

# $(\infty, 1)$ 圏のモデルについて 2

よの

2024 年 3 月 13 日

## 概要

ホモトピー論の視点から考えると,  $(\infty, 1)$  圏は弱同値を構造として持つことが要請される. 相対圏は Barwick と Kan [BK11a, BK11b] により, ホモトピー論のホモトピー論のモデルとして導入された. 弱同値を持つような圏を相対圏 (relative category) といい, 相対圏のなす圏にモデル構造を入れて,  $(\infty, 1)$  圏のモデルであることを示す. 相対圏のなす圏上のモデル構造は単体的空間の圏上の Rezk モデル構造と Quillen 同値になるように定義された

## 目次

1	相対圏	1
2	細分化関手	4
3	RelCat の性質	7
4	$\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$ の Quillen 同値	8
4.1	(細分化) 分類図式と (細分化) 相対化関手 . . . . .	8
4.2	分類図式と細分化分類図式 . . . . .	9
4.3	細分化相対化関手について . . . . .	11
4.4	命題 4.2 の証明 . . . . .	13
5	相対圏の圏に入るモデル構造	14
5.1	Barwick モデル構造 . . . . .	14

## 1 相対圏

定義 1.1 (相対圏).  $\mathcal{C}$  を圏,  $\mathcal{W}$  を  $\mathcal{C}$  の全ての対象を含む  $\mathcal{C}$  の部分圏とする. このとき, 2 つ組  $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$  を相対圏 (relative category) という.  $\mathcal{C}$  を underlying category,  $\mathcal{W}$  の射を weak equivalence という. 相対圏  $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$  を単に  $\mathcal{C}$  だけで表すこともある.

圏  $\mathcal{C}$  が与えられたとき, 2 つの極端な相対圏の構造が考えられる. 1 つは  $\mathcal{C}$  の全ての射が  $\mathcal{W}$  の射で

ある場合, もう 1 つは恒等射のみが  $W$  の射である場合である.

**定義 1.2 (極大と極小).**  $(\mathcal{C}, W)$  を相対圏とする.  $W = \mathcal{C}$  のとき,  $(\mathcal{C}, W)$  は極大 (maximal) であるという.  $W$  が恒等射以外の射を含まないとき,  $(\mathcal{C}, W)$  は極小 (minimal) であるという. 圏  $\mathcal{C}$  に対する極大相対圏を  $\mathcal{C}_{\max}$ , 極小相対圏を  $\mathcal{C}_{\min}$  と表す.

相対圏の間の関手を定義する.

**定義 1.3 (相対関手).**  $(\mathcal{C}, W), (\mathcal{D}, V)$  を相対圏とする. 関手  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が  $F(W) \subset V$  を満たすとき,  $F : (\mathcal{C}, W) \rightarrow (\mathcal{D}, V)$  を相対関手 (relative functor) という.

**定義 1.4 (相対包含).**  $i : (\mathcal{C}, W) \rightarrow (\mathcal{D}, V)$  を相対関手とする. 関手  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が通常の包含のとき,  $i$  を相対包含 (relative inclusion) という.

**記法 1.5.** 相対圏と相対関手のなす圏を  $\mathbf{RelCat}$  と表す.

相対関手の間の強ホモトピーを定義する.

**定義 1.6 (強ホモトピー).**  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を相対関手とする. 相対関手  $H : \mathcal{C} \times [1]_{\max} \rightarrow \mathcal{D}$  が  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $c$  と射  $f$  に対して,

$$\begin{aligned} H(c, 0) &= F(c), \quad H(c, 1) = G(c) \\ H(f, 0) &= F(f), \quad H(f, 1) = G(f) \end{aligned}$$

を満たすとき,  $H$  を  $F$  から  $G$  への強ホモトピー (strict homotopy) という.  $F$  と  $G$  が強ホモトピーの有限の zigzag で連結されるとき,  $F$  と  $G$  は強ホモトピック (strict homotopic) であるという.

**定義 1.7 (強ホモトピー同値).**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を相対関手とする. ある相対関手  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が存在して,  $GF$  が  $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$  と強ホモトピックかつ  $FG$  が  $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$  と強ホモトピックであるとき,  $F$  を強ホモトピー同値 (strict homotopy equivalence) という. このとき,  $G$  を  $F$  の強ホモトピー逆関手 (strict homotopy inverse) という.

強ホモトピー同値の例として, 強分解レトラクトがある.

**定義 1.8 (強分解レトラクト).**  $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を相対包含とする.  $ri = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$  を満たす相対関手  $r : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  と  $ir$  から  $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$  への強ホモトピー  $S$  の組  $(r, S)$  を  $\mathcal{D}$  から  $\mathcal{C}$  への強分解レトラクト (strict deformation retraction) という. 単に,  $\mathcal{D}$  を  $\mathcal{C}$  の強分解レトラクトということもある.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} & & \\ & \curvearrowright & \parallel & \curvearrowleft & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{i} & \mathcal{D} & \xrightarrow{r} & \mathcal{C} \xrightarrow{i} \mathcal{D} \\ & & \Downarrow S & & \\ & & \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} & & \end{array}$$

**注意 1.9.**  $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を相対包含,  $(r, S)$  を  $\mathcal{D}$  から  $\mathcal{C}$  への強分解レトラクトとする. このとき,  $r$  は  $i$  を強ホモトピー逆関手とする強ホモトピー同値である.

定義 1.10 ((余) 篩).  $i: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を包含関手,  $f: c \rightarrow d$  を  $\mathcal{D}$  の射とする.  $d$  が  $\mathcal{C}$  の対象ならば  $f$  が  $\mathcal{C}$  の射となるときの,  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  における篩 (sieve) という. 双対的に,  $c$  が  $\mathcal{C}$  の対象ならば  $f$  が  $\mathcal{C}$  の射となるときの,  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  における余篩 (cosieve) という.

定義 1.11 (生成される余篩).  $i: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を包含関手とする.  $\mathcal{D}$  における  $\mathcal{C}$  を含む最小の余篩を  $\mathcal{C}$  によって生成される  $\mathcal{D}$  上の余篩 (cosieve on  $\mathcal{D}$  generated by  $\mathcal{C}$ ) といい,  $Z\mathcal{C}$  と表す.

(余) 篩は相対圏の言葉を用いて次のように表せる.

注意 1.12.  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  における篩であることと, ある関手  $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow [1]_{\max}$  が存在して  $\alpha^{-1}(0) = \mathcal{C}$  を満たすことは同値である. 双対的に,  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  における余篩であることと, ある関手  $\beta: \mathcal{D} \rightarrow [1]_{\max}$  が存在して  $\beta^{-1}(1) = \mathcal{C}$  を満たすことは同値である.

定義 1.13 (Dwyer 包含).  $i: (\mathcal{C}, W) \hookrightarrow (\mathcal{D}, V)$  を相対包含とする. 次の条件を満たすとき,  $i$  を Dwyer 包含 (Dwyer inclusion) という.

1.  $\mathcal{C}$  は  $\mathcal{D}$  における篩である.
2.  $\mathcal{C}$  は  $Z\mathcal{C}$  の強分解レトラクトである.

Thomason は小圏の圏上にモデル構造を定義するときに, Dwyer 射のクラスを定義した. のちに, Cisinski はより扱いやすいクラスとして, 擬 Dwyer 射 (pseudo Dwyer map) のクラスを定義した. 相対圏論における Dwyer 射の定義は擬 Dwyer 射の相対版である.

定義 1.14 (Dwyer 射).  $F: (\mathcal{C}, W) \rightarrow (\mathcal{D}, V)$  を相対関手とする.  $F$  が圏同型  $F': (\mathcal{C}, W) \rightarrow (\mathcal{C}', W')$  と Dwyer 包含  $i: (\mathcal{C}', W') \hookrightarrow (\mathcal{D}, V)$  を用いて,  $F = i \circ F'$  と (一意に) 分解できるとき,  $F$  を Dwyer 射 (Dwyer map) という.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, W) & \xrightarrow{F} & (\mathcal{D}, V) \\ & \searrow F' & \nearrow i \\ & (\mathcal{C}', W') & \end{array}$$

Dwyer 射は cofibration のようにふるまう.

補題 1.15. Dwyer 射のクラスはレトラクトで閉じる.

補題 1.16. Dwyer 射のクラスは超限合成で閉じる.

補題 1.17. Dwyer 射のクラスはプッシュアウトで閉じる.

## 2 細分化関手

underlying category が半順序集合 (poset) である相対圏を相対半順序集合 (relative poset) という。相対半順序集合に対する細分化関手 (subdivision functor) の構成は  $\mathbf{RelCat}$  上のモデル構造を定義する上で非常に重要である。

**定義 2.1** (相対半順序集合). 相対圏  $(\mathcal{P}, W)$  の underlying category が半順序集合のとき,  $(\mathcal{P}, W)$  を相対半順序集合 (relative poset) という。

**記法 2.2.** 相対半順序集合のなす  $\mathbf{RelCat}$  の充満部分圏を  $\mathbf{RelPos}$  と表す。

**定義 2.3** (終細分化).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合とする。このとき, 相対半順序集合  $\xi_t \mathcal{P}$  を次のように定義し,  $\mathcal{P}$  の終細分化 (terminal subdivision) という。

- $\xi_t \mathcal{P}$  の対象は  $\mathbf{RelPos}$  における mono 射  $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$  ( $n \geq 0$ )
- $\xi_t \mathcal{P}$  の射は次の図式を可換にする射  $[n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min}$

$$\begin{array}{ccc} [n_1]_{\min} & \xrightarrow{\quad} & [n_2]_{\min} \\ & \searrow x_1 & \swarrow x_2 \\ & \mathcal{P} & \end{array}$$

- $\xi_t \mathcal{P}$  の weak equivalence は上の図式が誘導する射  $x_1(n_1) \rightarrow x_2(n_2)$  が  $\mathcal{P}$  における weak equivalence である上の可換図式における射

相対半順序集合の終細分化は自然な射影を持つ。

**定義 2.4** (終射影関手).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合,  $\xi_t \mathcal{P}$  を  $\mathcal{P}$  の終細分化とする。このとき, 相対関手  $\pi_t : \xi_t \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を次のように定義し,  $\pi_t$  を終射影関手 (terminal projection functor) という。

- $\xi_t \mathcal{P}$  の対象  $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$  に対して,  $\pi_t(x) := x(n)$
- $\xi_t \mathcal{P}$  の射  $[n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min}$  に対して,  $\pi_t([n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min}) := x_1(n_1) \rightarrow x_2(n_2)$

**注意 2.5.**  $\xi_t \mathcal{P}$  における射が weak equivalence であることと,  $\pi_t$  の像が  $\mathcal{P}$  における weak equivalence であることは同値である。

終細分化をとる操作は  $\mathbf{RelPos}$  上の関手を定める。

**定義 2.6** (終細分化関手). 関手  $\xi_t : \mathbf{RelPos} \rightarrow \mathbf{RelPos}$  を次のように定義し,  $\xi_t$  を終細分化関手 (terminal subdivision functor) という。

- $\mathbf{RelPos}$  の対象  $\mathcal{P}$  に対して,  $\xi_t(\mathcal{P}) := \xi_t \mathcal{P}$
- $\mathbf{RelPos}$  の射  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  に対して,  $\xi_t(F) : \xi_t \mathcal{P} \rightarrow \xi_t \mathcal{Q}$  を次のように定める。

- $\xi_t \mathcal{P}$  の対象  $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$  に対して,  $\xi_t(F)(x)$  は  $[n]_{\min} \rightarrow [m]_{\min}$  が epi 射であり, 次の図式を可換にするような一意な mono 射  $x' : [m]_{\min} \rightarrow \mathcal{Q}$

$$\begin{array}{ccc} [n]_{\min} & \twoheadrightarrow & [m]_{\min} \\ x \downarrow & & \downarrow x' \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{F} & \mathcal{Q} \end{array}$$

- $\xi_t \mathcal{P}$  の射  $[n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min}$  に対して,  $\xi_t(F)([n_1]_{\min} \rightarrow [n_2]_{\min})$  は次の図式を可換にするような射  $[m_1]_{\min} \rightarrow [m_2]_{\min}$

$$\begin{array}{ccccc} [n_1]_{\min} & & \xrightarrow{\quad} & & [n_2]_{\min} \\ & \searrow x_1 & & \swarrow x_2 & \\ & & \mathcal{P} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ [m_1]_{\min} & & \xrightarrow{\quad} & & [m_2]_{\min} \\ & \searrow x'_1 & & \swarrow x'_2 & \\ & & \mathcal{Q} & & \end{array}$$

双対的に, 相対半順序集合の始細分化が定義される.

定義 2.7 (始細分化).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合とする. このとき, 相対半順序集合  $\xi_i \mathcal{P}$  を次のように定義し,  $\mathcal{P}$  の始細分化 (initial subdivision) という.

- $\xi_i \mathcal{P}$  の対象は RelPos における mono 射  $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$  ( $n \geq 0$ )
- $\xi_i \mathcal{P}$  の射は次の図式を可換にする射  $[n_2]_{\min} \rightarrow [n_1]_{\min}$

$$\begin{array}{ccc} [n_2]_{\min} & \xrightarrow{\quad} & [n_1]_{\min} \\ & \searrow x_2 & \swarrow x_1 \\ & & \mathcal{P} \end{array}$$

- $\xi_i \mathcal{P}$  の weak equivalence は上の図式が誘導する射  $x_2(0) \rightarrow x_1(0)$  が  $\mathcal{P}$  における weak equivalence である上の可換図式における射

相対半順序集合の始細分化は自然な射影を持つ.

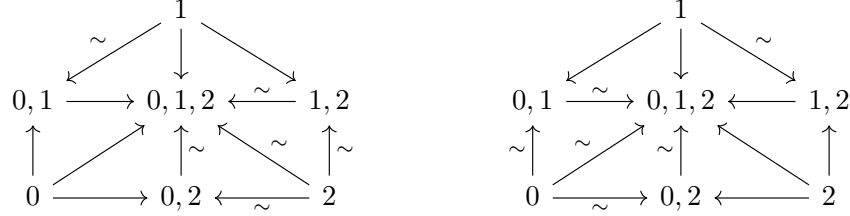
定義 2.8 (始射影関手).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合,  $\xi_i \mathcal{P}$  を  $\mathcal{P}$  の始細分化とする. このとき, 相対関手  $\pi_i : \xi_i \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を次のように定義し,  $\pi_i$  を始射影関手 (initial projection functor) という.

- $\xi_i \mathcal{P}$  の対象  $x : [n]_{\min} \rightarrow \mathcal{P}$  に対して,  $\pi_i(x) := x(0)$
- $\xi_i \mathcal{P}$  の射  $[n_2]_{\min} \rightarrow [n_1]_{\min}$  に対して,  $\pi_i([n_2]_{\min} \rightarrow [n_1]_{\min}) := x_2(0) \rightarrow x_1(0)$

注意 2.9.  $\xi_i \mathcal{P}$  における射が weak equivalence であることと,  $\pi_i$  の像が  $\mathcal{P}$  における weak equivalence であることは同値である.

始細分化をとる操作は RelPos 上の関手を定める．(省略)

例 2.10. 相対半順序集合  $\mathcal{P} = [2]$  に対して,  $\mathcal{P}$  の終細分化 (左) と始細分化 (右) はそれぞれ次のようになる．ここで,  $\leadsto$  は weak equivalence を表す．



注意 2.11. 通常の半順序集合と異なり, 相対半順序集合  $\mathcal{P}$  の細分化は双対的ではない．しかし, 次の自然な同型が存在するという意味で共役的である．

$$(\xi_i \mathcal{P})^{\text{op}} \cong \xi_t(\mathcal{P}^{\text{op}}), \quad (\xi_t \mathcal{P})^{\text{op}} \cong \xi_i(\mathcal{P}^{\text{op}})$$

相対半順序集合の始細分化と終細分化を両方とった相対半順序集合を定義する．

定義 2.12 (2 重細分化).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合とする． $\xi \mathcal{P} := \xi_t \xi_i \mathcal{P}$  を  $\mathcal{P}$  の 2 重細分化 (two-fold subdivision) という．

相対半順序集合の 2 重細分化は自然な射影を持つ．

定義 2.13 (射影関手).  $\mathcal{P}$  を相対半順序集合,  $\xi \mathcal{P}$  を  $\mathcal{P}$  の 2 重細分化とする．このとき, 相対関手  $\pi : \xi \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を

$$\pi := \pi_i \circ \pi_t : \xi_t \xi_i \mathcal{P} \rightarrow \xi_i \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

で定義し,  $\pi$  を射影関手 (projection functor) という．

補題 2.14. 終 (始) 細分化関手は domain が有限相対半順序集合である射の間の強ホモトピーを保つ．

命題 2.15. 任意の  $m, n \geq 0$  に対して, 次の可換図式における全ての射はホモトピー同値である．

$$\begin{array}{ccccc} \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) & \xrightarrow{\pi_t \xi_i} & \xi_i([n]_{\min} \times [m]_{\max}) & \xrightarrow{\pi_i} & [n]_{\min} \times [m]_{\max} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \xi[n]_{\min} & \xrightarrow{\pi_t \xi_i} & \xi_i[n]_{\min} & \xrightarrow{\pi_i} & [n]_{\min} \end{array}$$

ここで, 垂直な射は射影  $[n]_{\min} \times [m]_{\max} \rightarrow [n]_{\min}$  から定まる射である．

命題 2.16.  $\mathcal{Q}$  を相対半順序集合,  $\mathcal{P}$  を  $\mathcal{Q}$  における篩 (または余篩),  $F : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{Q}$  を相対半順序集合の相対包含とする．このとき, 誘導される  $\xi_t : \xi_t \mathcal{P} \hookrightarrow \xi_t \mathcal{Q}$  は Dwyer 射である．

### 3 RelCat の性質

相対圏の直積を定義する.

**定義 3.1 (直積).** 相対圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対して, 相対圏  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  を次のように定義し,  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  の直積 (product) という.

- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  の対象は  $\mathcal{C}$  の対象と  $\mathcal{D}$  の対象の組
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  の射は  $\mathcal{C}$  の射と  $\mathcal{D}$  の射の組
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  の weak equivalence は  $\mathcal{C}$  の weak equivalence と  $\mathcal{D}$  の weak equivalence の組

相対圏のべき対象を定義する.

**定義 3.2 (べき対象).** 相対圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  に対して, 相対圏  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  を次のように定義し,  $\mathcal{D}$  のべき対象 (exponential object) という.

- $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  の対象は相対関手  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$
- $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  の射は相対関手  $\mathcal{C} \times [1]_{\min} \rightarrow \mathcal{D}$
- $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  の weak equivalence は相対関手  $\mathcal{C} \times [1]_{\max} \rightarrow \mathcal{D}$

**命題 3.3.** RelCat は Cartesian 閉である.

*Proof.* 定義より, RelCat は有限直積を持つ.  $\mathcal{C}$  を相対圏とする. 直積をとる関手  $- \times \mathcal{C} : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  が右随伴  $(-)^{\mathcal{C}} : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  を持つことを示せばよい. これは通常の圏の直積とべきの随伴性から従う.  $\square$

強ホモトピーは RelCat の Cartesian 構造と整合性がある.

**命題 3.4.**  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を強ホモトピックな相対関手とする. このとき, 任意の相対圏  $\mathcal{E}$  に対して, 相対関手  $F^*, G^* : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$  は強ホモトピックである.

*Proof.*  $H : \mathcal{C} \times [1]_{\max} \rightarrow \mathcal{D}$  を  $F$  から  $G$  への強ホモトピーとする. このとき,  $H$  は相対関手

$$H^* : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C} \times [1]_{\max}} \cong (\mathcal{E}^{\mathcal{C}})^{[1]_{\max}}$$

を定める.  $H^*$  から, 積とべきの随伴で与えられる相対関手

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}} \times [1]_{\max} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$$

が得られる. この  $H^*$  は  $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$  から  $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$  への強ホモトピーである. よって,  $F^*$  と  $G^*$  は強ホモトピックである.  $\square$

**系 3.5.**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  をホモトピー同値とする. このとき, 任意の相対圏  $\mathcal{E}$  に対して, 相対関手  $F^* : \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$  はホモトピー同値である.

## 4 $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$ の Quillen 同値

第 4 章の目標は、次の命題 4.1 を示すことである。これは [?] で証明された。

命題 4.1. 細分化相対化関手  $K_\xi : \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  と細分化分類図式  $N_\xi : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$  は、 $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$  と  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  の Quillen 同値を定める。

$$\begin{array}{ccc} & K_\xi & \\ \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \\ & N_\xi & \\ & \perp & \end{array}$$

この命題は次の命題の系として得られる。

命題 4.2. 細分化相対化関手  $K_\xi : \mathbf{sSpace}_n \rightarrow \mathbf{RelCat}$  と細分化分類図式  $N_\xi : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}_n$  は、 $\mathbf{sSpace}_{\text{Reedy}}$  と  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  の Quillen 同値を定める。

$$\begin{array}{ccc} & K_\xi & \\ \mathbf{sSpace}_n & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \\ & N_\xi & \\ & \perp & \end{array}$$

### 4.1 (細分化) 分類図式と (細分化) 相対化関手

相対半順序集合を用いて分類図式を次のように定義する。

定義 4.3 (分類図式).  $\mathcal{C}$  を相対圏とする。単体的空間  $NC$  を、任意の  $m, n \geq 0$  に対して集合  $(NC)_{n,m}$  を次のように定義することで定め、 $NC$  を  $\mathcal{C}$  の分類図式 (classification diagram) という。<sup>\*1</sup>

$$(NC)_{n,m} := \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([n]_{\min} \times [m]_{\max}, \mathcal{C})$$

注意 4.6. 構成  $\mathcal{C} \mapsto NC$  は関手  $N : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}$  を定める。この関手  $N$  も分類図式 (classification diagram) という。

<sup>\*1</sup> 分類図式は次のように表すことができる。(この定義で書かれることが多い。) しかし、後で見る細分化関手との合成を考えるとときには、上の定義の見方が重要である。

記法 4.4.  $\mathcal{C}$  を相対圏、 $\mathcal{D}$  を圏とする。関手圏  $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$  において、自然変換の各成分が  $\mathcal{C}$  の weak equivalence である  $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$  の部分圏を  $\text{we}(\mathcal{C}^{\mathcal{D}})$  と表す。

定義 4.5 (分類図式).  $\mathcal{C}$  を相対圏とする。単体的空間  $NC$  を、任意の  $n \geq 0$  に対して単体的集合を次のように定義することで定め、 $NC$  を  $\mathcal{C}$  の分類図式 (classification diagram) という。ここで右辺の  $N$  は通常の圏の脈体である。

$$(NC)_n := N(\text{we}(\mathcal{C}^{[n]}))$$



定義 4.7 (相対化関手). 普遍随伴の一般論より, 分類図式  $N$  は左随伴  $K : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  を持つ. この関手  $K$  を相対化関手 (relativization functor) <sup>\*2</sup> という.

相対化関手を具体的に書き下すと次のようになる.

注意 4.8. 任意の  $m, n \geq 0$  において,  $\Delta[n]^t \times \Delta[m]$  に対して次が成立する.

$$K(\Delta[n]^t \times \Delta[m]) = [n]_{\min} \times [m]_{\max}$$

細分化関手との合成をとることで, 細分化分類図式と細分化相対化関手が定まる.

定義 4.9 (細分化分類図式).  $\mathcal{C}$  を相対圏とする. 単体的空間  $N_\xi \mathcal{C}$  を, 任意の  $m, n \geq 0$  に対して集合  $N_\xi \mathcal{C}_{n,m}$  を次のように定義することで定め,  $N_\xi \mathcal{C}$  を  $\mathcal{C}$  の細分化分類図式 (subdivision classification diagram) という.

$$(N_\xi \mathcal{C})_{n,m} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C})$$

定義 4.10 (細分化相対化関手). 普遍随伴の一般論より, 細分化分類図式  $N_\xi$  は左随伴  $K_\xi : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  を持つ. この関手  $K_\xi$  を細分化相対化関手 (subdivision relativization functor) という.

細分化相対化関手を具体的に書き下すと次のようになる.

注意 4.11. 任意の  $m, n \geq 0$  において,  $\Delta[n]^t \times \Delta[m] \in \mathbf{sSpace}$  に対して,

$$K_\xi(\Delta[n]^t \times \Delta[m]) := \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})$$

## 4.2 分類図式と細分化分類図式

分類図式と細分化分類図式の間関係を見る.

注意 4.12.  $\xi, \mathrm{Id} : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  は自然変換  $\pi : \xi \rightarrow \mathrm{Id}$  を定める.

補題 4.13. 自然変換  $\pi : \xi \rightarrow \mathrm{Id}$  から定まる自然変換  $\pi^* : N \rightarrow N_\xi$  は vertical weak equivalence である.

*Proof.* 任意の相対圏  $\mathcal{C}$  と  $n \geq 0$  に対して, 単体的集合の射

$$\pi_n^* : (N\mathcal{C})_n \rightarrow (N_\xi \mathcal{C})_n$$

が Kan weak equivalence であることを示せばよい. 定義より,

$$\begin{aligned} (N\mathcal{C})_{n,m} &:= \mathrm{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([n]_{\min} \times [m]_{\max}, \mathcal{C}) \\ (N_\xi \mathcal{C})_{n,m} &:= \mathrm{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C}) \end{aligned}$$

---

<sup>\*2</sup> この用語は一般的には (英語を含めて) 用いられておらず, 本稿独自の言葉である. のちに定義される細分化分類図式や細分化相対化関手も同様である.

である。ここで、単体的空間  $F_n\mathcal{C}$  と  $\overline{F}_n\mathcal{C}$  をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned}(F_n\mathcal{C})_{m,p} &:= \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([n]_{\min} \times [m]_{\max}, \mathcal{C}^{[p]_{\max}}) \\ (\overline{F}_n\mathcal{C})_{m,p} &:= \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([n]_{\min} \times [m]_{\max}, \mathcal{C}^{[0]_{\max}})\end{aligned}$$

包含  $[0]_{\max} \hookrightarrow [p]_{\max}$  は単体的空間の射

$$\overline{F}_n\mathcal{C} \rightarrow F_n\mathcal{C}$$

を定める。同様に、単体的空間  $G_n\mathcal{C}$  と  $\overline{G}_n\mathcal{C}$  をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned}(G_n\mathcal{C})_{m,p} &:= \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C}^{[p]_{\max}}) \\ (\overline{G}_n\mathcal{C})_{m,p} &:= \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C}^{[0]_{\max}})\end{aligned}$$

同様に、包含  $[0]_{\max} \hookrightarrow [p]_{\max}$  は単体的空間の射

$$\overline{F}_n\mathcal{C} \rightarrow F_n\mathcal{C}$$

を定める。積とべきの随伴性と自然変換の成分  $\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \rightarrow [n]_{\min} \times [m]_{\max}$  から、次の射が定まる。

$$\begin{aligned}(F_n\mathcal{C})_{m,p} &= \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([n]_{\min} \times [m]_{\max}, \mathcal{C}^{[p]_{\max}}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([p]_{\max}, \mathcal{C}^{[n]_{\min} \times [m]_{\max}}) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}([p]_{\max}, \mathcal{C}^{\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C}^{[p]_{\max}}) \\ &= (G_n\mathcal{C})_{m,p}\end{aligned}$$

命題 2.15 より、 $\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \rightarrow [n]_{\min} \times [m]_{\max}$  は強ホモトピックである。命題 3.4 より、 $\mathcal{C}^{[n]_{\min} \times [m]_{\max}} \rightarrow \mathcal{C}^{\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})}$  は強ホモトピックである。よって、 $m$  を固定して  $p$  を動かすと、 $(F_n\mathcal{C})_m \rightarrow (G_n\mathcal{C})_m$  は Kan weak equivalence である。また、単体的集合の同型

$$(N\mathcal{C})_n \cong \text{diag}(\overline{F}_n\mathcal{C}), (N_\xi\mathcal{C})_n \cong \text{diag}(\overline{G}_n\mathcal{C})$$

が成立する。よって、 $(N\mathcal{C})_n \rightarrow (N_\xi\mathcal{C})_n$  は単体的集合の weak equivalence である。  $\square$

右随伴  $N_\xi$  が cofibration を保つことを示す。

補題 4.14. 細分化分類図式  $N_\xi : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}$  は Dwyer 射を単体的空間の mono 射にうつす。

*Proof.*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を Dwyer 射とする。まず、 $F$  が相対半順序集合の相対包含である場合を考える。このとき、任意の  $m, n \geq 0$  に対して、集合の射

$$F^* : (N_\xi\mathcal{C})_{n,m} \rightarrow (N_\xi\mathcal{D})_{n,m}$$

が mono 射であることを示せばよい。つまり、次の射が集合の mono 射であることを示せばよい。

$$F^* : \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{RelCat}}(\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}), \mathcal{D})$$

ここで、 $F$  は相対包含なので、 $F^*$  は集合の mono 射である。  $\square$

命題 4.15. 細分化分類図式  $N_\xi : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}$  は  $\mathbf{RelCat}$  の強ホモトピックな相対関手を  $\mathbf{sSpace}$  のホモトピックな単体的空間の射にうつす.

*Proof.*  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を相対関手,  $H : \mathcal{C} \times [1]_{\max} \rightarrow \mathcal{D}$  を  $F$  から  $G$  への強ホモトピーとする.  $H$  に  $N_\xi$  を作用させると, 単体的空間の射

$$N_\xi(\mathcal{C} \times [1]_{\max}) \rightarrow N_\xi(\mathcal{D})$$

を得る.  $N_\xi$  は右随伴なので直積を保つ.

$$N_\xi(\mathcal{C}) \times N_\xi[1]_{\max} \cong N_\xi(\mathcal{C} \times [1]_{\max})$$

また, 自然な単体的空間の射  $\Delta[1]^t \rightarrow N_\xi[1]_{\max}$  は単体的空間の射

$$N_\xi(\mathcal{C}) \times \Delta[1]^t \rightarrow N_\xi(\mathcal{C}) \times N_\xi[1]_{\max}$$

を定める. これらの合成

$$N_\xi(\mathcal{C}) \times \Delta[1]^t \rightarrow N_\xi(\mathcal{D})$$

は  $N_\xi(\mathcal{C})$  から  $N_\xi(\mathcal{D})$  へのホモトピーである. □

単体的空間のホモトピー同値が vertical weak equivalence であることと合わせると, 次の系を得る.

系 4.16. 細分化分類図式  $N_\xi : \mathbf{RelCat} \rightarrow \mathbf{sSpace}$  は  $\mathbf{RelCat}$  のホモトピー同値を  $\mathbf{sSpace}$  の vertical weak equivalence にうつす.

### 4.3 細分化相対化関手について

記法 4.17. 単体的空間  $\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  に対して, 次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} \Delta[n, m] &:= \Delta[n]^t \times \Delta[m] \\ \partial\Delta[n, m] &:= \partial\Delta[n] \times \Delta[m]^t \cup \Delta[n] \times \partial\Delta[m]^t \end{aligned}$$

命題 4.18.  $K_\xi : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  は包含  $\partial\Delta[n, m] \hookrightarrow \Delta[n, m]$  を Dwyer 射にうつす.

*Proof.*  $K_\xi(\partial\Delta[n, m]) \rightarrow K_\xi(\Delta[n, m])$  が Dwyer 射であることを示せばよい. 注意 4.11 より,  $K_\xi(\Delta[n, m]) = \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})$  である. 始細分化関手  $\xi_i$  に対しても関手  $K_{\xi_i} : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  を同様に定義する.

$$K_{\xi_i}(\Delta[n, m]) := \xi_i([n]_{\min} \times [m]_{\max})$$

この関手も同様に右随伴を持つので,  $K_{\xi_i}$  は余極限を保つ. また, 定義より次が成立する.

$$\xi_t K_{\xi_i}(\Delta[n, m]) = \xi_t \xi_i([n]_{\min} \times [m]_{\max}) = \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) = K_\xi(\Delta[n, m])$$

次に、相対関手  $K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m]) \rightarrow K_{\xi_i}(\Delta[n, m])$  が命題 2.16 の仮定を満たすことを示す。この仮定を満たすとき、

$$\xi_t K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m]) \rightarrow \xi_t K_{\xi_i}(\Delta[n, m]) = K_{\xi}(\Delta[n, m])$$

は Dwyer 射である。まず、相対半順序集合  $[n]_{\min} \times [m]_{\max}$  の部分相対半順序集合  $\mathcal{P}$  を次のように定義する。

- $\mathcal{P}$  の対象は  $[a]_{\min} \subset [n]_{\min}$  と  $[b]_{\max} \subset [m]_{\max}$  を満たす  $[a]_{\min}$  と  $[b]_{\max}$  の直積  $[a]_{\min} \times [b]_{\max}$
- $\mathcal{P}$  の任意の対象  $[a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max}, [a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}$  に対して、射はそれぞれの包含が定める射  $[a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max} \rightarrow [a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}$

$\mathcal{P}$  の対象  $[a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max}, [a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}$  が  $[a_1]_{\min} \cap [a_2]_{\min} \neq \emptyset$  かつ  $[b_1]_{\max} \cap [b_2]_{\max} \neq \emptyset$  を満たすとき、

$$([a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max}) \cap ([a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}) = ([a_1]_{\min} \cap [a_2]_{\min}) \cap ([b_1]_{\max} \cap [b_2]_{\max})$$

である。つまり、 $\mathcal{P}$  は共通部分をとる操作で閉じる。 $\xi_i$  や  $\xi$  を作用させても同じように共通部分をとる操作で閉じる。

$$\begin{aligned} \xi_i([a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max}) \cap \xi_i([a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}) &= \xi_i([a_1]_{\min} \cap [a_2]_{\min}) \cap \xi_i([b_1]_{\max} \cap [b_2]_{\max}) \\ \xi([a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max}) \cap \xi([a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}) &= \xi([a_1]_{\min} \cap [a_2]_{\min}) \cap \xi([b_1]_{\max} \cap [b_2]_{\max}) \end{aligned}$$

よって、 $K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m])$  は次のように表せる。

$$K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m]) = \bigcup_{a \neq n, b \neq m} \xi_i([a]_{\min} \times [b]_{\max})$$

$\mathcal{P}$  の射  $f : [a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max} \rightarrow [a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max}$  に対して、 $\xi_i f$  は相対包含かつ、 $\xi_i([a_1]_{\min} \times [b_1]_{\max})$  は  $\xi_i([a_2]_{\min} \times [b_2]_{\max})$  における余ふるいである。よって、 $K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m])$  は  $K_{\xi_i}(\Delta[n, m])$  の余ふるいなので、命題 2.16 の仮定を満たす。

以上より、 $\xi_t K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m]) \rightarrow K_{\xi}(\Delta[n, m])$  は Dwyer 射である。最後に、 $K_{\xi}(\partial\Delta[n, m]) = \xi_t K_{\xi_i}(\partial\Delta[n, m])$  であることを示す。(途中)  $\square$

左随伴が cofibration を保つことを示す。

命題 4.19.  $K_{\xi} : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{RelCat}$  は単体的空間の mono 射を相対半順序集合の Dwyer 射にうつす。

*Proof.*  $X \hookrightarrow Y$  を単体的空間の mono 射とする。単体的空間  $Y$  に対して、 $i + j \leq n$  を満たす非退化な  $(i, j)$  両単体のなす単体的空間を  $Y_n (\subset Y)$  と表す。このとき、 $X \hookrightarrow Y$  は mono 射なので

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{n \geq 1} (Y^n \cup X) \\ K_{\xi} Y &= \bigcup_{n \geq 1} K_{\xi} (Y^n \cup X) \end{aligned}$$

である。(途中)

□

命題 4.20. 随伴  $(K_\xi \dashv N_\xi)$  の単位射  $\eta_\xi : \text{Id} \rightarrow N_\xi K_\xi$  は vertical weak equivalence である.

*Proof.* 任意の単体的空間  $X$  に対して,  $\eta_\xi : X \rightarrow N_\xi K_\xi(X)$  が vertical weak equivalence であることを示せばよい. まず,  $X = \Delta[n, m]$  のときを示す. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[n, m] & \xrightarrow{\eta_\xi} & N_\xi K_\xi(\Delta[n, m]) & \xlongequal{\quad} & N_\xi \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \\ \eta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ NK(\Delta[n, m]) & \xrightarrow{\pi^*} & N_\xi K(\Delta[n, m]) & \xlongequal{\quad} & N_\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \end{array}$$

ここで,  $\eta$  は随伴  $(K \dashv N)$  の単位射である.  $N$  は右随伴で極限を保つので,

$$NK(\Delta[n, m]) = N([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \cong N([n]_{\min}) \times N([m]_{\max})$$

であり,  $\Delta[n, m]$  と  $NK(\Delta[n, m])$  は vertical weak equivalence である (らしい). 補題 4.13 より,  $\pi^* : NK(\Delta[n, m]) \rightarrow N_\xi K(\Delta[n, m])$  は vertical weak equivalence である. 命題 2.15 より,  $\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \rightarrow [n]_{\min} \times [m]_{\max}$  は weak equivalence である.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  における weak equivalence の定義より,  $\pi_* : N_\xi \xi([n]_{\min} \times [m]_{\max}) \rightarrow N_\xi([n]_{\min} \times [m]_{\max})$  は vertical weak equivalence である. 2-out-of-3 より,  $\eta_\xi : \Delta[n, m] \rightarrow N_\xi K_\xi(\Delta[n, m])$  は vertical weak equivalence である.

次に, 一般の単体的空間  $X$  に対して示す. 命題 4.19 の証明で用いた記号を用いる.  $X = \cup_n X^n$  とし, 任意の  $n \geq 0$  に対して

$$\eta_\xi : X^n \rightarrow N_\xi K_\xi X^n$$

が weak equivalence であることを示せばよい.

□

系 4.21. 単体的空間の射  $f$  が vertical weak equivalence であることと,  $N_\xi K_\xi f$  が vertical weak equivalence であることは同値である.

#### 4.4 命題 4.2 の証明

命題 4.2 を示す.

*Proof.* 命題 4.2 まず,  $K_\xi : \mathbf{sSpace} \rightleftarrows \mathbf{RelCat} : N_\xi$  が随伴であることは定義 (と普遍随伴の一般論) から従う.

次に,  $(K_\xi \dashv N_\xi)$  が Quillen 随伴であることを示す. 命題 4.19 より, 左随伴  $K_\xi$  は cofibration を保つ. 右随伴が fibration を保つことは,  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  における fibration の定義から従う.

最後に,  $(K_\xi, N_\xi)$  が Quillen 同値であることを示す. 任意の単体的空間  $X$  と相対圏  $Y$  に対して,  $K_\xi(X) \rightarrow Y$  が  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  における weak equivalence であることと,  $X \rightarrow N_\xi(Y)$  は  $\mathbf{sSpace}_{\text{Reedy}}$

における weak equivalence であることが同値であることを示せばよい.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  における weak equivalence の定義より,  $N_\xi K_\xi(X) \rightarrow N_\xi(Y)$  が vertical weak equivalence であることと,  $X \rightarrow N_\xi(Y)$  が vertical weak equivalence であることが同値であることを示せばよい. 命題 4.20 より, 次の図式を考えるとこの同値性は明らかである.

$$\begin{array}{ccc} & N_\xi(Y) & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ N_\xi K_\xi(X) & \xleftarrow{\eta_\xi} & X \end{array}$$

□

Quillen 同値であることは次のように示すこともできる.

注意 4.22.  $\mathbf{sSpace}_{\text{Reedy}}$  において, 任意の対象 (単体的空間) はコファイブラントである. よって, 任意の単体的空間  $X$  に対して, 単体的空間の射  $X \rightarrow N_\xi(K_\xi(X))^f$  が vertical weak equivalence であることを示す. 命題 4.20 より,  $X \rightarrow N_\xi K_\xi(X)$  は vertical weak equivalence である.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  におけるファイブラント置換  $K_\xi(X) \rightarrow (K_\xi(X))^f$  は trivial fibration である.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  における weak equivalence の定義より,  $N_\xi K_\xi(X) \rightarrow N_\xi(K_\xi(X))^f$  は vertical weak equivalence である. weak equivalence は合成で閉じるので,  $X \rightarrow N_\xi(K_\xi(X))^f$  は vertical weak equivalence である.

もう一方も, 命題 4.20 を用いて示すことができる.

## 5 相対圏の圏に入るモデル構造

相対圏に fibration や cofibration の情報はない. [?] では, 相対圏の圏上のモデル構造は単体的空間の圏上の Reedy モデル構造と Quillen 同値になるようにして定められた. このことは??で証明しているが, ほかの章と体裁を合わせるために, 相対圏の圏上の Barwick モデル構造を定義する.

### 5.1 Barwick モデル構造

定義 5.1 (Barwick モデル構造).  $\mathbf{RelCat}$  には次のモデル構造が存在する. これを  $\mathbf{RelCat}$  上の Barwick モデル構造といい,  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  と表す.

- weak equivalence は  $N_\xi$  での像が vertical weak equivalence である相対関手
- fibration は  $N_\xi$  での像が Reedy fibration である相対関手
- cofibration は Dwyer 射

注意 5.2.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  において, 任意の相対半順序集合はコファイブラントである. ファイブラントの明示的な表示は知られていない.

注意 5.3.  $\mathbf{RelCat}_{\text{Bar}}$  は相対半順序集合の Dwyer 射を generating cofibration とするコファイブラ

ント生成なモデル圏である. generating trivial cofibration の集合の明示的な表示は知られていない.

## 参考文献

- [BK11a] C. Barwick and D. M. Kan. A characterization of simplicial localization functors, 2011.
- [BK11b] C. Barwick and D. M. Kan. Relative categories: Another model for the homotopy theory of homotopy theories, 2011.