1.2.12　始対象と終対象

通常の圏論と同様に, 高次圏における終対象と始対象を定義する. 位相的圏 $\mathcal{C}$ に対して, 射空間の位相を無視して $\mathcal{C}$ を通常の圏とみなしたときの終対象を $\mathcal{C}$ における終対象と定義することが考えられる. しかし, この定義は強すぎることが分かる. 例えば, $\mathcal{CG}$ において, 1 点からなる位相空間 $*$ はこの意味の終対象である. しかし, $*$ と同値な (つまり, 任意の可縮空間) 位相空間は $*$ と同相ではなく, $\mathcal{CG}$ における終対象ではない. ∞ 圏における概念は同値で保たれるべきであるので, これよりも弱い定義が必要である.

定義 1.2.12.1 (終対象). $\mathcal{C}$ を単体的集合 (位相的圏, 単体的圏), $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathrm{h}\mathcal{C}$ を $\mathcal{H}$ 豊穣圏とみなす. $\mathcal{C}$ の対象 X が $\mathrm{h}\mathcal{C}$ における通常の終対象のとき, X を終対象 (final object) という.

注意 1.2.12.2. 定義 1.2.12.1 の定義において, ホモトピー圏の情報しか用いていないので, ここまでで紹介した操作と同値に対して, 終対象性は不変である.

∞ 圏の枠組みにおいては, より良い定義として強終対象がある. 系 1.2.12.5 で, ∞ 圏において, これが終対象と同値な定義であることを見る.

定義 1.2.12.3 (強終対象). $\mathcal{C}$ を単体的集合, X を $\mathcal{C}$ の対象とする. 射影 $\mathcal{C}_{/X} \to \mathcal{C}$ が自明な Kan ファイブレーションのとき, X を強終対象 (strongly final object) という.

命題 1.2.12.4. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, Y を $\mathcal{C}$ の対象とする. このとき, 次は同値である.

(1) Y は強終対象である.
(2) $\mathcal{C}$ の任意の対象 X に対して, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は可縮な Kan 複体である.

Proof. $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ の定義より, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ はファイバー $(\mathcal{C}_{/Y})_X = \mathcal{C}_{/Y} \times_{\mathcal{C}} \{X\}$ と同一視できる.

(1) から (2) を示す. Y が強終対象のとき, 射影 $p : \mathcal{C}_{/Y} \to \mathcal{C}$ は自明な Kan ファイブレーションである. 自明な Kan ファイブレーションの集まりはプルバックで閉じるので, ファイバー $\mathcal{C}_{/Y} \times_{\mathcal{C}} \{X\}$ は可縮な Kan 複体である.

(2) から (1) を示す. $\mathcal{C}$ の任意の対象 X に対して, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(X, Y) = (\mathcal{C}_{/Y})_X$ が可縮であるとする. 命題 2.1.2.1 より, p は右ファイブレーションである. 補題 2.1.3.4 より, p は自明な Kan ファイブレーションである. □

系 1.2.12.5. $\mathcal{C}$ を単体的集合とする. $\mathcal{C}$ における任意の強終対象は終対象である. 逆は $\mathcal{C}$ が ∞ 圏のときに成立する.

注意 1.2.12.6. 終対象の双対として, ∞ 圏における始対象が考えられる.

例 1.2.12.7. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする. $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ における対象が終 (始) 対象であることと, $\mathcal{C}$ において通常

の意味で終 (始) 対象であることは同値である．これは圏同値 $\mathrm{hN}(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$ が成立することから従う．

注意 1.2.12.8. 定義 1.2.12.3 は $\mathcal{C}$ が ∞ 圏の場合でないと意味をなさない．例えば, $\mathcal{C}$ が ∞ 圏でないとき, $\mathcal{C}$ の強終点の集まりが同値で安定とは限らない．

通常の圏における終対象は同型を除いて一意に定まる．∞ 圏における終対象も同様の主張ができるが,「一意に」という概念をホモトピー論的な言葉に置き換える必要がある．実際, 終対象は可縮な空間の選択を除いて一意に定まる．

命題 1.2.12.9 (Joyal). $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の終対象のなす $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする．このとき, $\mathcal{C}'$ は空または可縮な Kan 複体である．

Proof. $\mathcal{C}'$ が空でないとする．次の図式がリフトを持つことを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}' \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$n = 0$ のとき, $\mathcal{C}'$ は空でない仮定から従う．$n \geq 1$ のとき, $\partial\Delta^n$ の対象 $\Delta^{\{n\}}$ が終対象にうつることから従う． $\square$