# 熱力学の数理

Chapter 6

# 6.1 熱力学第0則と経験温度

熱平衡状態 eq

eq は noneq の terminal object として存在している

2つの system を接触させて 1つの (isolated) system とすると，これの terminal object として eq が存在する

$X \sim Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ system X と Y が eq であるとすると $M \times M$ に同値関係を定める

熱量関数 $Q = 0$.

$X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

$X \sim X$

$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

これが熱力学第0則である

(移動)熱量関数 $Q > 0$.

$X > Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X から Y へ熱が移動する

$X > Y \wedge Y > Z \Rightarrow X > Z$

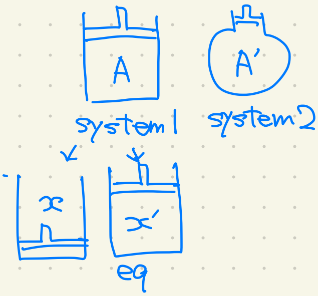
次節で公理化する

# 6.2 絶対温度の公理論的定式化

system の集まりを $\mathcal{T}$ として

$\mathcal{B} := \{(A, x) \mid A \in \mathcal{T},\ x \in A\}$ ← eq bundleの台.

とすると system A とその中の状態 $x$ の指定となる.



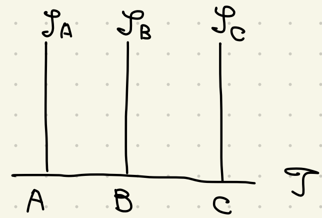

system A の eq 全体の集まりを

$\mathcal{S}_A := \{(A, x) \mid x \in A\}$

↑ eq

と表すと

$$\mathcal{B} := \coprod_{A \in \mathcal{T}} \mathcal{S}_A$$ となる.




axiom 3

$\mathcal{B}$と$(\mathcal{B}, \sim, \succ)$は別物

eq bundle $\mathcal{B}$ (∟の台) は次の性質をみたす2つの relation $\sim$, $\succ$ を備える

3つ組 $(\mathcal{B}, \sim, \succ)$ を eq bundle という(べき)

(i) $\sim$は同値関係

(ii) $\succ$ は推移律をみたす.

(iii) $\forall (A, x), (B, y) \in \mathcal{B}$ に対して

$(A, x) \succ (B, y)$, $(A, x) \prec (B, y)$, $(A, x) \sim (B, y)$

のいずれかが成立する.

$(A, x') \not\succ (A, x)$

$(A, x) \sim (B, y)$の時, $(A, x)$と$(B, y)$は熱平衡状態にあるという.

$[(A, x)] := \{(B, y) \in \mathcal{B} \mid (A, x) \sim (B, y)\}$

$\mathcal{B}/\sim := \{[(A, x)] \mid (A, x) \in \mathcal{B}\}$

lem 6.1

$(A, x) \succ (B, y)$, $(A', x') \sim (A, x)$, $(B', y') \sim (B, y) \Rightarrow (A', x') \succ (B', y')$

であるので

$[(A, x)] \succ [(B, y)] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A, x) \succ (B, y)$ は well-defined

$[(A, x)] = [(B, y)] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A, x) \sim (B, y)$ ← def より $\mathcal{B}/\sim$において一致する

lem 6.2

$(B/\sim, \leq)$ は totally ordered set.

$((0,\infty), \leq)$

$(0,\infty)$ も通常の order により totally ordered set になるので公理的温度を次のように定める

axiom 4　∠全単射

順序保存写像 $\Theta : (B/\sim, \leq) \to ((0,\infty), \leq)$ 　$\mathbb{R}_{>0}$

つまり　$[(A,x)] < [(B,y)] \Leftrightarrow \Theta([(A,x)]) < \Theta([(B,y)])$

$T_A(x) := \Theta([(A,x)])$ と def すると

$$T_A : A \to (0,\infty)$$
$$x \mapsto T_A(x)$$

system A における eq $x$ の(絶対)温度 $T_A(x)$

$(T_A(x) = T_B(y))$

$(A,x) \sim (B,y)$ の時，$[(A,x)] = [(B,y)]$ であるので $T_A(x) = T_B(y)$

逆に $T_A(x) = T_B(y)$ の時，$\Theta$ が全単射であることから $[(A,x)] = [(B,y)]$

つまり $(A,x) \sim (B,y)$

十分時間が経った eq について

以上より

$(A,x)$ と $(B,y)$ が熱平衡状態

$\Leftrightarrow$ A における $x$ の温度と B における $y$ の温度が等しい

$(A,x) \sim (B,y) \Leftrightarrow T_A(x) = T_B(x)$

温度は公理化できたが，圧力や entropy はどうなるのだろうか.

多分できるけど，何故かしない

(と今のところ感じる).

清水のpdf