### 1.2.4 高次圏における対象, 射, 同値

通常の圏と同様に, 高次圏における対象や射を定義する. $\mathcal{C}$ が単体的圏か位相的圏のとき, 対象や射はそれぞれの圏における通常の対象や射とすればよい. $\mathcal{C}$ が $\infty$ 圏のときは次のように定義する.

$S$ を単体的集合とする. $S$ の点 $\Delta^0 \to S$ を $S$ の対象 (object) という. $S$ の辺 $\Delta^1 \to S$ を $S$ の射 (morphism) という. $S$ の対象 $X$ に対して, $s_0(X): X \to X$ を $X$ 上の恒等射 (identity morphism) といい, $\mathrm{id}_X$ と表す.

$\mathcal{C}$ を $\infty$ 圏, $\mathrm{h}\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ のホモトピー圏, $f: X \to Y$ を $\mathcal{C}$ の射とする. $f$ が $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における同型射のとき, $f$ を同値 (equivalence) という. $\mathcal{C}$ の対象 $X, Y$ が同値で結ばれるとき, $X$ と $Y$ は同値 (equivalent) であるという.

位相的圏 $\mathcal{C}$ における射 $f$ が同値であることは, $f$ が同型であることよりも次の意味で弱い.

**命題 1.2.4.1.** $\mathcal{C}$ を位相的圏, $f: X \to Y$ を $\mathcal{C}$ の射とする. このとき, 次はすべて同値である.

(1) $f$ は $\mathcal{C}$ における同値である.
(2) $f$ はホモトピー同値 $g: Y \to X$ を持つ.
(3) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $W$ に対して, 写像 $f \circ -: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ はホモトピー同値である.
(4) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $W$ に対して, 写像 $f \circ -: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ は弱ホモトピー同値である.
(5) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $Z$ に対して, 写像 $- \circ f: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ はホモトピー同値である.
(6) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $Z$ に対して, 写像 $- \circ f: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ は弱ホモトピー同値である.

*Proof.* (2) は (1) の言いかえである. (2)⇒(3)⇒(4)⇒(1) を示す. (2)⇒(5)⇒(6)⇒(1) も同様である. (2) から (3) を示す. $g$ を $f$ のホモトピー逆射とする. このとき, $g$ から定まる写像 $- \circ g: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ は (3) の $f \circ -$ のホモトピー逆射である. (3) から (4) は古典的なホモトピー論から従う. (4) から (1) を示す. (4) を満たすとき, $f \circ -: \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, X) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ は $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における同型である. つまり, $\mathrm{h}\mathcal{C}$ において $X$ と $Y$ は同型である. よって, $f$ は $\mathcal{C}$ における同値である. □

**例 1.2.4.2.** $\mathcal{C}$ を CW 複体の圏とし, 各射集合 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ にコンパクト開位相によって位相空間を入れることで, $\mathcal{C}$ を位相的圏とみなす. $\mathcal{C}$ の対象 $X, Y$ が同値であることと, $X, Y$ がホモトピー同値であることと同値である.

次の命題は $\infty$ 圏の枠組みにおける同値を特徴づける定理である. 証明は 2.1.2 節で行う.

**命題 1.2.4.3 (Joyal).** $\mathcal{C}$ を $\infty$ 圏, $\phi: \Delta^1 \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の射とする. このとき, 次は同値である.

(1) $\phi$ は同値である.
(2) 任意の $n \geq 2$ と $f_0|_{\Delta^{\{0,1\}}} = \phi$ を満たす射 $f_0 : \Lambda^n_0 \to \mathcal{C}$ に対して, $f_0$ から $\Delta^n$ への拡張が存在する.

$\infty$ 圏における同値は外部角体の拡張条件で表せる.

**補題 1.2.4.4.** $\mathcal{C}$ を $\infty$ 圏, $f : x \to y$ を $\mathcal{C}$ の射とする. このとき, 次は同値である.

(1) $f$ は同値である.
(2) 次のように表せる外部角体 $\sigma^L_0 : \Lambda^2_0 \to \mathcal{C}$ と $\sigma^R_0 : \Lambda^2_2 \to \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & y & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_x"'] & & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "f"] & \\ y \arrow[rr, "\mathrm{id}_y"'] & & y \end{tikzcd}$$

はそれぞれ 2 単体 $\sigma^L : \Delta^2 \to \mathcal{C}$ と $\sigma^R : \Delta^2 \to \mathcal{C}$ に拡張できる.

*Proof.* (2) を満たすと仮定する. $\sigma^L_0$ が $\sigma^L$ に拡張できるとき, $f$ は $\mathrm{h}\mathcal{C}$ において左逆射を持つ. $\sigma^R_0$ が $\sigma^R$ に拡張できるとき, $f$ は $\mathrm{h}\mathcal{C}$ において右逆射を持つ. よって, $f$ は $\mathcal{C}$ における同値である.

(1) を満たすと仮定する. このとき, ある 1 単体 $g : y \to x$ が存在して, $[fg]$ と $[gf]$ はそれぞれ $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における恒等射である. つまり, 次のような 2 単体がそれぞれ存在する.

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "\mathrm{id}_x"] & \\ x \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_x"'] & & x \end{tikzcd}$$

また, $g$ の退化する 2 単体 $s_1(g)$ から, 次のように表せる射 $\Lambda^3_2 \to \mathcal{C}$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} & x & \\ & & y \arrow[ul, "g"'] \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[uur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[urr, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & x \arrow[uul, "\mathrm{id}_x"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ は $\infty$ 圏なので, これは $\Delta^3 \to \mathcal{C}$ に拡張できる. このとき, 2 単体 $\Delta^{\{0,1,3\}}$ は $\sigma^L$ とみなせる. $\sigma^R$ に対しても同様である. $\square$