

加法圏から導来圏まで

よの

2022 年 9 月 19 日

概要

本稿は加法圏から導来圏まで勉強したことをまとめたものである。

第 1 章では, Hom 空間に Abel 群の構造が入った加法圏を導入する. 第 1.1 節で定義される加法圏は第 2 章以降で登場する Abel 圏, 完全圏, 三角圏などに必要である. 第 1.2 節で加法圏における複体を定義して, 複体の圏が Abel 圏となることをみる. また, ここで登場するシフトと写像錐は三角圏への一般化で再登場する. 第 1.3 節では, 複体のホモトピーを定義して, 複体のホモトピー圏を定義する. このホモトピー圏は Abel 圏とはならないが, 三角圏の構造をもつことがのちに分かる.

第 2 章では, 核や余核, 像や余像が定義できる Abel 圏を紹介する. 第 2.1 節で射の核や余核, 像や余像を定義する. 第 2.2 節で任意の射に対して核と余核が定義できる Abel 圏を定義する. Abel 圏では, $\text{Mod } R$ の一般化としてホモロジー代数を展開できる. 第 2.3 節で完全列を定義する. そして, 第 2.4 節でコホモロジーを定義して, 完全列を用いた議論をする.

第 3 章では, Abel 圏の短完全列の性質に着目して一般化された完全圏を扱う.

第 4 章では, Abel 圏における写像錐とシフト関手に着目して一般化された三角圏を扱う. 第 4.1 節で三角圏の定義から基本性質をいろいろ証明する. 第 4.2 節では三角圏の間の関手を定義して, 随伴で保たれることをみる. 第 4.3 節で複体のホモトピー圏が三角圏となることをみる. 第 4.4 節で三角圏の局所化を紹介する.

付録 A では, 圏の局所化についてまとめている. 加法圏, Abel 圏, 三角圏の局所化に必要であり, 導来圏へとつながっていく.

全体的に未完成で, 特に第 2.3 節, 第 3 章, 付録 A は未完成.

目次

1	加法圏	2
1.1	加法圏	2
1.2	複体のなす圏	3
1.3	ホモトピー圏	7
2	Abel 圏	10
2.1	核と余核	10
2.2	Abel 圏	15
2.3	完全列	18
2.4	コホモロジー	20
3	完全圏	24
4	三角圏	25
4.1	三角圏	25
4.2	三角関手	33
4.3	複体のホモトピー圏の三角構造	34
4.4	三角圏の局所化	40
5	参考文献について	41
付録 A	圏の局所化	42
A.1	圏の局所化	42

1 加法圏

第 1 章では, Hom 空間に Abel 群の構造が入った加法圏を導入する. 第 1.1 節で定義される加法圏は第 2 章以降で登場する Abel 圏, 完全圏, 三角圏などに必要である. 第 1.2 節で加法圏における複体を定義して, 複体の圏が Abel 圏となることをみる. また, ここで登場するシフトと写像錐は三角圏への一般化で再登場する. 第 1.3 節では, 複体のホモトピーを定義して, 複体のホモトピー圏を定義する. このホモトピー圏は Abel 圏とはならないが, 三角圏の構造をもつことがのちに分かる.

1.1 加法圏

$\text{Mod } R$ の Hom 集合は Abel 群の構造をもつ. この構造を一般化した圏が (前) 加法圏である. 前加法圏で成立する命題もあるが, 基本的に加法圏において議論する.

定義 1.1.1 (前加法圏と加法圏). 圏 \mathcal{A} が次の条件を満たすとき, 加法圏 (additive category) であるという.

(AD1) 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ は Abel 群である.

(AD2) 任意の $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ に対して, 合成

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

は双線形写像である.

(AD3) 零対象 $0 \in \mathcal{A}$ が存在する.

(AD4) 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, 余直積 $X \oplus Y \in \mathcal{A}$ が存在する.

(AD1) と (AD2) のみを満たすとき, 前加法圏 (preaddictive category) であるという.

例 1.1.2. Ab や $\text{Mod } R$ は (前) 加法圏である.

注意 1.1.3. \mathcal{A} が (前) 加法圏であるとき, \mathcal{A}^{op} も (前) 加法圏である.

(前) 加法圏の関手を定義する. この関手には加法を保つことを要請することが自然である.

定義 1.1.4 (加法関手). $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を加法圏とする. 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ が次の条件を満たすとき, 加法関手 (additive functor) であるという.

- 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, F が定める写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}'}(FX, FY)$$

は Abel 群の準同型である.

定義 1.1.5 (加法部分圏). \mathcal{A} を加法圏, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ を部分圏とする. \mathcal{A}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{A} の加法部分圏 (additive subcategory) であるという.

- \mathcal{A}' は加法圏であって, 包含関手 $i: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ は加法関手である.

定理 1.1.6. \mathcal{A} を加法圏とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, Hom 関手

$$\text{hom}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

は加法関手である.

Proof. (AD1) より任意の $X \in \mathcal{A}$ に対して, $\text{Hom}(A, X)$ は Abel 群である. (AD2) より任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して,

$$\text{hom}(C, f) : \text{hom}(A, X) \rightarrow \text{hom}(A, Y)$$

は Abel 群の準同型である. また, (AD2) より任意の $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して,

$$(f \circ -) + (g \circ -) = (f + g) \circ -$$

が成立する. よって, Hom 関手は加法関手である. □

双対的に次の命題が成立する.

系 1.1.7. \mathcal{A} を加法圏とする. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して, Hom 関手

$$\text{hom}(-, A) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

は反変加法関手である.

定義 1.1.8 (直和因子で閉じる). \mathcal{A} を加法圏, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. \mathcal{A}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{A} において直和因子で閉じている (closed under direct summands) という.

- 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して, $X \oplus Y \in \mathcal{A}'$ のとき, $X, Y \in \mathcal{A}'$ となる.

定義 1.1.9 (右直交部分圏と左直交部分圏).

1.2 複体のなす圏

加群圏における複体の定義を一般の加法圏において定義する. i は整数として, 添え字の $\{-\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は混乱の生じない限り省略する. この節では, \mathcal{A} は加法圏であるとする.

定義 1.2.1 (複体). \mathcal{A} の対象と射の列 $X = \{X^i, d^i\}$

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

が任意の i に対して,

$$d^i \circ d^{i-1} = 0$$

を満たすとき, X を \mathcal{A} における複体 (complex) という. 添え字 i を次数 (degree), 射 d^i を微分射 (difference morphism) という. 複体 X の微分射であることを明示するときは d_X^i とあらわす.

定義 1.2.2 (複体の射). $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\}$ を \mathcal{A} における複体とする. X から Y への複体の射 (morphism of complies) とは, \mathcal{A} における射の列

$$f = \{f^i \mid f^i \in \text{Hom}(X^i, Y^i)\}$$

であって, 任意の i に対して, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

複体と複体の射は圏をなす.

定義 1.2.3 (複体の圏). 複体と複体の射は圏をなす. この圏を複体の圏といい, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ とあらわす.

定理 1.2.4. \mathcal{A} が加法圏であるとき, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ も加法圏となる.

Proof. 加法圏の公理 (AD1) \sim (AD4) が成立することを示す.

(AD1) : 複体の射 $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, f と g の和を次数ごとの射の和

$$f + g := \{f^i + g^i\}$$

とする. 零射を

$$0 := \{0 \mid 0 \in \text{Hom}(X^i, Y^i)\}$$

とすると, $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ は Abel 群の構造をもつ.

(AD2) : (AD1) での定め方と \mathcal{A} の加法性より従う.

(AD3) : 0 を \mathcal{A} における零対象とすると, 射の列

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$$

は $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ における零対象である.

(AD4) : 複体 $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\}$ に対して, 余直積 $X \oplus Y$ を次数ごとの余直積

$$X \oplus Y := \{X^i \oplus Y^i, d_X^i \oplus d_Y^i\}$$

とすればよい. ここで,

$$d_X^i \oplus d_Y^i := \begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$$

としている. □

定義 1.2.5 (部分複体). $C(\mathcal{A})$ の部分対象を部分複体 (subcomplex) という.

定義 1.2.6 (有界). 複体 $X \in C(\mathcal{A})$ が次の条件をそれぞれ満たす部分複体を定義する.

1. $i \gg 0$ に対して $X^i = 0$ となるとき, 上に有界 (upper-bounded) であるという. 上に有界な複体のなす充満部分圏を $C^-(\mathcal{A})$ とあらわす.
2. $i \ll 0$ に対して $X^i = 0$ となるとき, 下に有界 (lower-bounded) であるという. 下に有界な複体のなす充満部分圏を $C^+(\mathcal{A})$ とあらわす.
3. 上に有界かつ下に有界な複体を有界 (bounded) であるという. 有界な複体のなす充満部分圏を $C^b(\mathcal{A})$ とあらわす.

定理 1.2.7. $C^-(\mathcal{A}), C^+(\mathcal{A}), C^b(\mathcal{A})$ はいずれも $C(\mathcal{A})$ の加法充満部分圏である.

Proof. 定義より明らか. □

記法 1.2.8. $C(\mathcal{A}), C^-(\mathcal{A}), C^+(\mathcal{A}), C^b(\mathcal{A})$ に共通する性質を述べるとき, $C^*(\mathcal{A})$ とあらわす. ^{*1} それぞれ, $*$ = $\emptyset, -, +, b$ である.

定理 1.2.9 (シフト). 複体 $X = \{X^i, d_X^i\} \in C(\mathcal{A})$ に対して,

$$\begin{aligned} X[n]^i &:= X^{i+n} \\ d_{X[n]}^i &:= (-1)^n d_X^{i+n} : X[n]^i \rightarrow X[n]^{i+1} \end{aligned}$$

とすると, $X[n]$ は複体となる. この複体を X を n シフト (n-shift) した複体という.

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i-1+n}} X^{i+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{i+n}} X^{i+1+n} \longrightarrow \cdots$$

複体の射 $f \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して,

$$f[n]^i := f^{i+n} : X[n]^i \rightarrow Y[n]^i$$

とすると, $f[n]$ は複体の射となる. これらは加法的自己圏同値

$$[n] : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A})$$

を定める.

Proof. 複体と複体の射の定義を満たすことをみる. X が複体であることより,

$$\begin{aligned} d_{X[n]}^i \circ d_{X[n]}^{i-1} &= (-1)^n d_X^{i+n} \circ (-1)^n d_X^{i-1+n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

^{*1} 今のところ, この表記は本稿では使用していない. やる気が起きたら書きなおす.

次に, $f : X \rightarrow Y$ が複体の射であることより,

$$\begin{aligned} f[n]^{i+1} \circ d_{X[n]}^i &= f^{i+1+n} \circ (-1)^n d_X^{i+n} \\ &= (-1)^n d_Y^{i+n} \circ f^{i+n} \\ &= d_{Y[n]}^i \circ f[n]^i \end{aligned}$$

関手 $[n]$ は, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ の加法性と

$$[n] \circ [-n] = \text{Id}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}$$

を満たすことより, 加法的自己圏同値である. □

定義 1.2.10 (写像錐). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{Cone } f^i &:= X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } f}^i &:= \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, $\text{Cone } f$ は複体となる. この複体を f の写像錐 (mapping cone) という.

Proof. 複体の定義を満たすことをみる. X と Y が複体であることと, 複体の射の可換性より,

$$\begin{aligned} d_{\text{Cone } f}^i \circ d_{\text{Cone } f}^{i-1} &= \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d_Y^i & 0 \\ f^i & d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_X^{i+1} \circ d_X^i & 0 \\ d_Y^i \circ f^i - f^{i+1} \circ d_X^i & d_Y^i \circ d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

定理 1.2.11. 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ と写像錐 $\text{Cone } f$ に対して, 次の 3 つが成立する.

1. 自然な入射

$$g^i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow X^{i+1} \oplus Y^i$$

は複体の射 $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ を定める.

2. 自然な射影

$$h^i := (1 \ 0) : X^{i+1} \oplus Y^i \rightarrow X^{i+1}$$

は複体の射 $h : \text{Cone } f \rightarrow X[1]$ を定める.

3. 射の列

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1] \longrightarrow 0$$

の任意の次数 i に対して,

$$0 \longrightarrow Y^i \xrightarrow{g^i} \text{Cone } f^i \xrightarrow{h^i} X[1]^i \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列である.

Proof. (1) : 複体の射の定義を満たすことをみる.

$$\begin{aligned} g^{i+1} \circ d_Y^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ d_Y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^i \end{pmatrix} \\ d_{\text{Cone } f}^i \circ g^i &= \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_Y^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) : (1) と同様に示すことができる.

(3) : g はモノ射, h はエビ射であることと $\text{Cone } f = X^{i+1} \oplus Y^i$ より明らか. □

定義 1.2.12 (標準三角). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

を標準三角 (canonical triangle) という.

1.3 ホモトピー圏

加群圏におけるホモトピーを一般の加法圏において定義する.

定義 1.3.1 (ホモトピー). $X = \{X^i, d_X^i\}, Y = \{Y^i, d_Y^i\} \in \mathbf{C}(\mathcal{A}), f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, f から g へのホモトピー (homotopy) とは, 射の列

$$\varphi := \{\varphi^i : X^i \rightarrow Y^{i-1}\}$$

であって, 任意の i に対して,

$$f^i - g^i = d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i$$

を満たすものである. f から g へのホモトピーが存在するとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるといい, $f \sim g$ やホモトピーを明示するときには $f \underset{\varphi}{\sim} g$ とあらわす. 特に, f と 0 がホモトピックであるとき, f はヌルホモトピック (null-homotopic) であるという.

注意 1.3.2. ホモトピーは次のような図式であらわすことができるが, 各三角形の可換性は課されていないことに注意.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \downarrow g^i & \swarrow \varphi^{i+1} & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \longrightarrow & Y^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

ヌルホモトピックな射の集まりは加法圏 $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアルとなる.

定理 1.3.3. 任意の複体 $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して,

$$\mathcal{N} := \{f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y) \mid f \sim 0\}$$

とすると, \mathcal{N} は $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアルである.

Proof. まずは \mathcal{N} が $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ の部分加群であることを示す. これは $0 \in \mathcal{N}$ であり, $f \sim 0, f' \sim 0$ のとき, $f - f' \sim 0$ であることより従う. 次に, $f \sim 0$ を満たす $f \in \mathcal{N}$ に対して, 任意の複体の射の列

$$W \xrightarrow{e} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

において, $g \circ f \circ e \sim 0$ を満たすことを示す. 射 $\psi : g \circ f \circ e \rightarrow 0$ を

$$\psi^i := g^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i : W^i \rightarrow Z^{i-1}$$

とすると,

$$\begin{aligned} g^i \circ f^i \circ e^i - 0 &= g^i \circ (d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i) \circ e^i \\ &= g^i \circ d_Y^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i + g^i \circ \varphi^{i+1} \circ d_X^i \circ e^i \\ &= d_Z^{i-1} \circ g^{i-1} \circ \varphi^i \circ e^i + g^i \circ \varphi^{i+1} \circ e^{i+1} \circ d_W^i \\ &= d_Z^{i-1} \psi^i + \psi^{i+1} \circ d_W^i \end{aligned}$$

となるので, ψ は $g \circ f \circ e$ から 0 へのホモトピーであり,

$$g \circ f \circ e \underset{\psi}{\sim} 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & & W^i & \xrightarrow{d_W^i} & W^{i+1} \\ & & \downarrow e^i & & \downarrow e^{i+1} \\ X^{i-1} & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ \downarrow & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \swarrow \varphi^{i+1} & \downarrow \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \longrightarrow & Y^{i+1} \\ \downarrow g^{i-1} & & \downarrow g^i & & \\ Z^{i-1} & \xrightarrow{d_Z^{i-1}} & Z^i & & \end{array}$$

□

系 1.3.4. 任意の $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ に対して, \sim は同値関係となる. この同値類をホモトピー類 (homotopy class) という.

定義 1.3.5 (ホモトピー圏). 定理 1.3.3 のイデアル \mathcal{N} による $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ のイデアル剰余 $\mathbf{C}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$ を \mathcal{A} のホモトピー圏 (homotopy category) といい, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ とあらわす.

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) := \mathbf{C}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$$

ホモトピー圏は次のように定義することもできる.

定義 1.3.6 (ホモトピー圏). \mathcal{A} のホモトピー圏 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ を次のように構成する.

- 対象は

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{A})) := \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(\mathcal{A}))$$

- 任意の $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{A}))$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y) / \sim$$

定義 1.3.7 (ホモトピー同値). $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ がホモトピー圏 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ において同型のとき, X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalence) であるといい, $X \simeq Y$ とあらわす. すなわち, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(Y, X)$ と

$$\begin{aligned} g \circ f &\sim_{\varphi} \mathrm{id}_X \\ f \circ g &\sim_{\psi} \mathrm{id}_Y \end{aligned}$$

となるようなホモトピー φ, ψ が存在するときである.

定義 1.3.8 (有界なホモトピー圏). $\mathbf{C}^-(\mathcal{A}), \mathbf{C}^+(\mathcal{A}), \mathbf{C}^b(\mathcal{A})$ からそれぞれ, 上に有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, 下に有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$, 有界なホモトピー圏 $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ が誘導される.

定理 1.3.9. $\mathbf{K}^-(\mathcal{A}), \mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ はいずれも $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ の加法充満部分圏である.

Proof. 定義より明らか. □

記法 1.3.10. $\mathbf{K}(\mathcal{A}), \mathbf{K}^-(\mathcal{A}), \mathbf{K}^+(\mathcal{A}), \mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ に共通する性質を述べるとき, $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ とあらわす. ^{*2} それぞれ, $*$ = $\emptyset, -, +, b$ である.

$\mathbf{C}(\mathcal{A})$ 上の n シフトさせる関手から $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ 上の関手が誘導される.

定義 1.3.11 (シフト関手). n シフト関手 $[n] : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$ はホモトピーを保つので, ホモトピー圏上の関手

$$[n] : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$$

が定まる. この関手を n シフト関手 (n -shift functor) という. 1 シフト関手を単にシフト関手 (shift functor) ^{*3} という.

注意 1.3.12. n シフト関手は $[n] \circ [-n] = \mathrm{Id}$ を満たすので圏同値である.

^{*2} 今のところ, この表記は本稿では使用していない. やる気が起きたら書きなおす.

^{*3} 懸垂 (suspension) や推移関手 (translation functor) ともいう.

2 Abel 圏

第 2 章では, 核や余核, 像や余像が定義できる Abel 圏を紹介する. 第 2.1 節で射の核や余核, 像や余像を定義する. 第 2.2 節で任意の射に対して核と余核が定義できる Abel 圏を定義する. Abel 圏では, $\text{Mod } R$ の一般化としてホモロジー代数を展開できる. 第 2.3 節で完全列を定義する. そして, 第 2.4 節でコホモロジーを定義して, 完全列を用いた議論をする.

2.1 核と余核

圏論において, 射 f の核 $\text{Ker } f$ や像 $\text{Im } f$ などは次のような普遍性を用いて定義される. この節では, \mathcal{A} は加法圏であるとする.

定義 2.1.1 (核). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, f と 0 の equalizer を f の核 (kernel) といい, $\ker f$ とあらわす. すなわち, f の核とは次の普遍性で定義される $\text{Ker } f \in \mathcal{A}$ と $\ker f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Ker } f, X)$ の組 $(\text{Ker } f, \ker f)$ である.

- $f \circ \ker f = 0$
- $K \in \mathcal{A}$ と $g \in \text{Hom}(K, X)$ が $f \circ g = 0$ を満たすとき, 射 $h : K \rightarrow \text{Ker } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{Ker } f & & & \\
 & \uparrow \ker f & \searrow 0 & & \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \uparrow h & \nearrow g & & \\
 K & & & \searrow 0 &
 \end{array}$$

余核は核の双対として定義される.

定義 2.1.2 (余核). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, f と 0 の coequalizer を f の余核 (cokernel) といい, $\text{cok } f$ とあらわす.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & C & \\
 & \nearrow 0 & & \uparrow h & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & & \\
 & \searrow 0 & \nearrow \text{cok } f & & \\
 & & \text{Cok } f & &
 \end{array}$$

補題 2.1.3. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. 任意の $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ に対して, $f \circ e = 0$ のとき, $e = 0$ である.

Proof. \Rightarrow : $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ が $f \circ e = 0$ に対して, 仮定より

$$f \circ e = 0$$

$$f \circ 0 = 0$$

f はモノ射なので,

$$e = 0$$

\Leftarrow : $e_1, e_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(W, X)$ が $f \circ e_1 = f \circ e_2$ を満たすとする. このとき, $e := e_1 - e_2$ とすると,

$$\begin{aligned} f \circ e &= f \circ (e_1 - e_2) \\ &= f \circ e_1 - f \circ e_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

仮定より $e = 0$, つまり $e_1 = e_2$ となる. よって, f はモノ射である. □

補題 2.1.4. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核が存在するとき, 次が成立する.

- $\ker f$ はモノ射であり, $\text{cok } f$ はエピ射である.

Proof. equalizer がモノ射であることと, coequalizer がエピ射であることから従う. □

補題 2.1.5. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. $\text{Ker } f = 0$ である.

Proof. \Leftarrow : 補題 2.1.3 より明らか.

\Rightarrow : 零対象と零射が核の普遍性を満たすことを示せばよい. これは補題 2.1.3 より従い, 普遍性の射の一意性は零対象の定義より従う. □

例 2.1.6. $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核は次のようにあらわされる.

$$\text{Ker } 0 = (X, \text{id}_X)$$

$$\text{Cok } 0 = (Y, \text{id}_Y)$$

核と余核を用いて像と余像が定義される.

定義 2.1.7 (像). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の余核 $\text{Cok } f$ とその核 $\text{Ker}(\text{Cok } f)$ が存在するとき, f の像 (image) を

$$\text{Im } f := \text{Ker}(\text{cok } f)$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Im } f & & & \\ & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

余像は像の双対として定義される.

定義 2.1.8 (余像). $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核 $\text{Ker } f$ とその核 $\text{Cok}(\text{Ker } f)$ が存在するとき, f の余像 (coimage) を

$$\text{Coim } f := \text{Cok}(\text{ker } f)$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & & \searrow & \\ & & & \text{cok}(\text{ker } f) & \\ & & & & \text{Coim } f \end{array}$$

加法圏において核と余核が存在しているとき, 任意の射を像と余像によって分解することができる.

補題 2.1.9. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つが成立する.

1. f の像が存在するとき, ある射 $h: X \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

2. f の余像が存在するとき, ある射 $h': \text{Coim } f \rightarrow Y$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \searrow \text{cok}(\text{ker } f) & & \nearrow h' \\ & & \text{Coim } f & & \end{array}$$

Proof. (1) : $\text{cok } f \circ f = 0$ なので, 核の普遍性より, ある射 $h: X \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \end{array}$$

(Note: The diagram in the image shows additional arrows from Im f to Cok f labeled 0, and from X to Cok f labeled 0, and a vertical arrow from X to Im f labeled h. The diagram is a commutative square with X at the bottom left, Im f at the top left, Y at the bottom right, and Cok f at the top right. Arrows: X to Im f (h), X to Y (f), X to Cok f (0), Im f to Y (ker(cok f)), Im f to Cok f (0), Y to Cok f (cok f).)

(2) : (1) の双対である. □

定理 2.1.10. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の像と余像が存在するとき, ある射 $\nu: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存

在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Im } f & & \\
 & \nearrow h & \uparrow \text{ker}(\text{cok } f) & \searrow & \\
 \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{\quad} & Y \xrightarrow{\text{cok } f} \text{Cok } f \\
 & \searrow \text{cok}(\text{ker } f) & \downarrow \nu & \nearrow h' & \\
 & & \text{Coim } f & &
 \end{array}$$

Proof. 次の等式が成立して,

$$\begin{aligned}
 \text{cok } f \circ h' \circ \text{cok}(\text{ker } f) &= \text{cok } f \circ f \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$\text{cok}(\text{ker } f)$ はエピ射なので,

$$\text{cok } f \circ h' = 0$$

核の普遍性より, ある射 $\nu : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Im } f & & \\
 & \nearrow \text{ker}(\text{cok } f) & \uparrow \nu & \searrow & \\
 & & Y & \xrightarrow{\text{cok } f} & \text{Cok } f \\
 & \nearrow h' & \downarrow & \nearrow 0 & \\
 & & \text{Coim } f & &
 \end{array}$$

この射 ν が定理 2.1.10 の左の図式を可換にすることをみる.

$$\begin{aligned}
 \text{ker}(\text{cok } f) \circ \nu \circ \text{cok}(\text{ker } f) &= h' \circ \text{cok}(\text{ker } f) \\
 &= f \\
 &= \text{ker}(\text{cok } f) \circ h
 \end{aligned}$$

$\text{ker}(\text{cok } f)$ はモノ射なので,

$$\nu \circ \text{cok}(\text{ker } f) = e$$

よって, 求める図式の可換性が得られる. □

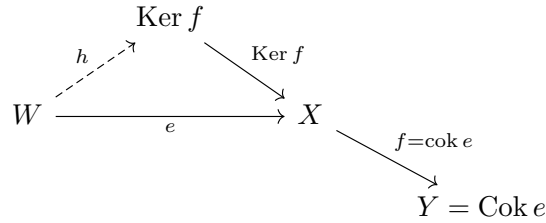
注意 2.1.11. 定理 2.1.10 で定義された射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ は一般には同型射ではない. この射が同型射であるとするのは Abel 圏の公理の 1 つである.

定理 2.1.12. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核が存在するとき, 次の 2 つは同値である.

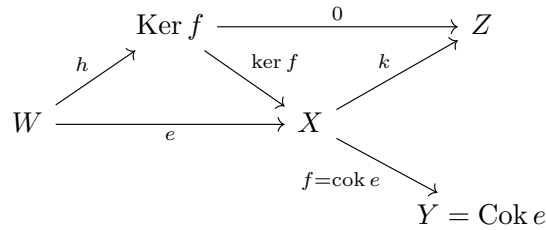
1. f は $\text{ker } f$ の余核である.
2. f がある射 $e : W \rightarrow X$ の余核である.

Proof. \Rightarrow : 明らか.

\Leftarrow : f が $e: W \rightarrow X$ の余核であるとする. 核の普遍性より, ある射 $W \rightarrow \text{Ker } f$ が存在して, 次の図式を可換にする.



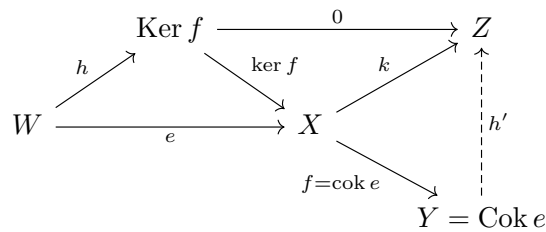
このとき, f が $\text{ker } f$ の余核であることを示す. ある射 $k: X \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.



このとき,

$$\begin{aligned}
 k \circ e &= k \circ \text{ker } f \circ h \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

f は e の余核なので, 余核の普遍性より, ある射 $h': Y \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.



普遍性より, この射 h' は一意である. □

双対的に次の命題が成立する.

系 2.1.13. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核と余核が存在するとき, 次の 2 つは同値である.

1. f は $\text{cok } f$ の核である.
2. f がある射 $g: Y \rightarrow Z$ の核である.

系 2.1.14. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ の核とその余核が存在するとき, 次の 2 つが成立する.

$$\begin{aligned}
 \text{ker}(\text{cok}(\text{ker } f)) &= \text{ker } f \\
 \text{cok}(\text{ker}(\text{cok } f)) &= \text{cok } f
 \end{aligned}$$

Proof. 定理 2.1.12 において, $\text{cok } f$ は f の余核なので, $f \mapsto \text{cok } f$ として,

$$\ker(\text{cok}(\ker f)) = \ker f$$

もう一方も系 2.1.13 より従う. □

2.2 Abel 圏

定義 2.2.1 (Abel 圏). 加法圏 \mathcal{A} が次の条件を満たすとき, Abel 圏 (Abelian category) であるという.

(AB1) 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, 核と余核が存在する.

(AB2) 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, 定理 2.1.10 で定義された射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ は同型射である.

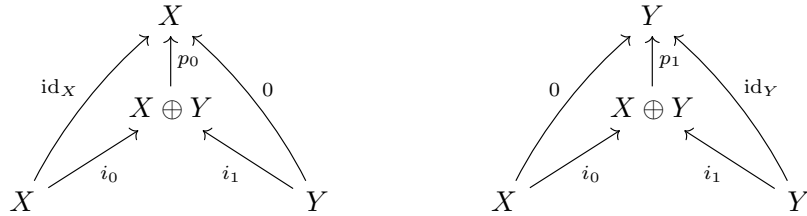
(AB1) のみを満たすとき, 前 Abel 圏 (preabelian category) であるという.

例 2.2.2. Ab や $\text{Mod } R$ は Abel 圏である.

定理 2.2.3. \mathcal{A} が Abel 圏であるとき, \mathcal{A}^{op} も Abel 圏である.

以降では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

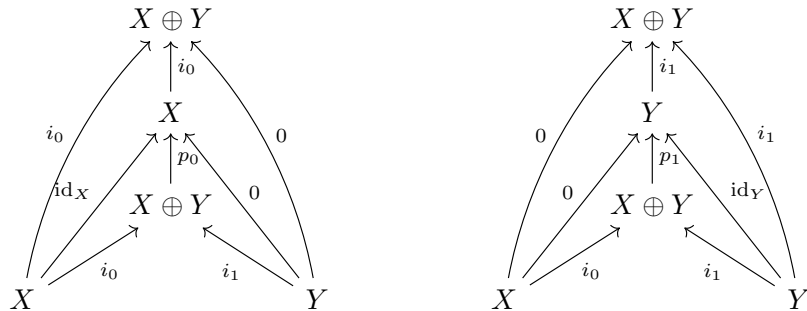
補題 2.2.4. $X, Y \in \mathcal{A}$ の直和 $X \oplus Y$ に対して, 射 p_0, p_1 を次のように定義すると, $(X \oplus Y, p_0, p_1)$ は直積となる.



Proof. p_0, p_1 の定義より,

$$((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_0 = i_0$$

$$((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_1 = i_1$$

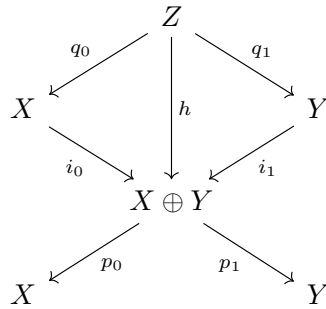


余直積の普遍性より,

$$i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1 = \text{id}_{X \oplus Y}$$

直積の普遍性を満たすことをみる. ある対象 Z と射 $q_0 : Z \rightarrow X, q_1 : Z \rightarrow Y$ を考える. $h : Z \rightarrow X \oplus Y$ を

$$h := i_0 \circ q_0 + i_1 \circ q_1$$

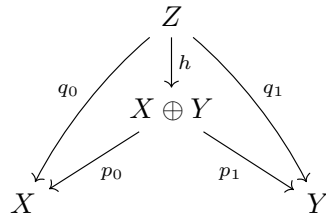


このとき,

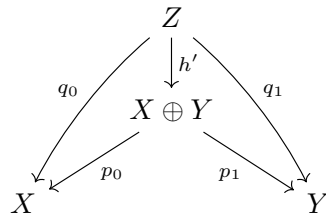
$$p_0 \circ h = p_0 \circ i_0 \circ q_0 + p_0 \circ i_1 \circ q_1 = q_0$$

$$p_1 \circ h = p_1 \circ i_0 \circ q_0 + p_1 \circ i_1 \circ q_1 = q_1$$

つまり, 次の図式は可換である.



射 h の一意性を示す. $h' : Z \rightarrow X \oplus Y$ が次の図式を可換にするとする.



$i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1 = \text{id}_{X \oplus Y}$ より,

$$\begin{aligned} h' &= (i_0 \circ p_0 + i_1 \circ p_1) \circ h' \\ &= i_0 \circ q_0 + i_1 \circ q_1 \\ &= h \end{aligned}$$

□

定理 2.2.5. \mathcal{A} は有限完備かつ有限余完備である.

Proof. (AD3) と補題 2.2.4, 有限直積が存在する. (AD3) と (AD4) より, 有限余直積が存在する. あとは任意の射 $f, g : X \rightarrow Y$ に対して, f と g の equalizer と coequalizer が存在することを示せばよい. これは $\ker(f - g)$ が f と g の equalizer, $\text{cok}(f - g)$ が f と g の coequalizer であることより従う. \square

補題 2.2.6. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 3 つは同値である.

1. f はモノ射である.
2. $\text{Ker } f = 0$ である.
3. f の像における可換図式

$$\begin{array}{ccc} & \text{Im } f & \\ h \nearrow & & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

において, h は同型射である.

Proof. (1) \Leftrightarrow (2) : 補題 2.1.5 より明らか.

(2) \Rightarrow (3) : $\text{Ker } f = 0$ のとき, 例 2.1.6 より,

$$\text{Cok}(\text{ker } f) = \text{Cok } 0 = \text{id}_X$$

次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & h \nearrow & & \searrow \text{ker}(\text{cok } f) & \\ X & & & & Y \\ & \searrow \text{id}_X & \uparrow \nu & \nearrow f & \\ & & \text{Coim } f = X & & \end{array}$$

において, (AB2) より ν は同型射であるので, $h : X \rightarrow \text{Im } f$ も同型射である.

(3) \Rightarrow (2) : \square

定理 2.2.7. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. f は同型射である.
2. f はモノ射かつエビ射である.

Proof. \Rightarrow : 明らか.

\Leftarrow : 次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Im } f & & \\
 & \nearrow h & \uparrow \nu & \searrow \ker(\text{cok } f) & \\
 X & & & & Y \\
 & \searrow \text{cok}(\ker f) & \downarrow & \nearrow h' & \\
 & & \text{Coim } f & &
 \end{array}$$

において, (AB2) より ν は同型射である. 例 2.1.6 と補題 2.2.6 より, h と h' は同型射であり, $\text{cok}(\ker f) = \text{id}_X, \ker(\text{cok } f) = \text{id}_Y$ である. よって, $f = h' \circ \nu^{-1} \circ h$ も同型射である. \square

定理 2.2.8. \mathcal{A} が Abel 圏であるとき, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ は Abel 圏となる.

Proof. 定理 1.2.4 より, 加法圏であることは示したので, (AB1) と (AB2) を満たすことを示す. \square

一般に次の命題が成立する.

定理 2.2.9.

例 2.2.10. \mathcal{A} が Abel 圏であっても, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ が Abel 圏であるとは限らない.

Proof. $\mathcal{A} = \mathbf{Mod} \mathbb{Z}$ とする. 次の複体 X, Y の間の射 $f: X \rightarrow Y$ を考える.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 f \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathbb{Z}} & & \downarrow & & \\
 Y = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

各 f^i の核をとることで得られる複体は 0 複体である.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

一方, f は次のようなホモトピーによりヌルホモトピックである.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow 0 & & \searrow \text{id}_{\mathbb{Z}} & & \searrow 0 & & & & \\
 Y = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

0 の核は例 2.1.6 より X である. 0 複体と X はホモトピックでないので, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ は Abel 圏でない. \square

2.3 完全列

この節では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.

定義 2.3.1 (完全列). \mathcal{A} における射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (*)$$

が $\text{Im } f = \text{Ker } g$ を満たすとき, Y において完全 (exact) であるという.

定義 2.3.2 (左完全列). \mathcal{A} における射の列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が X, Y において完全であるとき, 左完全列 (left exact sequence) であるという.

定義 2.3.3 (右完全列). \mathcal{A} における射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

が Y, Z において完全であるとき, 右完全列 (right exact sequence) であるという.

定義 2.3.4 (短完全列). \mathcal{A} における射の列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

が左完全かつ右完全であるとき, 短完全列 (short exact sequence) であるという.

定義 2.3.5 (長完全列).

補題 2.3.6. 射の列 $(*)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. $\text{Im } f = \text{Ker } g$ が成立する.
2. $\text{Coim } g = \text{Cok } f$ が成立する.

Proof. \Rightarrow : 像と余像の定義と系 2.1.14 より,

$$\begin{aligned} \text{Im } f = \text{Ker } g &\Leftrightarrow \text{Ker } (\text{cok } f) = \text{Ker } g \\ &\Rightarrow \text{Cok } (\text{ker } g) = \text{Cok } (\text{ker } (\text{cok } f)) = \text{Cok } f \\ &\Leftrightarrow \text{Coim } g = \text{Cok } f \end{aligned}$$

\Leftarrow : 同様に示すことができる. □

定理 2.3.7. 射の列 $(*)$ が Y において完全であるとき,

$$g \circ f = 0$$

Proof. $f : X \rightarrow Y$ に対して, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Im } f & & \\ & \nearrow h & & \searrow \text{ker } (\text{cok } f) & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Y における完全性と定理 2.1.12 より,

$$\ker g = \ker (\operatorname{cok} f)$$

よって,

$$\begin{aligned} g \circ f &= g \circ \ker (\operatorname{cok} f) \circ h \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

2.4 コホモロジー

一般の Abel 圏でコホモロジーを次のように定義する. この節では, \mathcal{A} は Abel 圏であるとする.
 \mathcal{A} の射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が $g \circ f = 0$ を満たすとする. このとき, 核と余核の普遍性より, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \operatorname{Ker} g & & \\ & \nearrow h & \searrow \ker g & \searrow 0 & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow 0 & \searrow \operatorname{cok} f & \nearrow h' & \\ & & \operatorname{Cok} f & & \end{array}$$

f の像を考えると,

$$\begin{aligned} g \circ \operatorname{Im} f &= h' \circ \operatorname{cok} f \circ \ker (\operatorname{cok} f) \\ &= h' \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Im} f & & & & \\ & \searrow \ker (\operatorname{cok} f) & & & \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow 0 & \searrow \operatorname{cok} f & \nearrow h & \\ & & \operatorname{Cok} f & & \end{array}$$

よって, $\ker g$ の普遍性より, 射 $h_{fg} : \operatorname{Im} f \rightarrow \operatorname{Ker} g$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccc} & & \operatorname{Ker} g & & \\ & \nearrow h_{fg} & \searrow \ker g & \searrow 0 & \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \nearrow \ker (\operatorname{cok} f) & \searrow 0 & \nearrow h & \\ \operatorname{Im} f & & \operatorname{Cok} f & & \end{array}$$

このとき, $\text{cok}(h_{fg})$ の codomain とすると, これがコホモロジー群に相当する.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Im } f & \xrightarrow{h_{fg}} & \text{Ker } g & \xrightarrow{\text{cok } h_{fg}} & H_{fg} \\
 & \searrow & \downarrow \text{ker } g & & \\
 X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 & \nearrow \text{ker}(\text{cok } f) & \searrow \text{cok } f & & \\
 & & & & \text{Cok } f
 \end{array}$$

核と余核の普遍性より, このコホモロジーは同型を除いて一意に定まる.

定義 2.4.1 (コホモロジー). \mathcal{A} の複体 $X = \{X^i, d^i\}$ に対して, X の i 次コホモロジー (i -th cohomology) $H^i(X)$ を

$$H^i(X) := \text{cok } h$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Im } d^{i-1} & \xrightarrow{h} & \text{Ker } d^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(X) \\
 & \searrow & \downarrow \text{ker } d^i & & \\
 X^{i-1} & \xrightarrow[d^{i-1}]{} & X^i & \xrightarrow{d^i} & X^{i+1} \\
 & \nearrow \text{ker}(\text{cok } d^{i-1}) & \searrow \text{cok } d^{i-1} & & \\
 & & & & \text{Cok } d^{i-1}
 \end{array}$$

以降では, $g \circ f = 0$ を満たす \mathcal{A} の射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (1)$$

について命題を述べる.

定理 2.4.2. (1) が完全であることと $\text{ker } g \simeq \text{Im } f$ は同値である.

Proof.

□

定義 2.4.3 (非輪状). \mathcal{A} における複体 X が長完全列であるとき, つまり任意の i に対して,

$$H^i(X) = 0$$

が成立するとき, 非輪状 (acyclic) であるという.

定理 2.4.4. 複体の i 次コホモロジー (をとる操作) は加法関手

$$H^i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

を定める.

Proof.

□

定義 2.4.5 (擬同型). $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, コホモロジーに誘導される射

$$H^i(f) : H^i(X) \rightarrow H^i(Y)$$

が任意の i について同型射となると, 擬同型 (quasi-isomorphism) であるという.

定理 2.4.4 より, 次の命題が得られる.

系 2.4.6. 任意の i に対して, 加法関手 $H^i : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ^{*4} が一意に存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^i} & \mathcal{A} \\ p \downarrow & \nearrow H^i & \\ \mathbf{K}(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

ここで, $p : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$ は剰余関手である. 特に, H^0 を $H : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ とあらわす.

Proof. ホモトピー φ によりヌルホモトピックとなる $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, $H^i(f) = 0$ を満たすことをみる. ホモトピーの定義より,

$$f^i = d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^i \circ d_X^i$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ & \swarrow \varphi^i & \downarrow f^i & \searrow \varphi^{i+1} & \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & & \end{array}$$

このとき, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } d_X^i & & & & \\ \downarrow \text{ker } d_X^i & & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ & \swarrow \varphi^i & \downarrow f & \searrow \varphi^{i+1} & \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{\quad} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \\ \downarrow h & \nearrow \text{ker } d_Y^i & & & \\ \text{Ker } d_Y^i & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f^i \circ \text{ker } d_X^i &= (d_Y^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^i \circ d_X^i) \circ \text{ker } d_X^i \\ &= d_Y^{i-1} \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i \\ &= \text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i \end{aligned}$$

^{*4} $H^i : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ と同じ記号であらわしている.

より, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } d_X^i & \xrightarrow{\text{ker } d_X^i} & X^i \\ \text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \downarrow & & \downarrow f^i \\ \text{Ker } d_Y^i & \xrightarrow{\text{ker } d_Y^i} & Y^i \end{array}$$

ここで,

$$\text{cok } h \circ (h \circ \varphi^i \circ \text{ker } d_X^i) = 0$$

より, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } d_X^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(X) \\ \text{ker } d_Y^i \circ h \circ \varphi^i \downarrow & & \downarrow H^i(f) \\ \text{Ker } d_Y^i & \xrightarrow{\text{cok } h} & H^i(Y) \end{array}$$

よって,

$$H^i(f) = 0$$

□

3 完全圈

4 三角圏

第 4 章では, Abel 圏における写像錐とシフト関手に着目して一般化された三角圏を扱う. 第 4.1 節で三角圏の定義から基本性質をいろいろ証明する. 第 4.2 節では三角圏の間の関手を定義して, 随伴で保たれることをみる. 第 4.3 節で複体のホモトピー圏が三角圏となることをみる. 第 4.4 節で三角圏の局所化を紹介する.

4.1 三角圏

前三角圏で成立する命題もあるが, 基本的には三角圏において議論する.

定義 4.1.1 (三角系列). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. このとき, \mathcal{T} における三角系列 (triangle) とは, \mathcal{T} の対象 X, Y, Z と射 $u : X \rightarrow Y, v : Y \rightarrow Z, w : Z \rightarrow TX$ ^{*5} の組 (X, Y, Z, u, v, w) からなる図式

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

である.

記法 4.1.2. 三角系列の名前の由来は次のように三角系列を表記することがあるからである.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \swarrow w & \searrow v \\ & Z & \end{array}$$

ここで波線は $Z \rightarrow TX$ をあらわしている.

定義 4.1.3 (三角系列の射). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. \mathcal{T} の三角系列 $(X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w')$ に対して, 三角系列の射 (morphism of triangles) とは, \mathcal{T} の射 $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y', h : Z \rightarrow Z'$ の組 (f, g, h) であって, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

三角系列の図式は圏をなす. f, g, h がすべて同型射であるとき, 三角系列の射 (f, g, h) は同型射であるといい, 三角系列 $(X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w')$ は同型であるという.

定義 4.1.4 (三角圏). \mathcal{T} を加法圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. 三角系列のなす圏の充満部分圏を Δ と表し, Δ に属する三角系列を完全三角 (exact triangle) ^{*6} という. 組 (\mathcal{T}, Δ) が次の

^{*5} 対象 X と射 f に対して, $T(X)$ を TX , $T(f)$ を Tf , $T^{-1}(X)$ を $-TX$, $T^{-1}(f)$ を $-Tf$ とあらわす.

^{*6} 特三角 (distinguished triangle) ともいう.

条件を満たすとき, (\mathcal{T}, T, Δ) を三角圏 (triangulated category), T をシフト関手 (shift functor) という.

(TR1) Δ は同型で閉じている. すなわち, 完全三角に同型な三角系列は完全三角である.

(TR2) 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して, 三角系列

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

は完全三角である.

(TR3) 任意の射 $f: X \rightarrow Y$ を補完する完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が存在する.

(TR4) 2 つの三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

について, 一方が完全三角であることと他方が完全三角であることは同値である.

(TR5) 2 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

と, ある射 $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y'$ が次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $h: Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の図式を可換にする. ^{*7}

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

(TR6) 3 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow TX$$

$$X \xrightarrow{v \circ u} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow TY$$

^{*7} h が一意であることは課していないことに注意.

に対して, ある射 $Z' \rightarrow Y', Y' \rightarrow X', X' \rightarrow TZ'$ が存在して,

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow TZ'$$

は完全三角であって, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{v \circ u} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow u & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow & & \downarrow Tu \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X'} & & \downarrow \\ Z' & \dashrightarrow & Y' & \dashrightarrow & X' & \dashrightarrow & TZ' \end{array}$$

(TR6) を八面体公理 (octahedron axiom) という. 三角圏の公理から (TR6) を抜いたものを前三角圏 (pretriangulated category) という.

記法 4.1.5. 記法 4.1.2 を用いると, 八面体公理といわれる理由が分かる.

以降では, \mathcal{A} は Abel 圏, \mathcal{T} は三角圏, $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ はシフト関手であるとする.

補題 4.1.6. \mathcal{T} における三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して, 合成 $v \circ u, w \circ v, Tu \circ w$ は 0 である.

Proof. (TR2) と (TR5) より, ある射 $0 \rightarrow Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

よって,

$$v \circ u = 0$$

(TR4) を用いると, $w \circ v = 0$ と $Tu \circ w = 0$ も従う. □

補題 4.1.7. \mathcal{T} が三角圏であるとき, \mathcal{T}^{op} も三角圏である.

Proof. □

定理 4.1.8. シフト関手 T は積と余積を保存する.

Proof. T は自己圏同値であるので, 左随伴と右随伴をもつ. 左随伴は積を保ち, 右随伴は余積を保つことから従う. □

注意 4.1.9. \mathcal{T} が三角圏のとき, \mathcal{T}^{op} も T^{-1} により三角圏となるので, T^{-1} も積と余積を保つ.

定義 4.1.10 (ホモロジカル関手とコホモロジカル関手). 加法関手 $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ が次の条件を満たすとき, ホモロジカル関手 (homological functor) であるという.

- 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$H(X) \xrightarrow{Hu} H(Y) \xrightarrow{Hv} H(Z)$$

は \mathcal{A} において完全である.

双対的に, 関手 $\mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ がホモロジカル関手であるとき, $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ はコホモロジカル関手 (cohomological functor) であるという.

注意 4.1.11. ホモロジカル関手 $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ と任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して, 関手 H^i を

$$H^i := H \circ T^i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定義する. このとき, (TR4) より, 長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(Z) \xrightarrow{H^{i-1}w} H^i(X) \xrightarrow{H^iu} H^i(Y) \xrightarrow{H^iv} H^i(Z) \xrightarrow{H^iw} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が存在する.

定理 4.1.12. $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の 2 つが成立する.

1. hom 関手

$$\text{hom}(A, -) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

はホモロジカル関手である.

2. hom 関手

$$\text{hom}(-, A) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

はコホモロジカル関手である.

Proof. 2 は 1 の双対なので, 1 のみを示す. 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$\text{hom}(A, X) \xrightarrow{u \circ -} \text{hom}(A, Y) \xrightarrow{v \circ -} \text{hom}(A, Z)$$

が完全であることを示す. 補題 4.1.6 より, 任意の $e \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ に対して

$$v \circ u \circ e = 0$$

である. $v \circ f = 0$ を満たす射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)$ に対して, ある射 $h : A \rightarrow X$ が存在して, $f = u \circ h$ を満たすことを示す. (TR2) と (TR4) より, 完全三角

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA \xrightarrow{-\text{id}_{TA}} TA$$

が存在する. (TR4) より, 完全三角

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

が存在する. (TR5) より, ある射 $Th : TA \rightarrow TX$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TA & \xrightarrow{-\text{id}_{TA}} & TA \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow Th & & \downarrow Tf \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \end{array}$$

右の四角の可換性より,

$$Tf = Tu \circ Th$$

である. T は忠実充満なので, ある射 $h : A \rightarrow X$ が存在して,

$$f = u \circ h$$

□

定理 4.1.13 (two-out-of-three). \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

このとき, f, g, h のうち 2 つが同型射であるとき, 残り 1 つも同型射である.

Proof. (TR4) より, f, g が同型射であると仮定しても, 一般性は失われない. (TR4) と定理 4.1.12 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の完全列の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{hom}(A, X) & \longrightarrow & \text{hom}(A, Y) & \longrightarrow & \text{hom}(A, Z) & \longrightarrow & \text{hom}(A, TX) & \longrightarrow & \text{hom}(A, TY) \\ \downarrow f \circ - & & \downarrow g \circ - & & \downarrow h \circ - & & \downarrow Tf \circ - & & \downarrow Tg \circ - \\ \text{hom}(A, X') & \longrightarrow & \text{hom}(A, Y') & \longrightarrow & \text{hom}(A, Z') & \longrightarrow & \text{hom}(A, TX') & \longrightarrow & \text{hom}(A, TY') \end{array}$$

f, g は同型射なので, 五項補題より $h \circ -$ も同型射である. 米田の補題より, Z と Z' は同型である. □

系 4.1.14. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 2 つが成立することは同値である.

- $u : X \rightarrow Y$ は同型射である.
- Z が 0 と同型である

Proof. 仮定と (TR1) で与えられる完全三角に対して, (TR5) を用いると, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow u & & \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow & & \downarrow Tu \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \end{array}$$

定理 4.1.13 より, u が同型射であることと, $Z \rightarrow 0$ が同型射であることは同値である. \square

系 4.1.15. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_Y & & & & \downarrow \text{id}_{Tf} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

このとき, Z と Z' は同型である.

Proof. (TR5) より, ある射 $Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の完全三角の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Tf} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

定理 4.1.13 より, この射 $Z \rightarrow Z'$ は同型射である. \square

定義 4.1.16. 系 4.1.15 より, 三角圏 \mathcal{T} における射 $f : X \rightarrow Y$ に対して,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が完全三角となるような $Z \in \mathcal{T}$ は同型を除いて一意に定まる. Z を f の錐 (cone) といい, $\text{Cone } f$ とあらわす.

系 4.1.17. \mathcal{T} において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 4 つが成立する.

1. v がエピ射であることと, $w = 0$ は同値である.
2. v がモノ射であることと, $u = 0$ は同値である.
3. v がエピ射であることと, u がモノ射であることは同値である.
4. $w = 0$ のとき, $Y \simeq X \oplus Z$ である.

$$X \xrightarrow{u} X \oplus Z \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{0} TX$$

Proof. (1) : まず \Rightarrow を示す. 補題補題 4.1.6 より, $w \circ v = 0$ である. v がエピ射であるとき, $w = 0$ である.

\Leftarrow を示す. 定理 4.1.12 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\text{hom}(TX, A) \xrightarrow{- \circ w} \text{hom}(Z, A) \xrightarrow{- \circ v} \text{hom}(Y, A)$$

は完全列なので, $w = 0$ のとき,

$$- \circ v : \text{hom}(Z, A) \rightarrow \text{hom}(Y, A)$$

はモノ射である. よって, v はエピ射である.

(2) : 1 の双対である. (3) : $h = 0$ と $-h = 0$ が同値であることから従う.

(4) : $w = 0$ であるとき, 1 と 2 より,

$$0 \longrightarrow \text{hom}(Z, A) \xrightarrow{- \circ v} \text{hom}(Y, A) \xrightarrow{- \circ u} \text{hom}(X, A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{hom}(A, X) \xrightarrow{u \circ -} \text{hom}(A, Y) \xrightarrow{v \circ -} \text{hom}(A, Z) \longrightarrow 0$$

は短完全列である. このとき,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列であるので,

$$Y \simeq X \oplus Z$$

□

注意 4.1.18. 系 4.1.17 より, 三角圏において任意のモノ射は分裂モノ射であり, 任意のエピ射は分裂エピ射である. もちろん, 一般の Abel 圏においては成立しない.

注意 4.1.19. 4.1.17 の (4) を直接示すこともできる.

Proof. u が分裂モノ射であることを示す. v が分裂エピ射であることも同様に示される. 仮定の完全三角と (TR2) に (TR3) を用いて, (TR5) より, ある射 $Tu' : TY \rightarrow TX$ が次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{w=0} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv} & TZ \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_{TX} & & \downarrow Tu' & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{-\text{id}_{TX}} & TX & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

よって,

$$Tu' \circ Tu = \text{id}_{TX}$$

が成立する. T は忠実充満なので,

$$u' \circ u = \text{id}_X$$

を満たす $u' : Y \rightarrow X$ が存在する. □

完全三角の直積は完全三角である.

定理 4.1.20. Λ を添え字集合とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次の完全三角が与えられているとする.

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

\mathcal{T} において直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする. このとき, 次の図式は完全三角である.

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{q} T(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$$

ここで,

$$u := \prod_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda, \quad v := \prod_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda, \quad w := \prod_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda$$

Proof. 射 f に対して (TR3) を用いると, f を補完する次の完全三角が存在する. □

双対的に次の命題が成立する.

系 4.1.21. Λ を添え字集合とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次の完全三角が与えられているとする.

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

\mathcal{T} において余直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする. このとき, 次の図式は完全三角である.

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{q} T(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$$

ここで,

$$u := \prod_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda, \quad v := \prod_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda, \quad w := \prod_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda$$

4.2 三角関手

定義 4.2.1 (三角部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を充満加法部分圏とする. \mathcal{T}' が次の条件を満たすとき, \mathcal{T} の三角部分圏 (triangulated subcategory) であるという.

1. \mathcal{T}' は三角圏であり, \mathcal{T}' のシフト関手は \mathcal{T} のシフト関手の \mathcal{T}' への制限である.
2. \mathcal{T}' における完全三角

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

は \mathcal{T} においても完全三角である.

定理 4.2.2. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. \mathcal{T}' は三角部分圏である.
2. 次の 2 つが成立する.
 - (a) \mathcal{T}' はシフトで閉じている. つまり, $\mathcal{T}' = T\mathcal{T}'$ が成立する.
 - (b) \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

において $X, Y \in \mathcal{T}'$ のとき, $Z \in \mathcal{T}'$ である.

Proof. $1 \Rightarrow 2$: (a) は定義から明らかであり, (b) は定義 4.1.16 より従う.

$2 \Rightarrow 1$: (a) と (b) から \mathcal{T}' に三角構造が定まることをみる. (a) より \mathcal{T}' 上にシフト関手 $T: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}'$ が定まる. \mathcal{T}' の完全三角を \mathcal{T} における完全三角であって, 各対象が \mathcal{T}' に属するときと定義する. このとき, (TR3) 以外は \mathcal{T} が三角圏であることから従う. $u: X \rightarrow Y$ に対して, (TR3) が成立することを示す. \mathcal{T} の (TR3) より, ある対象 $Z \in \mathcal{T}$ が存在して, 次の図式は完全三角である.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

(b) より, $Z \in \mathcal{T}'$ が従う. よって, u を補完する完全三角が \mathcal{T}' において存在する. □

定義 4.2.3 (thick 部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. \mathcal{T}' が余直積因子で閉じているとき, thick 部分圏 (thick subcategory) であるという.

定義 4.2.4 (生成). $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ を充満部分圏とする. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ が同型で閉じている充満加法部分圏であって, \mathcal{S} を含む最小のものであるとき, \mathcal{S} は \mathcal{T}' を三角圏として生成する (generate) という.

定理 4.2.5. ホモロジカル関手 $H: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ が任意の i に対して,

$$H^i(X) = 0$$

を満たす $X \in \mathcal{T}$ のなす充満部分圏は \mathcal{T} の thick 部分圏となる.

Proof. 定理 4.2.2 より明らか. □

定義 4.2.6 (三角関手). $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏とする. 加法関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ が次の条件を満たすとき, 三角関手 (triangulated functor) であるという.

1. 自然同型

$$\varphi : F \circ T \simeq T \circ F$$

が存在する.

2. \mathcal{T} の任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{Fw} FTX$$

は \mathcal{T}' における完全三角である.

三角関手の合成はまた三角関手となる.

補題 4.2.7. 三角圏 $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}''$ と三角関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}', F' : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}''$ に対して, 合成

$$F' \circ F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}''$$

は三角関手である.

補題 4.2.8. 三角関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ とホモロジカル関手 $H : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{A}$ に対して, 合成

$$H \circ F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

はホモロジカル関手である.

以降では, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏, $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ を三角関手とする.

定義 4.2.9 (三角同値). 三角関手 F が圏同値であるとき, 三角同値 (triangle equivalence) であるという.

定理 4.2.10. 関手 $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}', G : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}$ が随伴 $F \dashv G$ であるとき, 次の 2 つは同値である.

1. F は三角関手である.
2. G は三角関手である.

Proof. (2) \Rightarrow (1) を示す. 逆も同様に示すことができる. □

系 4.2.11. F が三角同値であるとき, F^{-1} も三角同値である. 特に, $[n] : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ は三角同値である.

4.3 複体のホモトピー圏の三角構造

復習として, 複体のホモトピー圏上の写像錐や標準三角の定義を確認する.

定義 4.3.1 (写像錐). 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, f の写像錐 $\text{Cone } f$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\text{Cone } f^i &:= X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } f}^i &:= \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

写像錐は複体となっている. また,

$$\begin{aligned}g^i &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow X^{i+1} \oplus Y^i \\ h^i &:= (1 \quad 0) : X^{i+1} \oplus Y^i \rightarrow X^{i+1}\end{aligned}$$

は複体の射 $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ と $h : \text{Cone } f \rightarrow X[1]$ を定め, 標準三角という射の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

が定義される.

$\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における標準三角を一般の三角圏における完全三角と定義することで, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ は三角圏の構造をもつ.

補題 4.3.2. 複体の射 $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 次の 3 つが得られる.

1. 標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

が得られる.

2. $g : Y \rightarrow \text{Cone } f$ から標準三角

$$Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{k} \text{Cone } g \xrightarrow{l} Y[1]$$

が得られる.

3. $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ において, 次の三角図式の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{k} & \text{Cone } g & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow \text{id}_{\text{Cone } f} & & \simeq \downarrow \xi & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{h} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \end{array}$$

Proof. (1) : 写像錐の構成より明らか.

(2) : 写像錐の定義より,

$$\begin{aligned}\text{Cone } g &= Y^{i+1} \oplus \text{Cone } f = Y^{i+1} \oplus X^{i+1} \oplus Y^i \\ d_{\text{Cone } g}^i &= \begin{pmatrix} -d_Y^{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \\ 0 & f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

このとき,

$$\text{Cone } f^i \rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, 複体の射 $\text{Cone } f \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. また,

$$\text{Cone } g^i \rightarrow Y[1]^i : (1 \quad 0 \quad 0)$$

とすると, 複体の射 $\text{Cone } g \rightarrow Y[1]$ が定まる.

(3) : まず,

$$\begin{aligned} \xi^i : \text{Cone } g^i &\rightarrow X[1]^i : (0 \quad 1 \quad 0) \\ \zeta^i : X[1]^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} -f^{i+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\xi : \text{Cone } g \rightarrow X[1]$ と $\zeta : X[1] \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. このとき,

$$\xi \circ \zeta = 1$$

であるので, $\zeta \circ \xi$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ がホモトピー同値であることを示す.

$$\varphi^i : \text{Cone } g^i \rightarrow \text{Cone } g^{i-1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} 1 - \zeta \circ \xi &= d_{\text{Cone } g}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_{\text{Cone } g}^i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, $\zeta \circ \xi$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ はホモトピー同値である. □

定理 4.3.3. Abel 圏 \mathcal{A} に対して, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ は三角圏である.

Proof. 三角圏の公理 (TR1) ~ (TR6) を満たすことをみる.

(TR1) : 標準三角に同型な射の列が標準三角となることは明らか.

(TR3) : 写像錐を用いればよい.

(TR2) : 射 $0 : 0 \rightarrow X$ の写像錐を考えると, $\text{Cone } 0 = X$ であるので, 標準三角

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0$$

が得られる. 補題 4.3.2 より, 標準三角

$$X \xrightarrow{\text{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

が得られる.

(TR4) : 補題 4.3.2 より明らか.

(TR5) : 2 つの標準三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Cone } f \xrightarrow{h} X[1]$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} \text{Cone } f' \xrightarrow{h'} X[1]'$$

と, ある射 $\alpha : X \rightarrow X', \beta : Y \rightarrow Y'$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $\gamma : Z \rightarrow Z'$ が存在して, 次の図式を可換にすることを示す.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & \text{Cone } f & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & \text{Cone } f' & \xrightarrow{h'} & X[1]' \end{array}$$

可換であることより, $\beta \circ f$ と $f' \circ \alpha$ の間のホモトピー $\varphi : X \rightarrow Y'$ が存在する.

$$\beta^i \circ f^i - f'^i \circ \alpha^i = d_{Y'}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_X^i$$

ここで,

$$\gamma^i : Z^i \rightarrow Z'^i : \begin{pmatrix} \alpha^{i+1} & 0 \\ \varphi^{i+1} & \beta^i \end{pmatrix}$$

とすると, 複体の射 $\gamma : Z \rightarrow Z'$ を定める. このとき,

$$\begin{aligned} \gamma^i \circ g^i &= \begin{pmatrix} \alpha^{i+1} & 0 \\ \varphi^{i+1} & \beta^i \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^i \end{pmatrix} \\ g'^i \circ \beta^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ (\beta^i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$\gamma \circ g = g' \circ \beta$$

同様に,

$$\alpha[1] \circ h = h' \circ \gamma$$

となるので, 求める図式の可換性が得られる.

(TR6) : 八面体公理において, $Z' = \text{Cone } f, Y' = \text{Cone } (g \circ f), X' = \text{Cone } g$ としてよい. このとき,

$$\begin{aligned}\delta^i : \text{Cone } f^i &\rightarrow \text{Cone } (g \circ f)^i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^i \end{pmatrix} \\ \varepsilon^i : \text{Cone } (g \circ f)^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} f^{i+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\delta : \text{Cone } f \rightarrow \text{Cone } (g \circ f), \varepsilon : \text{Cone } (g \circ f) \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. 射 $\text{Cone } g \rightarrow (\text{Cone } f)[1]$ は合成 $\text{Cone } g \rightarrow Y[1] \rightarrow (\text{Cone } f)[1]$ として定義すれば, 右下の四角形の可換性は明らか. ほかの四角形の可換性も同様に従う.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{Cone } f & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \delta & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & \text{Cone } (g \circ f) & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \text{Cone } g & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Cone } g & \xrightarrow{\eta} & (\text{Cone } f)[1] \end{array}$$

最後に, 最下列の三角形列

$$\text{Cone } f \xrightarrow{\delta} \text{Cone } (g \circ f) \xrightarrow{\varepsilon} \text{Cone } g \xrightarrow{\eta} (\text{Cone } f)[1]$$

が標準三角

$$\text{Cone } f \xrightarrow{\delta} \text{Cone } (g \circ f) \longrightarrow \text{Cone } \delta \longrightarrow (\text{Cone } f)[1]$$

に同型であることを示す. (TR1) より, 最下列の三角形列も標準三角となる.

$$\begin{aligned}\mu^i : \text{Cone } g^i &\rightarrow \text{Cone } \delta^i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \lambda : \text{Cone } \delta^i &\rightarrow \text{Cone } g^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

とすると, 複体の射 $\mu : \text{Cone } g \rightarrow \text{Cone } \delta, \lambda : \text{Cone } \delta \rightarrow \text{Cone } g$ が定まる. このとき,

$$\mu \circ \lambda = 1$$

より, $\lambda \circ \mu$ が $\text{id}_{\text{Cone } g}$ とホモトピー同値であることを示す.

$$\varphi^i : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \circ \mu &= d_{\text{Cone } g}^{i-1} \circ \varphi^i + \varphi^{i+1} \circ d_{\text{Cone } g}^i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, $\lambda \circ \mu$ と $\text{id}_{\text{Cone } g}$ はホモトピー同値である.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{Cone } g & \xrightarrow{\eta} & (\text{Cone } f)[1] \\ \downarrow \text{id}_{\text{Cone } f} & & \downarrow \text{id}_{\text{Cone } (g \circ f)} & & \mu \downarrow \uparrow \lambda & & \downarrow \text{id}_{(\text{Cone } f)[1]} \\ \text{Cone } f & \xrightarrow{\delta} & \text{Cone } (g \circ f) & \longrightarrow & \text{Cone } \delta & \longrightarrow & (\text{Cone } f)[1] \end{array}$$

□

例 4.3.4. Abel 圏 \mathcal{A} に対して, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ は三角圏であるとは限らない.

Proof.

□

定理 4.3.5. 系 2.4.6 で得られた 0 次コホモロジーをとる関手 $H = H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ はホモロジカル関手である. よって, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ における任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して, \mathcal{A} における長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(Y) \xrightarrow{H^i(v)} H^i(Z) \xrightarrow{H^i(w)} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が得られる.

Proof. (TR4) より, 任意の $u \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ から生じる標準三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} \text{Cone } f \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$H^0(Y) \xrightarrow{H^0(v)} H^0(\text{Cone } f) \xrightarrow{H^0(w)} H^1(X)$$

が完全であることとを示せばよい.

□

注意 4.3.6. 定理 4.3.5 と定理 1.2.9 より, $H^i = H \circ [i]$ は i 次コホモロジーをとる関手に一致する.

定理 4.3.7. $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. 任意の i に対して, $H^i(f)$ は同型である. つまり, f は擬同型である.
2. 写像錐 $\text{Cone } f$ は非輪状である. つまり, f は擬同型である.

4.4 三角圏の局所化

この節では, \mathcal{T} を三角圏, $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ をシフト関手, \mathcal{S} は \mathcal{T} の積閉系であるとする.

定義 4.4.1 (三角構造と整合する). \mathcal{S} が積閉系であって, 次の条件をさらに満たすとき, \mathcal{S} は \mathcal{T} と整合する (compatible with the triangulation) という.

(MS4) \mathcal{S} はシフト関手で閉じている. すなわち, 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ と任意の i に対して, $T^i s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(T^i X, T^i Y)$ である.

(MS5) \mathcal{T} における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

と, $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y')$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

このとき, ある射 $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Z, Z')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow s & & \downarrow t & & \downarrow \gamma & & \downarrow Ts \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' \end{array}$$

5 参考文献について

加法圏

三角圏

[NEE01] が三角圏について勉強するときの定番の本である. [Nic17] は三角圏の定義から Verdier 商, Abel 圏のホモトピー圏が三角構造をもつことまで簡潔に紹介されている. [HJ] の 3 章から 6 章までで三角圏について例を用いながら説明している. [中 15] の 6 章には代数的三角圏まで話が載っている.

付録 A 圏の局所化

A.1 圏の局所化

定義 A.1.1 (左局所化). \mathcal{C} を圏, \mathcal{S} を \mathcal{C} における射のクラスとする. \mathcal{S} が次の条件を満たすとき, \mathcal{S} で左局所化が計算可能である (calculus of left fractions) という.

(LF1) : 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\text{id}_X \in \mathcal{S}$ である. また, \mathcal{S} は合成で閉じている. ^{*8}

(LF2) : 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ に対して, ある $Y' \in \mathcal{S}, s' \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y'), f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

(LF3) : $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 次が成立する.

- $W \in \mathcal{S}, s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(W, X)$ が存在して, $f \circ s = g \circ s$ を満たすとき, ある $Z \in \mathcal{S}, t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Z)$ が存在して, $t \circ f = t \circ g$ となる.

$$W \xrightarrow{s} X \xrightarrow[f]{g} Y \xrightarrow{t} Z$$

定義 A.1.2 (右局所化). (LF1), (LF2), (LF3) にそれぞれ双対な (RF1), (RF2), (RF3) を満たすとき, \mathcal{S} で右局所化が計算可能である (calculus of right fractions) という.

左局所化かつ右局所化が計算可能であるとき, \mathcal{S} を積閉系であるという.

定義 A.1.3 (積閉系). \mathcal{C} を圏, \mathcal{S} を \mathcal{C} における射のクラスとする. \mathcal{S} が次の条件を満たすとき, 積閉系 (multiplicative) であるという.

(MS1) : 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\text{id}_X \in \mathcal{S}$ である. また, \mathcal{S} は合成で閉じている.

(MS2) : 任意の $s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, X'), f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ に対して, ある $Y' \in \mathcal{S}, s' \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Y'), f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

双対的に, 任意の $t \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y', Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ に対して, ある $X' \in \mathcal{S}, t' \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(X', X)$ が存在して, 次の図式を可換にする.

^{*8} このとき, \mathcal{S} は \mathcal{C} の部分圏を定める. 射のクラスとこの部分圏を同一視する.

$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(X', X), g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & Y' \\ t' \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

(MS3) : $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, 次の 2 つは同値である.

- ある $W \in \mathcal{S}, s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(W, X)$ が存在して, $f \circ s = g \circ s$ である.
- ある $Z \in \mathcal{S}, s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, Z)$ が存在して, $t \circ f = t \circ g$ である.

$$W \xrightarrow{s} X \xrightarrow[g]{f} Y \xrightarrow{t} Z$$

以降では, \mathcal{S} で \mathcal{C} の左局所化が計算可能であるとする.

定義 A.1.4 (右屋根). 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, ある $s \in \mathcal{S}, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W), s \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(Y, W)$ からなる \mathcal{C} における射の対

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ X & & Y \end{array}$$

からなる組 (f, W, s) を右屋根 (right roof) という.

参考文献

- [HJ] THORSTEN HOLM and PETER JØRGENSEN. Triangulated categories: Definitions, properties and examples.
- [NEE01] AMNON NEEMAN. Triangulated Categories. (AM-148). Princeton University Press, 2001.
- [Nic17] Stefano Nicotra. A brief introduction to triangulated categories, 8 2017.
- [中 15] 宏行 中岡. 圏論の技法：アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数. 日本評論社, 2015.