

### 1.2.16 空間の $\infty$ 圏

通常の圏論において、多くの圏は  $\mathbf{Set}$  で豊穡された圏であった。高次圏論におけるこのアナロジーは空間で豊穡された  $\infty$  圏である。

**定義 1.2.16.1** (空間の  $\infty$  圏). 小 Kan 複体のなす  $\mathbf{Set}_\Delta$  の充満部分圏を  $\mathbf{Kan}$  と表す.  $\mathbf{Kan}$  を単体的圏とみなし,  $\mathbf{Kan}$  の単体的脈体  $\mathfrak{N}(\mathbf{Kan})$  を空間の  $\infty$  圏 ( $\infty$ -category of spaces) といい,  $\mathcal{S}$  と表す.

**注意 1.2.16.2.**  $\mathbf{Kan}$  の任意の対象  $X, Y$  に対して, 単体的集合  $\mathrm{Map}_{\mathbf{Kan}}(X, Y) = Y^X$  は Kan 複体である. 命題 1.1.5.10 より,  $\mathcal{S}$  は  $\infty$  圏である.

**注意 1.2.16.3.** 空間の  $\infty$  圏として, CW 複体のなす圏の位相的脈体なども考えられる. このようなものは全て  $\mathcal{S}$  と等価であることが分かる. 定義 1.2.16.1 の定義は  $\infty$  圏における Yoneda の補題を示すときに扱いやすいからである. 詳しくは 5.1.3 節で議論する.

**注意 1.2.16.4.**  $\mathcal{S}$  は小 Kan 複体のなす圏に対して定義されていた. 小とは限らないすべての Kan 複体に対して定義される空間の  $\infty$  圏を  $\hat{\mathcal{S}}$  と表す.  $\mathcal{S}$  は大きい  $\infty$  圏であるが,  $\hat{\mathcal{S}}$  はより大きな  $\infty$  圏であることを後で見る.