

### 1.2.11 $\infty$ 圏の部分圏

通常の圏論と同様に, 高次圏における部分圏を定義する.  $\mathcal{C}$  を  $\infty$  圏,  $h\mathcal{C}$  を  $\mathcal{C}$  のホモトピー圏,  $(h\mathcal{C})'$  を  $h\mathcal{C}$  の部分圏とする. このとき, 次のプルバックで定義される  $\mathcal{C}'$  を  $(h\mathcal{C})'$  で貼られる  $\mathcal{C}$  の部分圏 (subcategory) という.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ N((h\mathcal{C})') & \longrightarrow & N(h\mathcal{C}) \end{array}$$

注意 1.2.11.1. 部分  $\infty$  圏ではなく, 部分圏という用語を用いていることに注意. これは任意の部分圏がある圏の脈体で表せるという意味ではない (これは偽である).

$\mathcal{C}$  を  $\infty$  圏,  $h\mathcal{C}$  を  $\mathcal{C}$  のホモトピー圏とする.  $(h\mathcal{C})'$  が  $h\mathcal{C}$  の充満部分圏のとき,  $\mathcal{C}'$  を  $\mathcal{C}$  の充満部分圏 (full subcategory) という. <sup>\*1</sup>  $\mathcal{C}$  を  $\infty$  圏,  $\mathcal{C}'$  を  $\mathcal{C}$  の部分圏とする.  $\infty$  圏の定義より, 包含  $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  は忠実充満である.

$\infty$  圏の部分圏は内ファイブレーション (2 章を参照) を用いて表すことができる.

補題 1.2.11.2.  $\mathcal{C}$  を  $\infty$  圏,  $\mathcal{C}'$  を  $\mathcal{C}$  の単体的部分集合とする. このとき, 次は全て同値である.

- (1)  $\mathcal{C}'$  は  $\mathcal{C}$  の部分圏である.
- (2) 包含  $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  は内ファイブレーションである.

特に,  $\mathcal{C}'$  は  $\infty$  圏である.

---

<sup>\*1</sup>  $\mathcal{C}'$  が  $\mathcal{C}$  の充満部分圏のとき,  $\mathcal{C}'$  は  $\mathcal{C}'$  に属する  $\mathcal{C}$  の対象のなす集合  $\mathcal{C}'_0$  より定まる. このことから,  $\mathcal{C}'$  を  $\mathcal{C}'_0$  で貼られる  $\mathcal{C}$  の部分圏ということもある.