1.1.4 単体的圏

1.1.2 節と 1.1.3 節では, 高次圏論への基礎として位相的圏と単体的集合という 2 つの方法を見た. これらが等価であることを示すために, 3 つ目の基礎づけとして単体的圏を考える.

定義 1.1.4.1 (単体的圏). $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ で豊穣された圏を単体的圏 (simplicial category) という. 単体的圏と単体的関手のなす圏を $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と表す.

注意 1.1.4.2. 単体的圏 $\mathcal{C}$ に対して, 構成 $[n] \mapsto \mathcal{C}_n$ は関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}$ を定める. 構成 $\mathcal{C} \mapsto ([n] \mapsto \mathcal{C}_n)$ は関手 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{at})$ を定める. このとき, 次のプルバックの図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \arrow[r, "\mathcal{C}\mapsto(n\mapsto\mathcal{C}_n)"] \arrow[d, "\mathrm{Ob}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{at}) \arrow[d, "\mathrm{Ob}"] \\
\mathcal{S}\mathrm{et} \arrow[r] & \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et})
\end{tikzcd}$$

ここで, 下の水平線は集合 S に対して S に値をとる定値関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ を与える対応である. つまり, 任意の単体的圏は対象 $[n] \mapsto \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_n)$ のなす台単体的集合が定値であるような $\mathcal{C}\mathrm{at}$ における単体的対象とみなすことができる. 特に, 関手 $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{at})$ は忠実充満である.

位相的圏と同様に, 単体的圏も高次圏のモデルとみることができる.

注意 1.1.4.3. $\mathcal{C}$ を単体的圏とする. 単体的圏の任意の対象 X, Y に対して, 単体的集合 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が ∞ 圏のとき, $\mathcal{C}$ は $(\infty, 2)$ 圏とみなすことができる. この本では, ファイブラント単体的圏, つまり単体的集合 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が Kan 複体であるような単体的圏のみを考える.

$\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ と $\mathcal{CG}$ の間には幾何学的実現 $|-| : \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \to \mathcal{CG}$ と特異単体関手 $\mathrm{Sing} : \mathcal{CG} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ が存在し, これらはともに有限直積と交換する. これらを用いて, 単体的圏から位相的圏, 位相的圏から単体的圏をそれぞれ構成することができる. 単体的圏 $\mathcal{C}$ に対して, 位相的圏 $|\mathcal{C}|$ を次のように定義する.

- $|\mathcal{C}|$ の対象は $\mathcal{C}$ の対象と同じ.
- $|\mathcal{C}|$ の任意の対象 X, Y に対して, $\mathrm{Map}_{|\mathcal{C}|}(X, Y) := |\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)|$.
- $|\mathcal{C}|$ における射の合成は $\mathcal{C}$ における射の合成に幾何学的実現を適応させて得られる対応.

同様に, 位相的圏の射空間に特異単体を作用させることで単体的圏を得る. 位相的圏 $\mathcal{D}$ に対して, 単体的圏 $\mathrm{Sing}\mathcal{D}$ を次のように定義する.

- $\mathrm{Sing}\mathcal{D}$ の対象は $\mathcal{D}$ と同じ.
- $\mathrm{Sing}\mathcal{D}$ の任意の対象 X, Y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathrm{Sing}\mathcal{D}}(X, Y) := \mathrm{Sing}(\mathrm{Map}_{\mathcal{D}}(X, Y))$.
- $\mathrm{Sing}\mathcal{D}$ における射の合成は $\mathcal{D}$ における射の合成に特異単体関手を適応させて得られる対応.

構成 $\mathcal{C} \mapsto |\mathcal{C}|$ と $\mathcal{D} \mapsto \mathrm{Sing}\mathcal{D}$ はそれぞれ関手 $|-| : \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \to \mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ と $\mathrm{Sing} : \mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ を

定める．これらの関手は $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ の間の随伴を定める．

$$|-|:\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta \rightleftarrows \mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}:\mathrm{Sing}$$

1.1.3 節で見たように, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{CG}$ にすべての弱ホモトピー同値を添加した圏とみなせた．$\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ と $\mathcal{CG}$ との等価性[*1] から, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ にすべての単体的集合の弱ホモトピー同値を添加した圏ともみなせる．よって, $\mathcal{H}$ は単体的圏のホモトピー圏ともみなせる．

$\mathcal{CG}$ と $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ のホモトピー圏はともに $\mathcal{H}$ とみなせるので, 任意の単体的圏 $\mathcal{C}$ と位相的圏 $\mathcal{D}$ に対して, 次の自然な同型が存在する．

$$\mathrm{h}\mathcal{C}\cong\mathrm{h}|\mathcal{C}|,\quad \mathrm{h}\mathcal{D}\cong\mathrm{hSing}\mathcal{D}$$

よって, 位相的圏のホモトピー圏と単体的圏のホモトピー圏は同一視できる．

定義 1.1.4.4 (単体的圏の同値). $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を単体的関手とする．誘導される関手 $\mathrm{h}F:\mathrm{h}\mathcal{C}\to\mathrm{h}\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}$ 豊穣圏として圏同値のとき, F を同値 (equivalence) という．

単体的圏の関手 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ が同値であることと, 位相的圏の関手 $|\mathcal{C}|\to|\mathcal{C}'|$ が同値であることは同値である．幾何学的実現と特異単体関手による $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ と $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ の随伴の (余) 単位を考えると,

$$\mathcal{C}\to\mathrm{Sing}|\mathcal{C}|,\quad |\mathrm{Sing}\mathcal{D}|\to\mathcal{D}$$

はそれぞれのホモトピー圏において同型を定める．つまり, 単体的圏 $\mathcal{C}$ を位相的圏 $|\mathcal{C}|$ で置き換えても, 位相的圏 $\mathcal{D}$ を単体的圏 $\mathrm{Sing}\mathcal{D}$ で置き換えてもよい．この意味で, 位相的圏の理論と単体的圏の理論は (高次圏として) 等価である．[*2]

[*1] $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上の Kan-Quillen モデル構造と $\mathcal{CG}$ 上の Quillen モデル構造が Quillen 同値であるという意味である．

[*2] $\mathcal{C}\mathrm{at}_\Delta$ 上の Bergner モデル構造と $\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathcal{T}\mathrm{op}}$ 上の Bergner モデル構造が Quillen 同値であるという意味である．