1.2.5 ∞ 亜群と古典的なホモトピー論

通常の圏論における亜群と同様に, 高次圏論における ∞ 亜群を定義する. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする. ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ が通常の亜群 (つまり, $\mathcal{C}$ の任意の射が同値) のとき, $\mathcal{C}$ を ∞ 亜群 (∞-groupoid) という. 1.1.1 節で, ∞ 亜群の理論と古典的なホモトピー論が等価であることを見た. この考えは次のように定式化することができる.

命題 1.2.5.1. $\mathcal{C}$ を単体的集合とする. このとき, 次はすべて同値である.

(1) $\mathcal{C}$ は ∞ 亜群である.
(2) $\mathcal{C}$ は任意の $0 \leq i < n$ に対して, 包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は拡張を持つ.
(3) $\mathcal{C}$ は任意の $0 < i \leq n$ に対して, 包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は拡張を持つ.
(4) $\mathcal{C}$ は任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, 包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は拡張を持つ. つまり, $\mathcal{C}$ は Kan 複体である.

Proof. (1) と (2) の同値性は命題 1.2.4.3 より従う. (1) と (3) の同値性は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において命題 1.2.4.3 を用いると分かる. (2) かつ (3) と (4) の同値性は明らかである. □

注意 1.2.5.2. 高次圏論において, ∞ 亜群を空間と同一視できるということは自明ではない. 例えば, ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ が亜群であるような位相的圏 $\mathcal{C}$ を考える. 簡単のため, $\mathcal{C}$ は 1 つの対象 X からなるとする. このとき, $\mathcal{C}$ は位相モノイド $M = \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, X)$ と同一視できる. $h\mathcal{C}$ が亜群であることと, 離散モノイド $\pi_0 M$ が群であることは同値である. このとき, 単位射 $M \to \Omega BM$ は弱ホモトピー同値である. ここで, BM は M の分類空間である. つまり, 1 対象 X からなる位相的圏 $\mathcal{C}$ は分類空間 BM と同値である.

∞ 亜群から ∞ 圏への包含は, 小 ∞ 亜群のなす ∞ 圏から小 ∞ 圏のなす ∞ 双圏への埋め込みを定めることを表している. 逆に, 任意の ∞ 圏から可逆でない射を捨てることで, ∞ 亜群を得ることができる.

命題 1.2.5.3. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, $\mathcal{C}'$ を任意の辺が $\mathcal{C}$ における同値であるような $\mathcal{C}$ の最大部分単体的集合とする. このとき, $\mathcal{C}'$ は Kan 複体である. また, 任意の Kan 複体 K に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(K, \mathcal{C}') \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta}(K, \mathcal{C})$ は全単射である.

命題 1.2.5.3 は次のようにまとめることができる. 命題 1.2.5.3 で得られる Kan 複体 $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ に含まれる最大 Kan 複体 (largest Kan complex) という. $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ に含まれる最大 Kan 複体である. 構成 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ は ∞ 圏の ∞ 圏から Kan 複体の ∞ 圏への関手を定める. この関手は Kan 複体から ∞ 圏への包含が定める関手の (高次圏的な意味の) 右随伴である. また, ∞ 圏の同値 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は Kan 複体のホモトピー同値 $\mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ を定める.

注意 1.2.5.4. 位相的圏や単体的圏においては, この構成は簡単に表すことができる. 例として位相的圏の場合をみる. $\mathcal{C}$ を位相的圏とする. このとき, 位相的圏 $\mathcal{C}'$ を次のように定義する.

- $\mathcal{C}'$ の対象は $\mathcal{C}$ の対象と同じ.
- $\mathcal{C}'$ の任意の対象 X, Y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ は, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ のすべてのホモトピー同値のなす部分空間 (に部分位相をいれた位相空間).

注意 1.2.5.5. 系 2.4.2.5 で命題 1.2.5.3 の構成の相対版を証明する.

∞ 亜群から ∞ 圏への包含は 1 圏的な随伴はもたないが, 高次圏的な随伴をもつ. この左随伴は「ファイブラント置換」によって計算することができる. 例えば, 構成 $S \mapsto \mathrm{Sing}|S|$ である. 単位射 $u : S \to \mathrm{Sing}|S|$ は弱ホモトピー同値であるが, 一般に圏的同値ではない. 例えば, S が ∞ 圏のとき, u が圏的同値であることと, S が Kan 複体であることは同値である. 一般に, $\mathrm{Sing}|S|$ は S の任意の射に対して逆射をつけ足したような ∞ 亜群とみなすことができる.

注意 1.2.5.6. $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上の Kan-Quillen モデル構造に加えて, 2.2.5 節では, $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上の Joyal モデル構造を定義する. 両方のモデル構造において, コファイブレーションは共通して単体的集合のモノ射である. しかし, Joyal モデル構造における弱同値は圏的同値なので, Kan-Quillen モデル構造における弱同値よりも少ない. よって, Joyal モデル構造におけるファイブラント対象は, Kan-Quillen モデル構造におけるファイブラント対象よりも多い.