A_∞ 増強の一意性

よの

2023 年 11 月 4 日

概要

前章で A_∞ 圏から三角圏を構成したが, 任意の三角圏がある A_∞ 圏から構成できるかという疑問が生じる．この問題を A_∞ 増強の存在性という．A_∞ 増強が存在することと, 三角圏が代数的であることが同値であることを示す．

更に, 2 つの三角圏が三角圏同値のとき, それらを生成する 2 つの A_∞ 圏が A_∞ 同値かという疑問が生じる．この問題を A_∞ 増強の一意性という．本章では, この A_∞ 増強が一意であるような A_∞ 圏の条件を考える．

特に断らない限りこの章では, A_∞ 圏は c-unit を持ち, A_∞ 関手と A_∞ 加群は c-unit を保つとする．

目次

1 三角圏の A_∞ 増強

定義 1.1 (A_∞ 増強). 三角圏 $\mathcal{T}$ に対して, ある A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ が存在して三角圏同値

$$\mathcal{T} \simeq \mathrm{Tr}(\mathcal{A})$$

が成立するとき, A_∞ 圏 $\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{T}$ の A_∞ 増強 (A_∞-enhancement for $\mathcal{T}$) という．このとき, $\mathcal{T}$ は A_∞ 増強を持つという．

補題 1.2. 三角圏が代数的であることと, 三角圏が A_∞ 増強を持つことは同値である．

Proof. A_∞-Yoneda の補題より, 任意の A_∞ 圏は dg 圏と A_∞ 擬同型である．三角圏が代数的であることと dg 増強をもつことは同値である．dg 圏が A_∞ 圏とみなせることより同値性は従う． □

$\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ と $\mathrm{Tr}\mathcal{A}$ の構成法より以下の命題が従う．

例えば, $\mathrm{Tr}\mathcal{A} = H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ は $H(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ と同じだけの情報を持っている．

補題 1.3. 次の 2 つは同値である.

1. $\mathrm{Tr}\mathcal{A} = H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ において, 2 つの対象は同型である.
2. $H(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ において, 2 つの対象は同型である.

Proof. シフト関手 $S^\sigma : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}$ が A_∞ 擬同型であることより従う. □

補題 1.4. $\mathcal{A}$ を A_∞ 圏とする. このとき, 三角圏同値

$$H^0(\mathrm{TwTw}\mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}^0(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$$

が存在する.

Proof. $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ の構成法より従う. □

2 A_∞ 増強の一意性

三角圏 $\mathcal{T}$ が A_∞ 増強 $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ をもつとき, A_∞ 増強は A_∞ 擬同値を除いて一意であるかについて考える.

問題 2.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を A_∞ 圏, $\phi : \mathrm{Tr}\mathcal{A} \to \mathrm{Tr}\mathcal{B}$ は三角圏同値であるとする. このとき, ある A_∞ 擬同値 $\varphi : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ が存在して, 次の図式は可換となるか.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tw}\mathcal{A} \arrow[r, dashed, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "H^0"'] & \mathrm{Tw}\mathcal{B} \arrow[d, "H^0"] \\
\mathrm{Tr}\mathcal{A} \arrow[r, "\phi"'] & \mathrm{Tr}\mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

そのためにまず, A_∞ 関手と三角関手に関する自然同型の概念を定義する.

定義 2.2 (リフト). $\varphi : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ を A_∞ 関手, $H^0 : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}, \mathrm{Tw}\mathcal{B} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ をコホモロジーをとる関手, $\phi : \mathrm{Tr}\mathcal{A} \to \mathrm{Tr}\mathcal{B}$ を三角関手とする.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tw}\mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "H^0"'] & \mathrm{Tw}\mathcal{B} \arrow[d, "H^0"] \\
\mathrm{Tr}\mathcal{A} \arrow[r, "\phi"'] & \mathrm{Tr}\mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

合成 $\phi \circ H^0$ と $H^0 \circ \tilde{\phi}$ が次の 2 つを満たすとき, $\phi \circ H^0$ と $H^0 \circ \tilde{\phi}$ は自然同型であるという.

- 任意の $Y \in \mathrm{ObTw}\mathcal{A}$ に対して, $\phi \circ H^0(Y)$ と $H^0 \circ \tilde{\phi}(Y)$ は $\mathrm{Tr}\mathcal{B}$ において同型である. $\mathrm{Tr}\mathcal{B}$ におけるこの同型射を $\theta_Y : \phi \circ H^0(Y) \to H^0 \circ \tilde{\phi}(Y)$ と表す.

- 任意の $\mu^1_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}$ で閉じている射 $a_1 \in \hom^0_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\phi \circ H^0(Y_0) \arrow[r, "\phi\circ H^0(a_1)"] \arrow[d, "\theta_{Y_0}"'] & \phi \circ H^0(Y_1) \arrow[d, "\theta_{Y_1}"] \\
H^0 \circ \tilde{\phi}(Y_0) \arrow[r, "H^0\circ\tilde{\phi}(a_1)"'] & H^0 \circ \tilde{\phi}(Y_1)
\end{tikzcd}$$

このような $\tilde{\phi} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ が存在するとき, $\tilde{\phi}$ を ϕ のリフト (lift) という.

一般にはリフトが存在するとは限らない.

注意 2.3. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を次のような極小 A_∞ 圏とする.

- $H(\mathcal{A})$ の $H(\mathcal{B})$ のいずれにおいても, 相異なる対象は同型でない.
- 三角圏同値 $\phi : \mathrm{Tr}\mathcal{A} \to \mathrm{Tr}\mathcal{B}$ は存在する.
- 三角圏同値 ϕ の充満部分圏への制限 $H(\mathcal{A}) \to H(\mathcal{B})$ は圏同型である.

このとき, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が A_∞ 同型でない限り, ϕ のリフト $\tilde{\phi} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ は存在しない.

Proof. 対偶を示す. ϕ のリフト $\tilde{\phi} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ が存在するとする. このとき, それぞれを制限することで A_∞ 擬同値 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が存在する. 条件より, この A_∞ 擬同値は A_∞ 擬同型である. つまり, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は A_∞ 同型である. □

A_∞ 増強が存在するとき, いつ (A_∞ 擬同値をのぞいて) 一意であるかを考える.

定義 2.4 (形式的な A_∞ 圏). A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ がコホモロジー圏 $H(\mathcal{A})$ と A_∞ 擬同型であるとき, $\mathcal{A}$ は形式的な A_∞ 圏 (formal A_∞-category) であるという.

注意 2.5. $\mathcal{A}$ を形式的な A_∞ 圏とする. **??**より, $\mathcal{A}$ に A_∞ 擬同型な極小 A_∞ 圏 $(\tilde{A})$ が存在する. このとき, $\mu_{\tilde{A}}$ の高次の A_∞ 構造 $\mu^3_{\tilde{A}}, \mu^4_{\tilde{A}}, \cdots$ は全て自明である. **??**より, 三角圏同値

$$\mathrm{Tr}\mathcal{A} \simeq \mathrm{Tr}(H(\mathcal{A}))$$

が存在する. $\mathcal{A}$ が形式的な A_∞ 圏であるとき, $\mathrm{Tr}\mathcal{A}$ は $H(\mathcal{A})$ のみから決定されることを示している.

コホモロジー圏における合成を 2 次の A_∞ 構造とすると, 極小 A_∞ 圏を得ることができる.

定義 2.6 (A_∞ 拡張). 次数付き線形圏 $\mathcal{B}$ に対して, 極小 A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ を次のように定義する.

$(d = 0)$ 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathcal{A} := \mathrm{Ob}\mathcal{B}$
$(d = 1)$ 極小 A_∞ 圏なので $\mu^1_{\mathcal{A}} := 0$
$(d = 2)$ $\mu^2_{\mathcal{A}}$ は次数付き線形圏の合成

$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の A_∞ 拡張 (A_∞-decoration of $\mathcal{B}$) であるという.

定義 2.7 (自明な A_∞ 拡張). 次数付き線形圏 $\mathcal{B}$ の A_∞ 拡張 $\mathcal{A}$ が dg 圏となるとき, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の自明な A_∞ 拡張 (trivial A_∞-decoration of $\mathcal{B}$) であるという.

例 2.8. 極小 A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ のコホモロジー圏 $H(\mathcal{A})$ を dg 圏とみなす. $H(\mathcal{A})$ は $H(\mathcal{A})$ の自明な A_∞ 拡張である.

定義 2.9 (自明な A_∞ 拡張をもつ). 極小 A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ のコホモロジー圏を $H(\mathcal{A})$ とする. 次数付き線形圏 $\mathcal{B}$ の任意の A_∞ 拡張が $H(\mathcal{A})$ と A_∞ 擬同型であるとき, $\mathcal{B}$ は自明な A_∞ 拡張をもつ (have trivial A_∞-decoration) という.

補題 2.10. 極小 A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ のコホモロジー圏を $H(\mathcal{A})$ とする. $H(\mathcal{A})$ が自明な A_∞ 拡張をもつとき, $\mathcal{A}$ は形式的である.

Proof. 自明な A_∞ 拡張をもつとき, $\mathcal{A}$ は $H(\mathcal{A})$ と A_∞ 擬同型である. よって, $\mathcal{A}$ は形式的な A_∞ 圏である. □

定理 2.11. A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ の次数付き線形圏 $H(\mathcal{A})$ は自明な A_∞ 拡張をもつとする. このとき, 三角圏 $\mathcal{T}$ の A_∞ 増強は存在すれば A_∞ 擬同値を除いて一意である.

Proof. 存在性より $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は三角圏 $\mathcal{T}$ の A_∞ 増強である. ある A_∞ 圏 $\mathcal{B}$ が存在して $\mathrm{Tr}\mathcal{B} \simeq \mathcal{T}$ であるとする. つまり, 三角圏同値

$$\phi : \mathrm{Tr}\mathcal{A} \to H^0(\mathcal{B})$$

が存在するとする. このとき, 次数付き圏として圏同値 $H(\mathrm{Tw}\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{B})$ が存在する. $H(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ の充満部分圏 $H(\mathcal{A})$ と圏同値となるような $\mathcal{B}$ の充満部分 A_∞ 圏 $\mathcal{B}'$ をとる.

$$H(\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{B}')$$

補題 2.10 より, A_∞ 圏として

$$\mathcal{A} \simeq H(\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{B}') \cong \mathcal{B}'$$

である. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は A_∞ 擬同値なので, A_∞ 擬同値

$$\tilde{\phi} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}'$$

が存在する. $\mathrm{Tw}\mathcal{B}'$ は $\mathcal{B}'$ の充満部分 A_∞ 圏なので, この埋め込みを $i : \mathrm{Tw}\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ と表す. このとき, 次の図式は定義 2.2 の意味で可換である.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tw}\mathcal{A} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "H^0"] & \mathrm{Tw}\mathcal{B}' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "H^0"] & \mathcal{B} \arrow[d, "H^0"'] \\
\mathrm{Tr}\mathcal{A} \arrow[r, "H^0(\tilde{\phi})"'] & \mathrm{Tr}\mathcal{B}' \arrow[r, hook, "H^0(i)"'] & H^0(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$H^0(i)$ は忠実充満な三角関手なので, $H^0(i) \circ H^0(\tilde{\phi})$ はリフト $i \circ \tilde{\phi}$ をもつ. □