

圏論と量子力学への応用

よの

2021 年 9 月 9 日

まえがき

注記

この pdf は私が Chris Heunen and Jamie Vicary ‘Categories for Quantum Theory An Introduction’[1] を読んで復習のためにまとめたものである。圏論的量子力学ではストリング図式と呼ばれる概念を用いて証明をおこなうことが多いが、この pdf にストリング図式は出てこない。ストリング図式は圏論の議論を視覚的に捉えることが出来るため重宝されるが、ここではそれに頼らない厳密な証明を心掛けている。それに伴い [1] では掘り下げられていない数学的な議論も書いたつもりである。ここで壺大整域 [2] や nlab[4], Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, Victor Ostrik ‘Tensor Categories’[5] を参考にした。詳しくは章ごとに参考にした文献を最初に紹介するので適宜参照してほしい。特に文献によって定義が異なる概念には注釈を加えている。

構成

この pdf は圏論的量子力学 (Categorical Quantum Theory) について説明したものである。読むにあたって前提知識は特に仮定しない。準備として 1 章で圏論の基本的な事柄, 2 章で Hilbert 空間と線形作用素について説明しているので適宜参考にしてほしい。3 章でモノイダル圏, 4 章で圏上の線形代数, 5 章でダガー圏, 6 章で双対対象, 7 章でモノイダル圏上のモノイドについて説明する。8 章で Born 則, 9 章で量子複製不可能定理について圏上で議論する。巻末で豊穡圏について補完する。

圏論的物理学とは

圏論的物理学とはその名の通り圏論の言葉を用いて物理を (再) 定式化しようという分野である。物理は考えている系とその間の移り変わりに着目する学問と言えるだろう。^{*1} 圏論では対象と呼ばれるものとその間の移り変わりである射の組である圏を定義し議論を展開する。圏論的物理学は対象を物理的な系, 射を系の間の操作とする圏を考える。圏論的量子力学では対象を Hilbert 空間, 射を有界線形作用素とする圏を考える。

^{*1} 私個人の強い主張である。

目次

1	圏論の基礎	5
1.1	圏と関手	5
1.2	圏の構成例	7
1.3	圏同値と自然変換	7
1.4	極限	8
2	Hilbert 空間	12
2.1	Hilbert 空間	12
3	モノイダル圏	13
3.1	モノイダル圏	13
3.2	モノイダル関手	19
3.3	モノイダル同値とモノイダル自然変換	20
3.4	厳格化定理と coherence 定理	21
4	圏上の線形代数	23
4.1	scalar	23
4.2	直和	24
4.3	重ね合わせ則	26
4.4	射の行列表示	29
5	ダガー圏	31
5.1	ダガー圏	31
5.2	ダガー核	32
5.3	ダガー複積	33
5.4	モノイダルダガー圏	35
6	双対対象	36
6.1	双対対象	36
6.2	コンパクト閉圏とリボン圏	40
6.3	ダガーコンパクト閉圏	41
6.4	trace と dimension	41
7	モノイダル圏上のモノイド	43

7.1	モノイダル圏上のモノイド	43
7.2	一様消去と一様複製	45
8	Born 則	47
8.1	状態と効果	47
8.2	積状態ともつれ状態	47
8.3	Born 則	48
9	量子複製不可能定理	50
9.1	量子複製不可能定理	50

1 圏論の基礎

この章では 3 章以降を読む為に必要な圏論の基本的な事柄をまとめる。圏, 関手, 自然変換, 極限を知っている読者はこの章を飛ばしても構わない。[随伴] の節は 6 章の [双対対象] の章を読む時に参考になると思うが特に知っている必要はない。

1.1 圏と関手

早速ではあるが圏の定義から説明する。圏論の成立までの歴史や発展については参考文献 [2] を読んでほしい。

定義 1.1 (圏)

圏 (category) C とは集まり $\text{Ob}(C)$ と $\text{Mor}(C)$ の 2 つ組 $(\text{Ob}(C), \text{Mor}(C))$ で以下の条件を満たすものである。 $\text{Ob}(C)$ の元を対象 (object), $\text{Mor}(C)$ の元を射 (morphism) とよぶ。

- 任意の射 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して域 (domain) $A \in \text{Ob}(C)$ と余域 (codomain) $B \in \text{Ob}(C)$ が与えられている。この時 $A \xrightarrow{f} B$ や $f: A \rightarrow B$ と表す。また $\text{Hom}_C(a, b) := \{f \in \text{Mor}(C) | a \xrightarrow{f} b\}$ と書く。
- 2 つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ に対して $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ となる時, f と g の合成射といわれる射 $f \in \text{Mor}(C)$ が定義出来て $g \circ f$ が定義出来て $A \xrightarrow{g \circ f} C$ となる。
- 射の合成は結合則を満たす。つまり $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C, C \xrightarrow{h} D$ に対して $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成立する。
- 任意の対象 $A \in \text{Ob}(C)$ に対して恒等射 (identity morphism) という $\text{id}_A: A \rightarrow A$ が存在して, 射の合成に関する単位元となる。つまり $A \xrightarrow{f} B$ に対して $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$ が成立する。

以下ではこの pdf に出てくる圏のみを紹介する。

例 1.2 (圏 **Set**)

対象を集合, 射を写像とすると圏をなす。この圏を集合圏 **Set** とする。

対象を有限集合に制限したのも圏をなす。この圏を有限集合圏 **FSet** とする。

例 1.3 (圏 **Hilb**)

対象を Hilbert 空間, 射を有界線形作用素とすると圏をなす。この圏を Hilbert 空間圏 **Hilb** とする。

対象を有限次元 Hilbert 空間に制限したのも圏をなす。この圏を有限次元 Hilbert 空間圏

FHilb とする. ^{*2}

例 1.4 (圏 **Rel**)

対象を集合, 射を関係 R とすると圏をなす. この圏を関係圏 **Rel** とする.

対象を有限集合に制限したのも圏をなす. この圏を有限関係圏 **FRel** とする.

以降では圏の具体例として **Hilb** と **Rel** を出す. **Set** が具体例として適切かどうかは各自で確かめてほしい. 圏論的量子力学の中心となるのは **Hilb**(を制限した **FHilb** ^{*3}) であるので **Hilb** については出来るだけ詳しく説明する.

次に関手を定義する. これは圏と圏の間の準同型の様なものである.

定義 1.5 (関手)

C, D を圏とする. 関手 (functor) ^{*4} $F : C \rightarrow D$ とは $A \in \text{Ob}(C)$ に $F(A) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる写像で以下の条件を満たすものである.

- $A \xrightarrow{f} B$ の時 $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ である.
- $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ が成立する.
- 任意の対象 $A \in \text{Ob}(C)$ に対して $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$

定義 1.6 (恒等関手)

C を圏, A を対象, f を射とする. 恒等関手 (identity functor) とは関手 $F : C \rightarrow C$ であって以下で定義されるものである.

- $F(A) := A$
- $F(f) := f$

例 1.7 (忘却関手)

$F : \mathbf{Hilb} \rightarrow \mathbf{Set}$ を以下の様に定義する. **Hilb** の対象 H と射 f に対して

- $F(H) := H$
- $F(f) := f$

と定義するとこれは関手となる. この様に構造を忘れる関手を忘却関手 (forgetful functor) を呼ぶ.

群において同型写像で結ばれる 2 つの群は同型と呼ばれる. この性質を一般に圏における

^{*2} Hilbert 空間を知らない読者は 2 章を読んだ後, この定義によって圏をなす事を確かめてほしい.

^{*3} 何故, 有限次元への制限である圏 **FHilb** が中心となるかは 8 章以降で明らかになる.

^{*4} 関手には共変関手と反変関手の 2 種類があるが, この pdf では共変関手 (上で定義した関手) しか出てこないので省略する. 反変関手も反転圏からの関手と見れば共変関手となるので実質的には共変関手のみである.

対象について定義する.

定義 1.8 (同型)

C を圏, A, B を対象とする.

- 射 $A \xrightarrow{f} B$ が同型射 (isomorphism) であるとはある射 $B \xrightarrow{g} A$ が存在して

$$g \circ f = \text{id}_A, f \circ g = \text{id}_B$$

を満たす時である.

- A と B が同型 (isomorphic) であるとはある同型射 $A \xrightarrow{f} B$ が存在する時である. この時 $A \cong B$ と表す.

1.2 圏の構成例

与えられた圏から新しい圏を構成する方法を説明する. ここでは反転圏と直積圏を定義する. (執筆中)

定義 1.9 (反転圏)

C を圏とする. この時, 圏 C の射の向きを全て逆にしたものも圏となりこれを反転圏 (opposite category) C^{op} とする.

定義 1.10 (直積圏)

C, D を圏とする. この時, 圏の直積 $C \times D$ を以下の様に定義する.

- 対象を C の対象と D の対象の組とする
- $\langle A_1, B_1 \rangle$ から $\langle A_2, B_2 \rangle$ への射は成分ごとの射の組である
- 射の合成は成分ごとにおこなう
- 恒等射は成分ごとの恒等射の組である

これは圏をなす. この圏を直積圏 (product category) $C \times D$ とする.

1.3 圏同値と自然変換

前節では圏の対象の間において同型を定義した. この節では圏の間の同型を定義する.

定義 1.11 (圏同値)

C, D を圏とする. 圏 C, D が圏同値 (equivalence of categories) であるとはある関手

$F : C \rightarrow D$ と $G : D \rightarrow C$ が存在して

$$G \circ F \cong \text{id}_C, F \circ G \cong \text{id}_D$$

を満たす時である. この時 $C \simeq D$ と表す.

定義 1.12 (自然変換)

C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とすると自然変換 (natural transformation) $\theta : F \Rightarrow G$ は D の射の族 $\theta = \{\theta_A : Fa \rightarrow Ga\}_{A \in \text{Ob}(C)}$ であって, C の射 $A \xrightarrow{f} B$ に対して次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

定義 1.13 (自然同型)

各 θ_A が同型射となる自然変換を自然同型 (natural isomorphism) という. 自然同型 $\theta : F \Rightarrow G$ が存在する時, F と G は自然同型 (natural isomorphic) であるといい $F \cong G$ と表す.

1.4 極限

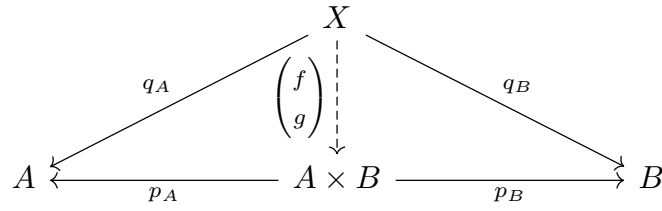
この節では一般の極限ではなくその具体例である直積, equalizer, 終対象とそれらの双対概念を定義する. 双対概念とは図式において全ての射の向きを逆にして得られる概念である. 直積, equalizer, 終対象の双対概念はそれぞれ余直積, coequalizer, 始対象である. ^{*5}

定義 1.14 (直積)

C を圏, A, B を対象とする. A と B の直積 (product) とは 3 つ組 $(A \times B, p_A, p_B)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $A \times B$ は C の対象である.
- $A \times B \xrightarrow{p_A} A, A \times B \xrightarrow{p_B} B$ は C の射である.
- ある対象 X と射 $X \xrightarrow{q_A} A$ と $X \xrightarrow{q_B} B$ が存在する時, 射 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : X \rightarrow A \times B$ が一意に存在して $q_A = p_A \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, q_B = p_B \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ となる. つまり次の図式を可換にする.

^{*5} 双対概念は元の名前に余 (co) をつける事が一般的である.



例 1.15

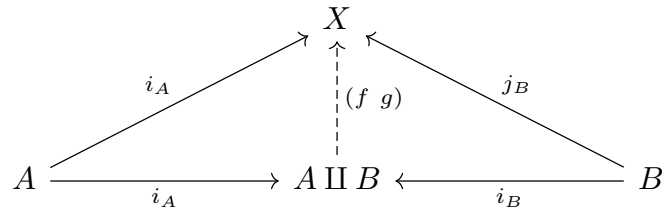
Hilb において直積は Hilbert 空間の直積で与えられる.

Rel において直積は非交和で与えられる.

定義 1.16 (余直積)

C を圏, A, B を対象とする. A と B の余直積 (coproduct) とは 3 つ組 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $A \amalg B$ は C の対象である.
- $A \xrightarrow{i_A} A \amalg B, B \xrightarrow{i_B} A \amalg B$ は C の射である.
- ある対象 X と射 $A \xrightarrow{j_A} X$ と $B \xrightarrow{j_B} X$ が存在する時, 射 $A \amalg B \xrightarrow{(f, g)} X$ が一意に存在して $j_A = (f, g) \circ i_A, j_B = (f, g) \circ i_B$ となる. つまり次の図式を可換にする.



例 1.17

Hilb において余直積は Hilbert 空間の直和で与えられる.

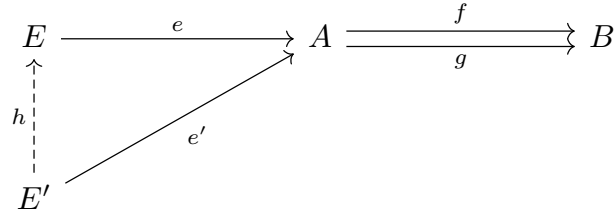
Rel において余直積は非交和で与えられる.

定義 1.18 (equalizer)

C を圏, A, B を対象, $A \rightrightarrows B$ を射とする. f と g の equalizer^{*6} は 2 つ組 (E, e) であって以下の条件を満たすものである.

- E は C の対象である.
- $E \xrightarrow{e} A$ は C の射で $f \circ e = g \circ e$ を満たす.
- ある対象 E' と射 $E' \xrightarrow{e'} A$ が $f \circ e' = g \circ e'$ を満たす時, 射 $E' \xrightarrow{h} E$ が一意に存在して $e' = e \circ h$ となる. つまり次の図式を可換にする.

*6 日本語では差核と言われる.



例 1.19

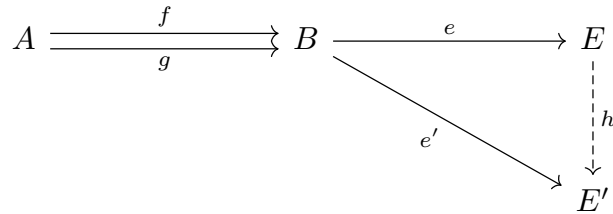
Hilb において $A \rightrightarrows B$ の equalizer は集合 $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ と包含写像 $E \xrightarrow{e} A$ で与えられる.

Rel において equalizer は存在しない.

定義 1.20 (coequalizer)

C を圏, A, B を対象, $A \rightrightarrows B$ を射とする. f と g の coequalizer ^{*7} は 2 つ組 (E, e) であって以下の条件を満たすものである.

- E は C の対象である.
- $B \xrightarrow{e} E$ は C の射で $e \circ f = e \circ g$ を満たす.
- ある対象 E' と射 $B \xrightarrow{e'} E'$ が $e' \circ f = e' \circ g$ を満たす時, 射 $E \xrightarrow{h} E'$ が一意に存在して $e' = h \circ e$ となる. つまり次の図式を可換にする.



定義 1.21 (終対象)

C を圏とする. C の終対象 (terminal object) とは対象 I と射 x の 2 つ組 (I, x) であって任意の $A \in \text{Ob}(C)$ に対して射 $A \xrightarrow{x} I$ が一意に存在する. ^{*8}

例 1.22

Hilb において終対象は 1 次元 Hilbert 空間で与えられる.

Rel において終対象は空集合で与えられる.

定義 1.23 (始対象)

C を圏とする. C の始対象 (initial object) とは対象 I と射 a の 2 つ組 (I, a) であって任意

^{*7} 日本語では余差核と言われる.

^{*8} 直積の定義と同じ様子に書くと「 C を圏とする. I が終対象であるとは対象 I であって, ある I' が圏 C の対象となる時, 射 $I' \xrightarrow{I} I$ が一意に存在する」となる.

の $A \in \text{Ob}(C)$ に対して射 $I \xrightarrow{a} A$ が一意に存在する. ^{*9}

例 1.24

Hilb において始対象は 1 次元 Hilbert 空間で与えられる.

Rel において始対象は空集合で与えられる.

定理 1.25

直積, equalizer, 終対象は同型を除いて一意に存在する.

証明

省略

補題 1.26

余直積, coequalizer, 始対象は同型を除いて一意に存在する.

証明

補題 1.26 において射の向きを逆にすれば良い.

^{*9} 直積の定義と同じ様を書くに「 C を圏とする. I が始対象であるとは対象 I であって, ある I' が圏 C の対象となる時, 射 $a \xrightarrow{\quad} I'$ が一意に存在する」となる.

2 Hilbert 空間

この章では 3 章以降を読む為に必要な Hilbert 空間と線形作用素を定義する. 以下の公理は一般の体 \mathbb{K} について成立するが, この pdf では係数体として \mathbb{C} について考えれば十分なので \mathbb{C} に限定して説明する. (執筆中)

2.1 Hilbert 空間

定義 2.1 (ベクトル空間)

ベクトル空間 (vector space) V とは集合 V と複素数体 \mathbb{C} に対して演算 $+: V \times V \rightarrow V$ と $\times: \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ が定義されていて, 任意の $a, b, c \in V$ と $s, t \in \mathbb{C}$ に対して以下の条件を満たすものである.

- 交換則: $a + b = b + a$
- 結合則: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 零ベクトルの存在: $a + 0 = a$
- 逆ベクトルの存在: $a + (-a) = 0$
- 単位則: $1 \times a = a$
- 加法分配則: $s \times (a + b) = s \times a + s \times b$
- スカラー分配則: $(s + t) \times a = s \times a + t \times a$
- スカラー結合則: $(s \times t) \times a = s \times (t \times a)$

定義 2.2 (内積空間)

内積空間 (inner space) H とはベクトル空間で写像 $\langle - | - \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられていて任意の $a, b, c \in H, s, t \in \mathbb{C}$ に対して以下の条件を満たすものである.

- 正值性: $\langle a | a \rangle \geq 0$
- 正定値性: $\langle a | a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$
- 線形性: $\langle a | sb + tc \rangle = s \langle a | b \rangle + t \langle a | c \rangle$
- 対称性: $\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$ ^{*10}

定義 2.3 (Hilbert 空間)

Hilbert 空間 (Hilbert space) とは完備な内積空間である.

*10 * は複素共役を表す.

3 モノイダル圏

圏論的量子力学に限らず物理を圏論で記述する上で欠かせない圏がモノイダル圏である。「部分系と部分系を合わせたものが全系となる」という物理の基本要請を上手く数学的に定式化したものである。対象を系 (部分系) とする圏において部分系と部分系を合わせたものはその圏同士の直積を考える事と一致する。それもまた系 (全系) とみなす (つまりまた圏の対象となるという事である) という事はその直積圏から元の圏への関手が存在すると考えられる。この考え方から 1 章で定義した圏ではなく直積圏から元の圏への関手を備えた圏を考えるべきであろう。

これが圏論的物理学でモノイダル圏が中心となる理由である。モノイダル圏の定義に出てくる自然変換も部分系の合成に重ねて考えると基本要請を上手く捉えている事も分かるだろう。

3.1 モノイダル圏

この節では (組紐・対称) モノイダル圏を定義して基本的な性質と定理を示す。

定義 3.1 (モノイダル圏)

C を圏とする。モノイダル圏 (monoidal category) とは 6 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ であって以下の条件を満たすものである。

- テンソル積 (tensor product) 関手^{*11} $\otimes : C \times C \rightarrow C$ が存在する。
- I は C の対象である。これを単位対象 (unit object) という。
- 対象 A, B, C に対して自然同型 $(A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}} A \otimes (B \otimes C)$ が存在する。これを結合子 (associator) という。
- λ は自然同型であり対象 A に対して $I \otimes A \xrightarrow{\lambda_A} A$ である。これを左単位子 (left unitor) という。
- ρ は自然同型であり対象 A に対して $A \otimes I \xrightarrow{\rho_A} A$ である。これを右単位子 (right unitor) という。

^{*11} 双関手ともいう。

- 対象 A, B, C, D について以下の2つの図式^{*12}が可換となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & & \\
 & \nearrow \alpha_{A,B,C} \otimes \text{id}_D & & \searrow \alpha_{A,B \otimes C,D} & \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \downarrow \alpha_{A \otimes B,C,D} & & & & \downarrow \text{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
 & & & & \\
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & & & A \otimes (I \otimes B) \\
 \searrow \rho_A \otimes \text{id}_B & & & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B & & &
 \end{array}$$

定理 3.2 (coherence 定理)

モノイダル圏において以下の2つは同値である。

- 恒等射, 自然同型 α, λ, ρ , それらの逆射からテンソル積と合成をとる操作で構成された射は, それぞれ域と余域が同一であれば射として等しい。
- モノイダル圏の公理に出てくる五角形等式と三角形等式が成立する。

この証明は難解であるので3章4節でおこなう。1つ目の条件を coherence 条件という。以下でモノイダル圏における諸性質を示すがその中で一箇所 coherence 定理を用いていることに注意してほしい。

例 3.3

Hilb はモノイダル圏となる。

- テンソル積 $\otimes : \mathbf{Hilb} \times \mathbf{Hilb} \rightarrow \mathbf{Hilb}$ は Hilbert 空間の通常のテンソル積
- 単位対象 I は 1 次元 Hilbert 空間 \mathbb{C}
- 結合子 $\alpha_{H,J,K} : (H \otimes J) \otimes K \rightarrow H \otimes (J \otimes K)$ は任意の $a \in H, b \in J, c \in K$ に対して $(a \otimes b) \otimes c \rightarrow a \otimes (b \otimes c)$ とする線形写像
- 左単位子 $\lambda_H : \mathbb{C} \times H \rightarrow H$ は任意の $a \in H$ に対して $1 \otimes a \rightarrow a$ とする線形写像
- 右単位子 $\rho_H : H \times \mathbb{C} \rightarrow H$ は任意の $a \in H$ に対して $a \otimes 1 \rightarrow a$ とする線形写像

と定義するとこれはモノイダル圏となる。対象を有限次元 Hilbert 空間と制限した **FHilb** もモノイダル圏となる。これらをそれぞれ **Hilb**, **FHilb** と書く。^{*13}

^{*12} それぞれ五角形等式 (pentagon equation), 三角形等式 (triangle equation) といわれる。

^{*13} 例 1.3 で定義した圏 **Hilb** と同じ記法であるが, ほとんどの場合で混乱の恐れはないので同じ書き方をする。**Rel**, **FRel**, **Set**, **FSet** 等も同様である。

補題 3.4

C をモノイダル圏とする. ^{*14} この時, 反転圏 C^{op} もモノイダル圏となる.

定理 3.5 (交換則)

C をモノイダル圏とする. C の射 $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C, D \xrightarrow{h} E, E \xrightarrow{i} F$ に対して次の等式が成立する.

$$(g \circ f) \otimes (i \circ h) = (g \otimes i) \circ (f \otimes h)$$

これは (テンソル積と合成の) 交換則と呼ばれる.

証明

直積圏の定義とテンソル積関手が関手であることから

$$\begin{aligned} (g \circ f) \otimes (i \circ h) &= \otimes(g \circ f, i \circ h) \\ &= \otimes((g, i) \circ (f, h)) \\ &= (\otimes(g, i)) \circ (\otimes(f, h)) \\ &= (g \otimes i) \circ (f \otimes h) \end{aligned}$$

補題 3.6

C をモノイダル圏とする. 関手 $I \otimes - : C \rightarrow C, - \otimes I : C \rightarrow C$ は互いに圏同値を与える.

証明

省略

補題 3.7

C をモノイダル圏とする. C の射 f, g に対して $f \otimes \text{id}_I = g \otimes \text{id}_I$ または $\text{id}_I \otimes f = \text{id}_I \otimes g$ が成立する時 $f = g$ である.

証明

省略

補題 3.8

^{*14} 正しくは「 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ をモノイダル圏とする」と書くべきであるが以降では簡易のために単に「 C をモノイダル圏とする」と書く.

モノイダル圏において以下の2つの図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 (I \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I,B,C}} & I \otimes (B \otimes C) \\
 \searrow \lambda_B \otimes \text{id}_C & & \swarrow \lambda_{B \otimes C} \\
 & B \otimes C &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes B) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{A,B,I}} & A \otimes (B \otimes I) \\
 \searrow \rho_{A \otimes B} & & \swarrow \text{id}_A \otimes \rho_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

証明

上の可換図式について次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 ((I \otimes I) \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I \otimes I, B, C}} & (I \otimes I) \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha_{I, I, B \otimes C}} & I \otimes (I \otimes (B \otimes C)) \\
 \downarrow \alpha_{I, I, B} \otimes \text{id}_C & \searrow (\rho_I \otimes \text{id}_B) \otimes \text{id}_C & \downarrow \rho_I \otimes \text{id}_{B \otimes C} & \swarrow \text{id}_I \otimes \rho_{B \otimes C} & \uparrow \text{id}_I \otimes \alpha_{I, B, C} \\
 & (I \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I, B, C}} & I \otimes (B \otimes C) & \\
 & \uparrow (\text{id}_I \otimes \lambda_B) \otimes \text{id}_I & & \swarrow \text{id}_I \otimes (\lambda_B \otimes \text{id}_C) & \\
 (I \otimes (I \otimes B)) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{I, I \otimes B, C}} & I \otimes ((I \otimes B) \otimes C) & &
 \end{array}$$

外側の五角形は五角形等式より可換である。左と右上^{*15}の三角形は三角形等式より可換である。中央の2つの四角形は α の自然性^{*16}より可換である。図式のそれぞれの射が同型であることから右の三角形も可換である。 $I \otimes -$ が圏同値を与えることからこの三角形の可換性は示したい図式の可換性と同値である。

下の図式についても同様に示す事が出来る。

定理 3.9

モノイダル圏において以下の等式が成立する。

$$\lambda_I = \rho_I : I \otimes I \rightarrow I$$

証明

^{*15} ここで coherence 定理を使っている。

^{*16} α が自然変換であるという意味である。

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & I \otimes I & & \\
 & \nearrow \rho_I \otimes \text{id}_I & & \nwarrow \lambda_I & \\
 (I \otimes I) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{I,I,I}} & I \otimes (I \otimes I) & \xrightarrow{\text{id}_I \otimes \lambda_I} & I \\
 & \searrow \lambda_I \otimes \text{id}_I & & \nearrow \lambda_I & \\
 & & I \otimes I & &
 \end{array}$$

左上の三角形は三角形等式より可換である. 左下の三角形は補題 3.8 より可換である. 右の四角形は λ の自然性より可換である. これより外側の四角形は可換である. つまり

$$\lambda_I \circ (\rho_I \otimes \text{id}_I) = \lambda_I \circ (\lambda_I \otimes \text{id}_I)$$

である. λ が (自然) 同型である事より

$$\rho_I \otimes \text{id}_I = \lambda_I \otimes \text{id}_I$$

である. 補題 3.7 より

$$\rho_I = \lambda_I$$

が成立する.

定義 3.10 (組紐モノイダル圏)

C を圏とする. 組紐モノイダル圏 (braided monoidal category) とは 7 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $\otimes, I, \alpha, \lambda, \rho$ はモノイダル圏の定義と同じ
- σ は自然同型であって対象 A, B に対して $A \otimes B \xrightarrow{\sigma_{A,B}} B \otimes A$ が存在する.
- 対象 A, B, C に対して以下の 2 つの図式^{*17} が可換となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A \\
 & \nwarrow \alpha_{A,B,C}^{-1} & & \swarrow \alpha_{B,C,A}^{-1} & \\
 (A \otimes B) \otimes C & & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 & \searrow \sigma_{A,B} \otimes \text{id}_C & & \swarrow \text{id}_B \otimes \sigma_{A,C} & \\
 & & (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{B,A,C}} & B \otimes (A \otimes C)
 \end{array}$$

^{*17} 六角形等式 (hexagon equation) といわれる.

$$\begin{array}{ccccc}
& (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{A \otimes B, C}} & C \otimes (A \otimes B) & \\
\alpha_{A, B, C} \swarrow & & & & \nwarrow \alpha_{C, A, B} \\
A \otimes (B \otimes C) & & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& \searrow \text{id}_A \otimes \sigma_{B, C} & & \nearrow \sigma_{A, C} \otimes \text{id}_B & \\
& A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A, C, B}^{-1}} & (A \otimes C) \otimes B &
\end{array}$$

例 3.11

Hilb は組紐モノイダル圏となる. $H \otimes K \xrightarrow{\sigma_{H, K}} K \otimes H$ を任意の $a \in H, b \in K$ に対して $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ となる線形写像と定義する. これを canonical な組紐 (braiding) 構造という.

定義 3.12 (対称モノイダル圏)

対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) とは組紐モノイダル圏であって対象 A, B と自然同型 $\sigma_{A, B}$ について以下の等式を満たすものである.

$$\sigma_{B, A} \circ \sigma_{A, B} = \text{id}_{A \otimes B}$$

補題 3.13

対称モノイダル圏において以下の等式が成立する.

$$\sigma_{A, B} = \sigma_{B, A}^{-1}$$

定理 3.14

対称モノイダル圏において以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
I \otimes A & \xrightarrow{\sigma_{A, I}} & A \otimes I \\
& \searrow \lambda_A & \swarrow \rho_A \\
& A &
\end{array}$$

証明

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
& (A \otimes I) \otimes I & \xrightarrow{\alpha_{A, I, I}} & A \otimes (I \otimes I) & & & \\
\sigma_{A, I} \otimes \text{id}_I \swarrow & \downarrow \rho_A \otimes \text{id}_I & & \swarrow \text{id}_A \otimes \lambda_A & & \searrow \sigma_{A, I \otimes I} & \\
(I \otimes A) \otimes I & \xrightarrow{\lambda_{I \otimes A}} & A \otimes I & \xrightarrow{\sigma_{A, I}} & I \otimes A & \xleftarrow{\text{id}_I \otimes \text{id}_A} & (I \otimes I) \otimes A \\
& \searrow \alpha_{I, A, I} & \uparrow \lambda_{A \otimes I} & & \uparrow \text{id}_I \otimes \lambda_A & \swarrow \alpha_{I, I, A} & \\
& I \otimes (A \otimes I) & \longrightarrow & I \otimes (I \otimes A) & & &
\end{array}$$

外側の六角形は六角形等式より可換である. 左下と右下の三角形は補題 3.8 より可換である. 中央上の三角形は三角形等式より可換である. 中央下の四角形は σ の自然性より可換である. 右上の四角形は λ の自然性より可換である. 図式内の射が全て同型射である事から左上の三角形は可換である. 補題 3.7 よりこれは示したい図式と同値である.

3.2 モノイダル関手

定義 3.15 (モノイダル関手)

C, D をモノイダル圏とする. モノイダル関手 (monoidal functor) ^{*18} 3 つ組 (F, φ, φ_0) であって以下の条件を満たすものである.

- $F : C \rightarrow D$ は関手である.
- 次の 2 つの自然同型が存在する.

$$\begin{aligned} F(A) \otimes' F(B) &\xrightarrow{\varphi_{A,B}} F(A \otimes B) \\ I' &\xrightarrow{\varphi_0} F(I) \end{aligned}$$

- 次の 3 つの図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} (F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) & \xrightarrow{\alpha'_{F(A), F(B), F(C)}} & F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) \\ \downarrow \varphi_{A,B} \otimes' \text{id}_{F(C)} & & \downarrow \text{id}_{F(A)} \otimes' \varphi_{B,C} \\ F(A \otimes B) \otimes' F(C) & & F(A) \otimes' F(B \otimes C) \\ \downarrow \varphi_{A \otimes B, C} & & \downarrow \varphi_{A, B \otimes C} \\ F((A \otimes B) \otimes C) & \xrightarrow{F(\alpha_{A,B,C})} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' I' & \xrightarrow{\rho'_{F(A)}} & F(A) & I' \otimes' F(A) & \xrightarrow{\lambda'_{F(A)}} & F(A) \\ \downarrow \text{id}_{F(A)} \otimes' \varphi_0 & & \downarrow F(\rho_A^{-1}) & \downarrow \varphi_0 \otimes' \text{id}_{F(A)} & & \downarrow F(\lambda_A^{-1}) \\ F(A) \otimes' F(I) & \xrightarrow{\varphi_{A,I}} & F(A \otimes I) & F(I) \otimes' F(A) & \xrightarrow{\varphi_{I,A}} & F(I \otimes A) \end{array}$$

例 3.16

$F : \mathbf{FSet} \rightarrow \mathbf{FRel}$ や $G : \mathbf{FSet} \rightarrow \mathbf{FHilb}$ はモノイダル関手となる.

以降で表れるモノイダル関手 (F, φ, φ_0) の中で表れる F は $F : C \rightarrow D$ という関手を表すことにする.

定義 3.17 (組紐モノイダル関手)

C, D を組紐モノイダル圏とする. 組紐モノイダル関手 (braided monoidal functor) (F, φ, φ_0)

^{*18} 2 つの自然同型が単に自然変換である時を lax モノイダル関手 (lax monoidal functor, weak monoidal functor) といい, 自然同型となる時に強モノイダル関手 (strong monoidal functor) という事が一般的である. 上の定義は強モノイダル関手であるが以降ではこの強モノイダル関手しか表れないのでこれを単にモノイダル関手という事にする.

とはモノイダル関手 (F, φ, φ_0) であって以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\sigma'_{F(A), F(B)}} & F(B) \otimes' F(A) \\ \varphi_{A,B} \downarrow & & \downarrow \varphi_{A,B} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow{F(\sigma_{A,B})} & F(B \otimes A) \end{array}$$

定義 3.18 (対称モノイダル関手)

C, D を対称モノイダル圏とする. 対称モノイダル関手 (symmetric monoidal functor) ^{*19} (F, φ, φ_0) とはその間の組紐モノイダル関手である.

3.3 モノイダル同値とモノイダル自然変換

定義 3.19 (モノイダル同値)

C, D をモノイダル圏, (F, φ, φ_0) をモノイダル関手とする. C, D がモノイダル同値 (monoidal equivalence) であるとはモノイダル関手 (F, φ, φ_0) に対してある関手 $G : D \rightarrow C$ が存在して

$$G \circ F \cong \text{id}_C, F \circ G \cong \text{id}_D$$

を満たす時である.

定理 3.20

C, D をモノイダル圏, (F, φ, φ_0) をモノイダル関手とする. 以下の 2 つは同値である.

- C, D がモノイダル同値である.
- (F, φ, φ_0) がモノイダル関手であり通常の関手として圏同値を与える.

以降で表れるモノイダル関手 $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ の中で表れる F, G は $F, G : C \rightarrow D$ という関手を表すことにする.

定義 3.21 (モノイダル自然変換)

C, D をモノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ をモノイダル関手とする. モノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) は自然変換 $\mu : F \Rightarrow G$ であって以下の図式を可換にす

^{*19} 対称モノイダル関手は組紐モノイダル関手と違って可換図式の条件が追加で課されない. 組紐モノイダル圏はモノイダル圏に自然同型 $\sigma_{A,B}$ という構造が課されるが, 対称モノイダル圏は組紐モノイダル圏に $\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$ という性質が追加されるだけという違いから生じるものである.

るものである.

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & F(A \otimes B) \\
 \mu_A \otimes' \mu_B \downarrow & & \downarrow \mu_{A \otimes B} \\
 G(A) \otimes' G(B) & \xrightarrow{\varphi'_{A,B}} & G(A \otimes B)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I' & \xrightarrow{\varphi_0} & F(I) \\
 \searrow \varphi'_0 & & \downarrow \mu_I \\
 & & G(I)
 \end{array}$$

定義 3.22 (組紐モノイダル自然変換)

C, D を組紐モノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ を組紐モノイダル関手とする. 組紐モノイダル自然変換 (braided monoidal natural transformation) $\mu : F \Rightarrow G$ とはその間のモノイダル自然変換である.

定義 3.23 (対称モノイダル自然変換)

C, D を対称モノイダル圏, $(F, \varphi, \varphi_0), (G, \varphi', \varphi'_0)$ を対称モノイダル関手とする. 対称モノイダル自然変換 (symmetric monoidal natural transformation) $\mu : F \Rightarrow G$ とはその間のモノイダル自然変換である.

3.4 厳格化定理と coherence 定理

この節では厳格化定理と coherence 定理を証明する. この節は読まなくても以降を読み進める上で特に問題はない. (執筆中)

定義 3.24 (厳格モノイダル圏)

厳格モノイダル圏 (strict monoidal category) とはモノイダル圏であって自然同型 α, λ, ρ が全て恒等射となる時である.

定義 3.25 (厳格モノイダル関手)

厳格モノイダル関手 (strict monoidal functor) とはモノイダル関手 (F, φ, φ_0) であって自然同型 φ, φ_0 が恒等射となる時である.

例 3.26

恒等関手は厳格モノイダル関手である.

定理 3.27 (厳格化定理)

任意のモノイダル圏はある厳格モノイダル圏とモノイダル同値となる.

証明

執筆中

定理 3.28 (coherence 定理)

モノイダル圏において以下の 2 つは同値である.

- 恒等射, 自然同型 α, λ, ρ , それらの逆射からテンソル積と合成をとる操作で構成された射は, それぞれ域と余域が同一であれば射として等しい.
- モノイダル圏の公理に出てくる五角形等式と三角形等式が成立する.

証明

執筆中

4 圏上の線形代数

4.1 scalar

定義 4.1 (scalar)

モノイダル圏において scalar とは射 $I \rightarrow I$ である.

例 4.2

Hilb において scalar とは $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ である. $\mathbb{C} \xrightleftharpoons[g]{f} \mathbb{C}$ に対して f, g が (有界) 線形作用素であるので $s \in \mathbb{C}$ について

$$f(s) = sf(1)$$

となり s と $f(1)$ の値で定まる.

Hilb において scalar の合成とは複素数の積である. これより $\mathbb{C} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{C}$ に対して

$$(g \circ f)(s) = g(f(s)) = g(sf(1)) = sg(f(1)) = sg(1)f(1)$$

となり s と $f(1)$ と $g(1)$ の値で定まる.

定理 4.3

モノイダル圏において $I \xrightleftharpoons[g]{f} I$ に対して $f \circ g = g \circ f$ である. つまり scalar は可換である.

証明

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 I \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_I} & I \otimes I & & \\
 \downarrow \text{id}_I \otimes g & \swarrow \rho_I & I & \xrightarrow{f} & I & \nwarrow \rho_I & \downarrow \text{id}_I \otimes g \\
 & \lambda_I & \downarrow g & & \downarrow g & & \\
 & & I & \xrightarrow{f} & I & & \\
 & \swarrow \lambda_I & & \nwarrow \rho_I & & & \\
 I \otimes I & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_I} & I \otimes I & &
 \end{array}$$

定理 3.10 より $\lambda_I = \rho_I$ である. 中央の四角形が求めたい図式である. 側面の 4 つの四角形は λ と ρ の自然性より可換である. 外側の四角形は交換則より可換である.

$$\begin{aligned}
 (f \otimes \text{id}_I) \circ (\text{id}_I \otimes g) &= (f \otimes \text{id}_I) \circ (\text{id}_I \otimes g) \\
 &= (\text{id}_I \otimes f) \circ (g \otimes \text{id}_I) \\
 &= (\text{id}_I \otimes g) \circ (f \otimes \text{id}_I)
 \end{aligned}$$

以上より中央の四角形は可換である.

例 4.4

Hilb において複素数の積は可換である.

定義 4.5 (左 scalar 積)

執筆中

定義 4.6 (右 scalar 積)

執筆中

4.2 直和

定義 4.7 (零射)

圏 C が零射 (zero morphism) を持つとは以下の条件を満たす時である.

- 任意の対象 A, B に対して零射と呼ばれる射 $0_{A,B}$ が与えられる.
- 零射と任意の射の合成は零射となる. つまり任意の対象 A, B, C と射 $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C$ に対して以下を満たす.

$$\begin{aligned}0_{B,C} \circ f &= 0_{A,C} \\ g \circ 0_{A,B} &= 0_{A,C}\end{aligned}$$

以降では $0_{A,B}$ を混乱の恐れが無い限り 0 と書く.

定義 4.8 (零対象)

C を圏とする. 圏 C の対象 I が零対象 (zero object) であるとは I が終対象かつ始対象となる時である.

例 4.9

Hilb において零射は任意の元を 0 に送る零写像で与えられる. 零対象は 0 次元ベクトル空間で与えられる. ^{*20}

補題 4.10

零対象は同型を除いて一意に存在する.

証明

^{*20} 単位対象と零対象に同じ記号 I を用いているがこの例からも分かるように全く関係ないし一般には一致しない. 単位対象はモノイダル圏において定義されるが, 零対象は一般の圏において (存在すれば) 定義されるものである.

終対象と始対象が同型を除いて一意であることから従う.

補題 4.11

C を圏とする. 圏 C が零対象を持つ時, 任意の対象 A, B に対して零対象を経由する射が一意に存在する.

証明

終対象と始対象の定義より明らかである.

定理 4.12

C を圏として圏 C が零対象を持つとする. 対象 A, B に対して零対象を経由する射 $A \rightarrow 0 \rightarrow B$ は零射となる.

証明

零対象を経由する射が零射の定義を満たす事を確かめれば良い.

定理 4.13

C を零射が与えられた圏, A, B を対象とする. この時, 以下の 3 つが成立する.

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ が存在する時, 以下の等式を満たす射 $A \xrightarrow{i'_A} A \times B, B \xrightarrow{i'_B} A \times B$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} p_A \circ i'_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ i'_B = \text{id}_B \\ p_A \circ i'_B &= 0, \quad p_B \circ i'_A = 0 \end{aligned}$$

- 余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在する時, 以下の等式を満たす射 $A \amalg B \xrightarrow{p'_A} A, A \amalg B \xrightarrow{p'_B} B$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} p'_A \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p'_B \circ i_B = \text{id}_B \\ p'_A \circ i_B &= 0, \quad p'_B \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ と余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在する時, 以下の等式を満たす射 $A \amalg B \xrightarrow{h} A \times B$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} p_A \circ h \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ h \circ i_B = \text{id}_B \\ p_A \circ h \circ i_B &= 0, \quad p_B \circ h \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

定理 4.14

C を零射が与えられた圏, A, B を対象, $p'_A, p'_B, i'_A, i'_B, h$ を前の補題で得られた射とする. この時, 以下の 3 つは同値である.

- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ が存在して $(A \times B, i'_A, i'_B)$ が A, B の余直積となる.

- 余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在して $(A \amalg B, p'_A, p'_B)$ が A, B の直積となる.
- 直積 $(A \times B, p_A, p_B)$ と余直積 $(A \amalg B, i_A, i_B)$ が存在して $A \amalg B \xrightarrow{h} A \times B$ は同型射となる.

定義 4.15 (直和)

C を零射が与えられた圏, A, B を対象とする. 上の命題のいずれかが成立する時 A と B の直和 (direct sum) が存在するという. この時 A と B の (余) 直積を $A \oplus B$ ^{*21} で表す.

直和の具体例は後に定義される複積で紹介する.

補題 4.16

C を零射が与えられた圏, A, B を対象とする. A, B の直和 $A \oplus B$ が存在する時, 上の命題により射 p_A, p_B, i_A, i_B が存在して以下の命題を満たす.

- $(A \oplus B, p_A, p_B)$ は直積となる.
- $(A \oplus B, i_A, i_B)$ は余直積となる.
- 以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned} p_A \circ i_A &= \text{id}_A, \quad p_B \circ i_B = \text{id}_B \\ p_A \circ i_B &= 0, \quad p_B \circ i_A = 0 \end{aligned}$$

証明

直和の定義より明らかである.

定理 4.17

直和は存在すれば同型を除いて一意である.

証明

省略

4.3 重ね合わせ則

定義 4.18 (重ね合わせ則)

C を圏とする. 圏 C が重ね合わせ則 (superposition rule) を持つとは任意の対象 A, B, C と射 $A \xrightarrow{f, f', f''} B, B \xrightarrow{g, g'} C$ が以下の条件を満たす時である.

- $\text{Hom}_C(A, B)$ は可換モノイド構造を持つ.

^{*21} 正しくは「5つ組 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ を直和とする」とすべきであるが以降では混乱の恐れがない時は単に「 $A \oplus B$ を直和とする」のように書く.

– 可換性:

$$f + f' = f' + f$$

– 結合則:

$$(f + f') + f'' = f + (f' + f'')$$

– 単位射の存在: 単位射^{*22} と呼ばれる射 $A \xrightarrow{u_{A,B}} B$ が存在して次の等式を満たす.

$$f + u_{A,B} = f$$

- 双線形性: 合成を定める写像

$$- \circ - : \text{Hom}_C(B, C) \times \text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_C(A, C); (f, g) \mapsto g \circ f$$

が双線形性となる. つまり以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned}(g + g') \circ f &= (g \circ f) + (g' \circ f) \\ g \circ (f + f') &= (g \circ f) + (g \circ f')\end{aligned}$$

- 単位射の合成は単位射となる:

$$u_{B,C} \circ u_{A,B} = u_{A,C}$$

例 4.19

Hilb において重ね合わせ則は線形写像 f, g と元 a に対して演算として $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$, 単位射を零射として与えられる. この時, 単位射と零射は一致する.

補題 4.20

零対象と重ね合わせ則を持つ圏において零射と単位射は一致する. つまり任意の対象 A, B に対して $u_{A,B} = 0_{A,B}$ が成立する.

証明

単位射が零射の定義を満たす事を確かめれば良い.

この補題より零対象と重ね合わせ則を持つ圏の場合は単位射を $0_{A,B}$ と書く.

補題 4.21

零対象と重ね合わせを持つ圏において Hom に入る構造は可換モノイド構造と合成に関して双線形性のみになる. つまり単位射の合成が合成になるという条件を課さなくても良い.

^{*22} これは零射とは関係ない. 一致するのは次の補題を参照してほしい.

証明

補題 4.14 より単位射と零射は一致する. 零射と零射の合成が零射となる事は零射の定義から明らかである.

定義 4.22 (複積)

C を零対象と重ね合わせ則を持つ圏, A, B を対象とする. A, B の複積 (biproduct) ^{*23} とは 5 つ組 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ であって以下の条件を満たすものである.

- $A \oplus B$ は C の対象
- $A \oplus B \xrightarrow{p_A} A, A \oplus B \xrightarrow{p_B} B, A \xrightarrow{i_A} A \oplus B, A \xrightarrow{i_B} A \oplus B$ という射で以下の等式を満たす.

$$\begin{aligned} p_A \circ i_A &= \text{id}_A, p_B \circ i_B = \text{id}_B \\ p_A \circ i_B &= 0, p_B \circ i_A = 0 \\ i_A \circ p_A + i_B \circ p_B &= \text{id}_{A \oplus B} \end{aligned}$$

特に直積と余直積は一方が存在すると他方も存在して同型となりこれは直和となる. この意味で直和の記号と複積の記号を同じ \oplus で表した.

例 4.23

Hilb において複積は H, K を Hilbert 空間とするとその直和 $H \oplus K$ で与えられる. H の任意の元 h と K の任意の元 k に対して, 射影 $H \oplus K \xrightarrow{p_H} H, H \oplus K \xrightarrow{p_K} K$ をそれぞれ $(h, k) \mapsto h, (h, k) \mapsto k$ と送る写像, 入射 $H \xrightarrow{i_H} H \oplus K, K \xrightarrow{i_K} H \oplus K$ をそれぞれ $h \mapsto (h, 0), k \mapsto (0, k)$ と送る写像で与えられる.

定理 4.24

零対象と重ね合わせ則を持つ圏において, 以下の 3 つは同値となる.

- $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ が複積となる.
- $(A \oplus B, p_A, p_B)$ が直積となる.
- $(A \oplus B, i_A, i_B)$ が余直積となる.

補題 4.25

複積と零対象を持つ圏において重ね合わせ則は一意に定まる.

証明

執筆中

^{*23} 通常はプレ加法圏において定義される概念であるが, 零対象と重ね合わせ則を持つ圏においても同様に定義することが出来る. この pdf ではプレ加法圏において定義される複積は出てこないので上で定義したものを複積と呼ぶことにする.

4.4 射の行列表示

定義 4.26 (射の行列表示)

C を零射を持つ圏, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を直和とする.

- A から $B_i (1 \leq i \leq M)$ の族 $\{A \xrightarrow{f_i} B_i\}_{1 \leq i \leq M}$ に対して直積の普遍性より得られる射 $A \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$$

と表す. 特に $B_1 = \cdots = B_M = A$ の時, つまり $A \xrightarrow{f} A \oplus \cdots \oplus A$ は

$$\begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \vdots \\ \text{id}_A \end{pmatrix}$$

となりこれを対角射 (diagonal morphism) といい Δ_A または単に Δ と表す.

- $A_j (1 \leq j \leq N)$ から B への射の族 $\{A_j \xrightarrow{g_j} B\}_{1 \leq j \leq N}$ に対して余直積の普遍性より得られる射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{g} B$ を

$$g := (g_1 \quad \cdots \quad g_N)$$

と表す. 特に $A_1 = \cdots = A_N = B$ の時, つまり $B \oplus \cdots \oplus B \xrightarrow{g} B$ は

$$(\text{id}_B \quad \cdots \quad \text{id}_B)$$

となりこれを ∇_B または単に ∇ と表す.

- 射の族 $\{A_j \xrightarrow{f_{i,j}} B_i | 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N\}$ に対して直積と余直積より得られる射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を以下のように表す.

$$(f_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}$$

そしてこの行列表示を次のように定義する.

$$(f_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix} := \sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ p_m$$

定義 4.27

C を零射を持つ圏, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を直和, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M$ を射とする. この時, $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ に対して自然な入射と射影を合成して

$$f_{i,j} = p_i \circ f \circ i_j$$

と定めると f を定義した行列表示を用いて自然に

$$f = (f_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る. $f_{i,j}$ を射 f の (i,j) 成分という.

各成分において零射を 0, 恒等射を 1 と書くとより行列のように計算することが出来る.

定理 4.28

C を零射を持つ圏, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N, B_1 \oplus \cdots \oplus B_M, C_1 \oplus \cdots \oplus C_L$ を直和とする. 射 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_N \xrightarrow{f} B_1 \oplus \cdots \oplus B_M \xrightarrow{g} C_1 \oplus \cdots \oplus C_L$ に対して行列表示が与えられているとする. この時, 合成射 $g \circ f$ の行列表示は行列の積のように表すことが出来る.

証明

省略

例 4.29

Hilb において射の行列表示は線形写像を行列とみなした時の通常の行列表示で与えられる. 射の行列表示の積はこの意味での通常の行列表示の積で与えられる.

5 ダガー圏

5.1 ダガー圏

定義 5.1 (ダガー関手)

C を圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f} B$ を射とする. ダガー関手 (dagger functor) $(-)^{\dagger} : C^{\text{op}} \rightarrow C$ とは関手であって対象 A と射 f に対して以下の条件を満たすものである.

- $A^{\dagger} = A$
- $A \xrightarrow{f} B$ に対して $B \xrightarrow{f^{\dagger}} A$ で $(f^{\dagger})^{\dagger} = f$ を満たす^{*24}

定義 5.2 (ダガー圏)

ダガー圏 (dagger category) とはダガー関手 $(-)^{\dagger} : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を備えた圏である.

定義 5.3

ダガー圏において射 $A \xrightarrow{f} B$ が以下の条件を満たす時, それぞれ特別な名前^{*25} がついている.

- 射 $B \xrightarrow{g} A$ に対して $g = f^{\dagger}$ となる時, f を g の随伴射 (adjoint morphism) という.
- $f \circ f^{\dagger} = \text{id}_B, f^{\dagger} \circ f = \text{id}_A$ となる時, つまり $f^{\dagger} = f^{-1}$ となる時, f をユニタリ射 (unitary morphism) という.
- $f^{\dagger} \circ f = \text{id}_A$ となる時, f を等長射 (isometry morphism) という.
- $A = B$ で $f = f^{\dagger}$ となる時, f を自己随伴射 (self-adjoint morphism) という.
- $A = B$ であって, ある射 $A \xrightarrow{g} C$ に対して $f = g^{\dagger} \circ g$ となる時, f を正定射 (positive morphism) という.

補題 5.4

ダガー圏においてある対象が終対象か始対象であれば零対象となる.

証明

省略

補題 5.5

C を零対象を持つダガー圏, A, B を対象とすると以下の等式が成立する.

$$0_{A,B}^{\dagger} = 0_{B,A}$$

^{*24} (共変) 関手であるが C の射で書くと $(g \circ f)^{\dagger} = f^{\dagger} \circ g^{\dagger}$ となって反変関手のように振舞うので注意してほしい.

^{*25} この pdf では随伴を随伴射の様に〇〇射と後につける.

証明

C の射 $A \xrightarrow{a} 0, 0 \xrightarrow{b} B$ とすると

$$\begin{aligned} 0_{A,B}^\dagger &= (b \circ a)^\dagger \\ &= a^\dagger \circ b^\dagger \\ &= 0_{B,A} \end{aligned}$$

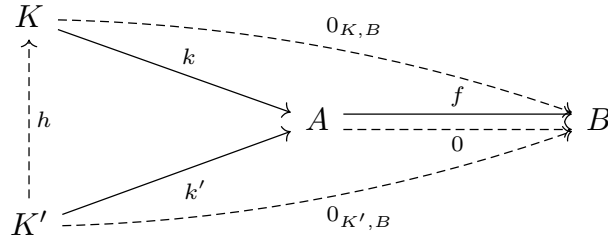
最後の等式において零射の一意性を使った.

5.2 ダガー核

定義 5.6 (ダガー核)

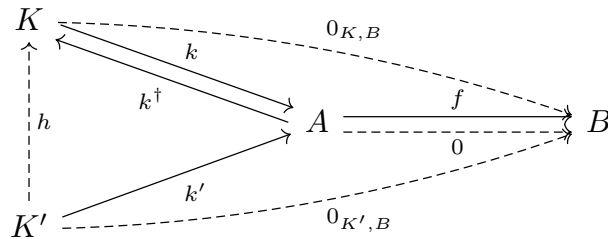
C を零対象を持つダガー圏とする. A, B を対象, $A \xrightarrow[f]{0} B$ を射とすると $A \xrightarrow{f} B$ のダガー核 (degger kernel) とは 2 つ組 (K, k) で以下の条件を満たすものである.

- K は C の対象である.
- $K \xrightarrow{k} A$ は $f \circ k = 0_{K,B}$ を満たす C の等長射である.
- ある対象 K' と射 $K' \xrightarrow{k'} A$ が存在した時, $k' = k \circ h$ であって $f \circ k' = 0_{K',B}$ を満たす. つまり次の図式を可換にする.



補題 5.7

ダガー核において射 $K' \xrightarrow{h} K$ は一意に存在して $h = k^\dagger \circ k'$ である. つまり次の図式を可換にする. この射は一意なユニタリ同型射を除いて一意である. (unique up to unique unitary isomorphism)



証明

k が等長射であることと $k' = k \circ h$ であることより

$$\begin{aligned} h &= k^\dagger \circ k \circ h \\ &= k^\dagger \circ k' \end{aligned}$$

これよりユニタリ同型射を除いて一意である.

5.3 ダガー複積

定義 5.8 (ダガー複積)

零対象と重ね合わせ則を持つダガー圏において, 対象 A, B のダガー複積 (dagger biproduct) とは複積 $(A \oplus B, p_A, p_B, i_A, i_B)$ であって $i_A^\dagger = p_A, i_B^\dagger = p_B$ を満たす時である.

補題 5.9

ダガー複積を持つダガー圏において行列の随伴はそのダガー転置である. つまり以下の等式が成立する.

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} f_{1,1}^\dagger & \cdots & f_{1,N}^\dagger \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M,1}^\dagger & \cdots & f_{M,N}^\dagger \end{pmatrix}$$

証明

$(A_1 \oplus A_2), (B_1 \oplus B_2)$ を複積としてその間の射を $(A_1 \oplus A_2) \xrightarrow{f} (B_1 \oplus B_2)$ とする.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{M,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{M,N} \end{pmatrix}^\dagger &= \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ p_m \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_{m,n} \text{id}_{B_1 \oplus B_2} \circ i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \circ \text{id}_{A_1 \oplus A_2} \right)^\dagger \\ &= \left(\sum_p i_p \circ i_p^\dagger \right) \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \left(\sum_q i_q \circ i_q^\dagger \right) \\ &= \sum_{p,q} i_p \circ i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q \circ i_q^\dagger \end{aligned}$$

ここでダガー関手の性質より

$$\begin{aligned}
i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q &= i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ (i_q^\dagger)^\dagger \\
&= i_p^\dagger \circ \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \right)^\dagger \\
&= \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \circ i_p \right)^\dagger
\end{aligned}$$

となる^{*26} ので

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q} i_p \circ i_p^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right)^\dagger \circ i_q \circ i_q^\dagger &= \sum_{p,q} i_p \circ \left(i_q^\dagger \circ \left(\sum_{m,n} i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \right) \circ i_p \right)^\dagger \circ i_q^\dagger \\
&= \sum_{p,q} i_p \circ \left(\sum_{m,n} i_q^\dagger \circ i_n \circ f_{m,n} \circ i_m^\dagger \circ i_p \right)^\dagger \circ i_q^\dagger \\
&= \sum_{p,q} i_p \circ (f_{p,q})^\dagger \circ i_p^\dagger
\end{aligned}$$

射の行列表示の定義より右辺に一致する。最後の等式で直和の定義 $\text{id}_{A_n} = p_n \circ i_n$, $0_{A_n, A_m} = p_m \circ i_n$ ($m \neq n$) を用いた。

一般の有限複積についても同様に示すことが出来る。^{*27}

補題 5.10

ダガー複積を持つダガー圏においてダガーは加法について分配則を持つ。つまり対象 A, B と射 $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ に対して以下の等式が成立する。

$$(f + g)^\dagger = f^\dagger + g^\dagger$$

証明

^{*26} $(h \circ g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger \circ h^\dagger$ を使っているだけである。

^{*27} 射の行列表示の定義とダガー関手の定義から自明ではあるが, [1] に従って証明をおこなった。

合成射の行列表示より

$$\begin{aligned}(f + g)^\dagger &= \left((f \ g) \circ \begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \text{id}_A \end{pmatrix} \right)^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} \text{id}_A \\ \text{id}_A \end{pmatrix}^\dagger \circ (f \ g)^\dagger \\ &= (\text{id}_A \ \text{id}_A) \circ \begin{pmatrix} f^\dagger \\ g^\dagger \end{pmatrix} \\ &= f^\dagger + g^\dagger\end{aligned}$$

5.4 モノイダルダガー圏

定義 5.11 (モノイダルダガー圏)

モノイダルダガー圏 (monoidal dagger category) とはモノイダル圏かつダガー圏であって以下の条件を満たすものである.

- 任意の射 f, g に対して $(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$
- 自然同型 α, λ, ρ が全てユニタリとなる.

定義 5.12 (組紐モノイダルダガー圏)

組紐モノイダルダガー圏 (braided monoidal dagger category) とはモノイダルダガー圏であって組紐構造 σ がユニタリーである時である

定義 5.13 (対称モノイダルダガー圏)

対称モノイダルダガー圏 (symmetric monoidal dagger category) とは組紐モノイダルダガー圏であって組紐構造が対称となる時である.

例 5.14

Hilb は対称モノイダルダガー圏である.

6 双対対象

6.1 双対対象

定義 6.1 (左双対)

C をモノイダル圏, A を C の対象とする. C の対象 $*A$ が A の左双対 (left dual) であるとは射 $\text{ev}_A : *A \otimes A \rightarrow I$ と $\text{coev}_A : I \rightarrow A \otimes *A$ が存在して以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccc}
 *A & \xrightarrow{\rho_{*A}^{-1}} & *A \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{*A} \otimes \text{coev}_A} & *A \otimes (A \otimes *A) \\
 \text{id}_A \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{*A, A, *A}^{-1} \\
 *A & \xleftarrow{\lambda_A} & I \otimes *A & \xleftarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{*A}} & (*A \otimes A) \otimes *A \\
 & & & & \\
 A & \xrightarrow{\lambda_A^{-1}} & I \otimes A & \xrightarrow{\text{coev}_A \otimes \text{id}_A} & (A \otimes *A) \otimes A \\
 \text{id}_A \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A, *A, A} \\
 A & \xleftarrow{\rho_A} & A \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}_A} & A \otimes (*A \otimes A)
 \end{array}$$

射 $\text{ev}_A : *A \otimes A \rightarrow I$ を評価射 (evaluation morphism), $\text{coev}_A : I \rightarrow A \otimes *A$ を余評価射 (coevaluation morphism) という.

定義 6.2 (右双対)

C をモノイダル圏, A を C の対象とする. C の対象 A^* が A の右双対 (right dual) であるとは射 $\text{ev}'_A : A \otimes A^* \rightarrow I$ と $\text{coev}'_A : I \rightarrow A^* \otimes A$ が存在して以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccc}
 A^* & \xrightarrow{\rho_{A^*}^{-1}} & *A \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \text{coev}'_A} & A^* \otimes (A \otimes A^*) \\
 \text{id}_{A^*} \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A^* A, A, A^*}^{-1} \\
 A^* & \xleftarrow{\lambda_A} & I \otimes A^* & \xleftarrow{\text{ev}'_A \otimes \text{id}_{A^*}} & (A^* \otimes A) \otimes A^* \\
 & & & & \\
 A & \xrightarrow{\lambda_A^{-1}} & I \otimes A & \xrightarrow{\text{coev}'_A \otimes \text{id}_A} & (A \otimes A^*) \otimes A \\
 \text{id}_A \downarrow & & & & \downarrow \alpha_{A, A^*, A} \\
 A & \xleftarrow{\rho_A} & A \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}'_A} & A \otimes (A^* \otimes A)
 \end{array}$$

射 $\text{ev}'_A : A \otimes A^* \rightarrow I$ を単位射 (unit morphism), $\text{coev}'_A : I \rightarrow A^* \otimes A$ を余単位射 (counit morphism) という.

定義 6.3 (剛モノイダル圏)

C をモノイダル圏とする.

左剛モノイダル圏 (left rigid monoidal category) とは C の任意の対象が左双対を持つ時である.

右剛モノイダル圏 (right rigid monoidal category) とは C の任意の対象が右双対を持つ時である.

剛モノイダル圏 (rigid monoidal category) とは左剛モノイダル圏かつ右剛モノイダル圏である (つまり C の任意の対象が左双対と右双対を持つ) 時である.

組紐モノイダル圏や対称モノイダル圏について同様に定義できる.

補題 6.4

左剛モノイダル圏において対象 A の左双対が $*A$ であるとする. この時 $*A$ の右双対は A であり, $\text{ev}'_{*A} = \text{ev}_A, \text{coev}'_{*A} = \text{coev}_A$ となる. つまり $*(A^*) \cong A \cong (*A)^*$ である.

補題 6.5

剛モノイダル圏において $I^* = I = *I$ である.

定義 6.6 (左双対射)

左剛モノイダル圏において対象 A, B が左双対 $*A, *B$ を持っているとする. 射 $A \xrightarrow{f} B$ が存在する時, 射 $*B \xrightarrow{*f} *A$ を以下の図式を可換にする様に定義する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 *B & \xrightarrow{\rho_{*B}^{-1}} & *B \otimes I & \xrightarrow{\text{id}_{*B} \otimes \text{coev}_A} & *B \otimes (A \otimes *A) & & \\
 \downarrow *f & & & & \searrow \alpha_{*B, A, *A}^{-1} & & \\
 & & & & & (*B \otimes A) \otimes *A & \\
 & & & & \swarrow (\text{id}_{*B} \otimes f) \otimes \text{id}_{*A} & & \\
 *A & \xleftarrow{\lambda_{*A}} & I \otimes *A & \xleftarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{*A}} & (*B \otimes B) \otimes *A & &
 \end{array}$$

この射を f の左双対射 (left dual morphism) という.

定義 6.7 (右双対射)

右剛モノイダル圏において対象 A, B が右双対 A^*, B^* を持っているとする. 射 $A \xrightarrow{f} B$ が存

在する時, 射 $B^* \xrightarrow{f^*} A^*$ を以下の図式を可換にする様に定義する.

$$\begin{array}{ccccc}
 B^* & \xrightarrow{\lambda_{B^*}^{-1}} & I \otimes B^* & \xrightarrow{\text{coev}'_A \otimes \text{id}_B} & (A^* \otimes A) \otimes B^* \\
 \downarrow f^* & & & & \searrow \alpha_{A^*, A, B^*} \\
 & & & & A^* \otimes (A \otimes B^*) \\
 & & & \swarrow \text{id}_{A^*} \otimes (f \otimes \text{id}_{B^*}) & \\
 A^* & \xleftarrow{\rho_{A^*}} & A^* \otimes I & \xleftarrow{\text{id}_{A^*} \otimes \text{ev}'_B} & A^* \otimes (B \otimes B^*)
 \end{array}$$

この射を f の右双対射 (right dual morphism) という.

定理 6.8 (左双対の移動定理)

左剛モノイダル圏において対象 A, B が左双対 $*A, *B$ を持っているとする. この時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc}
 *B \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{*B} \otimes f} & *B \otimes B \\
 \downarrow *f \otimes \text{id}_A & & \downarrow \text{ev}_B \\
 *A \otimes A & \xrightarrow{\text{ev}_A} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{coev}_B} & B \otimes *B \\
 \downarrow \text{coev}_A & & \downarrow \text{id}_B \otimes *f \\
 A \otimes *A & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{*A}} & B \otimes *A
 \end{array}$$

証明

省略

定理 6.9 (右双対の移動定理)

右剛モノイダル圏において対象 A, B が A^*, B^* を持っているとする. この時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B^* & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{B^*}} & B \otimes B^* \\
 \downarrow \text{id}_A \otimes f^* & & \downarrow \text{ev}'_B \\
 A \otimes A^* & \xrightarrow{\text{ev}'_A} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{coev}'_B} & B^* \otimes B \\
 \downarrow \text{coev}'_A & & \downarrow f^* \otimes \text{id}_B \\
 A^* \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes f} & A^* \otimes B
 \end{array}$$

証明

省略

定義 6.10 (左双対関手)

C を左剛モノイダル圏とし, 対象 A が左双対 $*A$ を持つとする. この時, 左双対関手 (left duality functor) $*(-) : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を以下の様に定めるとこれは関手となる.

- 対象 A に対して $*(A) := {}^*A$
- 射 f に対して $*(f) := {}^*f$

定義 6.11 (右双対関手)

C を右剛モノイダル圏とし, 対象 A が右双対 A^* を持つとする. この時, 右双対関手 (right duality functor) $(-)^* : C^{\text{op}} \rightarrow C$ を以下の様に定めるとこれは関手となる.

- 対象 A に対して $(A)^* := A^*$
- 射 f に対して $(f)^* := f^*$

定義 6.12 (二重左双対関手)

執筆中

定義 6.13 (二重右双対関手)

執筆中

定義 6.14 (左ピボタル圏)

C を剛モノイダル圏とする. C が左ピボタル圏 (left pivotal category) であるとはモノイダル自然同型 $A \xrightarrow{{}^*\pi_A} {}^{**}A$ が存在する時である. ^{*28}

定義 6.15 (右ピボタル圏)

C を剛モノイダル圏とする. C が右ピボタル圏 (right pivotal category) であるとはモノイダル自然同型 $A \xrightarrow{\pi_A^*} A^{**}$ が存在する時である. ^{*29}

定理 6.16 (左ピボタル圏の移動定理)

執筆中

定理 6.17 (右ピボタル圏の移動定理)

剛モノイダル圏において A, B を対象, A^{**}, B^{**} をそれぞれ A, B の二重右双対とする. この

^{*28} 左ピボタル圏の定義として「剛モノイダル圏」→「左剛モノイダル圏」, 「モノイダル自然同型」→「モノイダル自然変換」とするものが一般的である. この定義であっても直ちに右剛モノイダル圏であって (つまり剛モノイダル圏である), 自然変換が可逆である (つまり自然同型となる) ことが分かるので上の定義を採用した.

^{*29} 右ピボタル圏の定義として「剛モノイダル圏」→「右剛モノイダル圏」, 「モノイダル自然同型」→「モノイダル自然変換」とするものが一般的である. この定義であっても直ちに左剛モノイダル圏であって (つまり剛モノイダル圏である), 自然変換が可逆である (つまり自然同型となる) ことが分かるので上の定義を採用した.

時, 次の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc}
 B^* \otimes A & \xrightarrow{\text{id}_{B^*} \otimes f} & B^* \otimes B \\
 \downarrow f^* \otimes \text{id}_A & & \downarrow \text{ev}_B \\
 A^* \otimes A & \xrightarrow{\text{ev}_A} & I
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\text{coev}_B} & B \otimes B^* \\
 \downarrow \text{coev}_A & & \downarrow \text{id}_B \otimes f^* \\
 A \otimes A^* & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{A^*}} & B \otimes A^*
 \end{array}$$

証明

省略

定義 6.18 (平衡モノイダル圏)

C を組紐剛モノイダル圏^{*30} とする. C が平衡モノイダル圏 (balanced monoidal category) であるとはツイスト (twist)^{*31} と呼ばれる自然同型 $\theta_A : A \rightarrow A$ が存在して以下の図式を可換にする時である.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\
 \downarrow \theta_{A \otimes B} & & \downarrow \sigma_{B,A} \\
 A \otimes B & \xleftarrow{\theta_A \otimes \theta_B} & A \otimes B
 \end{array}$$

6.2 コンパクト閉圏とリボン圏

定義 6.19

対称剛モノイダル圏を特にコンパクト閉圏 (compact closed category) という.

補題 6.20

コンパクト閉圏は $\theta_A = \text{id}_A$ という自明なツイストを持つ.

証明

コンパクト閉圏が対称モノイダル圏であるので次の図式が可換になることは明らかである.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \otimes A \\
 \downarrow \text{id}_{A \otimes B} & & \downarrow \sigma_{B,A} \\
 A \otimes B & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes \text{id}_B} & A \otimes B
 \end{array}$$

定義 6.21

コンパクト閉圏はモノイダル閉圏である.

^{*30} 組紐剛モノイダル圏ではなく単に組紐モノイダル圏とする定義もある.

^{*31} 平衡自然変換 (balancing transformation) とも呼ばれる.

定義 6.22 (左リボン圏)

C を平衡モノイダル圏とする. C が左リボン圏 (left ribbon category, left tortile category) であるとは自然同型 $*(\theta_A) = \theta_{*A}$ が存在する時である.

定義 6.23 (右リボン圏)

C を平衡モノイダル圏とする. C が右リボン圏 (right ribbon category, right tortile category) であるとは自然同型 $(\theta_A)^* = \theta_{A^*}$ が存在する時である.

6.3 ダガーコンパクト閉圏

執筆中

6.4 trace と dimension

定義 6.24 (左 trace)

C を左ピボタル圏, A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{f} **A$ に対して scalar

$$I \xrightarrow{\text{coev}_A} A \otimes *A \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{*A}} **A \otimes *A \xrightarrow{\text{ev}_{*A}} I$$

を A の左 trace といい $*\text{Tr}_A(f)$ や単に $*\text{Tr}(f)$ と表す.

定義 6.25 (右 trace)

C を右ピボタル圏, A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{f} A^{**}$ に対して scalar

$$I \xrightarrow{\text{coev}'_A} A^* \otimes A \xrightarrow{\text{id}_{A^*} \otimes f} A^* \otimes A^{**} \xrightarrow{\text{ev}_{A^{**}}} I$$

を A の右 trace といい $\text{Tr}_A^*(f)$ や単に $\text{Tr}^*(f)$ と表す.

定義 6.26 (左 dimension)

C をピボタル圏, A を対象とする. 対象 A の左 dimension とは scalar: $*\text{Tr}(\text{id}_A)$ でありこれを $\dim^*(A)$ と表す.

定義 6.27 (右 dimension)

C をピボタル圏, A を対象とする. 対象 A の右 dimension とは scalar: $\text{Tr}^*(\text{id}_A)$ でありこれを $*\dim(A)$ と表す.

trace や dimension は線形代数に出てくる「トレース」や「次元」と似た性質を持つ. scalar はモノイダル圏において定義されたが, trace と dimension はピボタル圏において定義される. 以下で示す性質において様々な条件が課されることに注意してほしい.

定義 6.28

C をピボタル圏とする. この時, 以下の命題が成立する.

- 射 $A \xrightarrow{f} B$ と $B \xrightarrow{g} A$ に対して

$$\mathrm{Tr}_A(g \circ f) = \mathrm{Tr}_B(f \circ g)$$

- C が重ね合わせ則を持つ時, 射 $A \xrightleftharpoons[g]{f} A$ に対して

$$\mathrm{Tr}(f + g) = \mathrm{Tr}(f) + \mathrm{Tr}(g)$$

- C が複積を持つ時,

7 モノイダル圏上のモノイド

7.1 モノイダル圏上のモノイド

定義 7.1 (モノイド)

C をモノイダル圏とする. C のモノイド (monoid) とは対象 A と射 $A \otimes A \xrightarrow{m} A, I \xrightarrow{u} A$ の 3 つ組 (A, m, u) であって以下の 2 つ図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{A,A,A}} & A \otimes (A \otimes A) \\ m \otimes \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} A \xleftarrow{m} & A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes A & \xleftarrow{\lambda_A^{-1}} & A & \xrightarrow{\rho_A^{-1}} & A \otimes I \\ u \otimes \text{id}_A \downarrow & & \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes u \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xleftarrow{m} & A \otimes A \end{array}$$

補題 7.2

上の 2 つ目の可換図式と次の図式が可換である事は同値である.

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \text{id}_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id}_A \otimes u} & A \otimes I \\ & \searrow \lambda_A & \downarrow m & \swarrow \rho_A & \\ & & A & & \end{array}$$

定義 7.3 (可換モノイド)

C を組紐モノイダル圏とする. C のモノイドが可換 (commutative) であるとは上の 2 つに加えて以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \sigma_{A,A} \searrow & & \nearrow m \\ & A \otimes A & \end{array}$$

この時, 可換モノイド (commutative monoid) であるという.

定義 7.4 (モノイド準同型)

C をモノイダル圏とし, C のモノイドを $(A, m, u), (A', m', u')$ とする. モノイド準同型 (monoid homomorphism) とは射 $A \xrightarrow{f} A'$ であって以下の 2 つの図式を可換にするもので

ある.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\
 f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\
 A' \otimes A' & \xrightarrow{m'} & A'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & I & \\
 u \swarrow & & \searrow u' \\
 A & \xrightarrow{f} & A'
 \end{array}$$

定義 7.5 (圏 **Mon**)

モノイドとモノイド準同型によって圏 **Mon** が構成される.

定義 7.6 (コモノイド)

C をモノイダル圏とする. C 上のコモノイド (comonoid) とは対象 A と射 $A \xrightarrow{d} A \otimes A, A \xleftarrow{e} I$ の 3 つ組であって以下の 2 つの図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{A,A,A}} & A \otimes (A \otimes A) \\
 d \otimes \text{id}_A \uparrow & & \uparrow \text{id}_A \otimes d \\
 A \otimes A & \xleftarrow{d} A \xrightarrow{d} & A \otimes A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes I & \xrightarrow{\rho_A} & A & \xleftarrow{\lambda_A} & A \otimes I \\
 \text{id}_A \otimes e \uparrow & & \uparrow \text{id}_A & & \uparrow \text{id}_A \otimes e \\
 A \otimes A & \xleftarrow{d} A \xrightarrow{d} & A \otimes A
 \end{array}$$

定義 7.7

C を組紐モノイダル圏とする. C のコモノイドが可換であるとは上の 2 つに加えて以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xleftarrow{d} & A \\
 \sigma_{A,A} \swarrow & & \searrow d \\
 & A \otimes A
 \end{array}$$

この時, 可換コモノイドであるという.

定義 7.8 (モノイド準同型)

C をモノイダル圏とし, C のコモノイドを $(A, d, e), (A', d', e')$ とする. モノイド準同型 (monoid homomorphism) とは射 $A \xrightarrow{f} A'$ であって以下の 2 つの図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{d} & A \otimes A \\
 f \downarrow & & \downarrow f \otimes f \\
 A' & \xrightarrow{d'} & A' \otimes A'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & I & \\
 e \swarrow & & \nwarrow e' \\
 A & \xrightarrow{f} & A'
 \end{array}$$

定義 7.9 (圏 **CMon**)

コモノイドとコモノイド準同型によって圏 **CMon** が構成される.

定義 7.10 (ネーム, コネーム)

剛モノイダル圏において双対 $A \dashv A'$ と $B \dashv B'$ と射 $A \xrightarrow{f} B$ に対してネーム (name)

定理 7.11 (pants)

C を剛モノイダル圏とする. C のある対象 A に双対 $A \dashv *A$ がある時, $*A \otimes A$ と射 $(*A \otimes A) \otimes (*A \otimes A) \xrightarrow{j} *A \otimes A, I \xrightarrow{k} *A \otimes A$ の3つ組 $(*A \otimes A, j, k)$ は canonical なモノイドとなる. このモノイド $(*A \otimes A, j, k)$ を pants(pair of pants) という.

定理 7.12 (pants 準同型の定理)

C を剛モノイダル圏とし, 対象 A と双対 $A \dashv *A$ に対してモノイド (A, m, u) と pants $(*A \otimes A, j, k)$ が存在するとする. この時モノイド (A, m, u) と pants $(*A \otimes A, j, k)$ の間にモノイド準同型 $(A, m, u) \xrightarrow{R} (*A \otimes A, j, k)$ が存在してレトラクションを持つ.

7.2 一様消去と一様複製

定義 7.13 (一様消去)

C を圏とする. C が一様消去 (uniform deleting) を持つとは C の対象 A と終対象 I ^{*32} に対して自然同型 $A \xrightarrow{e_A} I$ が存在して $e_I = \text{id}_I$ を満たす時である. ^{*33}

定義 7.14 (消去)

零対象 I を持つモノイダル圏において A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{e_A} I$ が状態 $I \xrightarrow{a} A$ を消去 (deleting) するとは以下の図式が可換になる時である.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\text{id}_A} & I \\ & \searrow a & \nearrow e_A \\ & A & \end{array}$$

定義 7.15 (well-pointed)

C をモノイダル圏, A, B を対象, $A \xrightarrow{f} B$ を射とする. C が well-pointed であるとは任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ に対して $f \circ a = g \circ a$ であれば $f = g$ となる時である.

C がモノイダルに well-pointed であるとは射 $\bigotimes_{i=1}^n A_i \xrightarrow{f} B$ と任意の状態 $I \xrightarrow{a_i} A_i$ ($i =$

^{*32} I を終対象としない定義もあるがその場合でも一様消去を持つ時は I が終対象であることが分かるのでここでは初めから I を終対象とした.

^{*33} 以降では射 $A \xrightarrow{e_A} I$ のことも一様収束という.

$1, \dots, n$) に対して $f \circ (\bigotimes_{i=1}^n a_i) = g \circ (\bigotimes_{i=1}^n a_i)$ であれば $f = g$ となる時である.

補題 7.16

零対象 I を持つモノイダル圏において A を対象とする. 射 $A \xrightarrow{e_A} I$ が一様収束を持つ時, 任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ を消去する. 逆に任意の状態 $I \xrightarrow{a} A$ を消去するのは圏が well-pointed である時に限る.

定義 7.17 (消去禁止定理)

コンパクト閉圏が一様消去を持つ時, **Pre** と圏同値となる.

8 Born 則

この節では量子力学や量子情報に出てくる定義がモノイダル圏において一般に考えられることを説明する.

8.1 状態と効果

定義 8.1 (状態)

モノイダル圏において対象 A の状態 (state) とは射 $I \rightarrow A$ である.

定義 8.2 (効果)

モノイダル圏において対象 A の効果 (effect) ^{*34} とは射 $A \rightarrow I$ である.

以下の例で見る様に単位対象 I からの射は余域の元を考える事と一致する.

例 8.3

Hilb において Hilbert 空間 H の状態とは線形写像 $\mathbb{C} \rightarrow H$ である.

Hilb において Hilbert 空間 H の効果とは線形写像 $H \rightarrow \mathbb{C}$ である.

8.2 積状態ともつれ状態

定義 8.4 (結合状態)

モノイダル圏において対象 A, B の結合状態 (joint state) とは射 $I \xrightarrow{c} A \otimes B$ である.

定義 8.5 (積状態ともつれ状態)

結合状態を以下の 2 つの状態に分類する.

- 結合状態 $I \xrightarrow{c} A \otimes B$ が積状態 (product state) であるとは $I \xrightarrow{a} A$ と $I \xrightarrow{b} B$ に対して $I \xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{a \otimes b} A \otimes B$ と表される時である.
- 結合状態がもつれ状態 (entangled state) であるとは積状態でない時である.

例 8.6

Hilb において結合状態, 積状態, もつれ状態は以下の様になる.

- H, K を Hilbert 空間とすると, 結合状態は Hilbert 空間 $H \otimes K$ の元である.
- 積状態は H の元と K の元の組で書ける $H \otimes K$ の元である.

^{*34} 効果は状態の双対概念であり余状態 (costate) とも呼ばれるが, 量子力学との繋がりを強調する為に効果と呼ぶ事にする.

- もつれ状態は上の様に書けない $H \otimes K$ の元である.

8.3 Born 則

定義 8.7 (確率)

モノイダルダガー圏において $I \xrightarrow{a} A$ を状態, $A \xrightarrow{x} I$ を効果とする時, 確率 (probability) $\text{Prob}(x, a) : I \rightarrow I$ を次の様に定義する.

$$\text{Prob}(x, a) := a^\dagger \circ x^\dagger \circ x \circ a$$

例 8.8

Hilb において確率は非負実数 $|\langle x^\dagger | a \rangle|^2$ である.

定義 8.9 (完全)

効果の集合 $A \xrightarrow{x_i} I$ が完全 (complete) であるとは任意の射 $B \xrightarrow{f} A$ に対してある効果 x_i が存在して $x_i \circ f = 0_{B, I}$ であれば $f = 0_{B, A}$ となる時である.

定義 8.10 (非交和)

効果の集合 $A \xrightarrow{x_n} I$ が非交和 (disjoint) であるとは任意の $i \neq j$ に対して

$$x_i \circ x_j^\dagger = \text{id}_I, \quad x_i \circ x_j = 0_{I, I}$$

定理 8.11

効果の有限完全非交和集合 $A \xrightarrow{x_n} I$ は零核を持つ等長射 x^\dagger が存在して射 $A \xrightarrow{x} \bigoplus_n I$ に一致する.

定理 8.12 (Born 則)

ダガー複積を持つモノイダルダガー圏において, $I \xrightarrow{a} A$ を等長状態 (射 $I \xrightarrow{a} A$ が等長射), $A \xrightarrow{x_n} I$ を効果の有限完全非交和集合とする. この時以下の等式が成立する.

$$\sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) = 1$$

証明

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) &= \sum_{i=1}^n a^\dagger \circ x_i^\dagger \circ x_i \circ a \\ &= a^\dagger \circ \left(\sum_{i=1}^n x_i^\dagger \circ x_i \right) \circ a \end{aligned}$$

ここで効果が非交和集合であるので

$$\sum_{i=1}^n x_i^\dagger \circ x_i = \sum_{i=1}^n \text{id}_A = \text{id}_A$$

である. 効果 $I \xrightarrow{a} A$ が等長射であるので

$$a^\dagger \circ a = \text{id}_I$$

である. 以上より恒等射を 1 と書くと

$$\sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i, a) = 1$$

9 量子複製不可能定理

9.1 量子複製不可能定理

参考文献

- [1] Chris Heunen and Jamie Vicary ‘Categories for Quantum Theory An Introduction’
- [2] Alg-d [壺大整域](#)
- [3] 中岡宏行 ‘圏論の技法’
- [4] [nlab](#)
- [5] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, Victor Ostrik ‘Tensor Categories’
- [6] Saunders Mac Lane ‘Categories for the Working Mathematician’
- [7] 新井朝雄 ‘ヒルベルト空間と量子力学’