarrow{d} A \otimes A, A \xrightarrow{e} I$ の3つ組 (A, d, e) であって以下の2つの図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{A,A,A}} & A \otimes (A \otimes A) \\ d \otimes \text{id}_A \uparrow & & \uparrow \text{id}_A \otimes d \\ A \otimes A & \xleftarrow{d} A \xrightarrow{d} & A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes I & \xrightarrow{\rho_A} & A & \xleftarrow{\lambda_A} & A \otimes I \\ \text{id}_A \otimes e \uparrow & & \uparrow \text{id}_A & & \uparrow \text{id}_A \otimes e \\ A \otimes A & \xleftarrow{d} A \xrightarrow{d} & A \otimes A & & \end{array}$$

d を余乗法 (comultiplication), e を余単位 (counit) という。

定義 7.11 (可換コモノイド)

C を組紐モノイダル圏とする。 C のコモノイド (A, d, e) が可換であるとは、上の2つに加えて以下の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xleftarrow{d} & A \\ & \swarrow \sigma_{A,A} \quad \searrow d & \\ & A \otimes A & \end{array}$$

この時、 (A, d, e) を可換コモノイドという。

定義 7.12 (コモノイド準同型)

C をモノイダル圏とし、 C のコモノイドを $(A, d, e), (A', d', e')$ とする。モノイド準同型 (monoid homomorphism) とは射 $A \xrightarrow{f} A'$ であって、以下の2つの図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & A \otimes A \\ f \downarrow & & \downarrow f \otimes f \\ A' & \xrightarrow{d'} & A' \otimes A' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & I & \\ e \swarrow & & \nwarrow e' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

モノイダルダガー圏において、モノイドとコモノイドは結びつく。

定理 7.13

モノイダルダガー圏において、 (A, m, u) がモノイドであれば $(A, m^\dagger, u^\dagger)$ はコモノイドである。

証明

省略

7.3 Cayley の埋め込み定理

剛モノイダル圏において pants モノイドというモノイドを定義することができる。Cayley の埋め込み定理によって、任意のモノイドが pants モノイドに埋め込まれることが分かる。

定理 7.14 (pants モノイド)

剛モノイダル圏において、ある対象 A が右双対 A^* 持つとする。この時、 $A^* \otimes A$ と射 $(A^* \otimes A) \otimes (A^* \otimes A) \xrightarrow{j} A^* \otimes A, I \xrightarrow{k} A^* \otimes A$ の3つ組 $(A^* \otimes A, j, k)$ はモノイドとなる。この3つ組 $(A^* \otimes A, j, k)$ を pants モノイド (pair of pants monoid) という。

証明

モノイドの定義を満たすことを確かめればよい。

定理 7.15 (Cayley の埋め込み定理)

剛モノイダル圏において、対象 A と双対 $A \dashv^* A$ に対してモノイド (A, m, u) と pants モノイド $(A^* \otimes A, j, k)$ が存在するとする。この時、 (A, m, u) と $(A^* \otimes A, j, k)$ の間にモノイド準同型 $(A, m, u) \xrightarrow{R} (A^* \otimes A, j, k)$ が存在して、レトラクションを持つ。

証明

$R : A \rightarrow A^* \otimes A$ を次の図式が可換になるように定義する。

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad R \quad} & A^* \otimes A & & \\
 \lambda_A^{-1} \downarrow & & \uparrow \text{id}_{A^*} \otimes j & & \\
 I \otimes A & \xrightarrow{\text{coev}'_A} (A^* \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{A^*, A, A}} & A^* \otimes (A \otimes A) &
 \end{array}$$

これがモノイド準同型となることを示す。

8 Born 則

8 章では量子力学や量子情報に出てくる定義が, モノイダル圏において一般に考えられることを見る. モノイダル圏において射 $I \rightarrow A$ や $A \rightarrow I$ は一般には存在するとは限らないが, 以降では存在する場合のみを考える.

8.1 状態と効果

1 節では事象の観測に関する用語を定義する.

定義 8.1 (状態)

モノイダル圏において, 対象 A の状態 (state) とは射 $I \xrightarrow{a} A$ である.

モノイダル圏の単位対象は自明な系であるので, 系の状態 $I \xrightarrow{x} A$ は系 A を生成する過程とみなすことができる.

定義 8.2 (効果)

モノイダル圏において, 対象 A の効果 (effect) ^{*38} とは射 $A \xrightarrow{x} I$ である.

系の効果 $A \xrightarrow{x} I$ は系 A の測定によってある scalar が得られるとみなすことができる.

例 8.3

Hilb において Hilbert 空間 H の状態とは線形写像 $\mathbb{C} \rightarrow H$ である.

Hilb において Hilbert 空間 H の効果とは線形写像 $H \rightarrow \mathbb{C}$ である.

8.2 積状態ともつれ状態

定義 8.4 (結合状態)

モノイダル圏において, 対象 A, B の結合状態 (joint state) とは, 射 $I \xrightarrow{c} A \otimes B$ である.

定義 8.5 (積状態ともつれ状態)

結合状態を以下の 2 つの状態に分類する.

- 結合状態 $I \xrightarrow{c} A \otimes B$ が積状態 (product state) であるとは, 状態 $I \xrightarrow{a} A, I \xrightarrow{b} B$ に

^{*38} 効果は状態の双対概念であり余状態 (costate) ともいわれるが, 量子力学との繋がりを強調するために効果と呼ぶことにする.

対して次の図式が可換となる時である.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{c} & a \otimes b \\ & \searrow \lambda_I = \rho_I & \nearrow a \otimes b \\ & I \otimes I & \end{array}$$

- 結合状態がもつれ状態 (entangled state) ^{*39} であるとは, 積状態でない時である.

例 8.6

Hilb において結合状態, 積状態, もつれ状態は以下のようにになる.

- H, K を Hilbert 空間とすると, 結合状態は Hilbert 空間 $H \otimes K$ の元である.
- 積状態は H の元と K の元の組で書ける $H \otimes K$ の元である.
- もつれ状態は上のよう書くことができない $H \otimes K$ の元である.

定義 8.7 (局所同値)

2つの結合状態 $I \xrightarrow{a,b} A \otimes B$ が局所同値 (locally equivalent) であるとは, 同型射 $A \xrightarrow{f} A$ と $B \xrightarrow{g} B$ が存在して, 以下の図式が可換となる時である.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{b} & a \otimes b \\ & \searrow a & \nearrow f \otimes g \\ & a \otimes b & \end{array}$$

a と b が局所同値である時, $a \sim b$ と表す.

補題 8.8

局所同値は結合状態における同値関係である.

証明

省略

この同値関係によって, 結合状態を分類することができる.

8.3 Born 則

量子力学において基本的な公理である Born 則が成立する圏を考えることが, 2 節の目標である.

モノイダル圏において $I \xrightarrow{a} A$ を状態, $A \xrightarrow{x} I$ を効果とすると scalar $I \xrightarrow{a} A \xrightarrow{x} I$ は内積

^{*39} 絡み合い状態やエンタングル状態ともいわれる.

$\langle x^\dagger | a \rangle$ に一致することを見た. この経過が起こる確率は

$$\begin{aligned} |\langle x^\dagger | a \rangle|^2 &= \langle a | x^\dagger \rangle \times \langle x^\dagger | a \rangle \\ &= a^\dagger \circ x^\dagger \circ x \circ a \end{aligned}$$

となる. この性質を一般のモノイダルダガー圏において考える.

定義 8.9 (確率)

モノイダルダガー圏において $I \xrightarrow{a} A$ を状態, $A \xrightarrow{x} I$ を効果とする. この時, 確率 (probability) $\text{Prob}(x, a) : I \rightarrow I$ を次のように定義する.

$$\text{Prob}(x, a) := a^\dagger \circ x^\dagger \circ x \circ a$$

例 8.10

Hilb において確率は非負実数 $|\langle x^\dagger | a \rangle|^2$ に一致する.

効果の集合 $\{x_i | A \rightarrow I\}_{1 \leq i \leq n}$ に対していくつかの用語を定義する.

定義 8.11 (完全集合)

効果の集合 $\{x_i | A \rightarrow I\}_{1 \leq i \leq n}$ が完全集合 (complete set) であるとは任意の射 $B \xrightarrow{f} A$ に対してある効果 x_i が存在して $x_i \circ f = 0_{B, I}$ であれば $f = 0_{B, A}$ となる時である.

対偶をとると, つまり 0 でない過程に対して 0 でない効果をうみだすということである.

定義 8.12 (非交和)

効果の集合 $\{x_i | A \rightarrow I\}_{1 \leq i \leq n}$ が非交和 (disjoint) であるとは任意の $i \neq j$ に対して

$$x_i \circ x_j^\dagger = \text{id}_I, \quad x_i \circ x_j = 0_{I, I}$$

を満たす時である.

定理 8.13

効果の有限完全非交和集合 $\{x_i | A \rightarrow I\}_{1 \leq i \leq n}$ は零核を持つ等長射 x^\dagger に対する射 $A \xrightarrow{x} \bigoplus_n I$ と対応する.

証明

省略

定理 8.14 (Born 則)

ダガー複積を持つモノイダルダガー圏において, $I \xrightarrow{a} A$ を等長状態 (射 $I \xrightarrow{a} A$ が等長射となる), $\{x_i | A \rightarrow I\}_{1 \leq i \leq n}$ を効果の有限完全非交和集合とする. この時以下の等式が成立

する.

$$\sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) = 1$$

証明

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) &= \sum_{i=1}^n a^\dagger \circ x_i^\dagger \circ x_i \circ a \\ &= a^\dagger \circ \left(\sum_{i=1}^n x_i^\dagger \circ x_i \right) \circ a \end{aligned}$$

効果の集合が非交和であるので

$$\sum_{i=1}^n x_i^\dagger \circ x_i = \sum_{i=1}^n \text{id}_A = \text{id}_A$$

である. 効果 $I \xrightarrow{a} A$ が等長射であるので

$$a^\dagger \circ a = \text{id}_I$$

である. 以上より単位対象における恒等射を 1 と書くと

$$\sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) = 1$$

9 量子複製不可能定理

9 章では圏論的な量子削除不可能定理と量子複製不可能定理を見る。これは古典的な構造にはない、量子力学の構造特有の性質である。

9.1 一様削除と削除不可能定理

削除不可能定理は「量子系の入力の情報忘れて、何も出力しない (削除する) 装置を作ることとは不可能である」ということである。コモノイドの余単位 $A \xrightarrow{e} I$ は対象の情報なくなる「削除」と捉えることができる。1 つ 1 つの対象に対して「削除」することは十分あり得るが、圏の任意の対象を「体系的 (systematically) に削除」することができる場合を考えよう。体系的な削除とは、削除する操作が圏の構造を保つということである。つまり、削除が「一様の (uniformly)」であるということができる。

定義 9.1 (一様削除)

C を圏とする。 C が一様削除 (uniform deleting) を持つとは、 C の対象 A とある対象 I ^{*40} に対して自然変換 $A \xrightarrow{e_A} I$ が存在して、 $e_I = \text{id}_I$ を満たす時である。射 e_A を一様削除射という。

定理 9.2

C を圏とする。以下の 2 つは同値である。

- C が一様削除を持つ
- C の対象 I が終対象である。

証明

一様削除を持つ時、射 $A \xrightarrow{f} I$ が一意であることを示す。任意の射 $A \xrightarrow{f} I$ に対して、自然性と $e_I = \text{id}_I$ より次の図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e_A} & I \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id}_I \\ I & \xrightarrow{e_I = \text{id}_I} & I \end{array}$$

よって

$$f = \text{id}_I \circ f = \text{id}_I \circ e_A = e_A$$

^{*40} この I はモノイダル圏における単位対象 I と一般には関係がない。次の定義でモノイダル圏との関係を見る。

となるので, I は終対象となる.

逆に, I が終対象である時, 任意の対象 A に対して一意に存在する射 $A \rightarrow I$ を一様削除射と定義すれば良い. この射が自然性と $e_I = \text{id}_I$ を満たすことは明らかである.

定義 9.3 (削除)

一様削除を持つモノイダル圏において A を対象, I を単位対象とする. 一様削除射 $A \xrightarrow{e_A} I$ が状態 $I \xrightarrow{a} A$ を消去 (delete) するとは, 以下の図式が可換になる時である.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{id}_I} & I \\ & \searrow a & \nearrow e_A \\ & A & \end{array}$$

定義 9.4 (well-pointed)

C をモノイダル圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f, g} B$ を射とする. C が well-pointed である^{*41} とは, 任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ に対して, $f \circ a = g \circ a$ であれば $f = g$ となる時である.

定義 9.5 (monoidally well-pointed)

C をモノイダル圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f, g} B$ を射とする. C が monoidally well-pointed であるとは, 射 $\bigotimes_{i=1}^n A_i \xrightarrow{f, g} B$ と任意の状態の族 $\{a_i | I \xrightarrow{a_i} A_i\}$ に対して, $f \circ (\bigotimes_{i=1}^n a_i) = g \circ (\bigotimes_{i=1}^n a_i)$ であれば $f = g$ となる時である.

一様削除と well-pointed には次のような関係がある.

補題 9.6

モノイダル圏において, 任意の対象 A とある対象 I に対して射 $A \xrightarrow{e_A} I$ が存在して一様削除射となる時, 任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ を削除する. 逆に, モノイダル圏が well-pointed である時に限り成立する.

証明

一様削除射が存在する時, 定理 9.2 より対象 I は終対象となる. 任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ に対して, 終対象の普遍性から

$$e_A \circ a = \text{id}_I$$

となる. つまり, 任意の状態は削除される.

逆に, モノイダル圏が well-pointed であると仮定する. この時, 射 $A \xrightarrow{f, g} I$ と任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ に対して, $f \circ a = g \circ a$ であることを示す. 示すことができれば, 仮定より $f = g$ であり, I は終対象となる. 定理 9.2 より, これは射 $A \xrightarrow{e_A} I$ が一様削除射となることと同値で

^{*41} 「十分に点を持つ」と訳されることもある.

ある.

射 $f \circ a, g \circ a$ は共に I の状態であるので, 射 $A \xrightarrow{e_A} I$ に対して

$$e_I \circ f \circ a = e_I \circ g \circ a = \text{id}_I$$

よって, scalar $f \circ a, g \circ a$ は共に scalar e_I の逆射である. 逆射の一意性より

$$f \circ a = g \circ a$$

ここから導かれる量子削除不可能定理は, コンパクト閉圏が一様削除を持つ時, **Pos** に潰れることを意味する. **Pos** とは順序集合のなす圏である.

定義 9.7 (**Pos**)

$\langle A, \leq \rangle$ を順序集合とする.

- 対象は順序集合 A
- $a, b \in A$ に対して

$$\text{Hom}(a, b) := \begin{cases} \{f_{a,b}\} & (a \leq b) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義すると, これは圏をなす. この圏を **Pos** と表す.

つまり, **Pos** とは任意の対象 A, B に対して $\text{Hom}(A, B)$ の個数が高々 1 つの圏である.

定理 9.8 (量子削除不可能定理)

コンパクト閉圏が一様削除を持つ時, **Pos** と圏同型となる.

証明

a

9.2 一様複製と複製不可能定理

10 付録 1: 2-category

11 付録 2: 豊穰圏

参考文献

- [c4qt] Chris Heunen and Jamie Vicary ‘Categories for Quantum Theory An Introduction’
- [Alg-d] Alg-d 壱大整域
- [gihou] 中岡宏行 ‘圏論の技法’
- [nlab] [nlab](#)
- [EGNO] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, Victor Ostrik ‘Tensor Categories’
- [CWM] Saunders Mac Lane ‘Categories for the Working Mathematician’
- [Arai] 新井朝雄 ‘ヒルベルト空間と量子力学’