Bridgeland 安定性

よの

2023 年 8 月 16 日

概要

三角圏の t 構造について簡単に復習し, Abel 圏の安定性条件を見たあと, 三角圏の安定性条件を考える.

目次

1 t 構造

$\mathcal{D}$ を三角圏, n を整数とする.

定義 1.1 (拡大). $\mathcal{D}$ の充満部分圏 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対して

$$X \to D \to Y \to X[1] \quad (X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y})$$

が完全三角となるような $D \in \mathcal{D}$ のなす $\mathcal{D}$ の部分圏を $\mathcal{X}$ による $\mathcal{Y}$ の拡大部分圏といい, $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ と表す.

定義 1.2 (t 構造). 同型と直和因子で閉じた $\mathcal{D}$ の充満加法部分圏 $t^{\leq 0}, t^{\geq 0}$ の対 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が次の条件を満たすとき, $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ を $\mathcal{D}$ 上の t 構造 (t-structure) という. 以下では, 次の記号を導入する.

$$t^{\leq n} := t^{\leq 0}[-n], \ t^{\geq n} := t^{\geq 0}[-n]$$

1. $t^{\leq 0} \perp t^{\geq 1}$

2. $\mathcal{D} = t^{\leq 0} * t^{\geq 1}$
3. $t^{\leq 0} \subset t^{\leq 1}$ かつ $t^{\geq 1} \supset t^{\geq 0}$

$(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ を $\mathcal{D}$ 上の t 構造とする.

補題 1.3. $t^{\leq 0} = {}^{\perp}(t^{\geq 1})$ かつ $t^{\geq 0} = (t^{\leq -1})^{\perp}$ である.

系 1.4. 完全三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$ において, $X, Z \in t^{\leq 0}$ のとき, $Y \in t^{\leq 0}$ である.

定義 1.5 (t 構造の核). $\mathcal{D}$ の充満部分圏

$$\mathcal{D}^{\heartsuit} := t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$$

を t 構造の核 (heart, core) という.

t 構造の核は Abel 圏の構造をもつ.

定理 1.6. t 構造 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ の核 $\mathcal{D}^{\heartsuit}$ は前 Abel 圏である.

Proof. 任意の $A, B \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ と $f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(A, B)$ に対して, ある $C \in \mathcal{D}$ が存在して

$$C \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C[1] \tag{1.1}$$

は完全三角である. $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ は $\mathcal{D}$ 上の t 構造なので, この C に対して, ある $X_C \in t^{\leq -1}$ と $Y_C \in t^{\geq 0}$ が存在して

$$X_C \xrightarrow{x_C} C[1] \xrightarrow{y_C} Y_C \to X_C[1] \tag{1.2}$$

は完全三角である. このとき, $y_C \circ g : B \to Y_C$ が f の余核であることを示す. $y_C \circ g$ に対して, ある $M \in \mathcal{D}$ が存在して

$$M \xrightarrow{m} B \xrightarrow{y_C \circ g} Y_C \to M[1] \tag{1.3}$$

は完全三角である. 八面体公理より

$$A \xrightarrow{l} M \to X_C \to A[1] \tag{1.4}$$

は次の図式を可換にする完全三角である.

$$\begin{tikzcd}
 & & X[-1] \arrow[d] & \\
A[-1] \arrow[r] & B[-1] \arrow[r, "{g[-1]}"] \arrow[dr, "{(y_C \circ g)[-1]}"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "{y_C[-1]}"] & A \arrow[d] \\
 & & Y_C[-1] \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[d] \\
 & & & X_C
\end{tikzcd}$$

まず, $Y_C \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ を示す．$Y_C \in t^{\geq 0}$ なので, $Y_C \in t^{\leq 0}$ を示せばよい．式 (1.1) において, $B \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ かつ $A[1] \in t^{\leq -1} \subset t^{\leq 0}$ なので, 系 1.4 より $C[1] \in t^{\leq 0}$ である．式 (1.2) において, $X[1] \in t^{\leq -2} \subset t^{\leq 0}$ かつ $C[1] \in t^{\leq 0}$ なので, 同様に $Y_C \in t^{\leq 0}$ である．よって, $Y_C \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ である．
次に, $Q \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ と $q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(B, Q)$ が $q \circ f = 0$ を満たすとする． このとき, ある $q' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(C[1], Q)$ が存在して, $q' \circ g = q$ である． $X_C \in t^{\leq -1}$ かつ $q' \circ x_C = 0$ である． よって, ある $q'' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(Y_C, Q)$ が存在して, $q'' \circ y_C = 0$ である．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[rrr, bend left, "0"] & B \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "g"'] & & Q \\
& X_C \arrow[r, "x_C"'] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & C[1] \arrow[ur, dashed, "q'"'] \arrow[dr, "y_C"'] & \\
& & & Y_C \arrow[uu, dashed, "q''"']
\end{tikzcd}$$

一意性を示す．以上より, $y_C \circ g : B \to Y_C$ は f の余核である．
同様に, $e \circ x_C[-1] : X_C[-1] \to A$ は f の核である． □

定理 1.6 より, 次の命題が成立する．

補題 1.7. 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(A, B)$ を補完する $\mathcal{D}$ における完全三角

$$C \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C[1]$$

において, 次の 2 つが成立する．

1. $C[1] \in t^{\geq 0}$ のとき, g は f の余核である．
2. $C \in t^{\leq 0}$ のとき, e は f の核である．

定理 1.8. t 構造の核 $\mathcal{D}^{\heartsuit}$ は Abel 圏である．

Proof. 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(A, B)$ に対して, $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coim}(f)$ が成立することを示す．式 (1.4) において, $A \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ かつ $X_C[1] \in t^{\leq -2} \subset t^{\leq 0}$ より, $M \in t^{\leq 0}$ である．補題 1.7 より, $m = \ker(y_C \circ g) = \ker(\mathrm{coker}(f))$ である． よって, $\mathrm{im}(f) = m$ なので, $f = m \circ l$ と像経由分解できる． 同様に, $\mathrm{coim}(f) = l$ となっているので, $f = m \circ l$ は余像経由分解でもある．よって, 同型 $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coim}(f)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
X_C[-1] \arrow[dr, "e\circ x_C[-1]"'] & & M \arrow[dr, "m"] & & \\
& A \arrow[ur, "l"] \arrow[rr, "f"'] & & B \arrow[dr, "y_C\circ g"] & \\
& & & & Y_C
\end{tikzcd}$$

□

2 Abel 圏上の安定性条件

$\mathcal{A}$ を Abel 圏, $K(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ 上の Grothendieck 群とする.

定義 2.1 (Abel 圏上の安定関数). 群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ は次の条件を満たすとき, Z を $\mathcal{A}$ 上の安定関数 (stability function) という.

- 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ に対して, $Z(E) \in \mathbb{H}$ である. ここで

$$\mathbb{H} := \{ r \exp(i\pi\phi) \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1 \} \subset \mathbb{C}$$

安定関数 Z に対して, $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ の位相 (phase) $\phi(E)$ を次の式で定義する.

$$\phi(E) := \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (0, 1]$$

定義 2.2 (半安定対象). $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ を $\mathcal{A}$ 上の安定関数とする. $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ の任意の部分対象 $A \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(A) \leq \phi(E)$ であるとき, E を Z による半安定対象 (the semistable object with respect to Z) という.

定義 2.3 (Harder-Narasimhan フィルトレーション).

3 スライス

$\mathcal{D}$ を三角圏とする.

定義 3.1 (スライス). 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi)$ を $\mathcal{D}$ の充満加法部分圏とする. $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{D}$ のスライス (slicing) という. $\mathcal{P}(\phi)$ の 0 でない対象を位相 ϕ の対象という.

1. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$
2. $\phi_1 > \phi_2$ のとき, $\mathcal{P}(\phi_1) \perp \mathcal{P}(\phi_2)$
3. 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, ある実数の有限列

$$\phi_1 > \cdots > \phi_n$$

と, 完全三角の列

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[rr] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[rr] & & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul, dashed] & & A_2 \arrow[ul, dashed] & & & & & & A_n \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

が存在して, 各 i に対して, $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ である.

条件 (3) における完全三角の列は次のような意味で用いている.

注意 3.2.

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "f_1"] & E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[r, "h_1"] & E_0[1] \\
& E_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "h_2"] & E_1[1] \\
& \cdots \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & \cdots \arrow[r] & \cdots \\
& E_n \arrow[r, "g_n"] & A_n \arrow[r, "h_n"] & E_{n-1}[1]
\end{tikzcd}$$

を

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr, "f_1"] & & E_1 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dl, "g_1"] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl, "g_2"] & \cdots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr, "f_n"] & & E_n = E \arrow[dl, "g_n"] \\
& A_1 \arrow[ul, dashed, "h_1"] & & A_2 \arrow[ul, dashed, "h_2"] & & & & A_n \arrow[ul, dashed, "h_n"] &
\end{tikzcd}$$

と表している.

$\mathcal{P}$ を $\mathcal{D}$ のスライスとする.

補題 3.3. 条件 (3) における完全三角の列は同型を除いて一意である.

補題 3.3 より, 0 でない対象から最大の位相と最小の位相という不変量が定まる.

定義 3.4. 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して

$$\phi^+_{\mathcal{P}}(E) := \phi_1, \quad \phi^-_{\mathcal{P}}(E) := \phi_n$$

とする. $\mathcal{P}$ が明らかな場合は $\mathcal{P}$ を省略する. また, $\{A_i\}$ を E の半安定要素 (semistable factors) という.

補題 3.5. 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, 次の式が成立する.

$$\phi^+_{\mathcal{P}}(E) \geq \phi^-_{\mathcal{P}}(E)$$

ある $\phi \in \mathbb{R}$ が存在して, $E \in \mathcal{P}(\phi)$ となるときに等号は成立する.

定義 3.6. 任意の $I \subset \mathbb{R}$ に対して, 各 $\phi \in I$ における $\mathcal{P}(\phi)$ によって生成される $\mathcal{D}$ の拡大で閉した部分圏を $\mathcal{P}(I)$ とする. つまり, $\mathcal{P}(I)$ は次のように表せる.

$$\mathcal{P}(I) := \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E), \phi^-(E) \in I\}$$

また, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 次のような省略を用いる.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\leq t) &:= \mathcal{P}((-\infty, t]) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E) \leq t\} \\
\mathcal{P}(< t) &:= \mathcal{P}((-\infty, t)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E) < t\} \\
\mathcal{P}(\geq t) &:= \mathcal{P}([t, \infty)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^-(E) \geq t\} \\
\mathcal{P}(> t) &:= \mathcal{P}((t, \infty)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^-(E) > t\}
\end{aligned}$$

補題 3.7. I を長さ 1 上の区間とする. $\mathcal{D}$ における完全三角 $A \to E \to B$ において, A, E, B は $\mathcal{P}(I)$ の 0 でない対象とする. このとき, $\phi^+(A) \leq \phi^+(E)$ かつ $\phi^-(E) \leq \phi^-(B)$ である.

Proof. $\phi^+(A) \leq \phi^+(E)$ を示す. ある $t \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ を用いて, $I = [t, t+\alpha]$ と表す. 定義より, ある $A^+ \in \mathcal{P}(\phi^+(A))$ が存在する. $A_1 \cong A^+$ なので, 0 でない射 $f : A^+ \to A$ が存在する.
$\phi^+(A) > \phi^+(E)$ であると仮定する. 定義より, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A^+, F_n) = 0$ である. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F_n) \neq 0$ なので, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A^+, E) = 0$ であり, f は $B[-1]$ を経由する (らしい).

$$\begin{tikzcd}
& A^+ \arrow[dl, dashed] \arrow[drrr, "f(\neq 0)"] \arrow[drrrrr, bend left, "0"] & & & & & & & \\
A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] & A \arrow[rr] \arrow[d] & & E \arrow[dl] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
& & & & C_n \arrow[ul, dashed] & B \arrow[ul, dashed] & F_n \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

□

補題 3.8. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ と $(\mathcal{P}(\geq \phi), \mathcal{P}(< \phi + 1))$ は $\mathcal{D}$ 上の t 構造である.

Proof. $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ が t 構造であることを示す.
まず, $\mathcal{P}(> \phi) \perp \mathcal{P}(\leq \phi)$ を示す. 任意の $E \in \mathcal{P}(> \phi)$ と $F \in \mathcal{P}(\leq \phi)$ に対して, $\phi^-(E) > \phi \geq \phi^+(F)$ なので, $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$ である.
次に, $\mathcal{D} = \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ を示す. $\mathcal{D} \supset \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ は明らかなので, 逆を示す. 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して, 条件 (3) の ϕ 以下と ϕ より大きい実数で完全三角の列を分ける. このとき, 次の完全三角が存在するので, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(> \phi) \ni E_{n-1} \arrow[rr] & & E \in \mathcal{D} \arrow[dl] \\
& A_n \in \mathcal{P}(\leq \phi) \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

最後に, $\mathcal{P}(> \phi) \subset \mathcal{P}(> \phi)[-1]$ を示す. 定義より

$$\mathcal{P}(> \phi)[-1] = \mathcal{P}(\leq \phi - 1) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi - 1 < \phi^-(E)\}$$

なので, $\mathcal{P}(> \phi) \subset \mathcal{P}(> \phi)[-1]$ である. 同様に, $\mathcal{P}(\leq \phi)[-1] \supset \mathcal{P}(\leq \phi)$ も示せる.
以上より, $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ は t 構造である. □

系 3.9. t 構造 $(\mathcal{P}(>\phi), \mathcal{P}(\le \phi+1))$ の核は $\mathcal{P}((\phi, \phi+1])$ の部分集合である. t 構造 $(\mathcal{P}(\ge \phi), \mathcal{P}(< \phi+1))$ の核は $\mathcal{P}([\phi, \phi+1))$ の部分集合である.

4 Bridgeland 安定性

$\mathcal{D}$ を三角圏, $K(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ の Grothendieck 群とする.

定義 4.1 (三角圏上の安定性条件). 群準同型 $Z : K(\mathcal{D}) \to \mathcal{C}$ と次の条件を満たす $\mathcal{D}$ のスライス $\mathcal{P}$ の組 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ を $\mathcal{D}$ 上の安定性条件 (stability condition) という.

- 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して, ある $m(E) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ が存在して, $Z(E) = m(E)\exp(i\pi\phi)$ である.

群準同型 Z を安定性条件の中心電荷 (central charge), $\mathcal{P}(\phi)$ の対象を位相 ϕ の半安定対象 (semistable objects with phase ϕ), $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象を位相 ϕ の安定対象 (stable objects with phase ϕ) という.

$(Z, \mathcal{P})$ を $\mathcal{D}$ 上の安定性条件とする.

補題 4.2. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi)$ は Abel 圏である.

定義 4.3 (質量). 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して

$$m_\sigma(E) := \sum_i |Z(A_i)|$$

を E の質量 (mass) という. σ が明らかな場合は σ を省略する.

補題 4.4. $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, 次の式が成立する.

$$m_\sigma(E) \ge |Z(E)|$$

ある $\phi \in \mathbb{R}$ が存在して, $E \in \mathcal{P}(\phi)$ となるときに等号は成立する.

定理 4.5. 次の 2 つは同値である.

1. $\mathcal{D}$ 上に安定性条件を与える.
2. $\mathcal{D}$ 上の有界 t 構造の核と HN フィルトレーションをもつその上の安定性条件を与える.

Proof. (1) から (2) を示す. $\mathcal{D}$ 上の有界 t 構造の核を $\mathcal{D}^\heartsuit$ とすると, 自然な同型 $(D^\heartsuit) \cong K(\mathcal{D})$ がある.

□

定義 4.6 (局所有限).

5 安定性条件のなす空間

$\mathcal{D}$ を三角圏とする.

定義 5.1 (スライスと安定性条件のなす集合). 局所有限なスライスのなす集合を $\mathrm{Slice}(\mathcal{D})$, 局所有限な安定性条件のなす集合を $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ と表す.

補題 5.2. 任意の $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathrm{Slice}(\mathcal{D})$ に対して

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sup_{E(\neq 0) \in \mathcal{D}} \left\{ |\phi^-_{\mathcal{P}}(E) - \phi^-_{\mathcal{Q}}(E)|, |\phi^+_{\mathcal{P}}(E) - \phi^+_{\mathcal{Q}}(E)| \right\} \in [0, \infty)$$

は $\mathrm{Slice}(D)$ 上の距離を定める.