1.1.5 ∞ 圏と単体的圏の比較

1.1.4 節では、単体的圏を導入して、単体的圏の理論が位相的圏の理論と等価であることを示した。 1.1.5 節では、単体的圏の理論が ∞ 圏の理論と深く関係していることを示す.

通常の圏 C に対して, 通常の脈体 N(C) は

$$N(\mathcal{C})_n := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}at}([n], \mathcal{C})$$

により定義された. 単体的圏 ${\mathfrak C}$ から単体的集合を定義するとき, 同様の定義では ${\mathfrak C}$ の単体的構造を用いることができない. よって, 単体的圏の脈体

$$\mathfrak{N}: \mathfrak{C}at_{\Delta} \to \mathfrak{S}et_{\Delta}$$

を定義するときには, [n] のに「厚みをもたせた」単体的圏 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ を用いる.

定義 1.1.5.1. 空でない線形順序集合 J に対して、単体的圏 $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ を次のように定義する.

- \bullet $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の対象は J の対象と同じ.
- $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の任意の対象 i, j に対して、

$$\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i,j) := \begin{cases} \emptyset & (j < i) \\ \operatorname{N}(P_{i,j}) & (i \le j). \end{cases}$$

ここで, $P_{i,j}$ は i と j を含む任意の集合 [i,j] のなす集合に包含による順序を入れた線形順序集合である.

• $i_0 \leq \cdots \leq i_n$ のとき、合成

$$\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_0, i_1) \times \cdots \times \operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_{n-1}, i_n) \to \operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_0, i_n)$$

は線形順序集合の写像

$$P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{n-1},i_n} \to P_{i_0,i_n} : (I_1,\cdots,I_n) \mapsto I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

から定まる対応.

注意 **1.1.5.2.** [n] の対象は集合 $\{0,\cdots,n\}$ の元である. [n] の任意の対象 $i\leq j$ に対して、射 $q_{i,j}:i\to j$ が一意に存在する. [n] の任意の対象 $i\leq j\leq k$ に対して、 $q_{i,k}\circ q_{i,j}=q_{i,k}$ を満たす.

 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の対象は [n] の対象と同じである。 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の任意の対象 $i\leq j$ に対して、 $\{i,j\}\in P_{i,j}$ から定まる点 $p_{i,j}\in \operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j)$ が存在する。しかし,i=j または j=k のときを除いて, $p_{j,k}\circ p_{i,j}\neq p_{i,k}$ である。実際,任意の $i=i_0<\dots< i_n=j$ に対して,合成 $p_{i_n,i_{n-1}}\circ\dots\circ p_{i_1,i_0}$ の集まりは $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j)$ の異なるすべての辺で構成される。つまり,ホモトピーを除いてでしか一意でない。

対象上で恒等的である関手 $\mathfrak{C}[\Delta^n] \to [n]$ が一意に存在して、これは単体的圏の同値を定める。よって、 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ は強結合性 $(q_{j,k}\circ q_{i,j}=q_{i,k})$ は満たさないが、ホモトピーを除いて結合的な合成を持つ。この意味で、 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ は合成のホモトピーの情報を持つような [n] の thickening と思うことができる。

 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の部分圏 $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ と $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]$ を具体的に書き下す.任意の $n\geq 1$ に対して, $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ は次のように表せる.

- $\mathfrak{C}[\partial \Delta^n]$ の対象は $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ と同じ.
- $\mathfrak{C}[\partial \Delta^n]$ の任意の対象 $j \leq k$ に対して, (j,k) = (0,n) の場合を除いて

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]}(j,k) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)$$

である. (j,k)=(0,n) の場合, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]}(j,k)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)\cong (\Delta^1)^{n-1}$ の境界と一致する.

任意の $n \ge 1$ と 0 < i < n に対して、 $\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]$ は次のように表せる.

- $\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]$ の対象は $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ と同じ.
- ullet $\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]$ の任意の対象 $j \leq k$ に対して, (j,k) = (0,n) の場合を除いて

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]}(j,k) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)$$

である. (j,k)=(0,n) の場合, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]}(j,k)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)\cong (\Delta^1)^{n-1}$ の内部と点 i と向かい合う面を除いたような単体的部分集合と一致する.

また,位相的圏 $|\mathfrak{C}[\Delta^n]|$ は次のようになる. $|\mathfrak{C}[\Delta^n]|$ の対象は集合 $[n]=\{0,\cdots,n\}$ の元である.任意の $0\leq i\leq j\leq n$ に対して,位相空間 $\operatorname{Map}_{|\mathfrak{C}[\Delta^n]|}(i,j)$ は $|\Delta^1|^{j-i-1}$ と同相である. $\operatorname{Map}_{|\mathfrak{C}[\Delta^n]|}(i,j)$ は p(i)=p(j)=1 を満たす連続写像 $p:\{k\in[n]:i\leq k\leq j\}\to[0,1]$ の集合ともみなせる. 更に,構成 $J\mapsto\mathfrak{C}[\Delta^J]$ は関手的である.

定義 1.1.5.3. 線形順序集合の順序を保つ写像 $f:J\to J'$ に対して、単体的関手 $\mathfrak{C}[f]:\mathfrak{C}[\Delta^J]\to\mathfrak{C}[\Delta^{J'}]$ を次のように定義する.

- $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の任意の対象 i に対して, $\mathfrak{C}[f](i) := f(i) \in \mathfrak{C}[\Delta^{J'}]$.
- J の任意の対象 $i \leq j$ に対して、 $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i,j) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^{J'}]}(f(i),f(j))$ は f が定める写像 $P_{i,j} \to P_{f(i),f(j)}: I \mapsto f(I)$ の脈体の射 $\mathrm{N}(P_{i,j}) \to \mathrm{N}(P_{f(i),f(j)})$

注意 1.1.5.4. 構成 $[n] \mapsto \mathfrak{C}[\Delta^n]$ は関手 $\mathfrak{C}[\Delta^-] : \Delta \to \mathfrak{C}at_\Delta$ を定める.

定義 1.1.5.5 (単体的脈体, 位相的脈体). 単体的圏 \mathcal{C} に対して、単体的集合 $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ を次のように定義し、 \mathcal{C} の単体的脈体 (simplicial nerve) という.

- 任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})_n := \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Cat}_{\Delta}}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathfrak{C}).$
- Δ の任意の射 $\alpha:[m] \to [n]$ に対して, $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})_n \to \mathfrak{N}(\mathfrak{C})_m$ は誘導される射 $\mathfrak{C}[\Delta^m] \to \mathfrak{C}[\Delta^n]$ の前合成.

位相的圏 C に対して、特異単体 Sing C の単体的脈体 $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}C)$ を C の位相的脈体 $(\mathrm{topological\ nerve})$

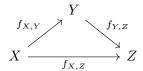
という. *1

注意 1.1.5.6. 単体的脈体や位相的脈体も単に脈体と呼ぶことが多い.

注意 1.1.5.7. C を単体的圏とする. C を単に圏とみなしたとき、単体的圏 C の脈体と圏 C の脈体は一致しない. 同様に、C を位相的圏とする. C を単に圏とみなしたとき、位相的圏 C の脈体と圏 C の脈体と

例 1.1.5.8. C を位相的圏とする. C の位相的脈体 $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}C)$ の低次元の単体は次のように表せる.

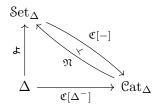
- M(SingC) の 0 単体は C の対象とみなせる。
- $\mathfrak{N}(\operatorname{Sing}\mathfrak{C})$ の 2 単体の境界は次のような (可換とは限らない) 図式とみなせる.



• $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathfrak{C})$ の 2 単体は $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}}(X,Z)$ において $f_{X,Z}$ から $f_{Y,Z}\circ f_{X,Y}$ への道を与える対応とみなせる.

普遍随伴の一般論より、単体的脈体は左随伴を持つ.

定義 1.1.5.9. 単体的脈体 $\mathfrak{N}: \mathfrak{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathfrak{S}\mathrm{et}_\Delta$ の左随伴 $\mathfrak{C}[-]: \mathfrak{S}\mathrm{et}_\Delta \to \mathfrak{C}\mathrm{at}_\Delta$ と表す.



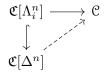
命題 1.1.5.10. $\mathfrak C$ を単体的圏とする. $\mathfrak C$ の任意の対象 X,Y に対して $\mathrm{Map}_{\mathfrak C}(X,Y)$ が Kan 複体のとき、単体的脈体 $\mathfrak N(\mathfrak C)$ は ∞ 圏である.

Proof. 任意の $n \ge 1$ と 0 < i < n に対して、次の拡張が存在することを示せばよい.

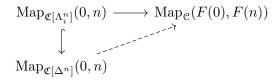
$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \stackrel{F}{\longrightarrow} \mathfrak{N}(\mathfrak{C}) \\ \downarrow & & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

 $^{^{*1}}$ [?] では単に $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ と表しているが,本稿ではこの省略を用いない.

随伴性より、次の拡張が存在することを示せばよい.



 $\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]$ の構成から、次の拡張が存在することを示せばよい.



仮定より、 $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}}(F(0),F(n))$ は Kan 複体である。 $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(0,n)$ は $(\Delta^1)^{\{1,\cdots,n-1\}}$ と同一視できる。また、 $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]}(0,n)$ は $(\Delta^1)^{\{1,\cdots,n-1\}}$ から内部と点 i と向かい合う面を除いたような単体的部分集合と同一視できる。よって、 $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]}(0,n) \hookrightarrow \operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(0,n)$ は緩射(弱ホモトピー同値かつモノ射)である。 Kan ファイブレーションは緩射に対して RLP を持つので、この図式は拡張を持つ。

注意 1.1.5.11. 命題 1.1.5.10 の証明から、より強い主張がいえる。 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を単体的圏の関手とする。 \mathcal{C} の任意の対象 C,C' に対して、 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(C,C') \to \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(F(C),F(C'))$ が Kan ファイブレーションのとき、 ∞ 圏の関手 $\mathfrak{N}(F):\mathfrak{N}(\mathcal{C}) \to \mathfrak{N}(\mathcal{D})$ は内ファイブレーションである。

系 1.1.5.12. \mathcal{C} を位相的圏とする. このとき, 位相的脈体 $\mathfrak{N}(\operatorname{Sing}\mathcal{C})$ は ∞ 圏である.

Proof. 命題 1.1.5.10 と、任意の位相空間の特異単体が Kan 複体であることから従う.

次の命題は 2.2.4 節と 2.2.5 節で証明する.

定理 1.1.5.13. ${\mathbb C}$ を位相的圏, X,Y を ${\mathbb C}$ の任意の対象とする. このとき, 随伴 $(|{\mathfrak C}[-]|,{\mathfrak N}({\rm Sing}))$ が定める余単位

$$u: |\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathcal{C})]}(X,Y)| \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$$

は位相空間の弱ホモトピー同値である.

定理 1.1.5.13 より、 ∞ 圏の理論と位相的圏の理論が等価であることが分かる。 実際、随伴 $(|\mathfrak{C}[-]|,\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}))$ は互いに圏同値ではないが、ホモトピー同値を定める。 これを定式化するため に、単体的集合のホモトピー圏を定義する.

定義 1.1.5.14 (単体的集合のホモトピー圏). S を単体的集合とする。このとき、単体的圏 $\mathfrak{C}[S]$ のホモトピー圏 $h\mathfrak{C}[S]$ を S のホモトピー圏 (homotopy category) といい、hS と表す。

S を単体的集合とする.このとき,S のホモトピー圏 $\mathrm{h}S$ は $\mathfrak H$ 豊穣圏とみなすことができる.つまり,S の任意の点 x,y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathrm{h}S}(x,y)=[\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x,y)]$ である.

 $f:S \to T$ を単体的集合の射とする. 誘導される関手 $\mathrm{h} f:\mathrm{h} S \to \mathrm{h} T$ が $\mathfrak H$ 豊穣圏の圏同値のとき、 f を圏的同値 (categorical equivalence) という.

注意 1.1.5.15. Joyal は圏的同値ではなく、弱圏的同値 (weak categorical equivalence) という言葉を用いている.

注意 1.1.5.16. 同値や弱同値ではなく圏的同値という言葉を用いている理由は、単体的集合の圏的同値と単体的集合の弱ホモトピー同値と混同しないようにするためである. 実際、単体的集合の圏上の Kan-Quillen モデル構造における弱同値は弱ホモトピー同値であるが、Joyal モデル構造では圏的同値である.

注意 1.1.5.17. $f:S\to T$ を単体的集合の射とする. $S\to T$ が圏的同値であること, $\mathfrak{C}[S]\to\mathfrak{C}[T]$ が単体的圏の同値であること, $|\mathfrak{C}[S]|\to |\mathfrak{C}[T]|$ が位相的圏の同値であることはすべて同値である.

注意 1.1.5.18. 随伴 $(|\mathfrak{C}[-]|,\mathfrak{N}(\operatorname{Sing}))$ は (圏的同値の違いを除いた) 単体的集合の理論と (同値の違いを除いた) 位相的圏の理論が等価であることを示している。つまり、任意の位相的圏 \mathfrak{C} に対して余単位 $|\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathfrak{C})]| \to \mathfrak{C}$ は位相的圏の同値であり、任意の単体的集合 S に対して、単位 $S \to \mathfrak{N}|\mathfrak{C}[S]|$ は単体的集合の圏同値である。余単位 $|\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathfrak{C})]| \to \mathfrak{C}$ が位相的圏の同値であることは、定理 $S \to \mathfrak{N}|\mathfrak{C}[S]|$ は単位)、後半の主張は前半の主張から従う。