位相的場の量子論の基礎

よの

2022 年 2 月 21 日

目次

1 コボルディズム

多様体は滑らかで向きづけられていて, 多様体の間の写像は滑らかであるとする. n は 1 以上の自然数とする. [*1]

1.1 コボルディズム

コボルディズムの基本性質を見て, コボルディズムの圏を構成する. 詳しい証明は [ANT14] を参照してほしい.

Definition 1.1 (コボルディズム)
Σ, Σ' を $(n-1)$ 次元閉 (つまり, コンパクトで境界を持たない) 多様体とする. Σ から Σ' へのコボルディズム (cobordism) とは 5 つ組 $(M, \Sigma, \Sigma', i, i')$ であって, 以下の条件を満たすものである.

- M は n 次元コンパクト多様体である.
- i, i' はそれぞれ

$$i : \Sigma \to M,\ i' : \Sigma' \to M$$

  という写像であって $i : \Sigma \to M$ は $i(\Sigma)$ への向きを保つ微分同相写像, $i' : \Sigma' \to M$ は $i'(\Sigma')$ への向きを反転する微分同相写像である.
  $i(\Sigma), i'(\Sigma')$ はそれぞれ in-boundary, out-boundary と呼ばれる.

定義よりコボルディズムは Σ と Σ' の補間 (interpolating) とみなすことができる. このため, コボルディズムを $\Sigma \xrightarrow{i} M \xleftarrow{i'} \Sigma$ や単に $M : \Sigma \to \Sigma'$ とあらわす.

Remark 1.2
任意の n に対して, 形式的に空集合 $\emptyset$ を $(n-1)$ 次元閉多様体とする. .

ここでコボルディズムの合成である接着と呼ばれる操作を考えることができるが, このままでは接着は well-defined とはならない. この問題を解決するためにコボルディズムの同値類を考える. この同一視は位相的場の量子論において本質的である.

Definition 1.3 (コボルディズム同値)
2 つのコボルディズム $M, M' : \Sigma \to \Sigma'$ がコボルディズム同値 (cobordism equivalence) で

[*1] $n = 0$ の場合も考えられるが, ほとんど自明であるので省いた. 詳しくは [Fre12a] の Lecture 14 を参照してほしい.

あるとは, ある向きを保つ微分同相写像 $\psi : M \to M'$ が存在して, 次の図式を可換にする時である.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dd, dashed, "\psi"] & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma' \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

このコボルディズム同値が同値関係となることは明らかである.

Remark 1.4
コボルディズム同値から得られるコボルディズム同値類も, 単にコボルディズムということが多い. 記号の濫用ではあるが, コボルディズム同値類 $[M_0] : \Sigma \to \Sigma'$ も $M : \Sigma \to \Sigma'$ とあらわすことが一般的である.

Definition 1.5 (接着)
$i' : \Sigma \to M$ を M の out-boundary と Σ が同相である写像, $i : \Sigma \to M'$ を M' の in-bounday と Σ が同相である写像とする.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & M \\
M &
\end{tikzcd}$$

Σ に沿った M と M' の接着 (gluing of M and M' along Σ) とは, i' と i のプッシュアウトである. 接着で得られるコボルディズムを $M \sqcup_\Sigma M'$ とあらわす. [*2]

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
M' \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & M \sqcup_\Sigma M' \arrow[dr, dashed] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

コボルディズム同値によって接着が well-defined となることを見る. つまり, コボルディズム同値類 $[M_0] : \Sigma \to \Sigma'$ と $[M_1] : \Sigma' \to \Sigma''$ に対して, 接着 $[M_0 \sqcup M_1] := [M_0] \sqcup [M_1]$ が well-defined となることを確かめる.

Theorem 1.6 (Regular Interval Theorem)
$M : \Sigma \to \Sigma'$ をコボルディズム, $f : M \to [0, 1]$ を $\Sigma = f^{-1}(0), \Sigma' = f^{-1}(1)$ を満たす臨界

[*2] $\sqcup_M$ はプッシュアウトをあらわす通常の記号にならった.

点を持たない写像とする．このとき, ある微分同相写像 $\tilde{f}:\Sigma\times[0,1]\to M$ が存在して, 次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
\Sigma\times\{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook] & M \arrow[d, "f"] \\
\Sigma\times[0,1] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

$i:\Sigma\to M$ は $i(\Sigma)$ が M の in-boundary と同相である写像, $\mathrm{pr}_2:M\times[0,1]\to[0,1]$ は第 2 成分への自然な射影である．

Corollary 1.7

$M:\Sigma\to\Sigma'$ をコボルディズム, $f:M\to[0,1]$ を $\Sigma=f^{-1}(0),\Sigma'=f^{-1}(1)$ を満たす ∂M 上で臨界点を持たない Morse 関数とする．このとき, ある $\varepsilon>0$ が存在して $\Sigma\times[0,1]$ と $f^{-1}([0,\varepsilon])$ が微分同相となる．この $\Sigma\times[0,1]$ をシリンダー (cylinder) という．

proof

$[0,\varepsilon]$ において f が臨界点をもたないようなある $\varepsilon>0$ に対して, f を $[0,\varepsilon]$ に制限した写像は臨界点をもたない Morse 関数である．Regular Interval Theorem より $f^{-1}([0,\varepsilon])$ は $\Sigma\times[0,1]$ と微分同相である．

Theorem 1.8

M,M' をそれぞれ Σ を out-boundary, in-boundary にもつコボルディズムとする．M,M' からプッシュアウトによって $M\sqcup_\Sigma M'$ に誘導される滑らかな構造 (smooth structure) をそれぞれ α,β とする．このとき, ある微分同相写像 $\phi:(M\sqcup_\Sigma M',\alpha)\to(M\sqcup_\Sigma M',\beta)$ が存在して, $\phi|_\Sigma=\mathrm{id}_\Sigma$ を満たす．

Corollary 1.9

$M_0,M_0':\Sigma\to\Sigma',M_1,M_1':\Sigma'\to\Sigma''$ をコボルディズム, $\psi_0:M_0\to M_0',\psi_1:M_1\to M_1'$ を向きを保つ微分同相写像で, 次の図式を可換にするとする．

$$\begin{tikzcd}
 & & M_0\sqcup_{\Sigma'}M_1 & & \\
 & M_0 \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "\psi_0"] & & M_1 \arrow[ul] \arrow[d, dashed, "\psi_1"] & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma' \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \Sigma'' \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & M_0' \arrow[dr] & & M_1' \arrow[dl] & \\
 & & M_0'\sqcup_{\Sigma'}M_1' & &
\end{tikzcd}$$

ここで $M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1, M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1'$ はそれぞれの接着である．このとき, ある微分同相写像 $\psi : M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1 \to M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1'$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd} & M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1 \arrow[dd, dashed, "\psi"] & \\ \Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma'' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1' & \end{tikzcd}$$

proof

接着の普遍性より, ある同相写像 $\psi : M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1 \to M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1'$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd} & M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1 \arrow[dd, dashed, "\psi"] & \\ \Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Sigma'' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1' & \end{tikzcd}$$

ここで ψ は M_0, M_1 に制限すると微分同相写像である.
ψ は同相写像であるので, $M_0' \sqcup_{\Sigma'} M_1'$ 上の滑らかな構造を $M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1$ から誘導される滑らかな構造と定義することができる．よって, 定理 1.8 より ψ は微分同相写像となる.

定理 1.9 によって 2 つの接着が同じ同値類となり, 接着が well-defined となることが分かった. 合成を同値類の接着として定義する.

Definition 1.10 (接着)

$M_0 : \Sigma \to \Sigma', M_1 : \Sigma' \to \Sigma''$ をコボルディズム同値類とする．このとき, 合成 $\Sigma \to \Sigma''$ を接着 $M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1$ の同値類として定義する.

Remark 1.11

接着の同値類も, 単に接着ということが一般的である. 接着の同値類は $M_0 M_1$ とあらわす.

帰納的に系 1.8 を有限個の多様体について拡張することができる．プッシュアウトの普遍性から, コボルディズム $M_0 : \Sigma \to \Sigma', M_1 : \Sigma' \to \Sigma'', M_2 : \Sigma'' \to \Sigma'''$ に対して

$$(M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1) \sqcup_{\Sigma''} M_2 \simeq M_0 \sqcup_{\Sigma'} (M_1 \sqcup_{\Sigma''} M_2)$$

となる．よって, 系の拡張から同じコボルディズム同値類となり, 結合律

$$(M_0 M_1) M_2 = M_0 (M_1 M_2)$$

が成立する.

系 1.7 からシリンダー $C := \Sigma \times [0,1] : \Sigma \to \Sigma$ とコボルディズム $M : \Sigma \to \Sigma'$ に対して

$$\begin{aligned} C \sqcup_\Sigma M &\simeq C \sqcup_\Sigma (M_{[0,\varepsilon]} \sqcup M_{[\varepsilon,1]}) \\ &\simeq (C \sqcup_\Sigma M_{[0,\varepsilon]}) \sqcup M_{[\varepsilon,1]} \\ &\simeq ((\Sigma \times [0,1]) \sqcup_\Sigma \Sigma \times [0,1]) \sqcup M_{[\varepsilon,1]} \\ &\simeq (\Sigma \times [0,1]) \sqcup M_{[\varepsilon,1]} \\ &\simeq M_{[0,\varepsilon]} \sqcup M_{[\varepsilon,1]} \\ &\simeq M \end{aligned}$$

となる. よって, 同じコボルディズム同値類となり, 単位律

$$CM = M$$

が成立する.

同様に, コボルディズム $M : \Sigma \to \overline{\Sigma'}$ とシリンダー $C' := \Sigma' \times [0,1] : \Sigma' \to \overline{\Sigma'}$ に対して

$$MC' = M$$

が成立する.

以上より, コボルディズム圏 $\mathbf{Cob}(n)$ を次のように定義することができる.

Definition 1.12 ($\mathbf{Cob}(n)$)
コボルディズム圏 (cobordism category) $\mathbf{Cob}(n)$ は以下のデータから構成される.

- 対象は $(n-1)$ 次元閉多様体
- 射は n 次元コボルディズムの同値類
- 合成は接着の同値類
- 恒等射はシリンダーのコボルディズム同値類

1.2 ツイストコボルディズム

2 章で $\mathbf{Cob}(n)$ が対称モノイダル圏であることを示すために, コボルディズムに関して更にいくつか性質を述べる.

$M_0 : \Sigma \to \Sigma', M_1 : \Omega \to \Omega'$ をコボルディズムとする. このとき, 2 つのコボルディズムの非交和 (disjoint union) $M_0 \sqcup M_1 : \Sigma \sqcup \Omega \to \Sigma' \sqcup \Omega'$ はコボルディズムとなる.

Remark 1.13
記号が被っているのでここで整理しておく. コボルディズムの接着は $M_0 \sqcup_{\Sigma'} M_1$ で, 合成 (接着の同値類) は M_0M_1 と書いた. 一方, コボルディズムの非交和は $M_0 \sqcup M_1$ と書いた.

コボルディズム $M_0, M_0' : \Sigma \to \Sigma'$, $M_1, M_1' : \Omega \to \Omega'$ がそれぞれ微分同相である, つまりそれぞれがコボルディズム同値類 g, h で代表されているとする．このとき, 非交和の普遍性からある微分同相写像 $f : g \sqcup h : \Sigma \sqcup \Omega \to \Sigma' \sqcup \Omega'$ が存在して, f の制限はそれぞれ g, h と等しい.

よって, コボルディズムの非交和はコボルディズム同値に関して well-defined となる.

Definition 1.14 (非交和)
$M_0 : \Sigma \to \Sigma', M_1 : \Omega \to \Omega'$ をコボルディズムとする．このとき, コボルディズムの非交和 $M_0 \sqcup M_1$ を非交和のコボルディズム同値類と定義する．非交和のコボルディズム同値類も単に非交和という.

次に, $\mathbf{Cob}(n)$ における同型射を調べる.

Definition 1.15 ($\mathbf{Diff}_{n-1}$)
圏 $\mathbf{Diff}_{n-1}$ は以下のデータから構成される.

- 対象は $(n-1)$ 次元多様体.
- 射は微分同相写像

Definition 1.16 (シリンダー構成)
$f : M \to N$ を微分同相写像とする．f に対して, 恒等写像によって M から $M \times [0,1]$ の in-boundary に送り, f^{-1} によって N から $M \times [0,1]$ の out-boundary へ送るコボルディズムが定義される．この構成からコボルディズム同値類が得られる．この操作をシリンダー構成 (cylinder construction) という.
シリンダー構成は関手 $T : \mathbf{Diff}_{n-1} \to \mathbf{Cob}(n)$ を定め, この関手をシリンダー構成関手 (cylinder construction functor) という．$\mathbf{Diff}_{n-1}$ の任意の射 f は同型射なので, $T(f)$ は $\mathbf{Cob}(n)$ における同型射である.

$\mathbf{Cob}(n)$ における同型射は h-コボルディズムの同値類であらわされる.

Definition 1.17 (h-コボルディズム)
$M : \Sigma \to \Sigma'$ を閉多様体の間のコボルディズムとする．包含写像 $\Sigma \to M \leftarrow \Sigma'$ がホモトピー同値であるとき, M は h-コボルディズムであるという.

Theorem 1.18
$M : \Sigma \to \Sigma'$ を同型射を定めるコボルディズムとすると, M は h-コボルディズムである.

Definition 1.19 (ツイストコボルディズム)
シリンダー構成によって, ツイスト写像 (twist map) $\Sigma \sqcup \Omega \xrightarrow{\simeq} \Omega \sqcup \Sigma$ からコボルディズム

$\sigma_{\Sigma,\Omega} : \Sigma \sqcup \Omega \to \Omega \sqcup \Sigma$ が誘導される．このコボルディズムをツイストコボルディズム (twist cobordism) という．

Lemma 1.20
ツイストコボルディズムを 2 回作用させたものは, シリンダーの非交和と微分同相である．つまり

$$\sigma_{\Omega,\Sigma} \circ \sigma_{\Sigma,\Omega} = \mathrm{id}_{\Sigma \sqcup \Omega}$$

が成立する．

proof
コボルディズムの変形から明らかである．

Remark 1.21
圏 $\mathbf{Cob}(n)$ において, ツイストコボルディズムの同値類は組紐射を定める．

Remark 1.22
ツイストコボルディズム $\sigma_{\Sigma,\Omega} : \Sigma \sqcup \Omega \to \Omega \sqcup \Sigma$ は 2 つのシリンダーの非交和 $\Sigma \sqcup \Omega \to \Sigma \sqcup \Omega$ と微分同相ではない．一般に, 連結なコボルディズムと非連結なコボルディズムは微分同相ではない．

1.3 枠付きコボルディズム

枠付きコボルディズムはコボルディズム仮説で登場する．枠付き多様体への制限は位相的場の量子論の分類において本質的な役割を果たす．

1.4 コボルディズム群

執筆中

2　モノイダル圏

C は locally small な圏とする．詳しい証明は [PE15] を，ストリング図式による証明は [HV19] を参照してほしい．

2.1　モノイダル圏

Cob(n) と **Vect**(k) がともに対称モノイダル圏であることを示す．

Definition 2.1 (モノイダル圏)
モノイダル圏 (monoidal category) とは 6 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ であって，以下の条件を満たすものである．

- テンソル積 (tensor product) と呼ばれる双関手 $\otimes : C \times C \to C$ が存在する．
- 単位対象 (unit object) と呼ばれる C の対象 I が存在する．
- 対象 A, B, C に対して結合子 (associator) と呼ばれる自然同型 α

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$$

  が存在する．
- 対象 A に対して左単位子 (left unitor) と呼ばれる自然同型 λ

$$\lambda_A : I \otimes A \to A$$

  が存在する．
- 対象 A に対して右単位子 (right unitor) と呼ばれる自然同型 ρ

$$\rho_A : A \otimes I \to A$$

  が存在する．
- 対象 A, B, C, D について以下の 2 つの図式[*3] が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[drr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[urr, "\alpha_{A,B,C}\otimes \mathrm{id}_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rrrr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

*3 それぞれ五角形等式 (pentagon equation)，三角形等式 (triangle equation) と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

モノイダル圏の公理に出てくる五角形等式と三角形等式には次のような意味がある.

Theorem 2.2 (コヒーレンス定理)
以下の 2 つは同値である.

- 恒等射 id, 自然同型 α, λ, ρ, それらの逆射からテンソル積 $\otimes$ と合成 $\circ$ をとる操作で構成された射は, それぞれ始域と終域が同一であれば射として等しい.
- モノイダル圏の公理 (五角形等式と三角形等式) が成立する.

Definition 2.3 (組紐モノイダル圏)
組紐モノイダル圏 (braided monoidal category) とは 7 つ組 $(C, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ であって, 以下の条件を満たすものである.

- $\otimes, I, \alpha, \lambda, \rho$ はモノイダル圏の定義と同じである.
- 対象 A, B に対して組紐 (braiding) と呼ばれる自然同型

$$\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

  が存在する.
- 対象 A, B, C に対して以下の 2 つの図式[*4] が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B\otimes C}"] \arrow[dl, "\alpha^{-1}_{A,B,C}"'] & (B \otimes C) \otimes A & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[dr, "\sigma_{A,B} \otimes \mathrm{id}_C"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \arrow[ul, "\alpha^{-1}_{B,C,A}"'] \\
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"'] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, "\mathrm{id}_B \otimes \sigma_{A,C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A\otimes B,C}"] \arrow[dl, "\alpha_{A,B,C}"'] & C \otimes (A \otimes B) & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \otimes \sigma_{B,C}"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \arrow[ul, "\alpha_{C,A,B}"'] \\
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A,C,B}"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, "\sigma_{A,C} \otimes \mathrm{id}_B"'] &
\end{tikzcd}$$

[*4] 2 つ合わせて六角形等式 (hexagon equation) と呼ばれる.

Definition 2.4 (対称モノイダル圏)
対称モノイダル圏 (symmetric monidal category) とは組紐モノイダル圏であって, 自然同型 $\sigma_{A,B}$ が次の条件を満たすものである.

$$\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = \mathrm{id}_{A \otimes B}$$

Example 2.5 ($\mathbf{Cob}(n)$)
$\mathbf{Cob}(n)$ は対称モノイダル圏となる.
テンソル積を多様体の非交和, 単位対象を空集合 $\emptyset$, それぞれの自然同型を多様体の自然な同一視とすればよい. 組紐はツイストコボルディズムで与えられる.

Example 2.6 ($\mathbf{Vect}(k)$)
体 k 上のベクトル空間と有限次元ベクトル空間のなす圏 $\mathbf{Vect}(k)$ は対称モノイダル圏となる. 対象を有限次元に制限した圏 $\mathbf{FVect}(k)$ も対称モノイダル圏となる.
テンソル積を通常のテンソル積, 単位対象を体 k, 組紐も含めた自然同型を通常の同一視とすればよい.

2.2 モノイダル関手

Definition 2.7 (モノイダル関手)
C, D をモノイダル圏とする. モノイダル関手 (monoidal functor) [*5] [*6] とは 3 つ組 (F, φ, φ_0) であって, 以下の条件を満たすものである.

- $F : C \to D$ は通常の関手である.
- 次の 2 つの自然同型が存在する.

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B} &: F(A) \otimes' F(B) \to F(A \otimes B) \\ \varphi_0 &: I' \to F(I) \end{aligned}$$

[*5] 定義に出てきた 2 つの自然同型が単に自然変換であるとき, この関手を lax モノイダル関手 (弱モノイダル関手) といい, 自然同型となるときに, 強モノイダル関手ということが一般的である. 上の定義は強モノイダル関手であるが, 以降ではこの関手しか表れないので, これを単にモノイダル関手という.

[*6] モノイダル関手に出てくる自然同型が自然変換 $F(I) \to I', F(A \otimes B) \to F(A) \otimes F(B)$ である時, oplax モノイダル関手という. oplax モノイダル関手は C^{op} における lax モノイダル関手である.

- 以下の 3 つの図式が可換になる.

$$\begin{tikzcd}
(F(A)\otimes' F(B))\otimes' F(C) \arrow[r, "\alpha'_{F(A),F(B),F(C)}"] \arrow[d, "\varphi_{A,B}\otimes'\mathrm{id}_{F(C)}"'] & F(A)\otimes' (F(B)\otimes' F(C)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(A)}\otimes'\varphi_{B,C}"] \\
F(A\otimes B)\otimes' F(C) \arrow[d, "\varphi_{A\otimes B,C}"'] & F(A)\otimes' F(B\otimes C) \arrow[d, "\varphi_{A,B\otimes C}"] \\
F((A\otimes B)\otimes C) \arrow[r, "F(\alpha_{A,B,C})"'] & F(A\otimes (B\otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A)\otimes' I' \arrow[r, "\rho'_{F(A)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(A)}\otimes'\varphi_0"'] & F(A) \arrow[d, "F(\rho_A^{-1})"] \\
F(A)\otimes' F(I) \arrow[r, "\varphi_{A,I}"'] & F(A\otimes I)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I'\otimes' F'(A) \arrow[r, "\lambda'_{F(A)}"] \arrow[d, "\varphi_0\otimes'\mathrm{id}_{F(A)}"'] & F(A) \arrow[d, "F(\lambda_A^{-1})"] \\
F(I)\otimes' F(A) \arrow[r, "\varphi_{I,A}"'] & F(I\otimes A)
\end{tikzcd}$$

以降では, モノイダル関手 (F,φ,φ_0) の F は $F:C\to D$ という関手をあらわす.

Definition 2.8 (組紐モノイダル関手)
C,D を組紐モノイダル圏とする. 組紐モノイダル関手 (braided monoidal functor) (F,φ,φ_0) とはモノイダル関手 (F,φ,φ_0) であって, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{tikzcd}
F(A)\otimes' F(B) \arrow[r, "\sigma'_{F(A),F(B)}"] \arrow[d, "\varphi_{A,B}"'] & F(B)\otimes' F(A) \arrow[d, "\varphi_{A,B}"] \\
F(A\otimes B) \arrow[r, "F(\sigma_{B,A})"'] & F(B\otimes A)
\end{tikzcd}$$

Definition 2.9 (対称モノイダル関手)
C,D を対称モノイダル圏とする. 対称モノイダル関手 (symmetric monoidal functor) [*7] (F,φ,φ_0) とは, その間の組紐モノイダル関手である.

Example 2.10
$\mathbf{Cob}(n)\to\mathbf{Vect}(k)$ は対称モノイダル関手である.

2.3 モノイダル自然変換とモノイダル同値

2 つのモノイダル圏が同値であるとはどういうことであるか. それを定義するために必要な考え方がモノイダル同値である. モノイダル自然変換からモノイダル同値が自然に定義さ

[*7] 対称モノイダル関手は組紐モノイダル関手と違って, 可換図式の条件が追加で課されない. 組紐モノイダル圏はモノイダル圏に自然同型 $\sigma_{A,B}$ という「構造」が課されるが, 対称モノイダル圏は組紐モノイダル圏に $\sigma_{B,A}\circ\sigma_{A,B}=\mathrm{id}_{A\otimes B}$ という「性質」が追加されるという違いから生じるものである.

れる.

以降では, モノイダル関手 $(F,\varphi,\varphi_0),(G,\varphi',\varphi'_0)$ の F,G は $F,G:C\to D$ という関手をあらわす.

Definition 2.11 (モノイダル自然変換)
C,D をモノイダル圏, $(F,\varphi,\varphi_0),(G,\varphi',\varphi'_0)$ をモノイダル関手とする. モノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) とは自然変換 $\mu:F\Rightarrow G$ であって, 以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{tikzcd} F(A)\otimes' F(B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "\mu_A\otimes'\mu_B"'] & F(A\otimes B) \arrow[d, "\mu_{A\otimes B}"] \\ G(A)\otimes' G(B) \arrow[r, "\varphi'_{A,B}"'] & G(A\otimes B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I' \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi'_0"'] & F(I) \arrow[d, "\mu_I"] \\ & G(I) \end{tikzcd}$$

Definition 2.12 (組紐モノイダル自然変換)
C,D を組紐モノイダル圏, $(F,\varphi,\varphi_0),(G,\varphi',\varphi'_0)$ を組紐モノイダル関手とする. 組紐モノイダル自然変換 (braided monoidal natural transformation) $\mu:F\Rightarrow G$ とは, その間のモノイダル自然変換である.

Definition 2.13 (対称モノイダル自然変換)
C,D を対称モノイダル圏, $(F,\varphi,\varphi_0),(G,\varphi',\varphi'_0)$ を対称モノイダル関手とする. 対称モノイダル自然変換 (symmetric monoidal natural transformation) $\mu:F\Rightarrow G$ とは, その間のモノイダル自然変換である.

モノイダル自然変換を用いてモノイダル同値が定義される.

Definition 2.14 (モノイダル同値)
C,D をモノイダル圏, (F,φ,φ_0) をモノイダル関手とする. C,D がモノイダル同値 (monoidal equivalence) であるとはモノイダル関手 (F,φ,φ_0) に対して, ある関手 $G:D\to C$ が存在して

$$G\circ F\cong \mathrm{id}_C$$
$$F\circ G\cong \mathrm{id}_D$$

が成立する時である.

通常の圏同値とモノイダル同値には次のような関係がある.

Theorem 2.15
C,D をモノイダル圏, (F,φ,φ_0) をモノイダル関手とする. このとき, 以下の 2 つは同値である.

- C, D がモノイダル同値である.
- (F, φ, φ_0) がモノイダル関手であり, 通常の関手として圏同値を与える.

2.4 厳格化定理

厳格化定理は「任意のモノイダル圏はある厳格モノイダル圏とモノイダル同値となる」という定理である.

Definition 2.16 (厳格モノイダル圏)
厳格モノイダル圏 (strict monoidal category) とはモノイダル圏であって, 自然同型 α, λ, ρ が全て恒等射となる時である.

Example 2.17 (End)
C 上の自己関手の圏 $\mathbf{End}(C)$ は厳格モノイダル圏となる.

- 対象を C 上の自己関手 $F : C \to C$
- F から G への射は, 関手 F から G への自然変換
- テンソル積を自己関手の合成 $\circ$
- 単位対象を恒等関手 Id
- 自然同型 α, λ, ρ をそれぞれ自己関手の合成

関手にも自然同型が恒等射となる厳格性を考えることができる.

Definition 2.18 (厳格モノイダル関手)
厳格モノイダル関手 (strict monoidal functor) とはモノイダル関手 (F, φ, φ_0) であって, 自然同型 φ, φ_0 が恒等射となる時である.

Theorem 2.19 (厳格化定理)
任意のモノイダル圏はある厳格モノイダル圏とモノイダル同値となる.

この厳格化定理から, 考えるモノイダル圏は厳格であると仮定してよいことが分かる. 厳格性を仮定すると射の構成や図式が簡単になる.

3 双対化可能

双対化可能性はコボルディズム仮説において本質的な役割を果たす．詳しい証明は [PE15] を，ストリング図式による証明は [HV19] を参照してほしい．

3.1 双対対象

Definition 3.1 (右双対)
モノイダル圏において，対象 A^* が A の右双対 (right dual) [*8] であるとは射 $\mathrm{ev}'_A : A \otimes A^* \to I$ と $\mathrm{coev}'_A : I \to A^* \otimes A$ が存在して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "\rho^{-1}_{A^*}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A^*}"'] & {}^*A \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}_{A^*} \otimes \mathrm{coev}'_A"] & A^* \otimes (A \otimes A^*) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*}"] \\
A^* & I \otimes A^* \arrow[l, "\lambda_A"] & (A^* \otimes A) \otimes A^* \arrow[l, "\mathrm{ev}'_A \otimes \mathrm{id}_{A^*}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda^{-1}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & I \otimes A \arrow[r, "\mathrm{coev}'_A \otimes \mathrm{id}_A"] & (A \otimes A^*) \otimes A \arrow[d, "\alpha_{A,A^*,A}"] \\
A & A \otimes I \arrow[l, "\rho_A"] & A \otimes (A^* \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{ev}'_A"]
\end{tikzcd}$$

射 $\mathrm{ev}'_A : A \otimes A^* \to I$ を余単位射，$\mathrm{coev}'_A : I \to A^* \otimes A$ を単位射という．

Definition 3.2 (左双対)
モノイダル圏において，対象 ${}^*A$ が A の左双対 (left dual) [*9] であるとは射 $\mathrm{ev}_A : {}^*A \otimes A \to I$ と $\mathrm{coev}_A : I \to A \otimes {}^*A$ が存在して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
{}^*A \arrow[r, "\rho^{-1}_{{}^*A}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & {}^*A \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}_{{}^*A} \otimes \mathrm{coev}_A"] & {}^*A \otimes (A \otimes {}^*A) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{{}^*A,A,{}^*A}"] \\
{}^*A & I \otimes {}^*A \arrow[l, "\lambda_A"] & ({}^*A \otimes A) \otimes {}^*A \arrow[l, "\mathrm{ev}_A \otimes \mathrm{id}_{{}^*A}"]
\end{tikzcd}$$

[*8] 正しくは 4 つ組 $(A, A^*, \mathrm{ev}'_A, \mathrm{coev}'_A)$ とかくべきである．
[*9] 正しくは 4 つ組 $(A, A^*, \mathrm{ev}_A, \mathrm{coev}_A)$ とかくべきである．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & I \otimes A \arrow[r, "\mathrm{coev}_A \otimes \mathrm{id}_A"] & (A \otimes {}^*A) \otimes A \arrow[d, "\alpha_{A,{}^*A,A}"] \\
A & A \otimes I \arrow[l, "\rho_A"] & A \otimes ({}^*A \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{ev}_A"]
\end{tikzcd}$$

射 $\mathrm{ev}_A : {}^*A \otimes A \to I$ を評価射, $\mathrm{coev}_A : I \to A \otimes {}^*A$ を余評価射という.

A^* や ${}^*A$ をそれぞれ A の右双対対象, 左双対対象という.

Theorem 3.3
双対対象は存在すれば, 同型をのぞいて一意である.

Definition 3.4 (剛モノイダル圏)
モノイダル圏において, 任意の対象が右双対をもつとき, 右剛モノイダル圏という.
任意の対象が左双対をもつとき, 左剛モノイダル圏という.
任意の対象が右双対と左双対をもつとき, 剛モノイダル圏という.

組紐モノイダル圏や対称モノイダル圏についても同様に剛性を定義することができる.

Lemma 3.5
対称モノイダル圏において右双対と左双対は一致する.

proof
組紐構造から明らかである.

Example 3.6 ($\mathbf{Cob}(n)$)
$(n-1)$ 次元閉多様体 Σ はその向きを逆にした $(n-1)$ 次元閉多様体 $\overline{\Sigma}$ を右双対かつ左双対にもつ. よって, $\mathbf{Cob}(n)$ は対称剛モノイダル圏となる.

Example 3.7 ($\mathbf{FVect}(k)$)
有限次元ベクトル空間 V はその双対ベクトル空間 V^* を右双対かつ左双対にもつ. よって, $\mathbf{FVect}(k)$ は対称剛モノイダル圏となる.
任意の $v \in V, f \in V^*$ に対して, 余単位射 ev'_V を

$$\mathrm{ev}'_V : V \otimes V^* \to k : v \otimes f \mapsto f(v)$$

V の任意の正規直交基底 $\{v^i\}$ と V^* の任意の正規直交基底 $\{f_i\}$ に対して, 単位射 coev'_V を

$$\mathrm{coev}'_V : \mathbb{C} \to V^* \otimes V : 1 \mapsto \sum_i f_i \otimes v^i$$

で与えればよい.

Example 3.8 ($\mathbf{Vect}(k)$)
無限次元ベクトル空間は圏論の意味での双対対象をもたないので, $\mathbf{Vect}(k)$ は対称剛モノイダル圏とならない.

この例から剛性はある意味で「コンパクト性」や「有限性」を課すものだとわかる.

Theorem 3.9
モノイダル関手は双対対象を保つ.

3.2 双対射

Definition 3.10 (右双対射)
右剛モノイダル圏において, 対象 A, B の右双対が A^*, B^* であるとする. 射 $f : A \to B$ に対して, 射 $f^* : B^* \to A^*$ を次の図式を可換にするように定義する.

$$\begin{tikzcd}
B^* \arrow[r, "\lambda_{B^*}^{-1}"] \arrow[dd, "f^*"'] & I \otimes B^* \arrow[r, "\mathrm{coev}'_A \otimes \mathrm{id}_B"] & (A^* \otimes A) \otimes B^* \arrow[dr, "\alpha_{A^*,A,B^*}"] & \\
& & & A^* \otimes (A \otimes B^*) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{A^*} \otimes (f \otimes \mathrm{id}_{B^*})"] \\
A^* & A^* \otimes I \arrow[l, "\rho_{A^*}"] & A^* \otimes (B \otimes B^*) \arrow[l, "\mathrm{id}_{A^*} \otimes \mathrm{ev}'_B"] &
\end{tikzcd}$$

この射 f^* を f の右双対射 (right dual morphism) や右転置 (right transpose) という.

Definition 3.11 (左双対射)
左剛モノイダル圏において, 対象 A, B の左双対が ${}^*A, {}^*B$ であるとする. 射 $f : A \to B$ に対して, 射 ${}^*f : {}^*B \to {}^*A$ を次の図式を可換にするように定義する.

$$\begin{tikzcd}
{}^*B \arrow[r, "\rho_{{}^*B}^{-1}"] \arrow[dd, "{}^*f"'] & {}^*B \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}_{{}^*B} \otimes \mathrm{coev}_A"] & {}^*B \otimes (A \otimes {}^*A) \arrow[dr, "\alpha_{{}^*B,A,{}^*A}^{-1}"] & \\
& & & ({}^*B \otimes A) \otimes {}^*A \arrow[dl, "(\mathrm{id}_{{}^*B} \otimes f) \otimes \mathrm{id}_{{}^*A}"] \\
{}^*A & I \otimes {}^*A \arrow[l, "\lambda_{{}^*A}"] & ({}^*B \otimes B) \otimes {}^*A \arrow[l, "\mathrm{ev}_A \otimes \mathrm{id}_{{}^*A}"] &
\end{tikzcd}$$

この射 ${}^*f$ を f の左双対射 (left dual morphism) や左転置 (left transpose) という.

Example 3.12
$\mathbf{Cob}(n)$ において, 射 $M : \Sigma \to \Sigma'$ の右, 左双対射はともに向きを逆にした多様体の間の写像 $M^* : \overline{\Sigma'} \to \overline{\Sigma}$ である.

Example 3.13

$\mathbf{FVect}(k)$ において, 射 $f : V \to W$ の右, 左双対射はともに双対ベクトル空間の間の写像 $f^* : W^* \to V^*$ である.

4 位相的場の量子論

4.1 n 次元位相的場の量子論

Definition 4.1 (n 次元位相的場の量子論)
n 次元位相的場の量子論 (n-dimensional topological quantum field theory) とは, 対称モノイダル関手 Z

$$Z : \mathbf{Cob}(n) \to \mathbf{Vect}(k)$$

である.

この定義を書き下すと次のようになる. n 次元位相的場の量子論 Z は次のデータで構成される.

- $(n-1)$ 次元閉多様体 Σ に対して, ベクトル空間 $Z(\Sigma)$ が与えられる.
- $(n-1)$ 次元閉多様体 Σ, Σ' の間の n 次元コボルディズム M に対して, 線形写像 $Z(M) : Z(\Sigma) \to Z(\Sigma')$ が与えられる.
- 2 つの自然同型

$$k \to Z(\emptyset)$$
$$Z(\Sigma) \otimes Z(\Omega) \to Z(\Sigma \sqcup \Omega)$$

が与えられて, 対称モノイダル関手の公理の図式を可換にする.

Remark 4.2
n 次元閉多様体 M は $\emptyset$ から $\emptyset$ へのコボルディズムと思うことができる. このとき, M は $\mathbf{Cob}(n)$ において射 $M : \emptyset \to \emptyset$ を定める. Z を n 次元位相的場の量子論とすると M は $\mathbf{Vect}(k)$ において射 $Z(M) : Z(\emptyset) \to Z(\emptyset)$ を定める. $Z(\emptyset) \simeq k$ より $Z(M)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}(k)}(k, k)$ の元, つまり k の元である. これから Z は任意の n 次元閉多様体に対して, ある不変量 (invariant) を定めることが分かる.

Remark 4.3
Σ を $(n-1)$ 次元閉多様体として, $\overline{\Sigma}$ を Σ と逆の向きをもつ $(n-1)$ 次元閉多様体とする. このとき, シリンダー $\Sigma \times [0,1]$ は $\overline{\Sigma}$ と Σ を境界にもつ多様体と考えることができる. $\mathbf{Cob}(n)$ において, シリンダーは次の 4 つの解釈ができる.

- $\Sigma \times [0,1]$ は Σ から Σ へのコボルディズムである. つまり $\mathbf{Cob}(n)$ において恒等射

$$\mathrm{id}_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$$

をあらわす.

- $\Sigma \times [0,1]$ は $\overline{\Sigma}$ から $\overline{\Sigma}$ へのコボルディズムである．つまり $\mathbf{Cob}(n)$ において恒等射

$$\mathrm{id}_{\overline{\Sigma}} : \overline{\Sigma} \to \overline{\Sigma}$$

をあらわす.

- $\Sigma \times [0,1]$ は $\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma$ から $\emptyset$ へのコボルディズムである．つまり $\mathbf{Cob}(n)$ において評価射

$$\mathrm{ev}_{\Sigma} : \overline{\Sigma} \sqcup \Sigma \to \emptyset$$

をあらわす.

- $\Sigma \times [0,1]$ は $\emptyset$ から $\Sigma \sqcup \overline{\Sigma}$ へのコボルディズムである．つまり $\mathbf{Cob}(n)$ において余評価射

$$\mathrm{coev}_{\Sigma} : \emptyset \to \Sigma \sqcup \overline{\Sigma}$$

をあらわす.

Theorem 4.4
Z を n 次元位相的場の量子論とする．このとき以下の 3 つが成立する.

- 任意の $(n-1)$ 次元閉多様体 Σ に対して $Z(\Sigma)$ は有限次元ベクトル空間である.
- $Z(\overline{\Sigma}) \otimes Z(\Sigma) \to k$ は非退化である.
- $Z(\overline{\Sigma})$ から $Z(\Sigma)$ の双対空間 $Z(\Sigma)^*$ への同型射 α が誘導される.

proof
$\mathrm{ev}_{\Sigma} : \overline{\Sigma} \sqcup \Sigma \to \emptyset$ に Z を作用させると

$$Z(\overline{\Sigma} \sqcup \Sigma) \simeq Z(\overline{\Sigma}) \otimes Z(\Sigma) \xrightarrow{Z(\mathrm{ev}_{\Sigma})} Z(\emptyset) \simeq k$$

が得られる．ここから

$$\alpha : Z(\overline{\Sigma}) \to Z(\Sigma)^*$$

が誘導される．$Z(\mathrm{ev}_{\Sigma})$ が非退化であることがわかるので, 誘導された $Z(\overline{\Sigma}) \to Z(\Sigma)^*$ は同型射である．また, 同型射であることから $Z(\Sigma)$ が有限次元であることもわかる.

この定理は位相的場の量子論の分類において本質的なものである.

4.2 1 次元位相的場の量子論の分類

0 次元閉多様体 Σ は点の有限集合である．Z を 1 次元位相的場の量子論とすると, 0 次元閉多様体 Σ に対してベクトル空間 $Z(\Sigma)$ が与えられる．Σ の向きにより「正に向きづけられ

た」Σ_+ と「負に向きづけられた」Σ_- によって

$$\Sigma = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$$

と分解される．特に 1 点で構成される 2 つの向きづけられた多様体 $+$ と $-$ が存在して, Z に作用させると 2 つのベクトル空間 $Z(+)$ と $Z(-)$ を得る．定理 4.4 より, ある有限次元ベクトル空間 V を用いて

$$Z(+) = V,\ Z(-) = V^*$$

とあらわされる．よって V を指定すると, 1 次元位相的場の量子論は対象に関して

$$Z(\Sigma) \simeq \left(\bigotimes_{x \in \Sigma_+} V \right) \otimes \left(\bigotimes_{y \in \Sigma_-} V^* \right)$$

と微分同相の違いをのぞいて一意に決定される．しかし, まだコボルディズム M に関する $Z(M)$ を考える必要がある．Z は対称モノイダル関手なので, 1 次元コボルディズムが連結である部分のみを考えれば十分である．このとき M は円周 S^1 か閉区間 $I = [0,1]$ のいずれかに微分同相である．よって, この 2 つのコボルディズムの in-boundary と out-boundary に関しての場合分けを考える．

- $+$ から $+$ へのコボルディズムとして $M = I$ を考えると, $Z(M)$ は恒等射

$$\mathrm{id}_V : V \to V$$

となる．
- $-$ から $-$ へのコボルディズムとして $M = I$ を考えると, $Z(M)$ は恒等射

$$\mathrm{id}_{V^*} : V^* \to V^*$$

となる．
- $+ \sqcup -$ から $\emptyset$ へのコボルディズムとして $M = I$ を考えると, $Z(M)$ は評価写像

$$V \otimes V^* \to k : (v, f) \mapsto f(v)$$

となる．
- $\emptyset$ から $+ \sqcup -$ へのコボルディズムとして $M = I$ を考えると, $Z(M)$ は線形写像

$$k \to V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V) : x \mapsto x\mathrm{id}_V$$

となる．

- $\emptyset$ から $\emptyset$ へのコボルディズムとして $M = S^1$ を考えると, $Z(M)$ は線形写像

$$k \to k$$

であり, Remark 4.2 から k のある元で定めることができる. この元を特定するために $S^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ を 2 つの閉区間

$$S^1_+ := \{z \in S^1 \mid |z|^2 = 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$
$$S^1_- := \{z \in S^1 \mid |z|^2 = 1, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$$

に分解する.

$$S^1_+ \cap S^1_- \simeq \{\pm 1\} \subset S^1$$

なので, $Z(S^1)$ は線形写像

$$k \simeq Z(\emptyset) \xrightarrow{Z(S^1_+)} Z(\pm 1) \xrightarrow{Z(S^1_-)} Z(\emptyset) \simeq k$$

となる. それぞれの写像は上で構成した写像であるので, $\{\pm 1\}$ を $\{+ \sqcup -\}$ と同一視すると

$$Z(S^1_-) : k \to \mathrm{End}(V) : x \mapsto x\mathrm{id}_V$$
$$Z(S^1_+) : \mathrm{End}(V) \to k : f \mapsto \mathrm{Tr}(f)$$

と考えると $Z(S^1)$ は $\mathrm{id}_V : V \to V$ のトレース, つまり V の次元 $\dim(V)$ で決定される.

この結果を定理の形でまとめておく.

Theorem 4.5 (1 次元のコボルディズム仮説)
V を有限次元ベクトル空間とする. このとき, ある関手 $Z : \mathbf{Cob}(1) \to \mathbf{Vect}(k)$ が存在して $Z(+) = V$ をみたす.

コボルディズム仮説 (cobordism hypothesis) と呼ばれているが定理である. これは (∞, n)-圏の理論において一般に証明されている.

5　2 次元位相的場の量子論

1 次元位相的場の量子論は有限次元ベクトル空間で分類することができた．次に 2 次元位相的場の量子論の分類を考えてみる．有限次元ベクトルにいくつかの代数構造をみたす $\mathbf{Vect}(k)$ の対象で分類されるはずである．この代数構造を説明するために, モノイダル圏上のモノイドとコモノイドから説明する．

5.1　Frobenius 代数

モノイダル圏においてモノイドとコモノイドが考えられる．モノイドとコモノイドが与えられたとき, Frobenius 代数が考えられる．Frobenius 代数は 2 次元位相的場の量子論の分類において本質的な役割を果たす．

Definition 5.1 (モノイド)
モノイダル圏において, モノイド (monoid) とは対象 A と射 $m : A \otimes A \to A, u : I \to A$ の 3 つ組 (A, m, u) であって, 以下の 2 つの図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "\alpha_{A,A,A}"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{id}_A"'] & & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \arrow[d, "u \otimes \mathrm{id}_A"'] & A \arrow[l, "\lambda_A^{-1}"'] \arrow[r, "\rho_A^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes u"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

それぞれの図式を結合律 (associativity), 単位律 (unitality) という．

Definition 5.2 (可換モノイド)
組紐モノイダル圏[*10] において, モノイド (A, m, u) が可換 (commutative) であるとは, 上の 2 つに加えて次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\sigma_{A,A}"'] & & A \\
& A \otimes A \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

[*10] 対称モノイダル圏とする定義もある．

このとき (A, m, u) を可換モノイド (commutative monoid) という．上の図式を可換律 (commutativity) という．

Definition 5.3 (コモノイド)
モノイダル圏において, コモノイド (comonoid) とは対象 A と射 $d : A \to A \otimes A, e : A \to I$ の 3 つ組 (A, d, e) であって, 以下の 2 つの図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[rr, "\alpha_{A,A,A}"] & & A \otimes (A \otimes A) \\
A \otimes A \arrow[u, "d \otimes \mathrm{id}_A"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "d"'] & A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes d"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[r, "\rho_A"] & A & A \otimes I \arrow[l, "\lambda_A"'] \\
A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes e"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "d"'] \arrow[u, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes e"']
\end{tikzcd}$$

それぞれの図式を余結合律 (coassociativity), 余単位律 (counitality) という．

Definition 5.4 (可換コモノイド)
組紐モノイダル圏[*11] において, コモノイド (A, d, e) が可換であるとは, 上の 2 つに加えて次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A & & A \arrow[ll, "d"'] \arrow[dl, "d"] \\
& A \otimes A \arrow[ul, "\sigma_{A,A}"] &
\end{tikzcd}$$

このとき (A, d, e) を可換コモノイドという．上の図式を余可換律 (cocommutativity) という．

Definition 5.5 (Frobenius 代数)
モノイダル圏において, Frobenius 代数 (Frobenius algebra) とはモノイド (A, m, u) とコモ

*11 対称モノイダル圏とする定義もある．

ノイド (A,d,e) の対 (A,m,u,d,e) であって, 次の図式を可換にするものである.

$$
\begin{tikzcd}
 & (A\otimes A)\otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A,A}"] & A\otimes(A\otimes A) \arrow[dr, "\mathrm{id}_A\otimes m"] & \\
A\otimes A \arrow[ur, "d\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A\otimes d"'] & & & A\otimes A \\
 & A\otimes(A\otimes A) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A,A,A}"'] & (A\otimes A)\otimes A \arrow[ur, "m\otimes\mathrm{id}_A"'] &
\end{tikzcd}
$$

上の図式を Frobenius 則という.

Definition 5.6 (可換 Frobenius 代数)
Frobenius 代数はモノイドとコモノイドがともに可換であるとき, 可換 Frobenius 代数 (commutative Frobenius algebra) という.

Frobenius 代数にはいくつか同値な定義がある.

Definition 5.7 (Frobenius 代数)
執筆中

これで 2 次元位相的場の量子論の分類をする準備が整った.

5.2 2 次元位相的場の量子論の分類

1 次元閉多様体 Σ は微分同相の違いをのぞいて円周 S^1 の非交和のみである. Z を 2 次元位相的場の量子論とすると, 1 次元閉多様体 Σ に対してベクトル空間 $Z(\Sigma)$ が与えられる. また S^1 の向きを逆にした $\overline{S^1}$ は元の S^1 と微分同相である. ある有限次元ベクトル空間 V を用いて

$$Z(S^1) = V$$

とあらわされるとする. よって V を指定すると, 2 次元位相的場の量子論は対象に関して

$$Z(\Sigma) = \bigotimes_{x\in S^1} V$$

と微分同相の違いをのぞいて一意に決定される. 1 次元位相的場の量子論の場合と同様に 2 次元コボルディズムが連結である部分のみを考えれば十分である. このコボルディズム M は次の 5 つに分解することができる.

執筆中

この結果を定理の形にまとめておく.

Theorem 5.8 (2 次元のコボルディズム仮説)
A を可換 Frobenius 代数とする．このとき, ある関手 $Z : \mathbf{Cob}(2) \to \mathbf{Vect}(k)$ が存在して $Z(S^1) = A$ をみたす．

2 次元閉多様体 M を 2 次元位相的場の量子論 Z で評価して得られる不変量をみる．2 次元閉多様体は微分同相の違いをのぞいて種数 $g(\geq 0)$ のトーラス Σ_g で完全に決定されるので, いくつか具体例 $Z(\Sigma_g)$ を計算して不変量を探る．[*12]

- $g = 0$ の場合, Σ_0 は 2 次元球面 S^2 と微分同相である．S^2 を 2 つの領域

$$
\begin{aligned}
S^2_+ &:= \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1, x \geq 0\} \\
S^2_- &:= \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1, x \leq 0\}
\end{aligned}
$$

  に分解する．

$$S^2_+ \cap S^2_- \simeq S^1 \subset S^2$$

  であるので, $Z(\Sigma_0)$ は線形写像

$$k \simeq Z(\emptyset) \xrightarrow{Z(S^2_+)} Z(S^1) \xrightarrow{Z(S^2_-)} Z(\emptyset) \simeq k$$

  となる．$Z(S^1)$ は可換 Frobenius 代数 A であるので, $Z(S^2_+) : k \to A$ は $1 \in k$ よって決定される．$Z(S^2_-) : A \to k$ はトレース写像であるので, $Z(\Sigma_0)$ の不変量は $\mathrm{Tr}(1) \in k$ で決定される．
- $g = 1$ の場合, Σ_1 はトーラス $S^1 \times S^1$ と微分同相である．$S^1 \times S^1$ を $S^1_+ \times S^1$ と $S^1_- \times S^1$ に分解する．

$$(S^1_+ \times S^1) \cap S^1_- \times S^1 \simeq (S^1_+ \cap S^1_-) \times S^1 \simeq \{\pm 1\} \times S^1 \simeq S^1 \sqcup \overline{S^1}$$

  であるので, $Z(\Sigma_1)$ は線形写像

$$k \simeq Z(\emptyset) \xrightarrow{Z(S^1_+ \times S^1)} Z(\{\pm 1 \times S^1\}) \xrightarrow{Z(S^1_- \times S^1)} Z(\emptyset) \simeq k$$

  となる．

$$Z(S^1 \sqcup \overline{S^1}) \simeq Z(S^1) \otimes Z(\overline{S^1}) \simeq A \otimes A^* \simeq \mathrm{End}(A)$$

  であるので,

$$
\begin{aligned}
Z(S^1_+ \times S^1) &: k \to \mathrm{End}(A) \\
Z(S^1_- \times S^1) &: \mathrm{End}(A) \to k
\end{aligned}
$$

  よって, $Z(\Sigma_1)$ は A の次元 $\dim(A)$ で決定される．

[*12] もちろん, この Σ_g は $(n-1)$ 次元多様体の記法 Σ や Σ' とは関係がない．Σ_g は種数 g のトーラスを表す一般的な記号であるので, この記法に従った．

5.3 開弦の理論

Cob(2) の対象は S^1 の非交和であったので, 閉弦の運動を記述する閉弦の理論 (closed string theory) と思うことができる. つまり, 2 次元位相的場の量子論は閉弦の運動の軌跡を分類していると思うことができる. 類似概念として, 対象を S^1 ではなく 1 次元の閉区間 I とする開弦の理論 (open closed theory) **OCob** が考えられる. 閉弦の理論は可換 Frobenius 代数で分類することができたが, 開弦の理論は Frobenius 代数で分類することができる.

5.4 位相的共形場の量子論

さらに, 対象として閉弦 S^1 と開弦 I の両方をとる位相的共形場の量子論 (conformed topological quantum field theory) **TopString** が考えられる. 位相的共形場の量子論は弦の運動の軌跡を分類していると思うことができる.

6　参考文献について 前半

1 章

1 章のコボルディズムは [ANT14] が詳しい．[Cru04] もコボルディズムに関して様々なトピックがまとまっている．[Fre12a] は講義ノートであって，この pdf では扱っていない特性類やスペクトラムについても書かれている．特に Lecture 1 を参考にした．コボルディズム群は [Kup17] を参照した．

2 章

2 章のモノイダル圏は [HV19] や [PE15] を参考にした．ストリング図式の扱いなどモノイダル圏に関しては [HV19] を読めばよい．モノイダル圏を詳しく説明している位相的場の量子論の論文は少ないが，ストリング図式については [Bar05] で短く説明されている．

3 章

3 章の双対対象は [HV19] や [PE15] を参考にした．やはり，ストリング図式に詳しい [HV19] を読めばよい．[HV19] は右双対と左双対の区別をしていない．(この本で主に扱う圏では右双対と左双対が一致するからである.) モノイダル圏に関して厳密な話は [PE15] に載っている．

4 章

[Bar05] と [BL09] は位相的場の量子論の概要を知るために適しているが，詳しい話はそれぞれ参考にされている論文に任せている箇所も多い．1 次元位相的場の量子論は [Lur09] を参考にした．コボルディズム仮説は [Fre12b] で登場した．

5 章

Frobenius 代数は [HV19] を参考にした．2 次元位相的場の量子論の論文には最初に詳しく説明されていることが多い．2 次元位相的場の量子論はどの論文にも詳しく説明されているが，[ABR0d] が特に詳しい．

本稿に書いていない内容

位相的場の量子論に関する話題で，本稿に書いていない内容を列挙する．

- 2 次元位相的欠陥した場の量子論 (2-dimensional defect topological quantum field theory) [Car18]
- Thom 同型や spectrum [Cru04]
- 弱 n-圏の厳密な定義 [Bae97]
- 開弦の理論 (open string theory) [Bar05]
- 位相的共形場の量子論 (conformed topological quantum field theory) [BCR04], [BCT09], [MS06]
- 3 次元位相的場の量子論の分類 [RGG$^+$19]
- 4 次元位相的場の量子論 [Cui19]

参考文献

[ABR0d] L. ABRAMS, *Two-dimensional topological quantum field theories and frobenius algebras*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **05** (1996) 569–587, https://doi.org/10.1142/S0218216596000333.

[ANT14] J. ANTONIO, *Two dimensional tqfts*, 2014. https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~ggranja/jorge.pdf.

[Bae97] J. C. Baez, *An introduction to n-categories*, 1997. arXiv:q-alg/9705009.

[Bar05] B. H. Bartlett, *Categorical aspects of topological quantum field theories*, 2005. arXiv:math/0512103 [math.QA].

[BCR04] N. A. Baas, R. L. Cohen, and A. Ramirez, *The topology of the category of open and closed strings*, 2004. arXiv:math/0411080 [math.AT].

[BCT09] A. J. Blumberg, R. L. Cohen, and C. Teleman, *Open-closed field theories, string topology, and hochschild homology*, 2009. arXiv:0906.5198 [math.AT].

[BL09] J. C. Baez and A. D. Lauda, *A prehistory of n-categorical physics*, Deep Beauty (2009) 13–128.

[Car18] N. Carqueville, *Lecture notes on two-dimensional defect tqft*, Banach Center Publications **114** (2018) 49–84.

[Cru04] M. V. Cruz, *An introduction to cobordism*, 2004. https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2004/.

[Cui19] S. Cui, *Four dimensional topological quantum field theories from g-crossed braided categories*, Quantum Topology **10** (2019) 593–676.

[Fre12a] D. Freed, *Bordism: Old and new*, 2012. https://web.ma.utexas.edu/users/dafr/M392C-2012/.

[Fre12b] D. S. Freed, *The cobordism hypothesis*, 2012. arXiv:1210.5100 [math.AT].

[HV19] C. Heunen and J. Vicary, *Categories for quantum theory*, 2019. https://global.oup.com/academic/product/categories-for-quantum-theory-9780198739616?cc=jp&lang=en&.

[Kup17] A. Kupers, *Oriented cobordism: Calculation and application*, 2017.

[Lur09] J. Lurie, *On the classification of topological field theories*, 2009. arXiv:0905.0465 [math.CT].

[MS06] G. W. Moore and G. Segal, *D-branes and k-theory in 2d topological field theory*, 2006. arXiv:hep-th/0609042.

[PE15] D. N. Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, *Tensor categories*, 2015. https://klein.mit.edu/~etingof/.

[RGG+19] M. D. Renzi, A. M. Gainutdinov, N. Geer, B. Patureau-Mirand, and I. Runkel, *3-dimensional tqfts from non-semisimple modular categories*, 2021. arXiv:1912.02063 [math.GT].