1.1.5 ∞ 圏と単体的圏の比較

1.1.4 節では, 単体的圏を導入して, 単体的圏の理論が位相的圏の理論と等価であることを示した. 1.1.5 節では, 単体的圏の理論が ∞ 圏の理論と深く関係していることを示す.

通常の圏 $\mathcal{C}$ に対して, 通常の脈体 $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ は

$$\mathrm{N}(\mathcal{C})_n := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}}([n], \mathcal{C})$$

により定義された. 単体的圏 $\mathcal{C}$ から単体的集合を定義するとき, 同様の定義では $\mathcal{C}$ の単体的構造を用いることができない. よって, 単体的圏の脈体

$$\mathfrak{N} : \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

を定義するときには, $[n]$ のに「厚みをもたせた」単体的圏 $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ を用いる.

定義 1.1.5.1. 空でない線形順序集合 J に対して, 単体的圏 $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ を次のように定義する.

- $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の対象は J の対象と同じ.
- $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の任意の対象 i, j に対して,

  $$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i, j) := \begin{cases} \emptyset & (j < i) \\ \mathrm{N}(P_{i,j}) & (i \leq j). \end{cases}$$

  ここで, $P_{i,j}$ は i と j を含む任意の集合 $[i, j]$ のなす集合に包含による順序を入れた線形順序集合である.
- $i_0 \leq \cdots \leq i_n$ のとき, 合成

  $$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_0, i_1) \times \cdots \times \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_{n-1}, i_n) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i_0, i_n)$$

  は線形順序集合の写像

  $$P_{i_0,i_1} \times \cdots \times P_{i_{n-1},i_n} \to P_{i_0,i_n} : (I_1, \cdots, I_n) \mapsto I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

  から定まる対応.

注意 1.1.5.2. $[n]$ の対象は集合 $\{0, \cdots, n\}$ の元である. $[n]$ の任意の対象 $i \leq j$ に対して, 射 $q_{i,j} : i \to j$ が一意に存在する. $[n]$ の任意の対象 $i \leq j \leq k$ に対して, $q_{j,k} \circ q_{i,j} = q_{i,k}$ を満たす.

$\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の対象は $[n]$ の対象と同じである. $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の任意の対象 $i \leq j$ に対して, $\{i, j\} \in P_{i,j}$ から定まる点 $p_{i,j} \in \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i, j)$ が存在する. しかし, $i = j$ または $j = k$ のときを除いて, $p_{j,k} \circ p_{i,j} \neq p_{i,k}$ である. 実際, 任意の $i = i_0 < \cdots < i_n = j$ に対して, 合成 $p_{i_n,i_{n-1}} \circ \cdots \circ p_{i_1,i_0}$ の集まりは $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i, j)$ の異なるすべての辺で構成される. つまり, ホモトピーを除いてでしか一意でない.

対象上で恒等的である関手 $\mathfrak{C}[\Delta^n] \to [n]$ が一意に存在して, これは単体的圏の同値を定める. よって, $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ は強結合性 $(q_{j,k} \circ q_{i,j} = q_{i,k})$ は満たさないが, ホモトピーを除いて結合的な合成を持つ. この意味で, $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ は合成のホモトピーの情報を持つような $[n]$ の thickening と思うことができる.

$\mathfrak{C}[\Delta^n]$ の部分圏 $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ と $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]$ を具体的に書き下す．任意の $n \geq 1$ に対して, $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ は次のように表せる.

- $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ の対象は $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ と同じ.
- $\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]$ の任意の対象 $j \leq k$ に対して, $(j,k)=(0,n)$ の場合を除いて

  $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]}(j,k)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)$$

  である．$(j,k)=(0,n)$ の場合, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\partial\Delta^n]}(j,k)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k) \cong (\Delta^1)^{n-1}$ の境界と一致する.

任意の $n \geq 1$ と $0 < i < n$ に対して, $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]$ は次のように表せる.

- $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]$ の対象は $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ と同じ.
- $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]$ の任意の対象 $j \leq k$ に対して, $(j,k)=(0,n)$ の場合を除いて

  $$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]}(j,k)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k)$$

  である．$(j,k)=(0,n)$ の場合, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]}(j,k)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(j,k) \cong (\Delta^1)^{n-1}$ の内部と点 i と向かい合う面を除いたような単体的部分集合と一致する.

また, 位相的圏 $|\mathfrak{C}[\Delta^n]|$ は次のようになる．$|\mathfrak{C}[\Delta^n]|$ の対象は集合 $[n]=\{0,\cdots,n\}$ の元である．任意の $0 \leq i \leq j \leq n$ に対して, 位相空間 $\mathrm{Map}_{|\mathfrak{C}[\Delta^n]|}(i,j)$ は $|\Delta^1|^{j-i-1}$ と同相である．$\mathrm{Map}_{|\mathfrak{C}[\Delta^n]|}(i,j)$ は $p(i)=p(j)=1$ を満たす連続写像 $p:\{k \in [n] : i \leq k \leq j\} \to [0,1]$ の集合ともみなせる.

更に, 構成 $J \mapsto \mathfrak{C}[\Delta^J]$ は関手的である.

定義 1.1.5.3. 線形順序集合の順序を保つ写像 $f : J \to J'$ に対して, 単体的関手 $\mathfrak{C}[f] : \mathfrak{C}[\Delta^J] \to \mathfrak{C}[\Delta^{J'}]$ を次のように定義する.

- $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ の任意の対象 i に対して, $\mathfrak{C}[f](i) := f(i) \in \mathfrak{C}[\Delta^{J'}]$.
- J の任意の対象 $i \leq j$ に対して, $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i,j) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^{J'}]}(f(i),f(j))$ は f が定める写像 $P_{i,j} \to P_{f(i),f(j)} : I \mapsto f(I)$ の脈体の射 $\mathrm{N}(P_{i,j}) \to \mathrm{N}(P_{f(i),f(j)})$

注意 1.1.5.4. 構成 $[n] \mapsto \mathfrak{C}[\Delta^n]$ は関手 $\mathfrak{C}[\Delta^-] : \Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ を定める.

定義 1.1.5.5 (単体的脈体, 位相的脈体). 単体的圏 $\mathcal{C}$ に対して, 単体的集合 $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ を次のように定義し, $\mathcal{C}$ の単体的脈体 (simplicial nerve) という.

- 任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathfrak{N}(\mathcal{C})_n := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n],\mathcal{C})$.
- Δ の任意の射 $\alpha : [m] \to [n]$ に対して, $\mathfrak{N}(\mathcal{C})_n \to \mathfrak{N}(\mathcal{C})_m$ は誘導される射 $\mathfrak{C}[\Delta^m] \to \mathfrak{C}[\Delta^n]$ の前合成.

位相的圏 $\mathcal{C}$ に対して, 特異単体 $\mathrm{Sing}\mathcal{C}$ の単体的脈体 $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の位相的脈体 (topological nerve)

という. [*1]

注意 1.1.5.6. 単体的脈体や位相的脈体も単に脈体と呼ぶことが多い.

注意 1.1.5.7. $\mathcal{C}$ を単体的圏とする. $\mathcal{C}$ を単に圏とみなしたとき, 単体的圏 $\mathcal{C}$ の脈体と圏 $\mathcal{C}$ の脈体は一致しない. 同様に, $\mathcal{C}$ を位相的圏とする. $\mathcal{C}$ を単に圏とみなしたとき, 位相的圏 $\mathcal{C}$ の脈体と圏 $\mathcal{C}$ の脈体は一致しない.

例 1.1.5.8. $\mathcal{C}$ を位相的圏とする. $\mathcal{C}$ の位相的脈体 $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ の低次元の単体は次のように表せる.

- $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ の 0 単体は $\mathcal{C}$ の対象とみなせる.
- $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ の 1 単体は $\mathcal{C}$ の射とみなせる.
- $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ の 2 単体の境界は次のような (可換とは限らない) 図式とみなせる.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "f_{Y,Z}"] & \\ X \arrow[ur, "f_{X,Y}"] \arrow[rr, "f_{X,Z}"'] & & Z \end{tikzcd}$$

- $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ の 2 単体は $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ において $f_{X,Z}$ から $f_{Y,Z} \circ f_{X,Y}$ への道を与える対応とみなせる.

普遍随伴の一般論より, 単体的脈体は左随伴を持つ.

定義 1.1.5.9. 単体的脈体 $\mathfrak{N} : \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ の左随伴 $\mathfrak{C}[-] : \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と表す.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \arrow[dr, bend left, "{\mathfrak{C}[-]}"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\ \Delta \arrow[u, "よ"] \arrow[r, "{\mathfrak{C}[\Delta^-]}"'] & \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \arrow[ul, bend left, "\mathfrak{N}"] \end{tikzcd}$$

命題 1.1.5.10. $\mathcal{C}$ を単体的圏とする. $\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y に対して $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が Kan 複体のとき, 単体的脈体 $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ は ∞ 圏である.

Proof. 任意の $n \geq 1$ と $0 < i < n$ に対して, 次の拡張が存在することを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & \mathfrak{N}(\mathcal{C}) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

[*1] [?] では単に $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ と表しているが, 本稿ではこの省略を用いない.

随伴性より, 次の拡張が存在することを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[\Lambda_i^n] \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C} \\
\mathfrak{C}[\Delta^n] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]$ の構成から, 次の拡張が存在することを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]}(0,n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(F(0),F(n)) \\
\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(0,n) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

仮定より, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(F(0),F(n))$ は Kan 複体である. $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(0,n)$ は $(\Delta^1)^{\{1,\cdots,n-1\}}$ と同一視できる. また, $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]}(0,n)$ は $(\Delta^1)^{\{1,\cdots,n-1\}}$ から内部と点 i と向かい合う面を除いたような単体的部分集合と同一視できる. よって, $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda_i^n]}(0,n) \hookrightarrow \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(0,n)$ は緩射 (弱ホモトピー同値かつモノ射) である. Kan ファイブレーションは緩射に対して RLP を持つので, この図式は拡張を持つ. □

注意 1.1.5.11. 命題 1.1.5.10 の証明から, より強い主張がいえる. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を単体的圏の関手とする. $\mathcal{C}$ の任意の対象 C, C' に対して, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(C,C') \to \mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(F(C),F(C'))$ が Kan ファイブレーションのとき, ∞ 圏の関手 $\mathfrak{N}(F) : \mathfrak{N}(\mathcal{C}) \to \mathfrak{N}(\mathcal{D})$ は内ファイブレーションである.

系 1.1.5.12. $\mathcal{C}$ を位相的圏とする. このとき, 位相的脈体 $\mathfrak{N}(\mathrm{Sing}\mathcal{C})$ は ∞ 圏である.

Proof. 命題 1.1.5.10 と, 任意の位相空間の特異単体が Kan 複体であることから従う. □

次の命題は 2.2.4 節と 2.2.5 節で証明する.

定理 1.1.5.13. $\mathcal{C}$ を位相的圏, X, Y を $\mathcal{C}$ の任意の対象とする. このとき, 随伴 $(|\mathfrak{C}[-]|, \mathfrak{N}(\mathrm{Sing}))$ が定める余単位

$$u : |\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathcal{C})]}(X,Y)| \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

は位相空間の弱ホモトピー同値である.

定理 1.1.5.13 より, ∞ 圏の理論と位相的圏の理論が等価であることが分かる. 実際, 随伴 $(|\mathfrak{C}[-]|, \mathfrak{N}(\mathrm{Sing}))$ は互いに圏同値ではないが, ホモトピー同値を定める. これを定式化するために, 単体的集合のホモトピー圏を定義する.

定義 1.1.5.14 (単体的集合のホモトピー圏). S を単体的集合とする. このとき, 単体的圏 $\mathfrak{C}[S]$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathfrak{C}[S]$ を S のホモトピー圏 (homotopy category) といい, $\mathrm{h}S$ と表す.

S を単体的集合とする. このとき, S のホモトピー圏 $\mathrm{h}S$ は $\mathcal{H}$ 豊穣圏とみなすことができる. つまり, S の任意の点 x, y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathrm{h}S}(x,y) = [\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x,y)]$ である.

$f : S \to T$ を単体的集合の射とする．誘導される関手 $\mathrm{h}f : \mathrm{h}S \to \mathrm{h}T$ が $\mathcal{H}$ 豊穣圏の圏同値のとき，f を圏的同値 (categorical equivalence) という．

注意 1.1.5.15. Joyal は圏的同値ではなく，弱圏的同値 (weak categorical equivalence) という言葉を用いている．

注意 1.1.5.16. 同値や弱同値ではなく圏的同値という言葉を用いている理由は，単体的集合の圏的同値と単体的集合の弱ホモトピー同値と混同しないようにするためである．実際，単体的集合の圏上の Kan-Quillen モデル構造における弱同値は弱ホモトピー同値であるが，Joyal モデル構造では圏的同値である．

注意 1.1.5.17. $f : S \to T$ を単体的集合の射とする．$S \to T$ が圏的同値であること，$\mathfrak{C}[S] \to \mathfrak{C}[T]$ が単体的圏の同値であること，$|\mathfrak{C}[S]| \to |\mathfrak{C}[T]|$ が位相的圏の同値であることはすべて同値である．

注意 1.1.5.18. 随伴 $(|\mathfrak{C}[-]|, \mathfrak{N}(\mathrm{Sing}))$ は (圏的同値の違いを除いた) 単体的集合の理論と (同値の違いを除いた) 位相的圏の理論が等価であることを示している．つまり，任意の位相的圏 $\mathcal{C}$ に対して余単位 $|\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathcal{C})]| \to \mathcal{C}$ は位相的圏の同値であり，任意の単体的集合 S に対して，単位 $S \to \mathfrak{N}|\mathfrak{C}[S]|$ は単体的集合の圏同値である．余単位 $|\mathfrak{C}[\mathfrak{N}(\mathcal{C})]| \to \mathcal{C}$ が位相的圏の同値であることは，定理 1.1.5.13 から従う．後半の主張は前半の主張から従う．