高次圏論と位相的場の量子論

よの

2022 年 3 月 3 日

目次

7　2-圏論

2 次元位相的場の量子論の分類において, 2 次元閉多様体を低次元多様体に分解することで不変量を計算することができた．このとき, 1 次元多様体 S^1 だけでなく, 0 次元多様体 $\{\pm 1\}$ も出てきたことを思い出そう．このことを逆に考えると, 0 次元多様体を考えるときに, 1 次元コボルディズムだけでなく, 2 次元コボルディズムの構造も考えるということである．0 次元多様体を対象, 1 次元コボルディズムを射と思うと, 2 次元コボルディズムは射の間の射と思える．この射の間の射まで考えた圏が 2-圏である．[*1]

7.1　2-圏

2-圏は複雑であるので, 詳しい定義は述べない．詳しい定義は [SP13] と [SP11] を参照してほしい．

Definition 7.1 (厳格 2-圏)
厳格 2-圏 (strict 2-category) $\mathcal{C}$ は以下のデータから構成される．

- 対象 $X, Y, Z, \cdots$ の集まり
- 対象 X, Y に対して, 圏 $\mathcal{C}(X, Y)$
- 対象 X に対して, ある対象 $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ $(X \in \mathcal{C})$
- 対象 X, Y, Z に対して, 合成

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$

- 対象 $\{\mathrm{id}_X\}_{X \in \mathcal{C}}$ は合成に関して単位的である．
- 対象 W, X, Y, Z に対して, 次の図式が可換となる．つまり, 合成は強結合的である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(W,X) \times \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(W,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \arrow[d] \\
\mathcal{C}(W,X) \times \mathcal{C}(X,Z) \arrow[r] & \mathcal{C}(W,Z)
\end{tikzcd}$$

Remark 7.2
この厳格 2-圏の定義は強すぎるので, 合成が (コヒーレント) 同型の違いをのぞいて結合的であるとする弱 2-圏 (weak 2-category, bicategory) が定義される．任意の弱 2-圏はある厳格 2-圏と 2-圏として圏同値となる．[*2]

[*1] 2-圏に対して, 通常の圏は 1-圏と呼ばれる．

[*2] モノイダル圏は 1 対象の 2-圏と思うことができる．モノイダル圏における厳格化定理はこの定理 (2-圏における厳格化定理と呼ばれる) の系である．

コボルディズムの圏とベクトル空間の圏は自然に厳格 2-圏の構造をもつ.

Definition 7.3 ($\mathbf{Cob}_2(n)$)
$n \geq 2$ [*3] に対して, 厳格 2-圏 $\mathbf{Cob}_2(n)$ は以下のデータから構成される.

1. 対象は $(n-2)$ 次元閉多様体の集まり
2. 対象 Σ, Σ' に対して, 圏 $\mathcal{C} = \mathbf{Cob}_2(n)(\Sigma, \Sigma')$ は以下のように構成される.
   - $\mathcal{C}$ の対象は Σ から Σ' への $(n-1)$ 次元コボルディズム M
   - 対象 M, M' に対して, $\mathrm{Hom}(M, M')$ は M から M' への n 次元コボルディズムの同値類 X
     X は境界
     $$\overline{M} \coprod_{\Sigma \sqcup \overline{\Sigma'}} ((\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma') \times [0,1]) \coprod_{\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma'} M'$$
     をもつ n 次元多様体と思うことができる.

Remark 7.4
$\mathbf{Cob}_2(n)$ は弱 2-圏ではなく厳格 2-圏となるが, 強結合性が成立するかは自明ではない. しかし, プッシュアウトの普遍性から得られる同相写像が滑らかな構造を誘導して, 微分同相写像となること (定理 1.8) から成立する.

Definition 7.5 ($\mathbf{Vect}_2(k)$)
厳格 2-圏 $\mathbf{Vect}_2(k)$ は以下のデータから構成される.

- 対象は余完備な k-線形圏
- 対象 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して, $\mathbf{Vect}_2(k)(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は余連続な k-線形関手のなす圏
- 合成と単位 (射) は関手圏における合成と恒等関手

7.2 圏の delooping

1-圏において, ある対象 $*$ に関して $\mathrm{End}(*)$ はモノイドとなる. この操作を 2-圏においても考える.

Theorem 7.6
$\mathcal{C}$ をある対象 $*$ をもつ 2-圏とする. このとき, $\Omega\mathcal{C} := \mathcal{C}(*, *)$ はモノイダル圏となる.

proof
2-圏の定義から $\mathcal{C}(*, *)$ は圏であるので, $\Omega\mathcal{C}$ は圏で与えられる.

[*3] $n = 1$ でも考えることはできるが, 1 章の注釈と同様の理由で省く.

テンソル積 $\Omega\mathcal{C} \times \Omega\mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ は 1-射の合成である.
結合律は 2-圏の強結合性から成立する. 単位対象は合成に関する単位 id_* で与えられて, 合成に関して単位的である.

逆に, モノイダル圏 $\mathcal{C}$ を厳格 2-圏 $B\mathcal{C}$ に deloop することができる.

Definition 7.7 (圏の delooping)
$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とする. このとき, 厳格 2-圏 $B\mathcal{C}$ は以下のデータから構成される.

- 対象は 1 対象 $*$
- $B\mathcal{C}(*, *)$ は圏 $\mathcal{C}$
- 合成

$$B\mathcal{C}(*, *) \times B\mathcal{C}(*, *) \to B\mathcal{C}(*, *)$$

  は $\mathcal{C}$ におけるテンソル積で与えられる.

このとき, 厳格 2-圏 $B\mathcal{C}$ を圏 $\mathcal{C}$ の delooping [*4] (delooping of $\mathcal{C}$) という.

Remark 7.8
合成が強結合的であることは $\mathcal{C}$ が (厳格) モノイダル圏であることから従う.
対象 $\mathrm{id}_* \in \mathcal{C}(*, *)$ はモノイダル圏における単位対象で与えられる.

この構成は高次元の双対性を考えるときに役に立つ.

7.3 2-圏における随伴

1-圏における随伴を復習する.

Definition 7.9 (随伴)
$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を 1-圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする. $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ について, 自然な全単射

$$\varphi_{C,D} : \mathrm{Hom}(F(C), D) \simeq \mathrm{Hom}(C, G(D))$$

が存在するとき, 3 つ組 (F, G, φ) を随伴 (adjoint) という. また, F を G の左随伴 (left adjoint), G を F の右随伴 (right adjoint) という.

[*4] delooping は造語であるので英語のまま書いた.

7.4　2-拡張された位相的場の量子論

Definition 7.10 (n 次元の 2-拡張された位相的場の量子論)
n 次元の 2-拡張された位相的場の量子論 (n-dimensional 2-extended topological quantum field theory) とは, 対称モノイダル関手 Z

$$Z : \mathbf{Cob}_2(n) \to \mathbf{Vect}_2(k)$$

である.

「拡張された」とは通常の位相的場の量子論と次のような対応があるからである.

Remark 7.11
$\mathcal{C}$ を対称モノイダル 2-圏[*5] とする. このとき, $\mathcal{C}$ の単位対象 I に対して, $\Omega\mathcal{C} := \mathcal{C}(I, I)$ は対称モノイダル圏となる. $\mathbf{Cob}_2(n)$ と $\mathbf{Vect}_2(k)$ を考えると,

$$\Omega\mathbf{Vect}_2(k) \simeq \mathbf{Vect}(k)$$
$$\Omega\mathbf{Cob}_2(n) \simeq \mathbf{Cob}(n)$$

となる. よって, 2-拡張された位相的場の量子論 $Z : \mathbf{Cob}_2(n) \to \mathbf{Vect}_2(k)$ は対称モノイダル関手

$$\Omega Z : \mathbf{Cob}(n) \to \mathbf{Vect}(k)$$

を誘導する. これは通常の位相的場の量子論に一致する.

[*5] 対称モノイダル 2-圏の定義は [SP11] を参照してほしい.

8　高次圏論

7 章でみたように, より高次元のコボルディズムを計算するときに, 低次元の多様体に分解することが需要である．これを逆に考えて, 低次元のコボルディズムの間に, 高次元のコボルディズムの構造を考えるのは自然である．よって, 1-圏 $\mathbf{Cob}(n)$ や 2-圏 $\mathbf{Cob}_2(n)$ ではなく, より高次元のコボルディズムの圏 $\mathbf{Cob}_k(n)$ を考える．n が大きいとき, そのコボルディズム M は大域的には複雑であるが, 局所的には単純な構造である．$1, 2$ 次元の場合と同様に, $Z(M)$ が点や円盤, 胞体などの簡単な構造によって計算できることが予想される．

8.1　n-圏

高次圏論は複雑で難解であるので, 厳密な説明はここではしない．n は 0 以上の自然数とする．

Definition 8.1 (厳格 n-圏)
厳格 n-圏 (strict n-category) を n に関して帰納的に定義する．

1. $n = 0$ の場合, 厳格 n-圏は集合とする．
2. $n > 0$ の場合, 厳格 n-圏とは厳格 $(n-1)$-圏を豊穣化 (enriched) した圏である．つまり, 厳格 n-圏は以下のデータから構成される．
   - 対象 $X, Y, Z, \cdots$ の集まり
   - 対象 X, Y に対して厳格 $(n-1)$-圏 $\mathcal{C}(X, Y)$
   - ある対象 X に対して, $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ $(X \in \mathcal{C})$
   - 対象 X, Y, Z に対して, 合成
   $$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$
   - 対象 $\{\mathrm{id}_X\}_{x \in \mathcal{C}}$ は合成に関して単位的である．
   - 合成は強結合的である．つまり, 次の図式が可換となる．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(W, X) \times \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(W, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}(W, X) \times \mathcal{C}(X, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(W, Z)
\end{array}$$

Example 8.2
$n = 1$ の場合, 通常の 1-圏である．
$n = 2$ の場合, 7 章で定義した厳格 2-圏と一致する．

Remark 8.3
この厳格 n-圏の定義は強すぎるので, 結合律の条件を弱めた弱 n-圏 (weak n-category) が定義される. 一般に, 弱 n-圏はある厳格 n-圏とは n-圏での圏同値にならない.

Remark 8.4
弱 n-圏を単に n-圏という.

Definition 8.5 ((n,m)-圏)
(m,n) を非負整数の組とする. このとき, (n,m)-圏とは $m < k \leq n$ をみたす任意の k に対して, k-射が可逆である n-圏である.

Example 8.6
$(n,0)$-圏は n-亜群である.
(n,n)-圏は n-圏である.

8.2 拡張された位相的場の量子論

より高次元のコボルディズムまで考えることで, コボルディズムのなす圏は n-圏となる. しかし, これは厳格 n-圏ではなく弱 n-圏である.

Example 8.7 ($\mathbf{Cob}_k(n)$)
$k \leq n$ を満たす非負整数の組 (k,n) に対して, k-圏 $\mathbf{Cob}_k(n)$ は以下のデータから構成される.

- 対象は $(n-k)$ 次元閉多様体
- 対象 Σ, Σ' に対して, 1-射は Σ から Σ' への $(n-k+1)$ 次元コボルディズム M
- 対象 Σ, Σ' と 1-射 $M, M' : \Sigma \to \Sigma'$ に対して, 2-射は M から M' への $(n-k+2)$ 次元コボルディズム X
  X は境界
  $$\overline{M} \coprod_{\Sigma \sqcup \overline{\Sigma'}} ((\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma') \times [0,1]) \coprod_{\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma'} M'$$
  をもつ $(n-k+2)$ 次元多様体と思うことができる.
- $\cdots$
- k-射は n 次元コボルディズムの同値類
- 任意の k に対して, 射の合成はコボルディズムの接着

Example 8.8
$k = 1$ の場合, 通常の $\mathbf{Cob}(n)$ に一致する.

$k=2$ の場合, 7 章で定義した $\mathbf{Cob}_2(n)$ に一致する.

位相的場の量子論は対称モノイダル関手 $Z:\mathbf{Cob}(n)\to\mathbf{Vect}(k)$ であったが, 拡張された位相的場の量子論は $\mathbf{Vect}(k)$ を一般の対称モノイダル n-圏 $\mathcal{C}$ に一般化したものを考える.

Definition 8.9 (拡張された位相的場の量子論)
$\mathcal{C}$ を対称モノイダル n-圏とする. $\mathcal{C}$ に値をもつ n 次元の拡張された位相的場の量子論 (n-dimensional extended topological quantum field theory with values in $\mathcal{C}$) とは, 対称モノイダル関手 Z

$$Z:\mathbf{Cob}_n(n)\to\mathcal{C}$$

である.

1 次元位相的場の量子論は $Z(+)=V$, 2 次元位相的場の量子論は $Z(S^1)=A$ で決定された. 拡張された位相的場の量子論 Z も同様に $\mathcal{C}$ のなんらかの対象で決定されると考えられる. これがコボルディズム仮説の大まかな主張である.
「拡張された位相的場の量子論 Z も同様に $\mathcal{C}$ のなんらかの対象で決定される」と書いたが, ここには大きな問題点が 2 つある.

1. n 次元多様体 M の任意の点 x の開近傍は $\mathbb{R}^n$ に微分同相であるが, この微分同相写像は一意ではない. 一般に, x の開近傍は接空間 T_xM の開球と微分同相であるが, この微分同相写像も一意ではない.
2. $n=1,\mathcal{C}=\mathbf{Vect}(k)$ の場合でも, 拡張された $\mathbf{Vect}(k)$ に値をもつ位相的場の量子論は $\mathbf{Vect}(k)$ のある対象と同値ではない. なぜなら, 1 次元位相場の量子論 Z はあるベクトル空間 $V=Z(+)$ で決定されるが, これのベクトル空間は「有限次元」であるからである. より一般に, $\mathcal{C}$ に値をもつ拡張された位相的場の量子論は $\mathcal{C}$ の対象をなにかしらの「有限性」をもった対象に制限した圏で分類されると考えられる.

(1) はコボルディズムの圏 $\mathbf{Cob}_n(n)$ を枠付き多様体の圏 $\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n)$ に置き換えればよい.

Definition 8.10 (拡張された枠付き位相的場の量子論)
$\mathcal{C}$ を対称モノイダル n-圏とする. $\mathcal{C}$ に値をもつ n 次元の拡張された枠付き位相的場の量子論 (n-dimensional framed extended topological quantum field theory with values in $\mathcal{C}$) とは, 対称モノイダル関手 Z

$$Z:\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n)\to\mathcal{C}$$

である.

拡張された枠付き位相的場の量子論と拡張された位相的場の量子論には次のような関係が

ある.

Remark 8.11
$\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n)$ と $\mathbf{Cob}_n(n)$ の間には, 枠構造を忘却する忘却関手

$$\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n) \to \mathbf{Cob}_n(n)$$

が存在する. この忘却関手 $\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n) \to \mathbf{Cob}_n(n)$ と拡張された位相的場の量子論 $Z : \mathbf{Cob}_n(n) \to \mathcal{C}$ を合成

$$\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n) \to \mathbf{Cob}_n(n) \to \mathcal{C}$$

することで, 拡張された枠付き位相的場の量子論 $Z : \mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n) \to \mathcal{C}$ が得られる.

(2) は対称モノイダル n-圏における充満双対対象のなす部分圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ に置き換えればよい. 充満双対対象は 9 章で詳しく議論する. 充満双対対象とは n-圏での「有限」条件を課した対象である. 例えば, $\mathbf{Vect}(k)$ において, 充満双対対象である必要十分条件はベクトル空間が有限次元であることである.

以上でコボルディズム仮説の主張を述べる大体の準備が整った. 詳しい議論は 9 章でおこなう.

Theorem 8.12 (n-圏でのコボルディズム仮説)
$\mathcal{C}$ を対称モノイダル n-圏として, $\mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$ を $\mathcal{C}$ の対象を充満双対対象に制限した部分圏とする. 評価関手 (evaluation functor)

$$Z \mapsto Z(*)$$

は圏同値

$$\mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathbf{Cob}_n^{\mathrm{fr}}(n), \mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}^{\mathrm{fd}}$$

を与える.

8.3 基本 n-亜群

n-圏の例として, 基本 n-亜群があげられる. 基本 n-亜群はホモトピー論においても重要な概念である.

Definition 8.13 (n-亜群)
n-亜群とは $0 < k \leq n$ をみたす任意の k に対して k-射が可逆である n-圏である.

Definition 8.14 (基本 n-亜群)
X を位相空間とする. このとき, n-圏 $\pi_{\leq n}X$ を次のように定義する.

- 対象は X の点の集まり
- X の点 x, y に対して, 1-射は始点が x, 終点が y となる道 (path)
- X の点 x, y と 1-射 $f, g : x \to y$ に対して, 2-射は始点が x, 終点が y となる道のホモトピー
- $\cdots$
- n-射は始点が x, 終点が y となる道のホモトピーのホモトピーの $\cdots$ のホモトピー

この n-圏を位相空間 X の基本 n-亜群 (fundamental n-groupoid) という.

ただちに分かることとして, 基本 n-亜群は n-亜群 (n-groupoid) である. つまり, 基本 n-亜群はすべての射が可逆な n-圏である.

ここで次のような関係があると予想される. この関係については 9 章で詳しく議論する.

Thesis 8.15
n-亜群 $\mathcal{C}$ はある位相空間 X の基本 n-亜群 $\pi_{\leq n}X$ と n-圏の意味で圏同値である.

Remark 8.16
この X はもちろん一意ではない. たとえば, 2 つの単連結 (simply-connected) な位相空間の基本 n-亜群は等しい.

この不定性を解決するために, 位相空間に対してホモトピー n-型を定義する.

Definition 8.17 (ホモトピー n-型)
位相空間 X がホモトピー n-型 (homotopy n-type) であるとは, 任意の $k > n$ に対してそのホモトピー群 $\pi_k(X)$ が自明となるときである.

X を任意の位相空間とする. ホモトピー n-型 Y と写像 $f : X \to Y$ を n 次以下のホモトピー群上で同型写像となるように構成することができる. この位相空間 Y は弱ホモトピー同値の違いをのぞいて一意であり, 誘導される基本 n-亜群の間の写像 $\pi_{\leq n}X \to \pi_{\leq n}Y$ は n-圏の意味で圏同値を与える. 我々は位相空間の基本 n-亜群に興味があるので, 考える位相空間は n-型であると仮定してよい.

これより上の主張を次のように書き換えることができる.

Thesis 8.18
対応 $X \mapsto \pi_{\leq n}X$ は (弱ホモトピー同値の違いをのぞいた) ホモトピー n-型と (圏同値の違いをのぞいた) n-亜群の間に全単射を与える.

形式的に $n \to \infty$ とすると次のような仮説を得る. [*6]

[*6] ∞-圏については 9 章を参照してほしい.

Thesis 8.19 (ホモトピー仮説)
対応 $X \to \pi_{\leq\infty}X$ は (弱ホモトピー同値の違いをのぞいた) 位相空間と (圏同値の違いをのぞいた) ∞-亜群の間に全単射を与える.

位相空間は ∞-亜群[*7] とみなせるということである. 我々はこのホモトピー仮説 (homotopy hypothesis) を定義として採用する.

Definition 8.20 ($(\infty,0)$-圏)
$(\infty,0)$-圏とは位相空間 (の基本 ∞-亜群) である.

8.4 安定化仮説

執筆中

[*7] $(n,0)$-圏のことを n-亜群というのだった. ここで $n=\infty$ としている.

9 ∞-圏論

この章では ∞-圏について説明する．∞-圏のモデルとしては位相圏 (topological category) や擬圏 (quasi-category), 単体的圏 (simplicial category) など様々である．位相的場の量子論において ∞-圏のモデルとして適切なのは完備 Segal 空間 (complete Segal space) である．完備 Segal 空間による定義は位相圏や擬圏より幾何的にとらえやすく, 柔軟性があるので扱いやすい．

さらに, (∞, n)-圏の定義として n-重 Segal 空間がある．(∞, n)-圏を考えることは位相的場の量子論において非常に重要である．

9.1 単体的集合

∞-圏の話をするために必要な概念をまとめる．m, n は 0 以上の自然数, **Cat** は小圏全体と関手がなす圏とする．詳しい話は [Ad21] や [Lur06] を参照してほしい．∞-圏のモデルとしては擬圏が有名でよく調べられているのでこの節で紹介する．(執筆中)

Definition 9.1 (単体圏)
単体圏 (simplex category) $\mathbb{\Delta}$ は以下のデータから構成される．

- 対象は $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ とあらわされる空でない線形順序集合の集まり
- 射は広義で順序を保つ写像

Remark 9.2
単体圏 $\mathbb{\Delta}$ は **Cat** の充満部分圏である．

Definition 9.3 (単体的対象)
$\mathcal{C}$ を圏とする．関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の単体的対象 (simplicial object) という．

単体的対象で重要な例は単体的集合である．

Definition 9.4 (単体的集合)
Set の単体的集合, すなわち関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) という．単体的集合とその間の自然変換のなす圏 $\mathbf{Fun}(\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ を **sSet** とあらわす．

Definition 9.5 (標準 n-単体)
$X \in \mathbf{sSet}$ に対して, $X_n := X([n])$ とかく．
米田埋め込み $y : \mathbb{\Delta} \to \mathbf{sSet}$ に対して, $\Delta^n := y([n]) \in \mathbf{sSet}$ とかいて, これを標準 n-単体 (standard n-simplex) という．また, $\Delta^n_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([m], [n])$ である．

Definition 9.6
関手 $F : \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ を次のように定義する.

- 対象 $[n] \in \mathbb{\Delta}$ に対して, 位相空間 $F([n]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を
$$F([n]) := \{(x^0, \cdots, x^n) \in [0,1]^{n+1} \mid x^0 + \cdots + x^n = 1\}$$
により定める.
- $\alpha : [m] \to [n]$ に対して, $F(\alpha) : F([m]) \to F([n])$ を
$$F(\alpha)(x^0, \cdots, x^m) := \left(\sum_{i \in \alpha^{-1}(0)} x^i, \cdots, \sum_{i \in \alpha^{-1}(n)} x^i \right)$$
により定める.

この関手 $F : \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ から普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる.

Definition 9.7 (幾何学的実現と特異単体関手)
$|-| := y^\dagger F : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現 (geometric realization), $\mathrm{Sing} : F^\dagger y : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ を特異単体関手 (singular functor) という.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[dr, shift left, "|-|"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}$$

包含関手 $F : \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ からも同様に, 普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる.

Definition 9.8 (基本圏と nerve 関手)
$\tau_1 := y^\dagger F : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat}$ とかく. $X \in \mathbf{sSet}$ に対して $\tau_1(X)$ を X の基本圏 (fundamental cateogry) やホモトピー圏 (homotopy category) という. $N := F^\dagger y : \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$ を nerve 関手 (nerve functor) という.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[dr, shift left, "\tau_1"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, shift left, "N"]
\end{tikzcd}$$

Remark 9.9
米田の補題より, 全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, X) \simeq X_n$ が存在する. $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$ に対しては特

に, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, N(\mathcal{C})) \simeq N(\mathcal{C})_n$ である. Kan 拡張の一般論より $N(\mathcal{C})$ は $N(\mathcal{C})_n \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], \mathcal{C})$ で与えられる. つまり, $N(\mathcal{C})_n$ の元は圏 $\mathcal{C}$ における合成可能な射の列

$$a_0 \xrightarrow{f_1} a_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n$$

とみなすことができる. 特に, $N(\mathcal{C})_0 \simeq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), N(\mathcal{C})_1 \simeq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ である.

Definition 9.10
$0 \le i \le n$ に対して, $\mathbb{\Delta}$ の射 $\delta_i^n : [n-1] \to [n]$ を次のように定義する.

$$\delta_i^n = \begin{cases} x & (0 \le x < i) \\ x+1 & (i \le x \le n-1) \end{cases}$$

この $\mathbb{\Delta}$ の射 δ_i^n は次のような性質をもつ.

Theorem 9.11
$0 \le i < j \le n$ に対して

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n$$

が成立する.
$X \in \mathbf{sSet}$ に対して, $d_i^n := X(\delta_i^n)$ とおくと

$$d_i^n \circ d_j^{n+1} = d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1}$$

が成立する.

proof
δ については省略する.
d については単体的集合が $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ という関手であることから明らかである.

この δ_i^n は射 $[n-1] \to [n]$ をあらわしていたが, より一般の射 $[m] \to [n]$ をあらわすために次の記号を導入する. (m, n の大小は関係ない.)

Definition 9.12
$[m]$ の元 $0, 1, \cdots, m$ が $[n]$ の元 $i_0, i_1, \cdots, i_m$ にうつるとき, $[m]$ から $[n]$ への射を

$$p_{i_0, i_1, \cdots, i_m} : [m] \to [n]$$

とかく. この射から誘導される $N(\mathcal{C})_n$ から $N(\mathcal{C})_m$ への射を

$$p^*_{i_0, i_1, \cdots, i_m} : N(\mathcal{C})_n \to N(\mathcal{C})_m$$

とかく.

$N(C)_2$ は合成可能な射の組であったので, $p^*_{0,1}, p^*_{1,2}$ をそれぞれの成分への射影と思うと, 次のプルバックの図式

$$\begin{tikzcd} N(\mathcal{C})_2 \arrow[r, "p^*_{0,1}"] \arrow[d, "p^*_{1,2}"'] & N(\mathcal{C})_1 \arrow[d, "p^*_1"] \\ N(\mathcal{C})_1 \arrow[r, "p^*_0"'] & N(\mathcal{C})_0 \end{tikzcd}$$

を得る. プルバックは同型の違いをのぞいて一意なので, この図式は同型射

$$q : N(\mathcal{C})_2 \to N(\mathcal{C})_1 \times_{N(\mathcal{C})_0} N(\mathcal{C})_1$$

を定める. $\mathcal{C}$ における射 $f : a_0 \to a_1$ と $g : a_1 \to a_2$ の組はプルバック $N(\mathcal{C})_1 \times_{N(\mathcal{C})_0} N(\mathcal{C})_1$ の元 (f, g) で決定される. このとき, 合成 $g \circ f$ は

$$p^*_{0,1} \circ q^{-1}(f, g)$$

で与えられる.
以上より, nerve $N(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ を圏同値の違いをのぞいて一意に決定することが分かった.

Remark 9.13
任意の単体的集合 $X_\bullet$ [*8] が圏の nerve $N(\mathcal{C})$ として表せるわけではない. 対象の集合は X_0, 射の集合は X_1 としようとするが, ここで結合律が問題となる. 次の可換図式

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "p^*_{0,1}"] \arrow[d, "p^*_{1,2}"'] & X_1 \arrow[d, "p^*_1"] \\ X_1 \arrow[r, "p^*_0"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

から, 射

$$q : X_2 \to X_1 \times_{X_0} X_1$$

が誘導される. しかし, この図式は可換図式ではあるがプルバックではないので, q は同型射とは限らない. よって, 合成をうまく定めることができない.

実際に次の定理が成立する.

Theorem 9.14
$X_\bullet$ を単体的集合とする. このとき, 以下の 2 つは同値である.

1. $X_\bullet$ がある圏 $\mathcal{C}$ の nerve $N(\mathcal{C})$ と同型

[*8] $X_\bullet$ は単体的集合をあらわし, X_k は $[k] \in \Delta$ における $X_\bullet$ の値 (つまり集合) をあらわしている.

2. 任意の自然数の組 (m,n) に対して, 次の図式がプルバックをもつ.

$$\begin{tikzcd} X_{m+n} \arrow[r, "p^*_{0,1,\cdots,m}"] \arrow[d, "p^*_{m,m+1,\cdots,m+n}"'] & X_m \arrow[d, "p^*_m"] \\ X_n \arrow[r, "p^*_n"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

つまり, 自然な射

$$X_{m+n} \to X_m \times_{X_0} X_n$$

が同型射となる.

proof

(1) から (2) はすでに示した.

(2) から (1) を示す. つまり, 任意の自然数 n に対して $X_n \simeq N(\mathcal{C})_n$ を示せばよい. 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を X_0, 射の集まり $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ を X_1 とする. $X_2 \simeq X_1 \times_{X_0} X_1$ より, 射の合成を $X_2 \to X_1$ で定義する. $n \geq 3$ でも同様である.

nerve の特徴づけは他にもあるが, 本題からそれてしまうためこれ以上は述べない.

9.2 完備 Segal 空間

完備 Segal 空間の基本的な性質を説明するために, すでに良い $(\infty,1)$-圏の理論 (例えば擬圏など) が得られているとしよう.

ホモトピー仮説から $(\infty,0)$-圏は位相空間のホモトピー論で説明することができるが, $(\infty,1)$-圏は不可逆な 1-射を含んでいるので, そうはいかない. しかし, $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ から $(\infty,0)$-圏 $\mathcal{C}_0$ を次のように構成することができる.

- $\mathcal{C}_0$ の対象は $\mathcal{C}$ の対象
- $\mathcal{C}_0$ の 1-射は $\mathcal{C}$ の可逆な 1-射
- $\mathcal{C}_0$ の 2-射は $\mathcal{C}$ の可逆な 1-射の間の 2-射
- $\cdots$

つまり, $\mathcal{C}$ における不可逆な 1-射を捨てた圏が $\mathcal{C}_0$ である.

$\mathcal{C}_0$ のすべての射は可逆なので, ホモトピー仮説から, ある位相空間 X_0(の基本 ∞-亜群) によって圏同値の違いをのぞいて決定される. よって, この X_0 を $\mathcal{C}$ の対象に対する分類空間 (classifying space for objects of $\mathcal{C}$) という. 例えば, $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ の対象の同型類と X_0 の弧状連結成分の間に全単射な対応がある.

$\mathcal{C}$ の射を関手 $[1] \to \mathcal{C}$ と思うと, この関手圏 $\mathbf{Fun}([1],\mathcal{C})$ は自然と $(\infty,1)$-圏の構造をもつ. この $(\infty,1)$-圏から不可逆な 1-射を捨てて得られる $(\infty,0)$-圏を $\mathcal{C}_1$ とあらわす. 同様に, $\mathcal{C}_1$

のすべての射は可逆なので, ある位相空間 X_1 によって (圏同値の違いをのぞいて) 決定される. この X_1 は $\mathcal{C}$ の 1-射に対する分類空間 (classifying space for 1-morphisms in $\mathcal{C}$) とみなせる.

Remark 9.15
$\mathcal{C}$ の対象と可逆な 1-射の合成は X_0 で, $\mathcal{C}$ の可逆とは限らない 1-射は X_1 で与えられる. しかし, X_0 と X_1 では $\mathcal{C}$ の不可逆な 1-射の合成の情報はもっていないので, $\mathcal{C}$ を復元することはできない.

一般に, 関手 $[n] \to \mathcal{C}$ による関手圏 $\mathbf{Fun}([n], \mathcal{C})$ は $(\infty, 1)$-圏の構造をもつ. この $(\infty, 1)$-圏から不可逆な 1-射を捨てて得られる $(\infty, 0)$-圏 C_n は, ある位相空間 X_n によって決定される.

ここから次の疑問が自然と生じる.

1. それぞれの X_n は互いにどう関係するのか. そして, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ はどのような数学的対象なのか.
2. もし固有な特徴が存在するなら, それはどのような特徴をなのか.
3. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ のどの範囲までで $(\infty, 1)$-圏を決定することができるのか.

これらは次のようにまとめることができる. 我々は以下の性質を満たすものを完備 Segal 空間 (すなわち $(\infty, 1)$-圏) と呼ぶのである. つまり, 以下の条件を満たすように完備 Segal 空間を定義すればよい.

Thesis 9.16
上の疑問から完備 Segal 空間の満たすべき条件として, 以下の 3 つが挙げられる.

1. 位相空間の集まり $\{X_n\}_{n\geq 0}$ は自然に単体的空間 (単体的対象において $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ としたもの) と思うことができる.
2. $(\infty, 1)$-圏から得られる単体的空間 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ は常に完備 Segal 空間である.
3. $(\infty, 1)$-圏は圏同値の違いをのぞいて完備 Segal 空間 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ によって決定される. さらに, すべての完備 Segal 空間は $(\infty, 1)$-圏からこの方法で得られる.

$(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ から位相空間 X_n を取り出す操作を考えると, 射 $f : [m] \to [n]$ が射 $\mathbf{Fun}([n], \mathcal{C}) \to \mathbf{Fun}([m], \mathcal{C})$ を誘導することがわかる. さらにここから, 位相空間の間の射 $X_n \to X_m$ が誘導される. この関係を論じるために, 単体的対象として $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ としたものを考える.

Definition 9.17
$\mathbf{Top}$ の単体的集合, すなわち関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ を単体的空間 (simplicial space) という.

上の議論から「$(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ が与えられたとき, 位相空間の集まり $\{X_n\}_{n\geq 0}$ は単体的空間 $X_\bullet$ と思うことができる」とまとめることができる.

Remark 9.18
$(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ から単体的空間 $X_\bullet$ を構成する操作 $\mathcal{C} \to X_\bullet$ は, 1-圏 $\mathcal{C}$ から nerve $N(\mathcal{C})_\bullet$ を構成する操作と似ている. 実際, それぞれの n 番目の単体的対象 X_n と $N(\mathcal{C})$ は $[n]$ から $\mathcal{C}$ への関手で特徴づけられるからである. しかし, この 2 つは違うものである. 例えば, $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ の対象の同型類と X_0 の弧状連結成分の間に全単射な対応がある. 一方, 1-圏 $\mathcal{C}$ の対象の集まり X_0 は $\mathcal{C}$ の 2 つの対象が同型であるかにかかわらず離散集合である.

とにかく, $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ から取り出せる単体的空間 $X_\bullet$ は 1-圏の nerve $N(\mathcal{C})$ とかなり似ている. となると, 定理 9.14 と似たような主張が成立するはずである. この条件を探るためにホモトピー論について少し述べる.

Definition 9.19 (ホモトピープルバック)
Top における図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

のホモトピープルバック (homotopy pullback) $X \times^R_Z Y$ とは

$$\begin{aligned} X \times^R_Z Y &:= X \times_Z Z^I \times_Z Y \\ &= \{(x,p,y) \in X \times Z^I \times Y \mid p(0) = f(x), p(1) = g(y)\} \end{aligned}$$

であって, 次の図式をホモトピー可換 (commute up to homotopy) にするものである.

$$\begin{tikzcd} X \times^R_Z Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

ここで p_X, p_Y はそれぞれの成分への射影である.

Theorem 9.20
ホモトピープルバックは存在すれば, 弱ホモトピー同値の違いをのぞいて一意である.

Example 9.21
Top における図式

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ \{*\} \arrow[r, "y_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

のホモトピープルバックはホモトピーファイバーである.

Example 9.22
通常のプルバックはホモトピープルバックである.

通常のプルバックとホモトピープルバックの間には自然な射が存在する.

Remark 9.23

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

に対して, 通常のプルバック $X \times_Z Y$ からホモトピープルバック $X \times_Z^R Y$ への標準的な写像

$$X \times_Z Y \to X \times_Z^R Y$$

が存在する.

Remark 9.24
次の可換図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

に対して, 自然な写像

$$W \to X \times_Z Y$$

が存在する. よって, 合成

$$W \to X \times_Z Y \to X \times_Z^R Y$$

が存在する.

ホモトピープルバック四角形はこの自然な射をもちいて定義される.

Definition 9.25 (ホモトピープルバック四角形)
可換図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

から得られる, 合成

$$W \to X \times_Z Y \to X \times_Z^R Y$$

が弱ホモトピー同値であるとき, 上の可換図式をホモトピープルバック四角形 (homotopy pullback square) やホモトピー Cartesian 図式 (homotopy Cartesian diagram) という.

この性質をもちいて Segal 空間を定義する.

Definition 9.26 (Segal 空間)
$X_\bullet$ を単体的空間とする. 任意の非負整数の組 (m, n) に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} X_{m+n} & \longrightarrow & X_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

がホモトピープルバック四角形となるとき, $X_\bullet$ を Segal 空間 (Segal space) [*9] という. この条件を Segal 条件 (Segal condition) という.

Remark 9.27
この定義は次の (1) と (2) が同値であるということである.

1. $\mathcal{C}$ における合成可能な射の列

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{m+n}} C_{m+n}$$

が与えられる.

2. 2 つの射の組

$$C_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_m} C_m \qquad\qquad C_m \xrightarrow{f_{m+1}} \cdots \xrightarrow{f_{m+n}} C_{m+n}$$

が与えられる.

主張 9.16 を思い出すと, $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ から構成される単体的空間 $X_\bullet$ が Segal 空間であるとするのは自然である. また, $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ は構成された Segal 空間 $X_\bullet$ から圏同値の違いをのぞいて一意に復元されるべきである.

Thesis 9.28
$X_\bullet$ を単体的空間とする. この $X_\bullet$ から $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ を次のように構成することができそうである.

[*9] 1 重 Segal 空間 (1-fold Segal space) ともいわれる.

- $\mathcal{C}$ の対象は位相空間 X_0 の点
- $x, y \in X_0$ に対して, 写像空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ はホモトピープルバック

$$\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{y\}$$

- $x, y, z \in X_0$ に対して, 合成則

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$$

  は合成

$$\begin{aligned}
&(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{y\}) \times (\{y\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\}) \\
&\to \{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\} \\
&\overset{\phi}{\simeq} \{x\} \times^R_{X_0} X_2 \times^R_{X_0} \{z\} \\
&\to \{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\}
\end{aligned}$$

  で与えられそうであるが, $X_\bullet$ は Segal 空間なので ϕ は弱ホモトピー同値である. 同型射とするためには, このホモトピー圏を考える必要がある.

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[dr, dashed, "\phi"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X_1 \times^R_{X_0} X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\
& X_1 \arrow[r] & X_0
\end{tikzcd}$$

- 上の合成則が (コヒーレンス) ホモトピーの違いをのぞいて結合的であることは, 残りの単体的空間 $X_\bullet$ と Segal 条件によって保証される.

やはり, この構成では $(\infty, 1)$-圏が異なる Segal 空間から構成されることがある.

Example 9.29
$\mathcal{C}$ を 1-圏とする. このとき, nerve $N(\mathcal{C})_\bullet$ に離散位相をいれることで単体的空間とみなす. この単体的空間 $N(\mathcal{C})$ は明らかに Segal 空間である. さらに, 上の構成を用いると元の圏 $\mathcal{C}$ を復元することができそうである. しかし, $\mathcal{C}$ を $(\infty, 1)$-圏とみなすと, そこから構成される Segal 空間は $N(\mathcal{C})_\bullet$ と一致「しない」. X_0 の基本 ∞-亜群は $\mathcal{C}$ から得られる ∞-亜群と同値であるため, X_0 は (ホモトピーの違いをのぞいても) 離散とは限らないからである.

$(\infty, 1)$-圏と Segal 空間 $X_\bullet$ が 1 対 1 に対応するように, 上の $(\infty, 1)$-圏の構成の仕方を見直す.

Definition 9.30 ($X_\bullet$ のホモトピー圏)
$X_\bullet$ を Segal 空間とする．このとき, 1-圏 h$X_\bullet$ は以下のデータから構成される．

- h$X_\bullet$ の対象は位相空間 X_0 の点
- 2 点 $x, y \in X_0$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}X_\bullet}(x, y)$ を道連結の集合
$$\pi_0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)) = \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{y\})$$
- 3 点 $x, y, z \in X_0$ に対して, 合成則は
$$\begin{aligned}
&\pi_0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)) \times \pi_0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z)) \\
&= \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{y\}) \times \pi_0(\{y\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\}) \\
&\to \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\}) \\
&\overset{\phi}{\simeq} \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_2 \times^R_{X_0} \{z\}) \\
&\to \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\})
\end{aligned}$$
で与えられる．

これを $X_\bullet$ のホモトピー圏 (homotopy category of $X_\bullet$) という．

Example 9.31
1-圏 $\mathcal{C}$ に対して, nerve $N(\mathcal{C})$ に離散位相をいれて単体的空間とみなす．このホモトピー圏 h$N(\mathcal{C})$ は元の圏 $\mathcal{C}$ と圏同値である．
$$\mathrm{h}N(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$$

Segal 空間 $Y_\bullet$ から上記の方法で $(\infty, 1)$-圏 $\mathcal{C}$ を構成する．この $\mathcal{C}$ から可逆でない 1-射を捨てた $(\infty, 0)$-圏から得られる Segal 空間を $X_\bullet$ とする．Y_0(の基本 ∞-亜群) から, この $(\infty, 0)$-圏への写像は同型とは限らない．Y_0 における道から生じえない $\mathcal{C}$ における可逆な 1-射が存在しうるからである．これをなくすために, Segal 空間 $Y_\bullet$ に追加で条件を課す．

Definition 9.32 (invertible)
始点を x, 終点を y とする X_1 の元 f を考える．つまり, 始点と終点をとる射 $X_1 \rightrightarrows X_0$ を考える．h$X_\bullet$ において
$$\{x\} \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \{z\} \to \{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\} \to \pi_0(\{x\} \times^R_{X_0} X_1 \times^R_{X_0} \{z\})$$
が同型射となるとき, X_1 の元 f は invertible であるという．

Example 9.33
$X_\bullet$ を Segal 空間とする．一意に存在する射 $p_{0,0} : [1] \to [0]$ から誘導される射 $p^*_{0,0} : X_0 \to X_1$ を考える．X_0 の任意の点 x に対して, ホモトピー圏 h$X_\bullet$ において, 射 $[p^*_{0,0}]$ は恒等射 $\mathrm{id}_x : x \to x$ である．よって, $p^*_{0,0}$ は invertible である．

Definition 9.34 (完備 Segal 空間)
$X_\bullet$ を Segal 空間とする．$Z \subset X_1$ を invertible な元の集まりとする．(Z には相対位相が入っているとする.) 上の例で構成した射 $p_{0,0}^* : X_0 \to Z$ が弱ホモトピー同値であるとき, $X_\bullet$ は完備 (complete) であるという．

つまり, $(\infty,1)$-圏 $\mathcal{C}$ から構成される任意の射が Y_0 の道から生じるとき, Segal 空間 $Y_\bullet$ は完備であるという．Y_0 の基本 ∞-亜群と $\mathcal{C}$ の不可逆な 1-射を捨てて構成される $(\infty,0)$-圏を同一視することができる．さらに, それぞれの Y_n の基本 ∞-亜群を $\mathbf{Fun}([n],\mathcal{C})$ から構成される $(\infty,0)$-圏とみなすことができる．よって, $(\infty,1)$-圏と完備 Segal 空間が 1 対 1 に対応することが分かった．

Definition 9.35 ($(\infty,1)$-圏)
完備 Segal 空間を $(\infty,1)$-圏という．

Definition 9.36 (completion)
$Y_\bullet$ を完備でない Segal 空間, $X_\bullet$ を完備 Segal 空間とする．このとき, 単体的空間のなすホモトピー圏において, 普遍射 (universal map) $Y_\bullet \to X_\bullet$ が存在する．$X_\bullet$ を $Y_\bullet$ の完了 (completion) という．

9.3 n-重 Segal 空間

前節では完備 Segal 空間を $(\infty,1)$-圏として定義した．この Segal 空間の考えは自然に (∞,n)-圏に拡張することができる．

単体圏において, 射を狭義線形順序写像に制限した半単体圏を考える．この制限は完了を考えるうえで重要である．

Definition 9.37 (半単体圏)
半単体圏 (semi-simplex category) $\mathbb{\Delta}_0$ は以下のデータから構成される．

- 対象は空でない線形順序集合 $[n] := \{0,1,\cdots,n\}$ の集まり
- 射は狭義で順序を保つ写像

Definition 9.38 (半単体的対象)
$\mathcal{C}$ を任意の圏とする．関手 $\mathbb{\Delta}_0^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の半単体的対象 (semi-simplicial object) という．

Definition 9.39 (半単体的集合と半単体的空間)
関手 $\mathbb{\Delta}_0^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (semi-simplicial set), 関手 $\mathbb{\Delta}_0^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}$ を単体的空間 (semi-simplicial space) という．

Definition 9.40 (半 Segal 空間)
$X_\bullet$ を半単体的空間とする．任意の非負整数の組 (m,n) に対して，図式

$$\begin{array}{ccc} X_{m+n} & \longrightarrow & X_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & X_0 \end{array}$$

がホモトピープルバック四角形となるとき，$X_\bullet$ を半 Segal 空間 (semi-Segal space) という．

Example 9.41
包含関手 $\mathbb{\Delta}_0^{\mathrm{op}} \to \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$ と単体的対象 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ から，半単体的対象 $\mathbb{\Delta}_0^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ が得られる．特に，単体的空間 $X_\bullet$ から半単体的空間 $X'_\bullet$ が得られる．

9.4 Segal 空間としてのコボルディズム圏

8 章で定義した n-圏 $\mathbf{Cob}_k(n)$ を Segal 空間の言葉で書き直す．話を簡単にするために，向きづけられていないコボルディズムのなす圏 $\mathbf{Cob}_k^{\mathrm{un}}(n)$ を考える．

まず，$(\infty,1)$-圏 $\mathbf{Cob}_k^{\mathrm{un}}(n)$ の構造をもつ Segal 空間 $\mathbf{PreCob}(n)_\bullet$ を構成する．簡単にいうと，$\mathbf{PreCob}(n)_k$ は長さ k の合成可能なコボルディズムの列

$$M_0 \xrightarrow{B_1} M_1 \xrightarrow{B_2} \cdots \xrightarrow{B_k} M_k$$

に対する分類空間である．ここで，それぞれの M_i は $(n-1)$ 次元閉多様体，B_i は M_{i-1} から M_i へのコボルディズムである．次の 2 点に注意しなければならない．

1. コボルディズムの合成は適切な同一視などをしないと well-defined とならない．しかし幸運なことに，空間 $\mathbf{PreCob}(n)_k$ はプルバック

   $$\mathbf{PreCob}(n)_1 \times_{\mathbf{PreCob}(n)_0} \cdots \times_{\mathbf{PreCob}(n)_0} \mathbf{PreCob}(n)_1$$

   と一致する必要はなく，X_k がこのプルバックと弱ホモトピー同値であればよい．よって，関係するホモトピーの型が変わらない限り，X_k の点は合成可能なコボルディズムの列 $\{B_i\}_{1\le i\le k}$ 以上の情報をもつ．例えば，

   $$B := B_1 \coprod_{M_1} \cdots \coprod_{M_{k-1}} B_{k-1}$$

   上の滑らかな構造である．
2. 合成可能なコボルディズムの列の集まりは (位相的な) 亜群となる．射は微分同相写像で与えればよい．ここから，空間 $\mathbf{PreCob}(n)_k$ をこの亜群の分類空間と思う．この分

類空間を正確に述べるために, いくつかの構造を追加する. V を十分大きな次元のベクトル空間として, 多様体 B を $V \times \mathbb{R}$ に埋め込む. V が十分大きいと埋め込みは高い連結性をもつ. さらに, 極限をとると誘導される分類空間は埋め込まれた部分多様体の集まりと思うことができる.

10　参考文献について 後半

7 章

2-圏は [Lur09] や [Lee14], [BD95] を参考にした．[SP13] には弱 2-圏の定義がある．モノイダル 2-圏の定義は [SP11] の Appendix C に載っている．

8 章

高次圏論は拡張された位相的場の量子論の論文では必ず説明されているが, 詳しい定義をしているものはない．n-圏は [Lur09], [Lee14], [FV11] を参考にした．高次元を考える理由は [Fre12] が一番丁寧である．安定化仮説は [SP13] にも載っているが, [BD95] で分かりやすく説明されている．(∞, n)-圏での安定化仮説の証明は [Bat15] や [Sim98] を参照してほしい．

9 章

単体的集合は丁寧な説明がされている [Ad21] を参照した．完備 Segal 空間による ∞-圏は [Lur09] や [SP13], [CS15] を参考にした．完備 Segal 空間は [Rez98] が元論文である．[Lee14] にも簡易的に説明されている．コボルディズム仮説は [Fre12] を参考にすればよいが, [Lee14] や [Lur09] も詳しい．(∞, n)-圏においてのコボルディズム仮説の証明は [Lur09] に載っている．

本稿に書いていない内容

位相的場の量子論に関する話題で, 本稿に書いていない内容を列挙する．

- 2 次元位相的欠陥した場の量子論 (2-dimensional defect topological quantum field theory) [Car18]
- Thom 同型や spectrum [Cru04]
- 弱 n-圏の厳密な定義 [Bae97]
- 開弦の理論 (open string theory) [Bar05]
- 位相的共形場の量子論 (conformed topological quantum field theory) [BCR04], [BCT09], [MS06]
- 3 次元位相的場の量子論の分類 [RGG+19]
- 4 次元位相的場の量子論 [Cui19]

参考文献

[Ad21] Alg-d, *All concepts are kan extentions*, 2021. http://alg-d.com/.

[Bae97] J. C. Baez, *An introduction to n-categories*, 1997. arXiv:q-alg/9705009.

[Bar05] B. H. Bartlett, *Categorical aspects of topological quantum field theories*, 2005. arXiv:math/0512103 [math.QA].

[Bat15] M. Batanin, *An operadic proof of baez-dolan stabilization hypothesis*, 2016. arXiv:1511.09130 [math.CT].

[BCR04] N. A. Baas, R. L. Cohen, and A. Ramirez, *The topology of the category of open and closed strings*, 2004. arXiv:math/0411080 [math.AT].

[BCT09] A. J. Blumberg, R. L. Cohen, and C. Teleman, *Open-closed field theories, string topology, and hochschild homology*, 2009. arXiv:0906.5198 [math.AT].

[BD95] J. C. Baez and J. Dolan, *Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory*, Journal of Mathematical Physics **36** (1995) 6073–6105.

[Car18] N. Carqueville, *Lecture notes on two-dimensional defect tqft*, Banach Center Publications **114** (2018) 49–84.

[Cru04] M. V. Cruz, *An introduction to cobordism*, 2004. https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2004/.

[CS15] D. Calaque and C. Scheimbauer, *A note on the (∞, n)-category of cobordisms*, 2015. https://arxiv.org/abs/1509.08906.

[Cui19] S. Cui, *Four dimensional topological quantum field theories from g-crossed braided categories*, Quantum Topology **10** (2019) 593–676.

[Fre12] D. S. Freed, *The cobordism hypothesis*, 2012. arXiv:1210.5100 [math.AT].

[FV11] M. Feshbach and A. A. Voronov, *A higher category of cobordisms and topological quantum field theory*, 2011. arXiv:1108.3349 [math.QA].

[Lee14] G. Lee, *The classification of two dimensional topological field theories*, 2014. arXiv:1403.7578 [math.AT].

[Lur06] J. Lurie, *Higher topos theory*, 2008. arXiv:math/0608040 [math.CT].

[Lur09] ———, *On the classification of topological field theories*, 2009. arXiv:0905.0465 [math.CT].

[MS06] G. W. Moore and G. Segal, *D-branes and k-theory in 2d topological field theory*, 2006. arXiv:hep-th/0609042.

[Rez98] C. Rezk, *A model for the homotopy theory of homotopy theory*, 2000.

arXiv:math/9811037 [math.AT].

[RGG+19] M. D. Renzi, A. M. Gainutdinov, N. Geer, B. Patureau-Mirand, and I. Runkel, *3-dimensional tqfts from non-semisimple modular categories*, 2021. arXiv:1912.02063 [math.GT].

[Sim98] C. Simpson, *On the breen-baez-dolan stabilization hypothesis for tamsamani's weak n-categories*, 1998. arXiv:math/9810058 [math.CT].

[SP11] C. J. Schommer-Pries, *The classification of two-dimensional extended topological field theories*, 2014. arXiv:1112.1000 [math.AT].

[SP13] C. Schommer-Pries, *Dualizability in low-dimensional higher category theory*, 2013. arXiv:1308.3574 [math.AT].