1.2.2　高次圏における射空間

通常の圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y に対して, 射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が定義されている. 高次圏 $\mathcal{C}$ においても同様に, 射空間 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が定義される. 位相的圏や単体的圏においては, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は豊穣圏の枠組みとして定義されている. しかし, ∞ 圏における $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ の定義は少し非自明である. この節の目標は, ∞ 圏における射空間の定義を理解することである. ∞ 圏における射空間はホモトピー圏のレベルで定義すれば十分であることが分かる.

定義 1.2.2.1 (単体的集合の射空間). S を単体的集合, x, y を S の任意の点とする. S のホモトピー圏 $\mathrm{h}S$ を $\mathcal{H}$ 豊穣圏とみなす. このとき, $\mathrm{Map}_S(x, y) := \mathrm{Map}_{\mathrm{h}S}(x, y)$ を S における x から y への射の空間を表す $\mathcal{H}$ の対象とする.

注意 1.2.2.2. S を単体的集合とする. X, Y が S の点のとき, $\mathrm{Map}_S(X, Y)$ は定義 1.2.2.1 の意味で, $\mathcal{H}$ の対象である. 一方, X, Y が $(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_{/S}$ の対象[*1] のときは

$$Y^X \times_{S^X} \{X \to S\}$$

を $\mathrm{Map}_S(X, Y)$ と表す.

単体的集合 S とその点 x, y に対して, どのように $\mathrm{Map}_S(x, y)$ を計算すればいいのだろうか. $\mathrm{Map}_S(x, y)$ は $\mathcal{H}$ の対象として定義されたが, $\mathrm{Map}_S(x, y)$ を表すような単体的集合 M を選ぶ必要がある. このような M として $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x, y)$ がまず考えられる. この定義の利点は S が ∞ 圏でないときも計算することができ, 強結合的な結合則を備えていることである. しかし, $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x, y)$ の構成は複雑であり, 一般には Kan 複体にはならない. そのため, ホモトピー群のような代数的な不変量を取り出すことも難しい.

この欠点に対処するために, $\mathrm{Map}_S(x, y)$ のホモトピー型を表すような単体的集合 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x, y)$ を定義する. これは S が ∞ 圏の時のみに定義される.

S を ∞ 圏, x, y を S の任意の点とする. このとき, 単体的集合 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x, y)$ を次のように定義し, x から y への右射空間 (space of right morphisms) という.

- 任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x, y)_n$ は, $z|_{\Delta^{\{n+1\}}} = y$ かつ $z|_{\Delta^{\{0, \cdots, n\}}}$ が点 x の定値単体であるような S の $(n+1)$ 単体 $z : \Delta^{n+1} \to S$ の集合.
- $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x, y)_n$ の退化写像や面写像は S_{n+1} の退化写像や面写像.

S が ∞ 圏のとき, 単体的集合 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x, y)$ は空間のようにふるまう.

命題 1.2.2.3. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, x, y を $\mathcal{C}$ の点とする. このとき, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(x, y)$ は Kan 複体である.

[*1] $(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)_S$ の対象は単体的集合の射 $X \to S$ であるが, このような省略を用いる.

Proof. $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(x,y)$ の定義より, 任意の $n \geq 2$ と $0 < i \leq n$ に対して, 次の図式はリフトを持つ.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(x,y) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

命題 1.2.5.1 より, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{\mathcal{C}}(x,y)$ は Kan 複体である. □

注意 1.2.2.4. S を単体的集合, x,y,z を S の任意の点とする. 一般には, 次のような合成は存在しない.

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,y) \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(y,z) \to \mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,z)$$

しかし, S が ∞ 圏のときはこのような合成が定まり, 可縮な空間の選択を除いて well-defined であることを後で示す. この合成の自然な選択がないことは $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x,y)$ に比べて $\mathrm{Map}^{\mathrm{R}}_S(x,y)$ の欠点である. 2.2 節の目標は, ホモトピー圏 $\mathcal{H}$ において $\mathrm{Map}^{\mathrm{R}}_S(x,y)$ と $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[S]}(x,y)$ の間に自然な同型が存在することを示すことである. 特に, S が ∞ 圏のとき, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,y)$ は $\mathrm{Map}_S(x,y)$ を表すことを示す.

注意 1.2.2.5. $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,y)$ の定義は自己双対的ではない. S を単体的集合, x,y,z を S の任意の点とする. このとき, 単体的集合 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{L}}_S(x,y)$ を次のように定義し, x から y への左射空間 (space of left morphisms) という.

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{L}}_S(x,y) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_{S^{\mathrm{op}}}(y,x)^{\mathrm{op}}$$

つまり, 任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{L}}_S(x,y)_n$ は $z|_{\Delta^0} = x$ かつ $z|_{\Delta^{\{1,\cdots,n+1\}}}$ が点 y の定値単体であるような S の $(n+1)$ 単体 $z : \Delta^{n+1} \to S$ の集合である.

一般に, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{L}}_S(x,y)$ と $\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,y)$ は単体的集合として同型ではない. しかし, S が ∞ 圏のとき, これらはホモトピー同値である. ここで,

$$\mathrm{Hom}_S(x,y) := \{x\} \times_S S^{\Delta^1} \times_S \{y\}$$

と定義すると, この定義は自己双対的である. このとき, 次の自然な包含が存在する.

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{R}}_S(x,y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_S(x,y) \hookleftarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{L}}_S(x,y)$$

系.4.2.1.8 で, S が ∞ 圏のとき, これらの包含がホモトピー同値であることを示す.