

加法圏から導来圏まで

よの

2022 年 10 月 1 日

概要

本稿は加法圏から導来圏まで勉強したことをまとめたものである。

第 1 章では, Hom 集合に Abel 群の構造が入った加法圏を導入する. 第 1.1 節で定義される加法圏は第 2 章以降で登場する Abel 圏, 完全圏, 三角圏などに必要である. 第 1.2 節で加法圏における複体を定義して, 複体の圏が加法圏となることをみる. (定理 1.2.5) また, ここで定義されるシフトと写像錐は三角圏への一般化で再登場する. 第 1.3 節では, ホモトピーを定義して, 複体のホモトピー圏を定義する. このホモトピー圏は Abel 圏とはならない (例 2.2.10) が三角圏となる. (定理 4.3.3)

第 2 章では, 核や余核, 像や余像が定義できる Abel 圏を紹介する. 第 2.1 節で射の核や余核, 像や余像を定義する. 第 2.2 節で任意の射に対して核と余核が定義できる Abel 圏を定義する. 重要な例として, 複体の圏は Abel 圏となる. (定理 2.2.8) Abel 圏上では $\text{Mod } R$ の一般化としてホモロジー代数を展開できる. 第 2.3 節で完全列を定義する. そして, 第 2.4 節でコホモロジーを定義して, 完全列を用いた議論をする.

第 3 章では, Abel 圏の短完全列の性質に着目して一般化された完全圏を扱う.

第 4 章では, Abel 圏における写像錐とシフト関手に着目して一般化された三角圏を扱う. 第 4.1 節で三角圏の定義から基本性質をいろいろ証明する. 第 4.2 節では三角圏の関手を定義して, 随伴で保たれることをみる. (定理 4.2.10) 第 4.3 節で複体のホモトピー圏が三角圏となることをみる. (定理 4.3.3) 第 4.4 節で三角圏の局所化がまた三角圏となることをみる. (定理 4.4.2)

付録 A では, 圏の局所化についてまとめている. 加法圏, Abel 圏, 三角圏の局所化に必要であり, 導来圏へとつながっていく.

第 2.3 節, 第 3 章, 付録 A は未完成.

目次

1	加法圏	2
1.1	加法圏	2
1.2	複体のなす圏	3
1.3	ホモトピー圏	7
2	Abel 圏	11
2.1	核と余核	11
2.2	Abel 圏	16
2.3	完全列	20
2.4	コホモロジー	21
3	完全圏	27
4	三角圏	28
4.1	三角圏	28
4.2	三角関手	37
4.3	複体のホモトピー圏の三角構造	39
4.4	三角圏の局所化	44
4.5	t -構造	46
5	導来圏	47
5.1	Abel 圏の導来圏	47
6	参考文献について	49
付録 A	圏の局所化	50
A.1	圏の局所化	50

1 加法圏

1.1 加法圏

$\text{Mod} R$ の Hom 集合は Abel 群の構造をもつ. この構造を一般化した圏が (前) 加法圏である. 前加法圏で成立する命題もあるが, 基本的に加法圏において議論する.

定義 1.1.1 (前加法圏と加法圏). 圏 \mathcal{A} が次の条件を満たすとき, 加法圏 (additive category) であるという.

(AD1) 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ は Abel 群である.

(AD2) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ に対して, 合成

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

は双線形写像である.

(AD3) 零対象 $0 \in \mathcal{A}$ が存在する.

(AD4) 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, 余直積 $X \oplus Y \in \mathcal{A}$ が存在する.

(AD1) と (AD2) のみを満たすとき, 前加法圏 (preaddictive category) であるという.

例 1.1.2. \mathbf{Ab} や $\text{Mod} R$ は (前) 加法圏である.

注意 1.1.3. \mathcal{A} が (前) 加法圏であるとき, \mathcal{A}^{op} も (前) 加法圏となる.

(前) 加法圏の関手を定義する. この関手には加法を保つことを要請することが自然である.

定義 1.1.4 (加法関手). $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を加法圏とする. 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ が次の条件を満たすとき, 加法関手 (additive functor) であるという.

- 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, F が定める写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(FX, FY)$$

は Abel 群の準同型である.

この節の以降では, \mathcal{A} は加法圏であるとする.

定義 1.1.5 (加法部分圏). $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ を部分圏とする. \mathcal{A}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{A} の加法部分圏 (additive subcategory) であるという.

- \mathcal{A}' は加法圏であって, 包含関手 $i : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ は加法関手である.

定理 1.1.6. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, hom 関手

$$\text{hom}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

は加法関手である.

Proof. (AD1) より任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ は Abel 群である. (AD2) より任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して,

$$\text{hom}(C, f) : \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)$$

は Abel 群の準同型である. また, (AD2) より任意の $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して,

$$(f \circ -) + (g \circ -) = (f + g) \circ -$$

よって, hom 関手は加法関手である. □

双対的に次の命題が成立する.

系 1.1.7. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, hom 関手

$$\text{hom}(-, A) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

は反変加法関手である.

定義 1.1.8 (直和因子で閉じる). \mathcal{A} を加法圏, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. \mathcal{A}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{A} において直和因子で閉じている (closed under direct summands) という.

- 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, $X \oplus Y \in \mathcal{A}'$ のとき, $X, Y \in \mathcal{A}'$ となる.

定義 1.1.9 (右直交部分圏と左直交部分圏).

1.2 複体のなす圏

加群圏における複体の定義を一般の加法圏において定義する. i は整数として, 添え字の $\{-\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は混乱の生じない限り省略する. この節では \mathcal{A} は加法圏であるとする.

定義 1.2.1 (複体). \mathcal{A} の対象と射の列 $X = \{X^i, d^i\}$

$$X = \cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が任意の i に対して,

$$d^i \circ d^{i-1} = 0$$

を満たすとき, X を \mathcal{A} における複体 (complex) という. 添え字 i を次数 (degree), 射 d^i を微分射 (difference morphism) という. 複体 X の微分射であることを明示するときは d_X^i とあらわす.

定義 1.2.2 (複体の射). $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\}$ を \mathcal{A} における複体とする. X から Y への複体の射 (morphism of complies) とは, \mathcal{A} における射の列

$$f = \{f^i \mid f^i : X^i \rightarrow Y^i\}$$

であって, 任意の i に対して, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

複体と複体の射は圏をなす.

定義 1.2.3 (複体の圏). \mathcal{A} の複体と複体の射は圏をなす. この圏を複体の圏といい, $C(\mathcal{A})$ とあらわす.

補題 1.2.4. \mathcal{A} から $C(\mathcal{A})$ への忠実充満な加法関手

$$i : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$$

が存在する.

Proof. $X \in \mathcal{A}$ を複体

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

とみなせばよい. □

定理 1.2.5. \mathcal{A} が加法圏であるとき, $C(\mathcal{A})$ も加法圏となる. ^{*1}

Proof. 加法圏の公理 (AD1) ~ (AD4) が成立することを示す.

(AD1) : 複体の射 $f, g \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, f と g の和を次数ごとの射の和

$$f + g := \{f^i + g^i\}$$

とする. 零射を

$$0 := \{0 \mid 0 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^i)\}$$

とすると, $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ は Abel 群の構造をもつ.

(AD2) : (AD1) での定め方と \mathcal{A} の加法性より従う.

(AD3) : 0 を \mathcal{A} における零対象とすると, 射の列

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots$$

^{*1} 定理 2.2.8 で $C(\mathcal{A})$ は Abel 圏となることが示される.

は $C(\mathcal{A})$ における零対象である.

(AD4) : 複体 $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\} \in C(\mathcal{A})$ に対して, 余直積 $X \oplus Y$ を次数ごとの余直積

$$X \oplus Y := \{X^i \oplus Y^i, d_X^i \oplus d_Y^i\}$$

とすればよい. ここで,

$$d_X^i \oplus d_Y^i := \begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$$

である. □

定義 1.2.6 (部分複体). $C(\mathcal{A})$ の部分対象を部分複体 (subcomplex) という.

定義 1.2.7 (有界). 複体 $X \in C(\mathcal{A})$ が次の条件をそれぞれ満たす部分複体を定義する.

1. $i \gg 0$ に対して $X^i = 0$ となるとき, X は上に有界 (upper-bounded) であるという. 上に有界な複体のなす充満部分圏を $C^-(\mathcal{A})$ とあらわす.
2. $i \ll 0$ に対して $X^i = 0$ となるとき, X は下に有界 (lower-bounded) であるという. 下に有界な複体のなす充満部分圏を $C^+(\mathcal{A})$ とあらわす.
3. X が上に有界かつ下に有界であるとき, X は有界 (bounded) であるという. 有界な複体のなす充満部分圏を $C^b(\mathcal{A})$ とあらわす.

補題 1.2.8. $C^-(\mathcal{A}), C^+(\mathcal{A}), C^b(\mathcal{A})$ はいずれも $C(\mathcal{A})$ の加法充満部分圏である.

記法 1.2.9. $C(\mathcal{A}), C^-(\mathcal{A}), C^+(\mathcal{A}), C^b(\mathcal{A})$ に共通する性質を述べるとき, $C^*(\mathcal{A})$ とあらわす. ^{*2} それぞれ, $*$ = $\emptyset, -, +, b$ である.

定理 1.2.10. $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を加法圏, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ を加法関手とする. このとき, 次のように定義すると, 加法関手 $CF : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A}')$ ^{*3} が得られる.

- 複体 $X = \{X^i, d^i\} \in C(\mathcal{A})$ に対して,

$$CF(X) := \{F(X^i), F(d^i)\}$$

- 複体の射 $f = \{f^i\} \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して,

$$CF(f) := \{F(f^i)\}$$

定理 1.2.11 (シフト). $C(\mathcal{A})$ 上の加法的自己圏同値を次のように定める.

1. 複体 $X = \{X^i, d_X^i\} \in C(\mathcal{A})$ に対して,

$$\begin{aligned} X[n]^i &:= X^{i+n} \\ d_{X[n]}^i &:= (-1)^n d_X^{i+n} : X[n] \rightarrow X[n+1] \end{aligned}$$

^{*2} 今のところ, この表記は本稿では使用していない. やる気が起きたら書きなおす.

^{*3} 複体の圏上に誘導される関手 CF も F とあらわすことがおおい.

とすると, $X[n]$ は複体となる. この複体を X を n シフト (n -shift) した複体という.

$$\dots \longrightarrow X^{i-1+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i-1+n}} X^{i+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i+n}} X^{i+1+n} \longrightarrow \dots$$

2. 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して,

$$f[n]^i := f^{i+n} : X[n]^i \rightarrow Y[n]^i$$

とすると, $f[n]$ は複体の射となる.

3. (1) と (2) は加法的自己圏同値

$$[n] : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$$

を定める.

Proof. (1) : 複体と複体の射の定義を満たすことをみる. X が複体であることより,

$$\begin{aligned} d_{X[n]}^i \circ d_{X[n]}^{i-1} &= (-1)^n d_X^{i+n} \circ (-1)^n d_X^{i-1+n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) : $f : X \rightarrow Y$ が複体の射であることより,

$$\begin{aligned} f[n]^{i+1} \circ d_{X[n]}^i &= f^{i+1+n} \circ (-1)^n d_X^{i+n} \\ &= (-1)^n d_Y^{i+n} \circ f^{i+n} \\ &= d_{Y[n]}^i \circ f[n]^i \end{aligned}$$

(3) : $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ の加法性と

$$[n] \circ [-n] = \text{Id}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}$$

を満たすことより, 関手 $[n]$ は加法的自己圏同値である. □

定義 1.2.12 (写像錐). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{Cone } f^i &:= X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } f}^i &:= \begin{pmatrix} d_X^{i+1} & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, $\text{Cone } f$ は複体となる. この複体を f の写像錐 (mapping cone) という.

Proof. 複体の定義を満たすことをみる. X と Y が複体であることと, 複体の射の可換性より,

$$\begin{aligned} d_{\text{Cone } f}^i \circ d_{\text{Cone } f}^{i-1} &= \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d_Y^i & 0 \\ f^i & d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_X^{i+1} \circ d_X^i & 0 \\ d_Y^i \circ f^i - f^{i+1} \circ d_X^i & d_Y^i \circ d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

定理 1.2.13. 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ とその写像錐 $\text{Cone } f$ に対して, 次の 3 つが成立する.

1. 自然な入射

$$g^i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow X^{i+1} \oplus Y^i$$

は複体の射 $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ を定める.

2. 自然な射影

$$h^i := (1 \ 0) : X^{i+1} \oplus Y^i \rightarrow X^{i+1}$$

は複体の射 $h : \text{Cone } f \rightarrow X[1]$ を定める.

3. 射の列

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1] \longrightarrow 0$$

の任意の次数 i に対して,

$$0 \longrightarrow Y^i \xrightarrow{g^i} \text{Cone } f^i \xrightarrow{h^i} X[1]^i \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列である.

Proof. (1) : 複体の射の定義を満たすことをみる.

$$\begin{aligned} g^{i+1} \circ d_Y^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ d_Y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^i \end{pmatrix} \\ d_{\text{Cone } f}^i \circ g^i &= \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) : (1) と同様に示すことができる.

(3) : g はモノ射, h はエビ射であることと $\text{Cone } f = X^{i+1} \oplus Y^i$ より従う. \square

定義 1.2.14 (標準三角). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 定理 1.2.13 で定義される射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

を標準三角 (canonical triangle) という. ^{*4}

1.3 ホモトピー圏

加群圏におけるホモトピーを一般の加法圏において定義する.

^{*4} 標準「三角」と呼ばれる理由は記法 4.1.2 を参照.

定義 1.3.1 (ホモトピー). 複体 $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\} \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ と複体の射 $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, f から g へのホモトピー (homotopy) とは, 射の列

$$\varphi := \{\varphi^i : X^i \rightarrow Y^{i-1}\}$$

であって, 任意の i に対して,

$$f^i - g^i = d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i$$

を満たすものである. f から g へのホモトピーが存在するとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるといい, $f \sim g$ とあらわす. ホモトピーを明示するときには $f \underset{\varphi}{\sim} g$ とあらわす. 特に, f と 0 がホモトピックであるとき, f はヌルホモトピック (null-homotopic) であるという.

注意 1.3.2. ホモトピーは次のような図式であらわすことができる.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \downarrow g^i & \swarrow \varphi^{i+1} & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \longrightarrow & Y^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

この図式において, 各三角形の可換性は課されていないことに注意.

ヌルホモトピックな射の集まりは加法圏 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアルとなる.

定理 1.3.3. 任意の複体 $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して,

$$\mathcal{N} := \{f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y) \mid f \sim 0\}$$

とすると, \mathcal{N} は $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアルである.

Proof. まずは \mathcal{N} が $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ の部分加群であることを示す. これは $0 \in \mathcal{N}$ であり, $f \sim 0, f' \sim 0$ のとき, $f - f' \sim 0$ であることより従う. 次に, $f \in \mathcal{N}$ に対して, 任意の複体の射の列

$$W \xrightarrow{e} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

において, $g \circ f \circ e \sim 0$ を満たすことを示す. 射 $\psi : g \circ f \circ e \rightarrow 0$ を

$$\psi^i := g^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i : W^i \rightarrow Z^{i-1}$$

とする.

$$\begin{array}{ccccc} & & W^i & \xrightarrow{d_W^i} & W^{i+1} \\ & & \downarrow e^i & & \downarrow e^{i+1} \\ X^{i-1} & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ \downarrow & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \swarrow \varphi^{i+1} & \downarrow \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \longrightarrow & Y^{i+1} \\ \downarrow g^{i-1} & & \downarrow g^i & & \\ Z^{i-1} & \xrightarrow{d_Z^{i-1}} & Z^i & & \end{array}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
g^i \circ f^i \circ e^i - 0 &= g^i \circ (d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i) \circ e^i \\
&= g^i \circ d_Y^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i + g^i \circ \varphi^{i+1} \circ d_X^i \circ e^i \\
&= d_Z^{i-1} \circ g^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i + g^i \circ \varphi^{i+1} \circ e^{i+1} \circ d_W^i \\
&= d_Z^{i-1} \psi^i + \psi^{i+1} \circ d_W^i
\end{aligned}$$

よって, ψ は $g \circ f \circ e$ から 0 へのホモトピーとなる. \square

系 1.3.4. 任意の $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して, \sim は同値関係となる. この同値類をホモトピー類 (homotopy class) という.

定義 1.3.5 (ホモトピー圏). 定理 1.3.3 のイデアル \mathcal{N} による $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアル剰余 $\mathbf{C}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$ を \mathcal{A} のホモトピー圏 (homotopy category) といい, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ とあらわす.

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) := \mathbf{C}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$$

ホモトピー圏は次のように定義することもできる.

定義 1.3.6 (ホモトピー圏). \mathcal{A} のホモトピー圏 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ を次のように構成する.

- 対象は

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{A})) := \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(\mathcal{A}))$$

- 任意の $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{A}))$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y) / \sim$$

定義 1.3.7 (ホモトピー同値). $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ がホモトピー圏 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ において同型であるとき, X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalence) であるといい, $X \simeq Y$ とあらわす. すなわち, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(Y, X)$ と

$$\begin{aligned}
g \circ f &\underset{\varphi}{\sim} \mathrm{id}_X \\
f \circ g &\underset{\psi}{\sim} \mathrm{id}_Y
\end{aligned}$$

となるようなホモトピー φ, ψ が存在するときである.

定義 1.3.8 (有界なホモトピー圏). $\mathbf{C}^-(\mathcal{A}), \mathbf{C}^+(\mathcal{A}), \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ からそれぞれ, 上に有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, 下に有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$, 有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ が誘導される.

補題 1.3.9. $\mathbf{K}^-(\mathcal{A}), \mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ はいずれも $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ の加法充満部分圏である.

記法 1.3.10. $\mathbf{K}(\mathcal{A}), \mathbf{K}^-(\mathcal{A}), \mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ に共通する性質を述べるとき, $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ とあらわす. *⁵ それぞれ, $*$ = $\emptyset, -, +, b$ である.

*⁵ 今のところ, この表記は本稿では使用していない. やる気が起きたら書きなおす.

定理 1.3.11. $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を加法圏, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ を加法関手とする. 定理 1.2.10 で得られた加法関手 $CF : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A}')$ から加法関手 $KF : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}')$ が誘導されて, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{CF} & \mathbf{C}(\mathcal{A}') \\ p_A \downarrow & & \downarrow p_B \\ \mathbf{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{KF} & \mathbf{K}(\mathcal{A}') \end{array}$$

ここで, p_A, p_B は剰余関手である.

Proof. ホモトピー φ によりヌルホモトピックとなる $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, $(p \circ CF)(f) = 0$ を満たすことをみる. ホモトピーの定義より,

$$f^i = d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^i \circ d_X^i$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \downarrow 0 & \swarrow \varphi^{i+1} \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & & \end{array}$$

このとき,

$$F(f) = F(d_Y^{i-1}) \circ F(\varphi^i) + F(\varphi^i) \circ F(d_X^i)$$

$F(\varphi)$ により $CF(f)$ はヌルホモトピックである. よって,

$$(p \circ CF)(f) = 0$$

□

$\mathbf{C}(\mathcal{A})$ 上の n シフトさせる関手から, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 上の n シフトさせる関手が誘導される.

定義 1.3.12 (シフト関手). n シフト関手 $[n] : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$ はホモトピーを保つので, ホモトピー圏上の関手

$$[n] : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$$

が定まる. この関手を n シフト関手 (n -shift functor) という. 1 シフト関手を単にシフト関手 (shift functor) ^{*6} という.

注意 1.3.13. n シフト関手は $[n] \circ [-n] = \text{Id}$ を満たすので自己圏同値である.

^{*6} 懸垂 (suspension) や推移関手 (translation functor) ともいう.

2 Abel 圏

2.1 核と余核

圏論において, 射 f の核 $\text{Ker } f$ や像 $\text{Im } f$ などは次のような普遍性を用いて定義される. この節では, \mathcal{A} は加法圏であるとする.

定義 2.1.1 (核). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, f と 0 の equalizer を f の核 (kernel) といい, $\text{ker } f$ とあらわす. すなわち, f の核とは次の普遍性で定義される $\text{Ker } f \in \mathcal{A}$ と $\text{ker } f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Ker } f, X)$ の組 $(\text{Ker } f, \text{ker } f)$ である.

- $f \circ \text{ker } f = 0$
- $K \in \mathcal{A}$ と $g \in \text{Hom}(K, X)$ が $f \circ g = 0$ を満たすとき, ある射 $h : K \rightarrow \text{Ker } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{Ker } f & & & \\
 & \uparrow \text{ker } f & \searrow 0 & & \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \uparrow h & \nearrow g & & \\
 K & & & \nearrow 0 &
 \end{array}$$

余核は核の双対として定義される.

定義 2.1.2 (余核). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, f と 0 の coequalizer を f の余核 (cokernel) といい, $\text{cok } f$ とあらわす.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & C & \\
 & \searrow 0 & \nearrow g & \uparrow & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & & \\
 & \searrow 0 & \searrow \text{cok } f & \downarrow h & \\
 & & & \text{Cok } f &
 \end{array}$$

注意 2.1.3. 一般の加法圏において, 射の核や余核が存在するとは限らない. 以下の命題では, いちいち「核や余核が存在するとき」という断りをいれない.

補題 2.1.4. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. 任意の $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ に対して, $f \circ e = 0$ のとき, $e = 0$ である.

Proof. \Rightarrow : $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ が $f \circ e = 0$ に対して, 仮定より

$$\begin{aligned}
 f \circ e &= 0 \\
 f \circ 0 &= 0
 \end{aligned}$$

f はモノ射なので,

$$e = 0$$

\Leftarrow : $e_1, e_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ が $f \circ e_1 = f \circ e_2$ を満たすとする. このとき, $e := e_1 - e_2$ とすると,

$$\begin{aligned} f \circ e &= f \circ (e_1 - e_2) \\ &= f \circ e_1 - f \circ e_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

仮定より $e = 0$, つまり $e_1 = e_2$ となる. よって, f はモノ射である. \square

補題 2.1.5. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, $\ker f$ はモノ射であり, $\text{cok } f$ はエピ射である.

Proof. equalizer がモノ射であることと, coequalizer がエピ射であることから従う. \square

補題 2.1.6. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. $\text{Ker } f = 0$ である.

Proof. \Leftarrow : 補題 2.1.4 より明らか.

\Rightarrow : 零対象と零射が核の普遍性を満たすことを示せばよい. これは補題 2.1.4 より従い, 普遍性の射の一意性は零対象の定義より従う. \square

例 2.1.7. $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核は次のようにあらわされる.

$$\begin{aligned} \text{Ker } 0 &= (X, \text{id}_X) \\ \text{Cok } 0 &= (Y, \text{id}_Y) \end{aligned}$$

核と余核を用いて像と余像が定義される.

定義 2.1.8 (像). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の余核 $\text{cok } f$ とその核 $\text{Ker}(\text{cok } f)$ が存在するとき, f の像 (image) を

$$\text{Im } f := \text{Ker}(\text{cok } f)$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Im } f & & & \\ & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

余像は像の双対として定義される.

定義 2.1.9 (余像). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核 $\text{Ker } f$ とその核 $\text{Cok}(\text{Ker } f)$ が存在するとき, f の余像 (coimage) を

$$\text{Coim } f := \text{Cok}(\text{ker } f)$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & & \searrow & \\ & & & \text{cok}(\text{ker } f) & \\ & & & & \text{Coim } f \end{array}$$

加法圏において核と余核が存在しているとき, 任意の射を像と余像によって分解することができる.

補題 2.1.10. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つが成立する.

1. f の像が存在するとき, ある射 $h: X \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

2. f の余像が存在するとき, ある射 $h': \text{Coim } f \rightarrow Y$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \searrow \text{cok}(\text{ker } f) & & \nearrow h' \\ & & \text{Coim } f & & \end{array}$$

Proof. (1) : $\text{cok } f \circ f = 0$ なので, 核の普遍性より, ある射 $h: X \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

(2) : (1) の双対である. □

定理 2.1.11. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の像と余像が存在するとき, ある射 $\nu: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \\ & & \searrow \text{cok}(\text{ker } f) & & \nearrow h' \\ & & \text{Coim } f & & \end{array}$$

Proof. 次の等式が成立して,

$$\begin{aligned} \text{cok } f \circ h' \circ \text{cok}(\text{ker } f) &= \text{cok } f \circ f \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\text{cok}(\ker f)$ はエピ射なので,

$$\text{cok } f \circ h' = 0$$

核の普遍性より, ある射 $\nu : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Im } f & & & \\ & \uparrow \nu & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ & & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \\ \text{Coim } f & \nearrow h' & & \searrow 0 & \end{array}$$

この射 ν が定理 2.1.11 の左の三角を可換にすることをみる.

$$\begin{aligned} \text{ker}(\text{cok } f) \circ \nu \circ \text{cok}(\ker f) &= h' \circ \text{cok}(\ker f) \\ &= f \\ &= \text{ker}(\text{cok } f) \circ h \end{aligned}$$

$\text{ker}(\text{cok } f)$ はモノ射なので,

$$\nu \circ \text{cok}(\ker f) = e$$

よって, 求める図式の可換性が得られる. □

注意 2.1.12. 定理 2.1.11 で定義された射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ は一般には同型射ではない. この射が同型射であるとするのが Abel 圏の公理の 1 つにある.

定理 2.1.13. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核が存在するとき, 次の 2 つは同値である.

1. f は $\text{ker } f$ の余核である.
2. f がある射 $e : W \rightarrow X$ の余核である.

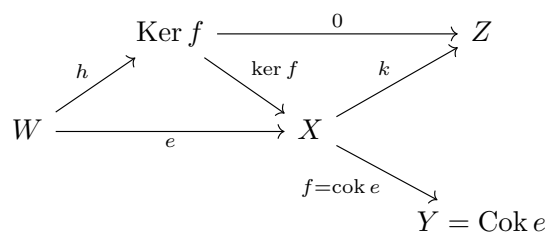
Proof. \Rightarrow : 明らか.

\Leftarrow : f が $e : W \rightarrow X$ の余核であるとする. 核の普遍性より, ある射 $W \rightarrow \text{Ker } f$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Ker } f & & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{Ker } f & & \\ W & \xrightarrow{e} & X & \xrightarrow{f=\text{cok } e} & Y = \text{Cok } e \end{array}$$

このとき, f が $\text{ker } f$ の余核であることを示す. ある射 $k : X \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換に

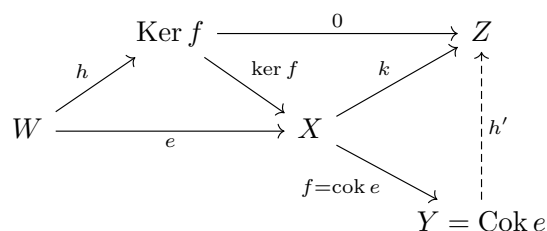
する.



このとき,

$$\begin{aligned}
 k \circ e &= k \circ \text{ker } f \circ h \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

f は e の余核なので, 余核の普遍性より, ある射 $h' : Y \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.



普遍性より, この射 h' は一意である. □

双対的に次の命題が成立する.

系 2.1.14. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核が存在するとき, 次の 2 つは同値である.

1. f は $\text{cok } f$ の核である.
2. f がある射 $g : Y \rightarrow Z$ の核である.

系 2.1.15. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核とその余核が存在するとき, 次の 2 つが成立する.

$$\begin{aligned}
 \text{ker}(\text{cok}(\text{ker } f)) &= \text{ker } f \\
 \text{cok}(\text{ker}(\text{cok } f)) &= \text{cok } f
 \end{aligned}$$

Proof. 定理 2.1.13 において, $\text{cok } f$ は f の余核なので, $f \mapsto \text{cok } f$ として,

$$\text{ker}(\text{cok}(\text{ker } f)) = \text{ker } f$$

もう一方も系 2.1.14 より従う. □

次の定理は定義 2.4.9 などで有用である.

定理 2.1.16. \mathcal{A} における可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

において, x_2, x_3 の核が存在するとする. このとき, ある射 $h_f : \text{Ker } X_2 \rightarrow \text{Ker } Y_2$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & x_1 & & & & \\
 X_1 & \xrightarrow{\quad} & \text{Ker } x_2 & \xrightarrow{\quad} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow h_f & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 Y_1 & \xrightarrow{\quad} & \text{Ker } y_2 & \xrightarrow{\quad} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \\
 & & y_1 & & & &
 \end{array}$$

Proof. h_f の存在と一意性は核の普遍性より明らか.

$$\begin{aligned}
 \ker y_2 \circ h_f \circ h_{x_1} &= f_2 \circ \ker x_2 \circ h_{x_1} \\
 &= f_2 \circ x_1 \\
 &= y_1 \circ f_1 \\
 &= \ker y_2 \circ h_{y_1} \circ f_1
 \end{aligned}$$

$\ker y_2$ はモノ射なので,

$$h_f \circ h_{x_1} = h_{y_1} \circ f_1$$

□

2.2 Abel 圏

定義 2.2.1 (Abel 圏). 加法圏 \mathcal{A} が次の条件を満たすとき, Abel 圏 (Abelian category) であるという.

(AB1) 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, 核と余核が存在する.

(AB2) 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, 定理 2.1.11 で定義された射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ は同型射である.

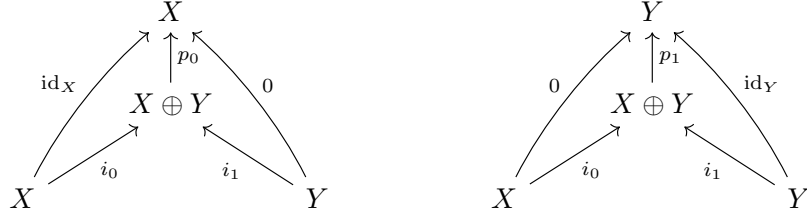
(AB1) のみを満たすとき, 前 Abel 圏 (preabelian category) であるという.

例 2.2.2. \mathbf{Ab} や $\mathbf{Mod} R$ は Abel 圏である.

定理 2.2.3. \mathcal{A} が Abel 圏であるとき, \mathcal{A}^{op} も Abel 圏である.

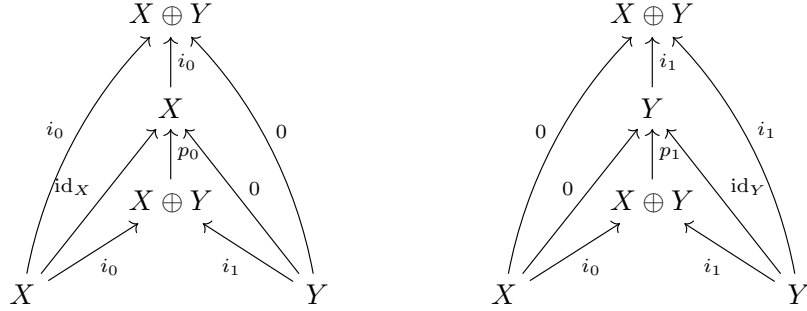
この節の以降では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

補題 2.2.4. $X, Y \in \mathcal{A}$ の余直積 $X \oplus Y$ に対して, 射 p_0, p_1 を次のように定義すると, $(X \oplus Y, p_0, p_1)$ は直積となる.



Proof. p_0, p_1 の定義より,

$$\begin{aligned} ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_0 &= i_0 \\ ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_1 &= i_1 \end{aligned}$$

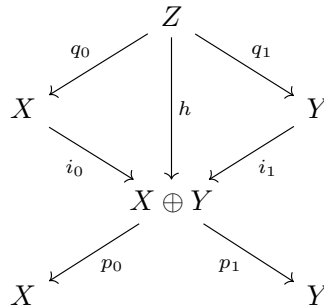


余直積の普遍性より,

$$i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1 = \text{id}_{X \oplus Y}$$

直積の普遍性を満たすことをみる. ある対象 Z と射 $q_0 : Z \rightarrow X, q_1 : Z \rightarrow Y$ を考える. $h : Z \rightarrow X \oplus Y$ を

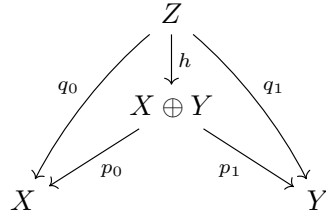
$$h := i_0 \circ q_0 + i_1 \circ q_1$$



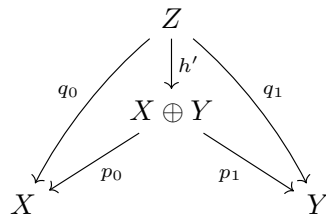
このとき,

$$\begin{aligned} p_0 \circ h &= p_0 \circ i_0 \circ q_0 + p_0 \circ i_1 \circ q_1 = q_0 \\ p_1 \circ h &= p_1 \circ i_0 \circ q_0 + p_1 \circ i_1 \circ q_1 = q_1 \end{aligned}$$

つまり, 次の図式は可換である.



射 h の一意性を示す. $h' : Z \rightarrow X \oplus Y$ が次の図式を可換にするとする.



$i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1 = \text{id}_{X \oplus Y}$ より,

$$\begin{aligned} h' &= (i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1) \circ h' \\ &= i_0 \circ q_0 + i_1 \circ q_1 \\ &= h \end{aligned}$$

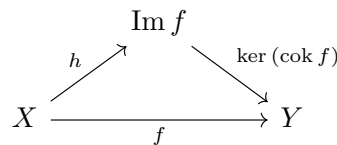
□

定理 2.2.5. \mathcal{A} は有限完備かつ有限余完備である.

Proof. (AD3) と補題 2.2.4 より有限直積は存在する. (AD3) と (AD4) より, 有限余直積は存在する. あとは任意の射 $f, g : X \rightarrow Y$ に対して, f と g の equalizer と coequalizer が存在することを示せばよい. これは $\ker(f - g)$ が f と g の equalizer, $\text{cok}(f - g)$ が f と g の coequalizer であることより従う. □

補題 2.2.6. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 3 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. $\text{Ker } f = 0$ である.
3. f の像における可換図式



において, h は同型射である.

Proof. (1) \Leftrightarrow (2) : 補題 2.1.6 より明らか.

(2) \Rightarrow (3) : $\text{Ker } f = 0$ のとき, 例 2.1.7 より,

$$\text{Cok}(\text{ker } f) = \text{Cok } 0 = \text{id}_X$$

次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im } f & \\ h \nearrow & \uparrow \nu & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) \\ X & & Y \\ \text{id}_X \searrow & & \nearrow f \\ & \text{Coim } f = X & \end{array}$$

において, (AB2) より ν は同型射であるので, $h : X \rightarrow \text{Im } f$ も同型射である.

(3) \Rightarrow (2) :

□

定理 2.2.7. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次のつは同値である.

1. f は同型射である.
2. f はモノ射かつエビ射である.

Proof. \Rightarrow : 明らか.

\Leftarrow : 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im } f & \\ h \nearrow & \uparrow \nu & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) \\ X & & Y \\ \text{cok}(\text{ker } f) \searrow & & \nearrow h' \\ & \text{Coim } f & \end{array}$$

において, (AB2) より ν は同型射である. 例 2.1.7 と補題 2.2.6 より, h と h' は同型射であり, $\text{cok}(\text{ker } f) = \text{id}_X, \text{ker}(\text{cok } f) = \text{id}_Y$ である. よって, $f = h' \circ \nu^{-1} \circ h$ も同型射である. □

定理 2.2.8. \mathcal{A} が Abel 圏であるとき, $\text{C}(\mathcal{A})$ は Abel 圏となる.

Proof. 定理 1.2.5 より, 加法圏であることは示したので, (AB1) と (AB2) を満たすことを示す. □

一般に次の命題が成立する.

定理 2.2.9.

例 2.2.10. \mathcal{A} が Abel 圏であっても, $\text{K}(\mathcal{A})$ が Abel 圏であるとは限らない.

Proof. $\mathcal{A} = \text{Mod}\mathbb{Z}$ とする. 次の複体 X, Y の間の射 $f: X \rightarrow Y$ を考える.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X = & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ f \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathbb{Z}} & & \downarrow & & \\ Y = & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

各 f^i の核をとることで得られる複体は 0 複体である.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

一方, f は次のようなホモトピーによりヌルホモトピックである.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X = & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \swarrow 0 & & \swarrow \text{id}_{\mathbb{Z}} & & \swarrow 0 & & \\ Y = & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

0 の核は例 2.1.7 より X である. 0 複体と X はホモトピックでないので, $K(\mathcal{A})$ は Abel 圏でない. \square

2.3 完全列

この節では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

定義 2.3.1 (完全列). \mathcal{A} における射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (*)$$

が $\text{Im } f = \text{Ker } g$ を満たすとき, Y において完全 (exact) であるという.

定義 2.3.2 (左完全列). \mathcal{A} における射の列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が X, Y において完全であるとき, 左完全列 (left exact sequence) であるという.

定義 2.3.3 (右完全列). \mathcal{A} における射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

が Y, Z において完全であるとき, 右完全列 (right exact sequence) であるという.

定義 2.3.4 (短完全列). \mathcal{A} における射の列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

が左完全かつ右完全であるとき, 短完全列 (short exact sequence) であるという.

定義 2.3.5 (長完全列).

補題 2.3.6. 射の列 $(*)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. $\text{Im } f = \text{Ker } g$ が成立する.
2. $\text{Coim } g = \text{Cok } f$ が成立する.

Proof. \Rightarrow : 像と余像の定義と系 2.1.15 より,

$$\begin{aligned}\text{Im } f = \text{Ker } g &\Leftrightarrow \text{Ker } (\text{cok } f) = \text{Ker } g \\ &\Rightarrow \text{Cok } (\text{ker } g) = \text{Cok } (\text{ker } (\text{cok } f)) = \text{Cok } f \\ &\Leftrightarrow \text{Coim } g = \text{Cok } f\end{aligned}$$

\Leftarrow : 同様に示すことができる. □

定理 2.3.7. 射の列 $(*)$ が Y において完全であるとき,

$$g \circ f = 0$$

Proof. $f : X \rightarrow Y$ に対して, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & & \searrow \text{ker } (\text{cok } f) & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Y における完全性と定理 2.1.13 より,

$$\text{ker } g = \text{ker } (\text{cok } f)$$

よって,

$$\begin{aligned}g \circ f &= g \circ \text{ker } (\text{cok } f) \circ h \\ &= 0\end{aligned}$$

□

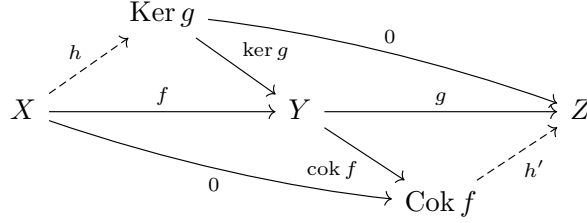
2.4 コホモロジー

一般の Abel 圏でコホモロジーを次のように定義する. この節では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

\mathcal{A} の射の列

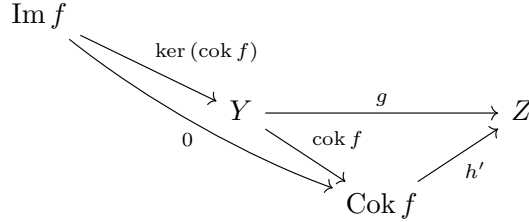
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が $g \circ f = 0$ を満たすとする. このとき, 核と余核の普遍性より次の可換図式が得られる.

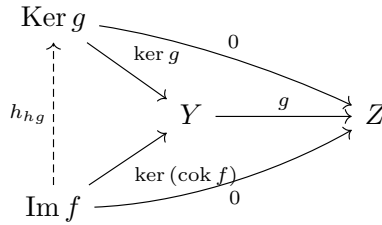


f の像を考えると,

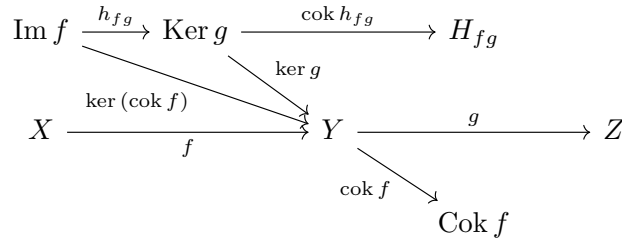
$$\begin{aligned} g \circ \text{Im } f &= h' \circ \text{cok } f \circ \ker(\text{cok } f) \\ &= h' \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



よって, $\ker g$ の普遍性より射 $h_{fg} : \text{Im } f \rightarrow \text{Ker } g$ が存在して, 次の図式を可換にする.



このとき, $\text{cok}(h_{fg})$ の codomain とすると, これがコホモロジーに相当する.



核と余核の普遍性より, このコホモロジーは同型を除いて一意に定まる.

定義 2.4.1 (コホモロジー). 複体 $X = \{X^i, d^i\} \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して, X の i 次コホモロジー (i -th cohomology) $H^i(X)$ を

$$H^i(X) := \text{cok } h$$

と定義する. ただし, $h : \text{Im } d^{i-1} \rightarrow \text{Ker } d^i$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Im } d^{i-1} & \xrightarrow{h} & \text{Ker } d^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(X) \\
 & \searrow & \downarrow \text{ker } d^i & & \\
 X^{i-1} & \xrightarrow[\text{ker } (\text{cok } d^{i-1})]{d^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d^i} & X^{i+1} \\
 & & \searrow \text{cok } d^{i-1} & & \\
 & & & & \text{Cok } d^{i-1}
 \end{array}$$

コホモロジーの定義にあるように, X^{i-1} と X^i と X^{i+1} のみが i 次コホモロジーを考えるうえで必要である. よって, 以降では $g \circ f = 0$ を満たす \mathcal{A} の射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (1)$$

について命題を述べる.

定理 2.4.2. (1) が完全であることと $\text{ker } g \simeq \text{Im } f$ は同値である.

Proof.

□

定理 2.4.3. 複体の i 次コホモロジー (をとる操作) は加法関手

$$H^i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

を定める.

Proof.

□

定理 2.4.3 より, 次の命題が得られる.

系 2.4.4. 任意の i に対して, 加法関手 $H^i : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ^{*7} が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^i} & \mathcal{A} \\
 p \downarrow & \nearrow H^i & \\
 \mathbf{K}(\mathcal{A}) & &
 \end{array}$$

ここで, $p : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$ は剰余関手である. 特に, H^0 を $H : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ とあらわす.

Proof. ホモトピー φ によりヌルホモトピックとなる $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, $H^i(f) = 0$ を満たすことをみる. ホモトピーの定義より,

$$f^i = d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^i \circ d_X^i$$

^{*7} $H^i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ と同じ記号であらわしている.

$$\begin{array}{ccccc}
& & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\
& \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \searrow \varphi^{i+1} & \\
Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & &
\end{array}$$

このとき, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Ker } d_X^i & & & & \\
\searrow \text{ker } d_X^i & & & & \\
& X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \\
& \swarrow \varphi^i & \downarrow f & \searrow \varphi^{i+1} & \\
Y^{i-1} & \xrightarrow{\quad} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \\
\downarrow h & \nearrow \text{ker } d_Y^i & & & \\
\text{Ker } d_Y^i & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f^i \circ \text{ker } d_X^i &= (d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^i \circ d_X^i) \circ \text{ker } d_X^i \\
&= d_Y^{i-1} \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i \\
&= \text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i
\end{aligned}$$

より, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker } d_X^i & \xrightarrow{\text{ker } d_X^i} & X^i \\
\text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \downarrow & & \downarrow f^i \\
\text{Ker } d_Y^i & \xrightarrow{\text{ker } d_Y^i} & Y^i
\end{array}$$

ここで,

$$\text{cok } h \circ (h \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i) = 0$$

より, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker } d_X^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(X) \\
\text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \downarrow & & \downarrow H^i(f) \\
\text{Ker } d_Y^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(Y)
\end{array}$$

よって,

$$H^i(f) = 0$$

□

定義 2.4.5 (非輪状). \mathcal{A} における複体 X が長完全列であるとき, つまり, 任意の i に対して,

$$H^i(X) = 0$$

が成立するとき, 非輪状 (acyclic) であるという.

定義 2.4.6 (擬同型). $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, コホモロジーに誘導される射

$$H^i(f) : H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$$

が任意の i に対して同型射となるとき, 擬同型 (quasi-isomorphism) であるという.

系 2.4.4 より, $H^i(f)$ は f のホモトピー類のみで定まる. よって, 擬同型はホモトピー圏における射に対して定義することができる.

定義 2.4.7 (擬同型). $f \in \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, コホモロジーに誘導される射

$$H^i(f) : H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$$

が任意の i に対して同型射となるとき, 擬同型 (quasi-isomorphism) であるという.

系 2.4.8. $f \in \text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, Y)$ により, X と Y がホモトピー同値であるとき, f は擬同型である.

Proof. 系 2.4.4 より明らか. □

定義 2.4.9 (標準 t -構造). 複体 $X \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して, 複体 $t^{\leq i} X$ を次のように定義する.

$$t^{\leq i} X = \cdots \longrightarrow X^{i-2} \xrightarrow{d_X^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{h_X} \text{Ker } d_X^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 複体の射 $t^{\leq i} f : t^{\leq i} X \rightarrow t^{\leq i} Y$ を次のように定義する.

$$\begin{array}{ccccccc} t^{\leq i} X & = & \cdots & \longrightarrow & X^{i-2} & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} \xrightarrow{h_X} \text{Ker } d_X^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow f^{i-2} & & \downarrow f^{i-1} \quad \downarrow h_f \quad \downarrow 0 \\ t^{\leq i} Y & = & \cdots & \longrightarrow & Y^{i-2} & \xrightarrow{d_Y^{i-2}} & Y^{i-1} \xrightarrow{h_Y} \text{Ker } d_Y^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ここで h_f は定理 2.1.16 で定義された射である. 以上より, 加法関手 $t^{\leq i} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}^-(\mathcal{A})$ が定義される.

双対的に加法関手 $t^{\geq i} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ が定義される. 複体 $X \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して, 複体 $t^{\geq i} X$ を次のように定義する.

$$t^{\geq i} X = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Cok } d_X^{i-1} \xrightarrow{h'_X} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 複体の射 $t^{\geq i} f : t^{\geq i} X \rightarrow t^{\geq i} Y$ を次のように定義する.

$$\begin{array}{ccccccc} t^{\geq i} X & = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Cok } d_X^{i-1} \xrightarrow{h'_X} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow 0 & & \downarrow h'_f \quad \downarrow f^{i+1} \quad \downarrow f^{i+2} \\ t^{\geq i} Y & = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Cok } d_Y^{i-1} \xrightarrow{h'_Y} Y^{i+1} \xrightarrow{d_Y^{i+1}} Y^{i+2} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

以上より, 加法関手 $t^{\geq i} : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}^+(\mathcal{A})$ が定義される.

定理 2.4.10 (truncation 関手). 定義 2.4.9 で定義された加法関手 $t^{\leq i}, t^{\geq i}$ からホモトピー圏上の加法関手

$$\begin{aligned} t^{\leq i} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \\ t^{\geq i} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

が定義される. この関手を truncation 関手という.

Proof. ホモトピー φ によりヌルホモトピックとなる $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, $t^{\leq i}(f)$ がヌルホモトピックであることを示す. ホモトピーの定義より,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{i-2} & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \dots \\ & & & \swarrow \varphi^{i-1} & \swarrow \varphi^i & \downarrow f \downarrow 0 & \swarrow \varphi^i \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-2} & \longrightarrow & Y^{i-1} & \longrightarrow & Y^i \longrightarrow Y^{i+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

このとき, 次のホモトピーが存在して, $t^{\leq i}(f)$ はヌルホモトピックとなる.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{i-2} & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & \text{Ker } d_X^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \swarrow \varphi^{i-2} & \swarrow \varphi^{i-1} & \swarrow \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i & \swarrow 0 & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-2} & \longrightarrow & Y^{i-1} & \longrightarrow & \text{Ker } d_Y^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

□

3 完全圈

4 三角圏

第 4 章では, Abel 圏における写像錐とシフト関手に着目して一般化された三角圏を扱う. 第 4.1 節で三角圏の定義から基本性質をいろいろ証明する. 第 4.2 節では三角圏の間の関手を定義して, 随伴で保たれることをみる. 第 4.3 節で複体のホモトピー圏が三角圏となることをみる. 第 4.4 節で三角圏の局所化を紹介する.

4.1 三角圏

前三角圏で成立する命題もあるが, 基本的には三角圏において議論する. ^{*8}

定義 4.1.1 (三角系列). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. このとき, \mathcal{T} における三角系列 (triangle) とは, \mathcal{T} の対象 X, Y, Z と射 $u : X \rightarrow Y, v : Y \rightarrow Z, w : Z \rightarrow TX$ ^{*9} の組 (X, Y, Z, u, v, w) からなる図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

である.

記法 4.1.2. 三角系列の名前の由来は次のように三角系列を表記することがあるからである.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \swarrow w & \searrow v \\ & Z & \end{array}$$

ここで, 波線は $w : Z \rightarrow TX$ をあらわしている.

^{*8} 三角圏の定義は完全圏と違って統一されている. [NEE01] の定義と本稿の定義の対応を述べておく.

- [NEE01] の Definition 1.1.1. で定義される candidate triangle は, 本稿における三角系列であって射の合成が 0 となるものである.
- Definition 1.1.2. にあるように, 三角圏における candidate triangle の集まりの元を distinguished triangle と呼んでいる. Remark 1.1.3. や本稿の補題 4.1.6 にあるように, distinguished であれば candidate である. Notation 1.1.4. で, 三角圏において distinguished は省略すると注記されている.
- Definition 1.1.2. では pre-triangulated category (本稿の前三角圏) しか定義されておらず, triangulated category (本稿の三角圏) はのちに定義されている. 本稿でもそうだが, 八面体公理を使用する命題が少ないからである. (t-構造などでは重要となる.)
- Definition 1.1.12. で homological functor に decent であるという条件を定義している. Example 1.1.13 にあるように, hom 関手は decent homological functor である. [NEE01] では decent homological functor であることをいくつかの命題で仮定している. 本稿では, hom 関手を使って議論しているので, decent homological functor を hom 関手として読み替えてもらえばよい.
- Definition 1.1.14 で pre-triangle が定義されている. Example 1.1.15. にあるように, 任意の distinguished は pre-triangle である. 本稿では注意 4.1.11 に対応する.
- Caution 1.1.16. にあるように, pre-triangle であっても distinguished であるとは限らない. 例えば, $C(\mathcal{A})$ において写像錐は pre-triangle の条件を満たすが, distinguished ではない. つまり, $C(\mathcal{A})$ は三角圏ではない. (例 4.3.5)

^{*9} 対象 X と射 f に対して, $T(X)$ を TX , $T(f)$ を Tf , $T^{-1}(X)$ を $-TX$, $T^{-1}(f)$ を $-Tf$ とあらわす.

定義 4.1.3 (三角系列の射). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. \mathcal{T} の三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

に対して, 三角系列の射 (morphism of triangles) とは, \mathcal{T} における射 $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y', h : Z \rightarrow Z'$ の組 (f, g, h) であって, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

三角系列の図式は圏をなす. f, g, h がすべて同型射であるとき, 三角系列の射 (f, g, h) は同型射であるといい, 三角系列 $(X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w')$ は同型であるという.

定義 4.1.4 (三角圏). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. 三角系列のなす圏の充満部分圏を Δ と表し, Δ に属する三角系列を完全三角 (exact triangle) ^{*10} という. 組 (\mathcal{T}, T, Δ) が次の条件を満たすとき, (\mathcal{T}, T, Δ) を三角圏 (triangulated category), T をシフト関手 (shift functor) という.

(TR1) Δ は同型で閉じている. すなわち, 完全三角に同型な三角系列は完全三角である.

(TR2) 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して, 三角系列

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

は完全三角である.

(TR3) 任意の射 $f : X \rightarrow Y$ を補完する完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が存在する.

(TR4) 2 つの三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

について, 一方が完全三角であることと他方が完全三角であることは同値である.

(TR5) 2 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

^{*10} 特三角 (distinguished triangle) ともいう.

と, ある射 $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y'$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $h: Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の図式を可換にする. ^{*11}

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

(TR6) 3 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow TX$$

$$X \xrightarrow{v \circ u} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow TY$$

に対して, ある射 $Z' \rightarrow Y', Y' \rightarrow X', X' \rightarrow TZ'$ が存在して,

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow TZ'$$

は完全三角であって, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{v \circ u} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow u & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow & & \downarrow Tu \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X'} & & \downarrow \\ Z' & \dashrightarrow & Y' & \dashrightarrow & X' & \dashrightarrow & TZ' \end{array}$$

(TR6) を八面体公理 (octahedron axiom) という. 三角圏の公理から (TR6) を抜いたものを前三角圏 (pretriangulated category) という.

記法 4.1.5. 記法 4.1.2 を用いると, 八面体公理といわれる理由が分かる.

以降では, \mathcal{A} は Abel 圏, \mathcal{T} は三角圏, $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ はシフト関手であるとする.

^{*11} h が一意であることは課していないことに注意.

補題 4.1.6. \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して, 合成 $v \circ u, w \circ v, Tu \circ w$ は 0 である.

Proof. (TR2) と (TR5) より, ある射 $0 \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

よって,

$$v \circ u = 0$$

(TR4) を用いると, $w \circ v = 0$ と $Tu \circ w = 0$ も従う. □

補題 4.1.7. \mathcal{T} が三角圏であるとき, \mathcal{T}^{op} も三角圏である.

定理 4.1.8. シフト関手 T は積と余積を保存する.

Proof. T は自己圏同値であるので, 左随伴と右随伴をもつ. 左随伴は余積を保ち, 右随伴は積を保つことから従う. □

注意 4.1.9. \mathcal{T} が三角圏のとき, \mathcal{T}^{op} も T^{-1} により三角圏となるので, T^{-1} も積と余積を保つ.

三角圏の構造を調べる際に, コホモロジカル関手という概念が重要となる.

定義 4.1.10 (ホモロジカル関手とコホモロジカル関手). 加法関手 $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ が次の条件を満たすとき, ホモロジカル関手 (homological functor) であるという.

- 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$H(X) \xrightarrow{Hu} H(Y) \xrightarrow{Hv} H(Z)$$

が \mathcal{A} において完全である.

双対的に, 関手 $\mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ がホモロジカル関手であるとき, $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ はコホモロジカル関手 (cohomological functor) であるという.

注意 4.1.11. ホモロジカル関手 $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ と任意の i に対して, 関手 H^i を

$$H^i := H \circ T^i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定義する. (TR4) より, 長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(Z) \xrightarrow{H^{i-1}w} H^i(X) \xrightarrow{H^i u} H^i(Y) \xrightarrow{H^i v} H^i(Z) \xrightarrow{H^i w} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が存在する.

定理 4.1.12. $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の 2 つが成立する.

1. hom 関手

$$\mathrm{hom}(A, -) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

はホモロジカル関手である.

2. hom 関手

$$\mathrm{hom}(-, A) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

はコホモロジカル関手である.

Proof. (1) : 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$\mathrm{hom}(A, X) \xrightarrow{u \circ -} \mathrm{hom}(A, Y) \xrightarrow{v \circ -} \mathrm{hom}(A, Z)$$

が完全であることを示す. 補題 4.1.6 より, 任意の $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ に対して

$$v \circ u \circ e = 0$$

である. $v \circ f = 0$ を満たす射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)$ に対して, ある射 $h : A \rightarrow X$ が存在して, $f = u \circ h$ を満たすことを示す. (TR2) と (TR4) より, 完全三角

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA \xrightarrow{-\mathrm{id}_{TA}} TA$$

が存在する. (TR4) より, 完全三角

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

が存在する. (TR5) より, ある射 $Th : TA \rightarrow TX$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TA & \xrightarrow{-\mathrm{id}_{TA}} & TA \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow Th & & \downarrow Tf \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \end{array}$$

右の四角の可換性より,

$$Tf = Tu \circ Th$$

である. T は忠実充満なので, ある射 $h: A \rightarrow X$ が存在して,

$$f = u \circ h$$

(2) : (1) の双対である. □

定理 4.1.13 (two-out-of-three). \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

このとき, f, g, h のうち 2 つが同型射であるとき, 残り 1 つも同型射となる.

Proof. (TR4) より, f と g が同型射であると仮定しても, 一般性は失われない. (TR4) と定理 4.1.12 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の完全列の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{hom}(A, X) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, Y) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, Z) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, TX) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, TY) \\ \downarrow f \circ - & & \downarrow g \circ - & & \downarrow h \circ - & & \downarrow Tf \circ - & & \downarrow Tg \circ - \\ \mathrm{hom}(A, X') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, Y') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, Z') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, TX') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, TY') \end{array}$$

f, g は同型射なので, 五項補題より $h \circ -$ も同型射である. 米田の補題より, Z と Z' は同型である. □

系 4.1.14. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 2 つが成立することは同値である.

- $u: X \rightarrow Y$ は同型射である.
- Z は 0 と同型である

Proof. 仮定と (TR1) で与えられる完全三角に対して, (TR5) を用いると, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow \mathrm{id}_Y & & \downarrow & & \downarrow Tu \\ Y & \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \end{array}$$

定理 4.1.13 より, u が同型射であることと, $Z \rightarrow 0$ が同型射であることは同値である. □

系 4.1.15. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_Y & & & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

このとき, Z と Z' は同型である.

Proof. (TR5) より, ある射 $Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の完全三角の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

定理 4.1.13 より, この射 $Z \rightarrow Z'$ は同型射である. □

定義 4.1.16. 系 4.1.15 より, 三角圏 \mathcal{T} における射 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が完全三角となるような $Z \in \mathcal{T}$ は同型を除いて一意に定まる. Z を f の錐 (cone) といい, $\text{Cone } f$ とあらわす.

系 4.1.17. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 4 つが成立する.

1. v がエピ射であることと, $w = 0$ は同値である.
2. v がモノ射であることと, $u = 0$ は同値である.
3. v がエピ射であることと, u がモノ射であることは同値である.
4. $w = 0$ のとき, $Y \simeq X \oplus Z$ である.

$$X \xrightarrow{u} X \oplus Z \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{0} TX$$

Proof. (1): まず \Rightarrow を示す. 補題 4.1.6 より, $w \circ v = 0$ である. v がエピ射であるとき, $w = 0$ である.

\Leftarrow を示す. 定理 4.1.12 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\text{hom}(TX, A) \xrightarrow{- \circ w} \text{hom}(Z, A) \xrightarrow{- \circ v} \text{hom}(Y, A)$$

は完全列なので, $w = 0$ のとき,

$$- \circ v : \text{hom}(Z, A) \rightarrow \text{hom}(Y, A)$$

はモノ射である. よって, v はエピ射である.

(2) : (1) の双対である.

(3) : $h = 0$ と $-h = 0$ が同値であることから従う.

(4) : $w = 0$ であるとき, 1 と 2 より,

$$0 \longrightarrow \text{hom}(Z, A) \xrightarrow{-\circ v} \text{hom}(Y, A) \xrightarrow{-\circ u} \text{hom}(X, A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{hom}(A, X) \xrightarrow{u \circ -} \text{hom}(A, Y) \xrightarrow{v \circ -} \text{hom}(A, Z) \longrightarrow 0$$

は短完全列である. このとき,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列であるので,

$$Y \simeq X \oplus Z$$

□

注意 4.1.18. 系 4.1.17 より, 三角圏において任意のモノ射は分裂モノ射であり, 任意のエピ射は分裂エピ射である. もちろん, 一般の Abel 圏においては成立しない.

注意 4.1.19. 系 4.1.17 の (4) を直接示すこともできる.

Proof. u が分裂モノ射であることを示す. v が分裂エピ射であることも同様に示される. 仮定の完全三角と (TR2) に (TR3) を用いる. (TR5) より, ある射 $Tu' : TY \rightarrow TX$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{w=0} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv} & TZ \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} & & \downarrow Tu' & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{-\text{id}_{TX}} & TX & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

よって,

$$Tu' \circ Tu = \text{id}_{TX}$$

が成立する. T は忠実充満なので, $u' \circ u = \text{id}_X$ を満たす $u' : Y \rightarrow X$ が存在する. □

完全三角の (余) 直積は完全三角となる.

定理 4.1.20. Λ を添え字集合とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次の完全三角が与えられているとする.

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

\mathcal{T} において直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする。このとき、次の図式は完全三角である。

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w} T(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$$

ここで、

$$u := \prod_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda, \quad v := \prod_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda, \quad w := \prod_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda$$

Proof.

□

双対的に次の命題が成立する。

系 4.1.21. Λ を添え字集合とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、次の完全三角が与えられているとする。

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

\mathcal{T} において余直積

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \quad \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする。このとき、次の図式は完全三角である。

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{q} T(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$$

ここで、

$$u := \coprod_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda, \quad v := \coprod_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda, \quad w := \coprod_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda$$

八面体公理を用いる命題は次のようなものがある。

補題 4.1.22. \mathcal{T} において次の可換図式が与えられているとする。

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ X_2 & \xrightarrow{u_2} & Y_2 \end{array}$$

このとき、すべての行と列が完全三角であり、すべての四角形が可換であるような次の図式が存在する。

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & TX_1 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{u_2} & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & TX_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_3 & \longrightarrow & Y_3 & \longrightarrow & Z_3 & \longrightarrow & TX_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ TX_1 & \longrightarrow & TY_1 & \longrightarrow & TZ_1 & & \end{array}$$

Proof.

□

4.2 三角関手

定義 4.2.1 (三角部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を充満加法部分圏とする. \mathcal{T}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{T} の三角部分圏 (triangulated subcategory) であるという.

1. \mathcal{T}' は三角圏であり, \mathcal{T}' のシフト関手は \mathcal{T} のシフト関手の \mathcal{T}' への制限である.
2. \mathcal{T}' における完全三角

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

は \mathcal{T} においても完全三角である.

定理 4.2.2. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. \mathcal{T}' は三角部分圏である.
2. 次の 2 つが成立する.
 - (a) \mathcal{T}' はシフトで閉じている. つまり, $\mathcal{T}' = T\mathcal{T}'$ が成立する.
 - (b) \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

において $X, Y \in \mathcal{T}'$ のとき, $Z \in \mathcal{T}'$ である.

Proof. $1 \Rightarrow 2$: (a) は定義から明らかであり, (b) は定義 4.1.16 より従う.

$2 \Rightarrow 1$: (a) と (b) から \mathcal{T}' に三角構造が定まることをみる. (a) より \mathcal{T}' 上にシフト関手 $T: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}'$ が定まる. \mathcal{T}' の完全三角を \mathcal{T} における完全三角であって, 各対象が \mathcal{T}' に属するときと定義する. このとき, (TR3) 以外は \mathcal{T} が三角圏であることから従う. $u: X \rightarrow Y$ に対して, (TR3) が成立することを示す. \mathcal{T} における (TR3) より, ある対象 $Z \in \mathcal{T}$ が存在して, 次の図式は完全三角である.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, (b) より $Z \in \mathcal{T}'$ となる. よって, u を補完する完全三角が \mathcal{T}' において存在する. □

定義 4.2.3 (thick 部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. \mathcal{T}' が直和因子で閉じているとき, thick 部分圏 (thick subcategory) であるという.

定理 4.2.4. ホモロジカル関手 $H: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ が任意の i に対して,

$$H^i(X) = 0$$

を満たす $X \in \mathcal{T}$ のなす充満部分圏は \mathcal{T} の thick 部分圏となる.

定義 4.2.5 (生成). $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ を充満部分圏とする. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ が同型で閉じている充満加法部分圏であって, \mathcal{S} を含む最小のものであるとき, \mathcal{S} は \mathcal{T}' を三角圏として生成する (generate) という.

定義 4.2.6 (三角関手). $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏とする. 加法関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ が次の条件を満たすとき, 三角関手 (triangulated functor) であるという.

1. 自然同型

$$\varphi : F \circ T \simeq T \circ F$$

が存在する.

2. \mathcal{T} の任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{Fw} FTX$$

は \mathcal{T}' における完全三角である.

三角関手の合成はまた三角関手となる.

補題 4.2.7. 三角圏 $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}''$ と三角関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}', F' : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}''$ に対して, 合成

$$F' \circ F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}''$$

は三角関手となる.

三角関手とホモロジカル関手の合成はホモロジカル関手となる.

補題 4.2.8. 三角関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ とホモロジカル関手 $H : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{A}$ に対して, 合成

$$H \circ F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

はホモロジカル関手となる.

以降では, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏, $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ を三角関手とする.

定義 4.2.9 (三角同値). 三角関手 F が圏同値であるとき, 三角同値 (triangle equivalence) であるという.

定理 4.2.10. 関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}', G : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}$ が随伴 $F \dashv G$ であるとき, 次の 2 つは同値である.

1. F は三角関手である.
2. G は三角関手である.

Proof. (1) \Rightarrow (2) を示す. 逆も同様に示すことができる. □

系 4.2.11. F が三角同値であるとき, F^{-1} も三角同値である. 特に, $T^n : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ は三角同値である.

4.3 複体のホモトピー圏の三角構造

復習として、複体のホモトピー圏上の写像錐や標準三角の定義を確認する。

定義 4.3.1 (写像錐). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, f の写像錐 $\text{Cone } f$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\text{Cone } f^i &:= X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } f}^i &:= \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

写像錐は複体となっている. また,

$$\begin{aligned}g^i &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow X^{i+1} \oplus Y^i \\ h^i &:= (1 \quad 0) : X^{i+1} \oplus Y^i \rightarrow X^{i+1}\end{aligned}$$

は複体の射 $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ と $h : \text{Cone } f \rightarrow X[1]$ を定め, 標準三角という射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

が定義される.

$\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における標準三角を一般の三角圏における完全三角, シフトをシフト関手と定義することで, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ は三角圏の構造をもつ.

補題 4.3.2. 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 次の 3 つが得られる.

1. 標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

が得られる.

2. $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ から標準三角

$$Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{k} \text{Cone } g \xrightarrow{l} Y[1]$$

が得られる.

3. $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ において, 次の三角図式の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{k} & \text{Cone } g & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow \text{id}_{\text{Cone } f} & & \simeq \downarrow \xi & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{h} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \end{array}$$

Proof. (1) : 写像錐の構成より明らか.

(2) : 写像錐の定義より,

$$\begin{aligned} \text{Cone } g &= Y^{i+1} \oplus \text{Cone } f = Y^{i+1} \oplus X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } g}^i &= \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ 0 & f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき,

$$\text{Cone } f^i \rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, 複体の射 $\text{Cone } f \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. また,

$$\text{Cone } g^i \rightarrow Y[1]^i : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, 複体の射 $\text{Cone } g \rightarrow Y[1]$ が定まる.

(3) : まず,

$$\begin{aligned} \xi^i : \text{Cone } g^i &\rightarrow X[1]^i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \zeta^i : X[1]^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\xi : \text{Cone } g \rightarrow X[1]$ と $\zeta : X[1] \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. このとき,

$$\xi \circ \zeta = 1$$

であるので, $\zeta \circ \xi$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ がホモトピー同値であることを示す.

$$\varphi^i : \text{Cone } g^i \rightarrow \text{Cone } g^{i-1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} 1 - \zeta \circ \xi &= d_{\text{Cone } g}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_{\text{Cone } g}^i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, $\zeta \circ \xi$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ はホモトピー同値である. □

定理 4.3.3. Abel 圏 A に対して, $\mathbf{K}(A)$ は三角圏である.

Proof. 三角圏の公理 (TR1) ~ (TR6) を満たすことをみる.

(TR1) : 標準三角に同型な射の列が標準三角となることは明らか.

(TR3) : 写像錐を用いればよい.

(TR2) : 射 $0 \rightarrow X$ の写像錐を考えると, $\text{Cone } 0 = X$ であるので, 標準三角

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0$$

が得られる. 補題 4.3.2 より, 標準三角

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

が得られる.

(TR4) : 補題 4.3.2 より明らか.

(TR5) : 2 つの標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} \text{Cone } f' \xrightarrow{h'} X[1]'$$

と, ある射 $\alpha : X \rightarrow X', \beta : Y \rightarrow Y'$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $\gamma : Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の図式を可換にすることを示す.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & \text{Cone } f' & \xrightarrow{h'} & X[1]' \end{array}$$

可換であることより, $\beta \circ f$ と $f' \circ \alpha$ の間のホモトピー $\varphi : X \rightarrow Y'$ が存在する.

$$\beta^i \circ f^i - f'^i \circ \alpha^i = d_{Y'}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i$$

ここで,

$$\gamma^i : Z^i \rightarrow Z'^i : \begin{pmatrix} \alpha^{i+1} & 0 \\ \varphi^{i+1} & \beta^i \end{pmatrix}$$

とすると, 複体の射 $\gamma : Z \rightarrow Z'$ を定める. このとき,

$$\begin{aligned} \gamma^i \circ g^i &= \begin{pmatrix} \alpha^{i+1} & 0 \\ \varphi^{i+1} & \beta^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^i \end{pmatrix} \\ g'^i \circ \beta^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ (\beta^i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\gamma \circ g = g' \circ \beta$$

同様に,

$$\alpha[1] \circ h = h' \circ \gamma$$

となるので, 求める図式の可換性が得られる.

(TR6) : 八面体公理において, $Z' = \text{Cone } f, Y' = \text{Cone } (g \circ f), X' = \text{Cone } g$ としてよい. このとき,

$$\begin{aligned} \delta^i : \text{Cone } f^i &\rightarrow \text{Cone } (g \circ f)^i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^i \end{pmatrix} \\ \varepsilon^i : \text{Cone } (g \circ f)^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\delta : \text{Cone } f \rightarrow \text{Cone } (g \circ f), \varepsilon : \text{Cone } (g \circ f) \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. 射 $\text{Cone } g \rightarrow (\text{Cone } f)[1]$ は合成 $\text{Cone } g \rightarrow Y[1] \rightarrow (\text{Cone } f)[1]$ として定義すれば, 右下の四角形の可換性は明らか. ほかの四角形の可換性も計算すると分かる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Cone } f & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \delta & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & \text{Cone } (g \circ f) & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \text{Cone } g & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Cone } g & \xrightarrow{\eta} & (\text{Cone } f)[1] \end{array}$$

最後に, 最下列の三角形列

$$\text{Cone } f \xrightarrow{\delta} \text{Cone } (g \circ f) \xrightarrow{\varepsilon} \text{Cone } g \xrightarrow{\eta} (\text{Cone } f)[1]$$

が標準三角

$$\text{Cone } f \xrightarrow{\delta} \text{Cone } (g \circ f) \longrightarrow \text{Cone } \delta \longrightarrow (\text{Cone } f)[1]$$

に同型であることを示す. このとき (TR1) より, 最下列の三角形列も標準三角となる.

$$\begin{aligned} \mu^i : \text{Cone } g^i &\rightarrow \text{Cone } \delta^i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \lambda : \text{Cone } \delta^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\mu : \text{Cone } g \rightarrow \text{Cone } \delta, \lambda : \text{Cone } \delta \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Cone } g & \xrightarrow{\eta} & (\text{Cone } f)[1] \\ \downarrow \text{id}_{\text{Cone } f} & & \downarrow \text{id}_{\text{Cone } (g \circ f)} & & \mu \downarrow \uparrow \lambda & & \downarrow \text{id}_{(\text{Cone } f)[1]} \\ \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \longrightarrow & \text{Cone } \delta & \longrightarrow & (\text{Cone } f)[1] \end{array}$$

このとき,

$$\mu \circ \lambda = 1$$

より, $\lambda \circ \mu$ が $\text{id}_{\text{Cone } g}$ とホモトピー同値であることを示す.

$$\varphi^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \circ \mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= d_{\text{Cone } g}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_{\text{Cone } g}^i \end{aligned}$$

となるので, $\lambda \circ \mu$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ はホモトピー同値である. □

系 4.3.4. $\mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \mathbf{K}^-(\mathcal{A}), \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ はいずれも $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ の三角部分圏である.

例 4.3.5. Abel 圏 \mathcal{A} に対して, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ は三角圏であるとは限らない.

Proof. $X \in \mathcal{A}$ を $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ に埋め込んだ複体

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

を考える. $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, X)$ の写像錐は

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

である. この複体 Cone id_X は 0 複体と同型ではない. ^{*12} よって, 三角圏の公理 (TR2) を満たさない. □

定理 4.3.6. 系 2.4.4 で得られた 0 次コホモロジーをとる関手

$$H = H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

^{*12} もちろん, ホモトピー同値ではある.

はホモロジカル関手である。よって、 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における任意の完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

から、 \mathcal{A} における長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(Y) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(Z) \xrightarrow{H^i(h)} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が得られる。

Proof. (TR3) より、任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ を補完する標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} TX$$

が存在する。(TR4) より、

$$H^0(Y) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(\text{Cone } f) \xrightarrow{H^0(h)} H^1(X)$$

が完全であることを示せばよい。 □

注意 4.3.7. 定理 4.3.6 と定理 1.2.11 より、 $H^i = H \circ [i]$ は i 次コホモロジーをとる関手に一致する。

系 4.3.8. $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して、次の 2 つは同値である。

1. f は擬同型である。つまり、任意の i に対して、 $H^i(f)$ は同型射である。
2. 写像錐 $\text{Cone } f$ は非輪状である。つまり、任意の i に対して、 $H^i(\text{Cone } f) = 0$ である。

Proof. 任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ を標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} TX$$

に補完すると、定理 4.3.6 より、 \mathcal{A} における長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(Y) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(Z) \xrightarrow{H^i(h)} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が得られる。よって、 $H^i(f)$ が同型射であることと $H^i(\text{Cone } f) = 0$ であることは同値である。 □

4.4 三角圏の局所化

この節では、 \mathcal{T} を三角圏、 $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ をシフト関手とする。

定義 4.4.1 (三角構造と整合する). 射のクラス S が \mathcal{T} の積閉系であって、次の条件をさらに満たすとき、 S は \mathcal{T} と整合する (compatible with the triangulation) という。

(MS4) \mathcal{S} はシフト関手で閉じている. すなわち, 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ と任意の i に対して, $T^i s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(T^i X, T^i Y)$ である.

(MS5) \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

と, $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y')$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Z, Z')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow s & & \downarrow t & & \downarrow \gamma & & \downarrow Ts \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

以降では, \mathcal{S} を \mathcal{T} の三角構造と整合する積閉系とする.

定理 4.4.2. 関手 $Q_{\mathcal{S}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ が三角関手となるような三角構造が局所化 $\mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ に一意に定まる.

Proof. $\mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ 上のシフト関手 $T'^n : \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}] \rightarrow \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ を \mathcal{T} 上のシフト関手 T を用いて, 次のように定義する.

- 対象 $X \in \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ に対して,

$$T'^n X := TX$$

- 射 $[f, W, s] \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ に対して,

$$[T'^n f, T'^n W, T'^n s] := [T^n f, T^n W, T^n s]$$

局所化の普遍性より, 関手 $T'^n : \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}] \rightarrow \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ は自然同型を除き可換にする関手として, 自然同型を除いて一意に定まる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{T} & \mathcal{T} \\ Q_{\mathcal{S}} \downarrow & & \downarrow Q_{\mathcal{S}} \\ \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}] & \xrightarrow{T'} & \mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}] \end{array}$$

$\mathcal{T}[\mathcal{S}^{-1}]$ における三角系列が次の条件を満たすとき, 完全三角であるとする.

- \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

の Q_S による像

$$X \xrightarrow{[u/1]} Y \xrightarrow{[v/1]} Z \xrightarrow{[w/1]} TX$$

に $\mathcal{T}[S^{-1}]$ における三角系列として同型である.

このような完全三角の集まりを $\mathcal{T}[S^{-1}]$ 上の完全三角のクラス Δ' とする. $(\mathcal{T}[S^{-1}], T', \Delta')$ が三角圏であることを示す.

(TR1) : 定義より明らか.

(TR2) : 定義より明らか.

(TR3) : 任意の射 $[f, W, s] \in \text{Hom}_S(X, Y)$ に対して, $f : X \rightarrow W$ を \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$$

に補完する. このとき, $\mathcal{T}[S^{-1}]$ において, 次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{[f/s]} & Y & \xrightarrow{[g \circ s/1]} & Z & \xrightarrow{[h/1]} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \simeq \downarrow Q_S(s) & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{[f/1]} & W & \xrightarrow{[g/1]} & Z & \xrightarrow{[h/1]} & TX \end{array}$$

$Q_S(s)$ は同型射であるので, 完全三角

$$X \xrightarrow{[f/1]} W \xrightarrow{[g/1]} Z \xrightarrow{[h/1]} TX$$

は Δ' に属する.

(TR4) : (TR3) と同様に, $\mathcal{T}[S^{-1}]$ における完全三角を \mathcal{T} における完全三角とみなす. このとき, \mathcal{T} における (TR4) の成立より, $\mathcal{T}[S^{-1}]$ における (TR4) が従う.

(TR5) :

(TR6) :

□

4.5 t-構造

5 導来圏

5.1 Abel 圏の導来圏

この節では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

補題 5.1.1. \mathcal{S} を $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における擬同型の集まりとする. このとき, \mathcal{S} は $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における三角構造と整合する積閉系である.

Proof. 三角構造と整合する積閉系の定義 (MS1) ~ (MS5) を満たすことを示す.

(MS1) : 明らか.

(MS2) : 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y', Y), t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ に対して, (TR3) より, 次の 2 つの完全三角が存在する.

$$X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow X'[1]$$

$$Y' \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow Y'[1]$$

このとき, (TR5) よりある射 $f' : X' \rightarrow Y'$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & X'[1] \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow f'[1] \\ Y' & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & Y'[1] \end{array}$$

あとは t が擬同型であることを示せばよいが, これは系 4.3.8 より従う. 双対の条件も同様に成立する.

(MS3) : $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ に対して, $h := f - g$ とおく. ある $t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Z)$ に対して, $t \circ f = t \circ g$ であると仮定すると, $t \circ h = 0$ である. (TR3) と (TR4) より, $t : Y \rightarrow Z$ を補完する完全三角

$$V \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{t} Z \longrightarrow V[1]$$

が存在する. (TR2) と (TR5) より, ある射 $v : X \rightarrow V$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow v & & \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow v[1] \\ V & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{t} & Z & \longrightarrow & V[1] \end{array}$$

(TR3) と (TR4) より, $v : X \rightarrow V$ を補完する完全三角

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{v} V \longrightarrow W[1]$$

が存在する。補題 4.1.6 より,

$$v \circ t = 0$$

このとき,

$$\begin{aligned} h \circ t &= u \circ v \circ t \\ &= 0 \end{aligned}$$

双対の条件も同様に成立する.

(MS4) : 明らか.

(MS5) : 定理 4.3.6 と定理 4.1.13 より従う. □

以降では, S を $K(\mathcal{A})$ における擬同型からなる三角構造と整合する積閉系とする.

定義 5.1.2 (導来圏). S による $K(\mathcal{A})$ の局所化 $K(\mathcal{A})[S^{-1}]$ を \mathcal{A} の導来圏 (derived category) とい
い, $D(\mathcal{A})$ とあらわす.

$$D(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A})[S^{-1}]$$

注意 5.1.3. 定理 4.4.2 より, 導来圏 $D(\mathcal{A})$ は三角圏である.

有界なホモトピー圏に対しても同様に有界な導来圏が定義される.

定義 5.1.4 (有界な導来圏). 有界なホモトピー圏に対して, 有界な導来圏が次のように定義される.

- S による $K^-(\mathcal{A})$ の局所化 $K^-(\mathcal{A})[S^{-1}]$ を \mathcal{A} の上に有界な導来圏 (upper-bounded derived category) といい, $D^-(\mathcal{A})$ とあらわす.
- S による $K^+(\mathcal{A})$ の局所化 $K^+(\mathcal{A})[S^{-1}]$ を \mathcal{A} の下に有界な導来圏 (lower-bounded derived category) といい, $D^+(\mathcal{A})$ とあらわす.
- S による $K^b(\mathcal{A})$ の局所化 $K^b(\mathcal{A})[S^{-1}]$ を \mathcal{A} の有界な導来圏 (bounded derived category) といい, $D^b(\mathcal{A})$ とあらわす.

補題 5.1.5. $D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$ はいずれも $D(\mathcal{A})$ の充満三角部分圏である.

定理 5.1.6. \mathcal{A} における短完全列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

から, $D(\mathcal{A})$ における完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$$

が定まる.

Proof. □

6 参考文献について

加法圏

三角圏

[NEE01] が三角圏について勉強するときの定番の本である. [NIC17] は三角圏の定義から Verdier 商, Abel 圏のホモトピー圏が三角構造をもつことまで簡潔に紹介されている. [HJ] の 3 章から 6 章までで三角圏について例を用いながら説明している. [中 15] の 6 章には代数的三角圏まで話が載っている. [加 13] には Verdier 局所化やルコルマン, Brown 表現定理などが載っている.

付録 A 圏の局所化

A.1 圏の局所化

\mathcal{C} における射は通常の黒色で, \mathcal{S} における射は水色であらわす.

定義 A.1.1 (左局所化). \mathcal{C} を圏, \mathcal{S} を \mathcal{C} における射のクラスとする. \mathcal{S} が次の条件を満たすとき, \mathcal{S} で左局所化が計算可能である (calculus of left fractions) という.

(LF1) : 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\text{id}_X \in \mathcal{S}$ である. また, \mathcal{S} は合成で閉じている. ^{*13}

(LF2) : 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, ある $Y' \in \mathcal{C}, s' \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y'), f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

(LF3) : $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 次が成立する.

- $W \in \mathcal{C}, s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(W, X)$ が存在して, $f \circ s = g \circ s$ を満たすとき, ある $Z \in \mathcal{C}, t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Z)$ が存在して, $t \circ f = t \circ g$ となる.

$$W \xrightarrow{s} X \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{t} Z$$

定義 A.1.2 (右局所化). (LF1), (LF2), (LF3) にそれぞれ双対な (RF1), (RF2), (RF3) を満たすとき, \mathcal{S} で右局所化が計算可能である (calculus of right fractions) という.

左局所化かつ右局所化が計算可能であるとき, \mathcal{S} を積閉系であるという.

定義 A.1.3 (積閉系). \mathcal{C} を圏, \mathcal{S} を \mathcal{C} における射のクラスとする. \mathcal{S} が次の条件を満たすとき, 積閉系 (multiplicative) であるという.

(MS1) : 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\text{id}_X \in \mathcal{S}$ である. また, \mathcal{S} は合成で閉じている.

(MS2) : 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, ある $Y' \in \mathcal{C}, s' \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y'), f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

^{*13} このとき, \mathcal{S} は \mathcal{C} の部分圏を定める. 射のクラスとこの部分圏を同一視する.

双対的に, 任意の $t \in \text{Hom}_S(Y', Y), g \in \text{Hom}_S(X, Y)$ に対して, ある $X' \in S, t' \in \text{Hom}_S(X', X), g' \in \text{Hom}_C(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & Y' \\ t' \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

(MS3) : $f, g \in \text{Hom}_C(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

- ある $W \in S, s \in \text{Hom}_S(W, X)$ が存在して, $f \circ s = g \circ s$ である.
- ある $Z \in S, s \in \text{Hom}_S(Y, Z)$ が存在して, $t \circ f = t \circ g$ である.

$$W \xrightarrow{s} X \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{t} Z$$

以降では, S で C の左局所化が計算可能であるとする.

定義 A.1.4 (右屋根). 任意の $X, Y \in C$ に対して, ある $s \in S, f \in \text{Hom}_C(X, W), s \in \text{Hom}_S(Y, W)$ からなる C における射の対

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ X & & Y \end{array}$$

からなる組 (f, W, s) を右屋根 (right roof) という.

定義 A.1.5 (右屋根の同値). 2 つの右屋根

$$\begin{array}{ccc} & W_1 & \\ f_1 \nearrow & & \nwarrow s_1 \\ X & & Y \\ f_2 \searrow & & \swarrow s_2 \\ & W_2 & \end{array}$$

において, ある $W \in S, \alpha \in \text{Hom}_S(W_1, W), \beta \in \text{Hom}_S(W_2, W)$ が存在して, 次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \alpha \nearrow & & \nwarrow \beta & \\ f_1 \nearrow & W_1 & & W_2 & \nwarrow s_2 \\ X & & & & Y \\ & \nwarrow s_1 & & \swarrow f_2 & \end{array}$$

このとき, 2 つの右屋根は同値であるという.

定理 A.1.6. 定義 A.1.5 は X と Y の右屋根全体

$$\{(f, W, s) \mid W \in S, f \in \text{Hom}_C(X, W), s \in \text{Hom}_S(Y, W)\}$$

における同値関係をあたえる.

参考文献

- [HJ] THORSTEN HOLM and PETER JØRGENSEN. Triangulated categories: Definitions, properties and examples.
- [NEE01] AMNON NEEMAN. Triangulated Categories. (AM-148). Princeton University Press, 2001.
- [NIC17] STEFANO NICOTRA. A brief introduction to triangulated categories, 8 2017.
- [加 13] 加藤希理子. 三角圏とホモロジー代数, 3 2013.
- [中 15] 宏行 中岡. 圏論の技法：アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数. 日本評論社, 2015.