$\mathbf{Top}$ 上の Quillen モデル構造と Strøm モデル構造

よの

2024 年 3 月 7 日

概要

位相空間の圏にモデル構造を入れるとき, weak equivalence として弱ホモトピー同値 (weak homotopy equivalence) とホモトピー同値 (homotopy equivalence) の 2 つが考えられる. 実際, 弱ホモトピー同値を weak equivalence とするモデル構造として Quillen モデル構造が, ホモトピー同値を weak equivalence とするモデル構造として Strøm モデル構造がある. Quillen モデル構造は [Qui67] で, Strøm モデル構造は [Str72] でそれぞれ証明された.

目次

1 Quillen モデル構造

定義 1.1 (Quillen モデル構造). $\mathbf{Top}$ には次のモデル構造が存在する. これを $\mathbf{Top}$ 上の Quillen モデル構造[*1] といい, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と表す.

- weak equivalence は位相空間の弱ホモトピー同値
- fibration は Serre ファイブレーション
- cofibration は relative cell complex のレトラクト

注意 1.2. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ において, 任意の対象 (位相空間) はファイブラントであり, 任意の CW 複体のレトラクトはコファイブラントである.

[*1] 古典的 (classical) モデル構造や Quillen-Serre モデル構造, q モデル構造と呼ばれることもある.

注意 1.3. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ は

$$\begin{aligned} I &:= \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n \mid n \geq 0\}, \\ J &:= \{D^n \times \{0\} \hookrightarrow D^n \times I \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

をそれぞれ generating cofibration, generating trivial cofibration の集合とするコファイブラント生成なモデル圏である.

2 Strøm モデル構造

Top 上の Quillen モデル構造における weak equivalence は弱ホモトピー同値であるが, Strøm モデル構造はホモトピー同値を weak equivalence とするようなモデル構造である.

定義 2.1 (Strøm モデル構造). **Top** には次のモデル構造が存在する. これを **Top** 上の Strøm モデル構造[*2] といい, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ と表す.

- weak equivalence は位相空間のホモトピー同値
- fibration は Hurewicz ファイブレーション
- cofibration は閉 Hurewicz コファイブレーション

注意 2.2. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ において, 任意の対象 (位相空間) はファイブラントかつコファイブラントである.

注意 2.3. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ はコファイブラント生成なモデル圏ではない.

3 $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ の Quillen 随伴

恒等関手による $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ の Quillen 随伴が定まる.

命題 3.1. 恒等関手 $\mathrm{Id} : \mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}} \to \mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ と恒等関手 $\mathrm{Id} : \mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}} \to \mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ は, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と $\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\mathrm{Id} : \mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}} : \mathrm{Id}$$

Proof. 右随伴が weak equivalence と fibration を保つことを示す.

まず, 任意のホモトピー同値 ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ における weak equivalence) は弱ホモトピー同値 ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ における weak equivalence) である.

次に, 任意の Hurewicz ファイブレーション ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ における fibration) は Serre ファイブレーション ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ における fibration) である. □

[*2] Hurewicz モデル構造や h モデル構造と呼ばれることもある.

注意 3.2. 命題 3.1 の Quillen 随伴 $\mathrm{Id} : \mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}} : \mathrm{Id}$ は Quillen 同値ではない.

Proof. 命題 3.1 の Quillen 随伴が Quillen 同値であると仮定する.

このとき, 任意の CW 複体のレトラクト ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ におけるコファイブラント) X と位相空間 ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ におけるファイブラント) Y に対して, $X \to Y$ が弱ホモトピー同値 ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ における weak equivalence) であることと, ホモトピー同値 ($\mathbf{Top}_{\mathrm{Strøm}}$ における weak equivalence) であることは同値である. しかし, CW 複体とホモトピー同値であるが弱ホモトピー同値ではない位相空間は存在するので矛盾する. □

4 $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ と $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ の Quillen 同値

モデル圏 $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ のホモトピー圏は CW 複体上の古典的なホモトピー圏と一致するので, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ は CW 複体のホモトピー論を表していると思える. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ の間の特異単体と幾何学的実現は Quillen 同値を定める. (命題 4.1) これは Kan 複体のホモトピー仮説 (homotopy hypothesis) の主張 (の一部) である. これは, $(\infty, 1)$ 圏論において $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ と $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ が $(\infty, 0)$ 圏のなす $(\infty, 1)$ 圏のモデルとみなせることを意味している.

第 4 章の目標は次の命題 4.1 を証明することである.

命題 4.1. 幾何学的実現 $|-| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ と特異単体 $\mathrm{Sing} : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$ は, $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ と $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ の Quillen 同値

$$|-| : \mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}} : \mathrm{Sing}$$

を定める.

証明のために, いくつか準備をする. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ はコファイブラント生成なモデル圏なので, generating (trivial) cofibration について考えればよいが, より広いクラスに対して成立する命題についてはそれを証明する.

まず, 右随伴が fibration を保つことを示す.

補題 4.2 (Tag 021V kerodon)**.** 特異単体は Serre ファイブレーションを Kan ファイブレーションにうつす.

より強く, 次のことが言える.

補題 4.3. 位相空間の連続写像 $f : X \to Y$ が Serre ファイブレーションであることと, 単体的集合の射 $\mathrm{Sing}(f) : \mathrm{Sing}(X) \to \mathrm{Sing}(Y)$ が Kan ファイブレーションであることは同値である.

Proof. 補題 4.2 の逆を示す. $\mathrm{Sing}(f) : \mathrm{Sing}(X) \to \mathrm{Sing}(Y)$ を Kan ファイブレーションとする. 任意の $n \geq 0$ に対して, $\mathrm{Sing}(f)$ は緩射

$$\{0\} \times \Delta[n] \hookrightarrow \Delta[1] \times \Delta[n]$$

に対して RLP を持つ．よって, 位相空間の連続写像 $f : X \to Y$ は

$$|\{0\} \times \Delta[n]| \hookrightarrow |\Delta[1] \times \Delta[n]|$$

に対して RLP を持つ．幾何学的実現は有限直積と交換し, $|\partial\Delta[n]| \cong S^{n-1}$ かつ $|\Delta[n]| \cong D^n$ である．よって, この射は **Top** における射

$$\{0\} \times D^n \hookrightarrow [0,1] \times D^n$$

と同一視できる．よって, f は Serre ファイブレーションである． □

右随伴が generating cofibration を保つことを示す．

補題 4.4. 幾何学的実現は $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ における generating cofibration を $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ における generating cofibration にうつす．

Proof. $i : \partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ を $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ における generating cofibration とする．i の幾何学的実現をとる．$|\partial\Delta[n]| \cong S^{n-1}$ かつ $|\Delta[n]| \cong D^n$ である．このとき, $|i| : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ は $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ における generating cofibration である． □

最後に, Quillen 同値を示すために必要な命題を示す．

補題 4.5. X を単体的集合とする．このとき, 随伴 $(|-| \dashv \mathrm{Sing})$ の単位射

$$\eta_X : X \to \mathrm{Sing}(|X|)$$

は単体的集合の弱ホモトピー同値である．

系 4.6. X を位相空間とする．このとき, 随伴 $(|-| \dashv \mathrm{Sing})$ の余単位射

$$\mu_X : |\mathrm{Sing}(X)| \to X$$

は位相空間の弱ホモトピー同値である．

命題 *4.1* の証明．Quillen 随伴であることは, 補題 4.2 と補題 4.4 から従う．Quillen 同値であることは, 補題 4.5 と系 4.6 から従う． □

参考文献

[Qui67] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[Str72] Arne Strøm. The homotopy category is a homotopy category, 1972.