恒等射を持たない A_∞ 圏

よの

2024 年 3 月 21 日

概要

A_∞ 圏は Fukaya [Fuk93][Fuk96] により Lagrangian 部分多様体のなす Fukaya 圏の構造を調べるために導入された．A_∞ 圏は A_∞ 代数の多対象版であり, 射の高次の結合まで考える dg 圏の一般化である．

本稿では, まず恒等射を持たない A_∞ 圏と, その間の恒等射を考えない A_∞ 関手を定義する．ホモロジー的摂動論によって, A_∞ 圏から新たな A_∞ 圏を構成することができる．これにより, 任意の A_∞ 圏がある極小 A_∞ 圏と A_∞ 擬同型であることが分かる．

目次

1　恒等射を持たない A_∞ 圏

係数体 $\mathbb{K}$ を 1 つ固定する．本稿で登場する圏は全て $\mathbb{K}$ 線形かつ small であるとする．

定義 1.1 (恒等射を持たない A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 (non-unital A_∞-category) $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ とは, 次のデータ

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 次数付きベクトル空間 $\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu_{\mathcal{A}}^d : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_d)[2-d]$$

が定まっていて, 次の A_∞ 結合式 (A_∞-associativity equation) を満たすものをいう．

$$\sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} \mu_{\mathcal{A}}^{d-m+1}(a_d, \cdots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) = 0$$

ここで

$$\sum_{m,n} := \sum_{0 \leq n \leq d-m} \sum_{1 \leq m \leq d} = \sum_{m+n \leq d}$$
$$\maltese n := |a_1| + \cdots |a_n| - n$$

である．このとき, $\mu_{\mathcal{A}}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏の A_∞ 構造 (A_∞-structure of non-unital A_∞-category) という．

注意 1.2. A_∞ 結合式の低次の場合をみる．

$(d=1)$ $\mu_{\mathcal{A}}^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1]$

$(m,n) = (1,0)$ を考えると, $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は

$$\mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) = 0$$

を満たす．つまり, $(\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{A}}^1)$ は複体の構造を持ち, $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は微分とみなせる．

$(d=2)$ $\mu_{\mathcal{A}}^2 : \hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_2)$

$(m,n) = (1,0), (1,1), (2,0)$ を考えると, $\mu_{\mathcal{A}}^2$ は

$$\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) = 0$$

を満たす．よって, $\mu_{\mathcal{A}}^2$ は射の合成とみなせて, 微分 $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は射の合成 $\mu_{\mathcal{A}}^2$ と整合的である．

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu_{\mathcal{A}}^1"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}^1 \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mu_{\mathcal{A}}^1 \circ \mu_{\mathcal{A}}^2"] & \hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}^2"] \\
\hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2)[1] \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_2) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}}^2"'] & \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_2)[1]
\end{tikzcd}$$

$(d=3)$ $\mu^3_{\mathcal{A}}: \hom_{\mathcal{A}}(X_2,X_3)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_2)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1)\to\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_3)[-1]$

$(m,n)=(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)$ を考えると, $\mu^3_{\mathcal{A}}$ は

$$\begin{aligned}&\mu^3_{\mathcal{A}}(a_3,a_2,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))+(-1)^{|a_1|-1}\mu^3_{\mathcal{A}}(a_3,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2),a_1)+(-1)^{|a_1|+|a_2|-2}\mu^3_{\mathcal{A}}(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_3),a_2,a_1)\\&+\mu^2_{\mathcal{A}}(a_3,\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,a_1))+(-1)^{|a_1|-1}\mu^2_{\mathcal{A}}(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_3,a_2),a_1)+\mu^1_{\mathcal{A}}(\mu^3_{\mathcal{A}}(a_3,a_2,a_1))\\&=0\end{aligned}$$

を満たす. $\mu^2_{\mathcal{A}}(a_3,\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,a_1))+(-1)^{|a_1|-1}\mu^2_{\mathcal{A}}(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_3,a_2),a_1)$ は射の合成 $\mu^2_{\mathcal{A}}$ の結合性の差を表している. よって, $\mu^3_{\mathcal{A}}$ は射の結合性のホモトピーとみなせて, 射の合成 $\mu^2_{\mathcal{A}}$ はホモトピー $\mu^3_{\mathcal{A}}$ を除いて結合的である.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(X_2,X_3)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_2)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1) \arrow[r, "\mu^2_{\mathcal{A}}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu^2_{\mathcal{A}}"'] \arrow[dr, "\mu^1_{\mathcal{A}}\circ\mu^3_{\mathcal{A}}"] & \hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_3)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1) \arrow[d, "\mu^2_{\mathcal{A}}"] \\
\hom_{\mathcal{A}}(X_2,X_3)\otimes\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_2) \arrow[r, "\mu^2_{\mathcal{A}}"'] & \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_3)
\end{tikzcd}$$

[*1]

$(d\geq 4)$ $d=3$ の時と同様に, 合成 $\mu^d_{\mathcal{A}}$ はより高次のホモトピー $\mu^{d+1}_{\mathcal{A}},\mu^{d+2}_{\mathcal{A}},\cdots$ を除いて結合的である.

注意 1.3. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ は任意の $X\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 恒等射 $\mathrm{id}_X\in\hom_{\mathcal{A}}(X,X)$ にあたる射が存在するとは限らない. 注意 1.2 にあるように, 射の合成はホモトピーを除いて結合的であるので, 射の結合律は成立しない. よって, 恒等射を持たない A_∞ 圏は通常の圏の公理を満たさない.

注意 1.4. 恒等射を持たない A_∞ 圏には恒等射にあたる射が存在しないので, 対象の同型と圏同値[*2]は定義することができない. 一方, 充満性や忠実性, 圏同型は定義することができる.

恒等射を持たない A_∞ 圏の定義は自己双対的である.

定義 1.5 (双対 A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A},\mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mu_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}})$ を次のように定義し, 双対 A_∞ 圏 (opposite A_∞-category) という.

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}:=\mathrm{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0,X_1\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ に対して

$$\hom_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(X_0,X_1):=\hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_0)$$

[*1] この図式は $\mu^3_{\mathcal{A}}$ が射の結合性のホモトピーとみなせるという「イメージ」であることに注意. $\mu^3_{\mathcal{A}}(a_3,a_2,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))+(-1)^{|a_1|-1}\mu^3_{\mathcal{A}}(a_3,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2),a_1)+(-1)^{|a_1|+|a_2|-2}\mu^3_{\mathcal{A}}(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_3),a_2,a_1)$ に関する部分は描いていないので, 図式は不完全である.

[*2] 対象の同型を定義できないので, 本質的全射を定義することができない.

- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu^d_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(a_d, \cdots, a_1) := (-1)^{\maltese d} \mu^d_{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_d)$$

$(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mu_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}})$ が恒等射を持たない A_∞ 圏の構造を持つことを示す.

Proof. $\mu_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ が A_∞ 結合式を満たすことを示す.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} \mu^{d-m+1}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(a_d, \cdots, a_{n+m+1}, \mu^m_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) \\
&= \sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} (-1)^{\maltese d-m+1} (-1)^{\maltese m} \mu^{d-m+1}_{\mathcal{A}}(a_1, \cdots, a_n, \mu^m_{\mathcal{A}}(a_{n+1}, \cdots, a_{n+m}), a_{n+m+1}, \cdots, a_d) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

例 1.6. $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする. $d \geq 3$ において $\mu^d_{\mathcal{A}} = 0$ のとき, $(\mathcal{A}, \mu^1_{\mathcal{A}}, \mu^2_{\mathcal{A}})$ は恒等射を持たない dg 圏とみなせる. 逆に, 恒等射を持たない dg 圏は $d \geq 3$ で $\mu^d_{\mathcal{A}} = 0$ であるような恒等射を持たない A_∞ 圏とみなせる.

例 1.7. 単位元のない A_∞ 代数は恒等射を持たない 1 点 A_∞ 圏とみなせる.

微分が自明であるような恒等射を持たない A_∞ 圏は極小と呼ばれる.

定義 1.8 (恒等射を持たない極小 A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ が $\mu^1_{\mathcal{A}} = 0$ を満たすとき, $\mathcal{A}$ は極小 (minimal) であるという.

例 1.9. 次の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ を考える.

$$X_0 \xrightarrow{\alpha_{0,1}} X_1 \xrightarrow{\alpha_{1,2}} X_2 \xrightarrow{\alpha_{2,3}} X_3$$

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{A}}(X_i, X_i) &= \mathbb{K} \cdot \mathrm{id}_{X_i} \ (i = 0, 1, 2, 3) \\
\hom_{\mathcal{A}}(X_i, X_{i+1}) &= \mathbb{K} \cdot \alpha_{i,i+1} \ (i = 0, 1, 2) \\
\hom_{\mathcal{A}}(X_i, X_{i+2}) &= 0 \ (i = 0, 1) \\
\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_3) &= \mathbb{K} \cdot \beta_{0,3} \\
\mu^3_{\mathcal{A}}(\alpha_{0,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}) &= \beta_{0,3}
\end{aligned}$$

恒等射を含まない $\mu^2_{\mathcal{A}}$ や上の $\mu^3_{\mathcal{A}}$ 以外, それ以上の A_∞ 構造は消えているとする. ここで $\alpha_{i,i+1}$ は次数 1 の基底, $\beta_{0,3}$ は次数 2 の基底である. このとき, $\mathcal{A}$ は極小である.

恒等射を持たない A_∞ 圏の部分圏を考えることができる.

定義 1.10 (A_∞ 部分圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\tilde{\mathcal{A}}, \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})$ を次のように定義し, $\mathcal{A}$ の A_∞ 部分圏 (A_∞-subcategory) という. .

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}\tilde{\mathcal{A}}$ は $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ の部分集合
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\tilde{\mathcal{A}}$ に対して, $\hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)$ は $\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ の次数付き部分ベクトル空間
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu^d_{\tilde{\mathcal{A}}} : \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \to \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_d)[2-d]$$

が与えられていて, A_∞ 結合式を満たす.

恒等射を持たない A_∞ 圏からコホモロジー圏を考えることができる.

定義 1.11 (コホモロジー圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない次数つき線形圏 $H(\mathcal{A})$ を次のように定義し, $\mathcal{A}$ のコホモロジー圏 (cohomological category) という.

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}H(\mathcal{A}) := \mathrm{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}H(\mathcal{A})$ に対して, $\hom_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ はコホモロジー群

$$\hom_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1) := H^\bullet(\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu^1_{\mathcal{A}})$$

- 任意の $[a_1] \in \hom_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1), [a_2] \in \hom_{H(\mathcal{A})}(X_1, X_2)$ に対して, 合成 $\cdot$ は

$$[a_2] \cdot [a_1] := (-1)^{|a_1|}[\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1)]$$

恒等射を持たない A_∞ 圏から 0 次コホモロジーをとる圏も定義される.

定義 1.12 (0 次コホモロジー圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない線形圏 $H^0(\mathcal{A})$ を次のように定義し, $\mathcal{A}$ の 0 次コホモロジー圏 (0-th cohomological category) という.

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}H^0(\mathcal{A}) := \mathrm{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}H^0(\mathcal{A})$ に対して, $\hom_{H^0(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ は 0 次コホモロジー群

$$\hom_{H^0(\mathcal{A})}(X_0, X_1) := H^0(\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu^1_{\mathcal{A}})$$

- 任意の $[a_1] \in \hom_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1), [a_2] \in \hom_{H(\mathcal{A})}(X_1, X_2)$ に対して, 合成 $\cdot$ は

$$[a_2] \cdot [a_1] := (-1)^{|a_1|}[\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1)]$$

コホモロジー圏と 0 次コホモロジー圏には次のような関係がある.

注意 1.13. $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ とする. hom 空間の定義から, $H^0(\mathcal{A})$ は $H(\mathcal{A})$ の部分圏である.

補題 1.14. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, Koszul 符号を除いて次の圏同型が成立する.

$$H(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} = H(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$$

2 恒等射を考えない A_∞ 関手

恒等射を持たない A_∞ 圏の間の関手を定義する.

定義 2.1 (恒等射を考えない A_∞ 関手). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 (non-unital A_∞-functor) $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ とは, 次のデータ

- 対象の対応 $\mathcal{F}^0 : \mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ *3
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{F}^d : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d)[1-d]$$

が定まっていて, 多項等式 (polynomial equation)

$$\begin{aligned}
&\sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mu^d_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1)) \\
&= \sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} \mathcal{F}^{d-m+1}(a_d, \cdots, a_{m+n+1}, \mu^m_{\mathcal{A}}(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)
\end{aligned}$$

を満たす. ここで

$$\sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} := \sum_{r \geq 1} \sum_{d = s_1 + \cdots + s_r}$$

である.

注意 2.2. 多項等式の低次の場合を見る.

$(d = 1)$ $\mathcal{F}^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1)$

$r = 1$ $(s_1 = 1)$ / $(m, n) = (0, 1)$ を考えると, $\mathcal{F}^1$ は

$$\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(a_1)) = \mathcal{F}^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))$$

を満たす. よって, $\mathcal{F}^1$ は複体の写像とみなせる.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \arrow[r, "\mu^1_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathcal{F}^1"'] & \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1] \arrow[d, "\mathcal{F}^1"] \\
\hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1) \arrow[r, "\mu^1_{\mathcal{B}}"'] & \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1)[1]
\end{tikzcd}$$

$(d = 2)$ $\mathcal{F}^2 : \hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_2)[-1]$

$r = 1$ $(s_1 = 2), r = 2$ $(s_1 = 1, s_2 = 1)$ / $(m, n) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$ を考えると, $\mathcal{F}^2$ は

$$\begin{aligned}
&\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1)) \\
&= \mathcal{F}^2(a_2, \mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\mathcal{F}^2(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2), a_1) + \mathcal{F}^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1))
\end{aligned}$$

*3 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1, \cdots)$ であるが, [SS08] の記法に従い以降では $\mathcal{F}^0$ も $\mathcal{F}$ と表す.

を満たす．$\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$ と $\mathcal{F}^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1))$ が表れていることから，$\mathcal{F}^2$ はこの間のホモトピーとみなせて，複体の写像 $\mathcal{F}^1$ と射の合成 μ^2 はホモトピー $\mathcal{F}^2$ を除いて可換である．[*4]

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \arrow[r, "\mu^2_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^1"'] \arrow[dr, "\mu^1_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{F}^2"] & \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_2) \arrow[d, "\mathcal{F}^1"] \\
\hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_1, \mathcal{F}X_2) \otimes \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1) \arrow[r, "\mu^2_{\mathcal{B}}"'] & \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_2)
\end{tikzcd}$$

恒等射を持たない A_∞ 圏上の恒等関手を定義する．

定義 2.3 (A_∞ 恒等関手). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して，恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を次のように定義し，$\mathcal{A}$ 上の A_∞ 恒等関手 (non-unital A_∞-identity functor on $\mathcal{A}$) という．

$(d = 0)$ 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}(X) := X$
$(d = 1)$ 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Id}^1_{\mathcal{A}}$ は複体の恒等写像 $\mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$
$(d \geq 2)$ $\mathrm{Id}^d_{\mathcal{A}} := 0$

$\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ が恒等射を考えない A_∞ 関手であることを示す．

Proof. $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ が多項等式

$$\begin{aligned}
&\sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mu^d_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}^{s_r}_{\mathcal{A}}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathrm{Id}^{s_1}_{\mathcal{A}}(a_{s_1}, \cdots, a_1)) \\
&= \sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} \mathrm{Id}^{d-m+1}_{\mathcal{A}}(a_d, \cdots, a_{m+n+1}, \mu^m_{\mathcal{A}}(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)
\end{aligned}$$

を満たすことをみる．左辺は $d = s_1 + \cdots + s_d = 1 + \cdots + 1$，右辺は $(m, n) = (d, 0)$ のみを考えればよい．よって，左辺と右辺はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}
(L.H.S) &= \mu^d_{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}^1_{\mathcal{A}}(a_d), \cdots, \mathrm{Id}^1_{\mathcal{A}}(a_1)) = \mu^d_{\mathcal{A}}(a_d, \cdots, a_1) \\
(R.H.S) &= \mathrm{Id}^1_{\mathcal{A}}(\mu^d_{\mathcal{A}}(a_d, \cdots, a_1)) = \mu^d_{\mathcal{A}}(a_d, \cdots, a_1)
\end{aligned}$$

□

恒等射を考えない A_∞ 関手の合成は恒等射を考えない A_∞ 関手となる．

定義 2.4. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して，恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を次のように定義する．

$(d = 0)$ 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して，$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(X))$

[*4] 射の合成 μ^2 を分かりやすく $\circ$ と表すと，$\mathcal{F}^1(a_2 \circ_{\mathcal{A}} a_1) = \mathcal{F}^1(a_2) \circ_{\mathcal{B}} \mathcal{F}^1(a_1)$ がホモトピー $\mathcal{F}^2$ を除いて成立するということである．

$(d \geq 1)$ 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して,

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^d(a_d, \cdots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mathcal{G}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1))$$

注意 2.5. 恒等射を考えない A_∞ 関手の合成の低次の場合を見る.

$(d = 1)$ $r = 1$ $(s_1 = 1)$ を考えると

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^1(a_1) = \mathcal{G}^1(\mathcal{F}^1(a_1))$$

つまり, 通常の関手おける射の合成の定義と同じである.

$(d = 2)$ $r = 1$ $(s_1 = 1), r = 2$ $(s_1 = 1, s_2 = 1)$ を考えると

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^2(a_2, a_1) = \mathcal{G}^1(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mathcal{G}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$$

つまり, $\mathcal{C}$ におけるホモトピー $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^2(a_2, a_1)$ は $\mathcal{B}$ におけるホモトピー $\mathcal{F}^2(a_2, a_1)$ を $\mathcal{G}^1$ で送ったものと, ホモトピー $\mathcal{G}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$ の和である.

恒等射を考えない A_∞ 関手の合成は強結合的である.

補題 2.6. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{H} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して, 次が成立する.

$$(\mathcal{H} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{F} = \mathcal{H} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})$$

恒等射を考えない A_∞ 関手はコホモロジー圏の間の関手を定める.

定義 2.7 (恒等射を考えないコホモロジー圏上の関手). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない次数付き線形関手 $H(\mathcal{F}) : H(\mathcal{A}) \to H(\mathcal{B})$ を次のように定義し, 恒等射を考えないコホモロジー圏上の関手 (non-unital functor on cohomological category) という.

- 任意の $X \in \mathrm{Ob}H(\mathcal{A})$ に対して, $H(\mathcal{F})(X) := \mathcal{F}X$
- 任意の $[a] \in \hom_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ に対して, $H(\mathcal{F})([a]) := [\mathcal{F}^1(a)]$

恒等射を考えない A_∞ 関手の同型を定義する.

定義 2.8 (A_∞ 同型). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ において, 複体の写像 $\mathcal{F}^1$ が同型写像のとき, $\mathcal{F}$ を A_∞ 同型 (A_∞-isomorphism) という.

コホモロジー圏上の関手が通常の圏同型であるとき, A_∞ 擬同型という.

定義 2.9 (A_∞ 擬同型). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ がコホモロジー圏の圏同型

$$H(\mathcal{A}) \cong H(\mathcal{B})$$

を定めるとき, $\mathcal{F}$ を A_∞ 擬同型 (A_∞-quasi-isomorphism) という.

定義 2.7 より, A_∞ 擬同型は複体の写像を用いて表すことができる.

補題 2.10. 次の 2 つは同値である.

1. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は A_∞ 擬同型である.
2. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{F}(X) = X$ かつ, 複体の写像 $\mathcal{F}^1$ は通常の擬同型である.

定義 2.11 (コホモロジー圏上で忠実充満). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ が通常の忠実充満のとき, $\mathcal{F}$ はコホモロジー圏上で忠実充満 (cohomologically fully faithful) であるという.

例 2.12. A_∞ 同型は A_∞ 擬同型かつ, A_∞ 擬同型はコホモロジー圏上で忠実充満である.

3 形式的微分同相

恒等射を持たない A_∞ 圏から, 新しい恒等射を持たない A_∞ 圏を構成することができる.

記法 3.1. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, A_∞ 構造を忘れた dg 箙を $\tilde{\mathcal{A}}$ と表す.

定義 3.2 (形式的微分同相). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ と dg 箙 $\tilde{\mathcal{A}}$ に対して, 形式的微分同相 (formal diffeomorphism) $\Phi: \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ とは, 次のデータ

$(d=0)$ 対象の対応 $\Phi: \mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\tilde{\mathcal{A}}$ は恒等写像

$(d \geq 1)$ 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\Phi^d : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_d)[1-d]$$

が定まっていて, $\Phi^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)$ が線形自己同型であるものをいう.

恒等射を持たない A_∞ 圏と形式的微分同相から, dg 箙に A_∞ 構造が定まる.

定理 3.3. 形式的微分同相 $\Phi: \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ に対して, 多項等式を満たすような $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が一意に帰納的に定まる. つまり, $(\tilde{\mathcal{A}}, \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})$ は恒等射を持たない A_∞ 圏の構造を持つ.

Proof. $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が帰納的に定まることを示す.

$(d=1)$ $\mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}} : \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \to \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)[1]$ を

$$\mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Phi^1(a_1)) := \Phi^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))$$

と定義すると, $d=1$ の多項等式を満たす. このとき, $\mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が A_∞ 結合式を満たすことをみる.

$$\mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(\mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(a_1)) = \mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Phi^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))) = \Phi^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))) = 0$$

$(d=2)$ $\mu^2_{\tilde{\mathcal{A}}} : \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \to \hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_2)$ を

$$\mu^2_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Phi^1(a_2), \Phi^1(a_1)) := \Phi^2(a_2, \mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\Phi^2(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2), a_1) + \Phi^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1))$$

と定義すると, $d=2$ の多項等式を満たす. このとき, $\mu^2_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が A_∞ 結合式を満たすことが分かる.

$(d \geq 3)$ $\mu^d_{\tilde{\mathcal{A}}}(\Phi^1(a_d), \cdots, \Phi^1(a_1))$ も同様に定義でき, A_∞ 結合式を満たすことが分かる.

□

系 3.4. 形式的微分同相 Φ は A_∞ 同型である.

Proof. まず, Φ が恒等射を考えない A_∞ 関手であることは, 形式的微分同相の定義と定理 3.3 から従う. 次に, Φ が A_∞ 同型であることは, Φ^1 が線形自己同型であることから従う. □

記法 3.5. 定理 3.3 で得られた $\tilde{\mathcal{A}}$ を $\Phi_*\mathcal{A}$ と表す.

恒等射を考えない A_∞ 関手の合成を帰納的に解くことで, 形式的微分同相の逆関手を構成できる.

補題 3.6. 形式的微分同相 $\Phi : \mathcal{A} \to \Phi_*\mathcal{A}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Phi^{-1} : \Phi_*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を次のように定義する.

$(d=0)$ 対象の対応 $\Phi^{-1} : \mathrm{Ob}\Phi_*\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ は恒等写像

$(d \geq 1)$ 任意の $a_1 \in \hom_{\Phi_*\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\Phi_*\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})^d(a_d, \cdots, a_1) = \sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} (\Phi^{-1})^r(\Phi^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \Phi^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1))$$

により帰納的に $(\Phi^{-1})^d$ を定める.

このとき, Φ^{-1} は Φ の逆関手である.

例 3.7. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}}), (\mathcal{B}, \mu_{\mathcal{B}})$ が $\mu^1_{\mathcal{A}} = \mu^1_{\mathcal{B}} = 0$ を満たすとする. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が A_∞ 擬同型のとき, Φ は形式的微分同相である.

4 (前) 自然変換と恒等射を考えない A_∞ 関手圏

恒等射を考えない A_∞ 関手の間の前自然変換と, 恒等射を考えない A_∞ 関手のなす圏を定義する.

定義 4.1 (前自然変換). $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ への次数 g の前自然変換 T (pre-natural transformation of degree g from $\mathcal{F}_0$ to $\mathcal{F}_1$) を次のように定義する.

- $T = (T^0, T^1, \cdots)$ であって, 任意の $d \geq 0$ に対して T^d は次のように表される.

$$T^d : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_d)[g-d]$$

このとき, $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ への次数 g の前自然変換の集まりを $\hom^g(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ と表す.

注意 4.2. 前自然変換の低次の場合をみる.

$(d=0)$ $T^0 : \mathbb{K} \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X \to \mathcal{F}_1 X)[k]$ は $\hom^k_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X \to \mathcal{F}_1 X)$ の元とみなせる.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}_0 X \arrow[dd, "T^0"] \\
X \arrow[ur, mapsto, bend left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[dr, mapsto, bend right, "\mathcal{F}_1"'] & \\
& \mathcal{F}_1 X
\end{tikzcd}$$

$(d=1)$ $T^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_1)[g-1]$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[d, "a_1"'] & \mathcal{F}_0 X_0 \arrow[d, "T^1(a_1)"] \\
X_1 \arrow[r, mapsto, bend right, "\mathcal{F}_1"'] & \mathcal{F}_1 X_1
\end{tikzcd}$$

$(d=2)$ $T^2 : \hom_{A}(X_1, X_2) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_2)[g-2]$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, mapsto, bend left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[d, "a_1"'] & \mathcal{F}_0 X_0 \arrow[dd, "T^2(a_2, a_1)"] \\
X_1 \arrow[d, "a_2"'] & \\
X_2 \arrow[r, mapsto, bend right, "\mathcal{F}_1"'] & \mathcal{F}_1 X_2
\end{tikzcd}$$

恒等射を考えない A_∞ 関手と前自然変換は恒等射を持たない A_∞ 圏をなす.

定義 4.3 (恒等射を考えない A_∞ 関手圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を次のように定義し, 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 (non-unital A_∞-functor category) という.

- 対象は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- 任意の $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して $\hom^g_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) := \hom^g(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$
- 任意の $e \geq 1$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ と $T_1 \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \cdots, T_e \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e)$ に対して, 合成

$$\mu^e_{\mathcal{Q}} : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_e)[2-e]$$

$(e=1)$ $\mu^1_{\mathcal{Q}}: \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)[1]$ は

$$
\begin{aligned}
&(\mu^1_{\mathcal{Q}}(T_1))^d(a_d, \cdots, a_1) \\
:= \sum_{1\le i\le r} \sum_{s_1,\cdots,s_r} &(-1)^{\dagger} \mu^r_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_1^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\cdots+2s_i+1}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_i+1}), \\
&T_1^{s_i}(a_{s_1+\cdots+s_i}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{i-1}+1}), \\
&\mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\cdots+s_{i-1}}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{i-2}+2}), \cdots, \mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1)) \\
&-\sum_{m,n} (-1)^{\maltese n+|T_1|-1} T_1^{d-m+1}(a_d, \cdots, a_{n+m+1}, \mu^m_{\mathcal{A}}(a_{n+m} \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)
\end{aligned}
$$

ここで, $s_1, \cdots, s_r$ は 0 でもよく

$$
\dagger := (|T_1|-1)(|a_1| + \cdots |a_{s_1+\cdots+s_{i-1}}| - s_1 - \cdots - s_{i-1})
$$

である.

$(e=2)$ $\mu^2_{\mathcal{Q}}: \hom_{Q}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2)$ は

$$
\begin{aligned}
&(\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1))^d(a_d, \cdots, a_1) \\
:= \sum_{1\le i\le j\le r} \sum_{s_1,\cdots,s_r} &(-1)^{\circ} \mu^r_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_2^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}_1^{s_j+1}(a_{s_1+\cdots+2s_j+1}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_j+1}), \\
&T_2^{s_j}(a_{s_1+\cdots+s_j}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{j-1}+1}), \\
&\mathcal{F}_0^{s_j-1}(a_{s_1+\cdots+s_{j-1}}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{j-2}+2}), \cdots, \mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\cdots+2s_i+1}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_i+1}), \\
&T_1^{s_i}(a_{s_1+\cdots+s_i}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{i-1}+1}), \\
&\mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\cdots+s_{i-1}}, \cdots, a_{s_1+\cdots+s_{i-2}+2}), \cdots, \mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1))
\end{aligned}
$$

ここで, $s_1, \cdots, s_r$ は 0 でもよく

$$
\circ := \sum_{1\le k\le s_1+\cdots+s_{j-1}} (|T_2|-1)(|a_k|-1) + \sum_{1\le k\le s_1+\cdots+s_{i-1}} (|T_1|-1)(|a_k|-1)
$$

である.

$(e\ge 3)$ $\mu^e_{\mathcal{Q}}$ は $\mu^2_{\mathcal{Q}}$ と同じパターン (任意の $e \ge 2$ において, $\mu^e_{\mathcal{Q}}$ に $\mu_{\mathcal{A}}$ は登場しない.)

注意 4.4. $\mu^1_{\mathcal{Q}}$ の低次の場合をみる.

$(d=1)$ $\mu^1_{\mathcal{Q}}: \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)[1]$ は

$$
(\mu^1_{\mathcal{Q}}(T_1))^1(a_1) = (-1)^{(|T_1|-1)|a_1|} \mu^1_{\mathcal{B}}(T_1^1(a_1)) - (-1)^{|T_1|-1} T_1^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1))
$$

を満たす.

定義 4.5 (自然変換). 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 $\mathcal{Q}$ において, 次数 g の前自然変換 T が

$$
\mu^1_{\mathcal{Q}}(T) = 0
$$

を満たすとき, T を次数 g の自然変換 (natural transformation) という.

前自然変換はコホモロジー圏上の関手の間の射を定める.

補題 4.6. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. 前自然変換 $T : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$ は任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $H(\mathcal{B})$ における射 $[T^0_X] \in \hom_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{F}_0 X, \mathcal{F}_1 X)$ を定める.

自然変換はコホモロジー圏上で通常の自然変換のようにふるまう.

補題 4.7. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手. T を次数 g の自然変換とする. 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ に対して, $H(\mathcal{B})$ において

$$[T^0_{X_1}] \cdot [\mathcal{F}^1_0(a_1)] = (-1)^{|a_1|g} [\mathcal{F}^1_1(a_1)] \cdot [T^0_{X_0}]$$

が成立する. つまり, $H(\mathcal{B})$ において次の図式は符号を除いて可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_0 X_0 & \xrightarrow{[F^1_0(a_1)]} & \mathcal{F}_0 X_1 \\ {\scriptstyle [T^0_{X_0}]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [T^0_{X_1}]} \\ \mathcal{F}_1 X_0 & \xrightarrow[{[F^1_1(a_1)]}]{} & \mathcal{F}_1 X_1 \end{array}$$

特に, $g = 0$ のとき

$$H(T) := \{[T^0_X] \in \hom_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{F}_0 X, \mathcal{F}_1 X)\}_{X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}}$$

は $H(\mathcal{F}_0)$ から $H(\mathcal{F}_1)$ への通常の自然変換である.

定義 4.8 (恒等射を考えない次数付き線形関手圏). 恒等射を持たない次数つき線形圏 $Nu\text{-}fun(A, B)$ を次のように定義する.

- 対象は恒等射を考えない次数付き線形関手 $F : A \to B$
- 任意の $F_0, F_1 \in \mathrm{Ob}Nu\text{-}fun(A, B)$ に対して, 射は恒等射を考えない次数付き線形関手の自然変換

$Nu\text{-}fun(A, B)$ を恒等射を考えない次数付き線形関手圏 (non-unital graded linear functor category) という.

系 4.9. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$ を次数 g の前自然変換とする. 対応 $\mathcal{F}_0 \mapsto H(\mathcal{F}_0), [T] \mapsto H(T)$ は恒等射を考えない関手

$$H(\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \to Nu\text{-}fun(A, B)$$

を定める.

5　恒等射を考えない A_∞ 合成関手

恒等射を考えない A_∞ 関手を合成する操作は, 恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 5.1 (恒等射を考えない A_∞ 右合成関手). 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ と恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}:\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})\to\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})$$

を次のように定義する. $\mathcal{Q}:=\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ と表す.

$(e=0)$ 任意の $\mathcal{F}\in\mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}):=\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$.

$(e\geq 1)$ 任意の $a_1\in\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1),\cdots,a_d\in\hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1},X_d)$ と $T_1\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1),\cdots,T_e\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1},\mathcal{F}_e)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^e_{\mathcal{G}}:\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\mathcal{F}_{e-1},\mathcal{F}_e)\otimes\cdots\otimes\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)\\ \to\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0,\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_e)[1-e]\end{aligned}$$

$(e=1)$ $\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}:\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)\to\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0,\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_1)$ は

$$(\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}(T_1))^d(a_d,\cdots,a_1):=\sum_r\sum_{s_1,\cdots,s_r}T_1^r(\mathcal{G}^{s_r}(a_d,\cdots,a_{d-s_r+1}),\cdots,\mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1},\cdots,a_1))$$

$(e\geq 2)$ $(\mathcal{R}^e_{\mathcal{G}}(T_e,\cdots,T_1))^d(a_d,\cdots,a_1):=0$

$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ を恒等射を考えない A_∞ 右合成関手 (non-unital A_∞-right composition functor) という.

Proof. $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ が恒等射を考えない A_∞ 関手であることをみる. つまり, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ が多項等式

$$\begin{aligned}&\sum_r\sum_{e=s_1+\cdots+s_r}\mu^e_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})}(\mathcal{R}^{s_r}_{\mathcal{G}}(T_e,\cdots,T_{e-s_r+1}),\cdots,\mathcal{R}^{s_1}_{\mathcal{G}}(T_{s_1},\cdots,T_1))\\ &=\sum_{m,n}(-1)^{\maltese n}\mathcal{R}^{e-m+1}_{\mathcal{G}}(T_e,\cdots,T_{m+n+1},\mu^m_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(T_{n+m},\cdots,T_{n+1}),T_n,\cdots,T_1)\end{aligned}$$

を満たすことをみる. 左辺は $e=s_1+\cdots+s_e=1+\cdots+1$, 右辺は $(m,n)=(e,0)$ のみを考えればよい. よって, 左辺と右辺はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned}(L.H.S)&=\mu^e_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})}(\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}(T_e),\cdots,\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}(T_1))\\ (R.H.S)&=\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}(\mu^e_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(T_e,\cdots,T_1))\end{aligned}$$

あとはそれぞれ計算すればよい. □

同様に, 左合成も恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 5.2 (恒等射を考えない A_∞ 左合成関手). 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ と恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}:\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})\to\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{B})$$

を次のように定義する. $\mathcal{Q}:=\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ と表す.

$(e=0)$ 任意の $\mathcal{F}\in\mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}):=\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$.

$(e\geq 1)$ 任意の $a_1\in\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1),\cdots,a_d\in\hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1},X_d)$ と $T_1\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1),\cdots,T_e\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1},\mathcal{F}_e)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^e_{\mathcal{G}}:\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(\mathcal{F}_{e-1},\mathcal{F}_e)\otimes\cdots\otimes\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)\\ \to\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{B})}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0,\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_e)[1-e]\end{aligned}$$

$(e=1)$ $\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}:\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1)\to\hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{C},\mathcal{B})}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0,\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_1)$ は

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(T_1))^d(a_d,\cdots,a_1)\\ :=&\sum_{1\leq i\leq r}\sum_{s_1,\cdots,s_r}(-1)^{\dagger}\mathcal{G}^r(\mathcal{F}_1^{s_r}(a_d,\cdots,a_{d-s_r+1}),\cdots,\mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\cdots+2s_i+1},\cdots,a_{s_1+\cdots+s_i+1}),\\ &T^{s_i}(a_{s_1+\cdots+s_i},\cdots,a_{s_1+\cdots+s_{i-1}+1}),\\ &\mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\cdots+s_{i-1}},\cdots,a_{s_1+\cdots+s_{i-2}+2}),\cdots,\mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1},\cdots,a_1))\end{aligned}$$

$(e\geq 2)$ [Fuk02] を参照

$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ を恒等射を考えない A_∞ 左合成関手 (non-unital A_∞-left composition functor) という.

注意 5.3. 任意の $e\geq 1$ に対して, $\mathcal{R}^e_{\mathcal{G}}$ と $\mathcal{L}^e_{\mathcal{G}}$ に $\mu_{\mathcal{A}},\mu_{\mathcal{B}},\mu_{\mathcal{C}}$ のいずれも登場していない.

恒等射を考えない A_∞ 合成関手は合成可能である.

補題 5.4. 適当な恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathcal{G}_1}\circ\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}&=\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2\circ\mathcal{G}_1}\\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}\circ\mathcal{L}_{\mathcal{G}_2}&=\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1\circ\mathcal{G}_2}\\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}\circ\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}&=\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}\circ\mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}\end{aligned}$$

が成立する.

補題 5.5. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{Q}:=\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ と表す. $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T_1\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_1,\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}),T_2\in\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_2,\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ を前自然変換とする. このとき, $H(\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_1\circ\mathcal{G}_2,\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}))$ において

$$[\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_1,\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}_1}(T_2))]=(-1)^{\$}[\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2,\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}_2}(T_1))]$$

が成立する. ここで

$$\$:=(|T_1|-1)(|T_2|-1)+1$$

である.

Proof. $U \in \hom_{\mathcal{Q}}^{|T_1|+|T_2|-1}(\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_2, \mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} U^d(a_d, \cdots, a_1) := \sum_{m,n,r} \sum_{s_1,\cdots,s_r} (-1)^{(|T_2|-1)\maltese n} T_1^{r+d-n-m+1}(a_d, \cdots, a_{n+m+1}, \\ T_2^m(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), \\ \mathcal{G}_2^{s_r}(a_n, \cdots, a_{n-s_r+1}) \cdots, \mathcal{G}_2^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1)) \end{aligned}$$

□

6　フィルトレーション

恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す.

定義 6.1 (フィルトレーション). $\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ の部分複体 $F^\bullet$ が次の条件を満たすとき, $F^\bullet$ はフィルトレーション (length filtration) であるという.

- $F^\bullet = (T^1, \cdots, T^r, \cdots)$ であり, それぞれの前自然変換 T^r は

  $$(T^r)^0 = \cdots = (T^r)^{r-1} = 0$$

  を満たす.

補題 6.2. $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ を前自然変換とする. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $[T_X^0] \in \hom_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_0 X, \mathcal{G}_1 X)$ の右合成が同型

$$- \circ [T_X^0] : \hom_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_1 X, \mathcal{G}_2 X) \to \hom_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_0 X, \mathcal{G}_2 X)$$

を定めるとする. このとき, $H(\mathcal{Q})$ において $[T] : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ の右合成は同型

$$- \circ [T] : \hom_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \to \hom_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_2)$$

を定める. 左合成に対しても同様に成立する.

恒等射を考えない A_∞ 左合成関手はコホモロジー圏上の忠実充満性を保つ.

補題 6.3. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ をコホモロジー圏上で忠実充満な恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である.

注意 6.4. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ をコホモロジー圏上で忠実充満な恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は一般にはコホモロジー圏上で忠実充満でない.

恒等射を考えない A_∞ 右合成関手に関しては, 強く A_∞ 擬同型を課す必要がある.

補題 6.5. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を A_∞ 擬同型とする．このとき, 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{R}_\mathcal{G} : \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である．

7 恒等射を考えない A_∞ 関手圏におけるホモトピー

恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す.

定義 7.1 (ホモトピー). 任意の $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して, 前自然変換

$$D := \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \in \hom^1_\mathcal{Q}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$$

を次のように定義する.

$(d = 0)$ $D^0 := 0.$
$(d \geq 1)$ $D^d := \mathcal{F}_0^d - \mathcal{F}_1^d.$

$T^0 = 0$ である $T \in \hom^0_\mathcal{Q}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ が存在して

$$D = \mu^1_\mathcal{Q}(T)$$

を満たすとき, T を $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ へのホモトピー (homotopy) という．このとき, $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ はホモトピック (homotopic) であるといい, $\mathcal{F}_0 \sim \mathcal{F}_1$ と表す.

ホモトピックな恒等射を考えない A_∞ 関手はコホモロジーをとると等しい.

補題 7.2. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする．$\mathcal{F}_0 \sim \mathcal{F}_1$ のとき, $H(\mathcal{F}_0) = H(\mathcal{F}_1)$ である.

恒等射を考えない A_∞ 合成関手はホモトピーを保つ.

補題 7.3. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. T が $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ へのホモトピーであるとき, $\mathcal{R}^1_\mathcal{G}(T)$ は $\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}$ から $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}$ へのホモトピーである．左合成についても同様に成立する.

Proof. 右合成についてのみ考える.

$$(\mathcal{R}_\mathcal{G}\mathcal{F}_0)^d - (\mathcal{R}_\mathcal{G}\mathcal{F}_1)^d = \mathcal{R}^1_\mathcal{G}(\mathcal{F}_0^d - \mathcal{F}_1^d) = \mathcal{R}^1_\mathcal{G}(\mu^1_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})}(T)) = \mu^1_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})}(\mathcal{R}^1_\mathcal{G}(T))$$

最後で $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ が単位元のない A_∞ 関手である (特に, $\mathcal{R}^1_\mathcal{G}$ が複体の写像である) ことを用いた. □

次の命題は定理 7.5 において有用である.

補題 7.4. $\hom_\mathcal{Q}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ の元である前自然変換を $T_{[jk]}$ と表す．恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}\mu^1_\mathcal{Q}(T_{[jl]}) &= \mu^1_\mathcal{Q}(T_{[jk]}) - \mu^2_\mathcal{Q}(\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_l, T_{[jk]}) \\ &= \mu^1_\mathcal{Q}(T_{[kl]}) + \mu^2_\mathcal{Q}(T_{[kl]}, \mathcal{F}_j - \mathcal{F}_k)\end{aligned}$$

定理 7.5. ホモトピーは $\mathcal{Q}$ における同値関係である.

Proof. ホモトピーが反射律, 推移律, 対称律をそれぞれ満たすことをみる. $\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ の元である前自然変換を $T_{[jk]}$ と表す. 任意の j, k に対して, 次数付きベクトル空間 $\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ は等しいことに注意.

(反射律) $T \in \hom^0_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ を任意の d において $T^d := 0$ とすればよい.

(推移律) $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ へのホモトピーを T_1, $\mathcal{F}_1$ から $\mathcal{F}_2$ へのホモトピーを T_2 とする.

$$\mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[01]}) = \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1$$
$$\mu^1_{\mathcal{Q}}((T_2)_{[12]}) = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$$

このとき, $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_2$ への射 T を次のように定義する.

$$T := (T_1)_{[02]} + (T_2)_{[02]} + \mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1)$$

補題 7.4 より

$$\begin{aligned}\mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[02]}) &= \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[01]}) - \mu^2_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) \\ &= \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 - \mu^2_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) \\ \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_2)_{[02]}) &= \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}) + \mu^2_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) \\ &= \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + \mu^2_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\mu^1_{\mathcal{Q}}(T) \\ &= \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[02]} + (T_2)_{[02]} + \mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1)) \\ &= (\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) - \mu^2_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) + (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) + \mu^2_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) + \mu^1_{\mathcal{Q}}(\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1)) \\ &= \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_2 + \mu^2_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}, \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[01]})) - \mu^2_{\mathcal{Q}}(\mu^1_{\mathcal{Q}}((T_2)_{[12]}), (T_1)_{[01]}) + \mu^1_{\mathcal{Q}}(\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1))\end{aligned}$$

注意 1.2 より[*5]

$$\mu^2_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[12]}, \mu^1_{\mathcal{Q}}((T_1)_{[01]})) - \mu^2_{\mathcal{Q}}(\mu^1_{\mathcal{Q}}((T_2)_{[12]}), (T_1)_{[01]}) + \mu^1_{\mathcal{Q}}(\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_2, T_1)) = 0$$

なので

$$\mu^1_{\mathcal{Q}}(T) = \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_2$$

つまり, T は $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_2$ へのホモトピーである.

(対称律) $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ へのホモトピーを T_1 とする. 次の 2 つの写像を考える.

$$\phi : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) : T \mapsto (-1)^{|T|}\mu^2_{\mathcal{Q}}(T_1, T) + T_{[11]}$$
$$\psi : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) : T \mapsto \mu^2_{\mathcal{Q}}(T, T_1) + T_{[01]}$$

ϕ と ψ が同型射であることを示す. (途中)

[*5] $\mathcal{Q}$ における $d = 2$ の A_∞ 結合式である.

□

定義 7.6 (A_∞ **ホモトピー同値関手**)**.**

ホモトピーは有理ホモトピー論の視点から次のように考えることができる. [[SS08] remark 1.11]

8 ホモロジー的摂動論と極小模型

恒等射を持たない A_∞ 圏と複体などから新しい恒等射を持たない A_∞ 圏を構成することができる.

定理 8.1 (**ホモロジー的摂動論**)**.** 次の 4 つが与えられているとする.

- 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{B}, \mu_{\mathcal{B}})$
- ベクトル空間の複体 $(\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), d_A)$
- 複体の写像 $\mathcal{F}^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$ と $\mathcal{G}^1 : \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- $\mu_B^1 T^1 + T^1 \mu_{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{F}^1 \circ \mathcal{G}^1 - \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{B}}(X_0,X_1)}$ を満たす次数 -1 の複体の写像 $T^1 : \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$

このとき, 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

1. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ は
   - 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathcal{A} := \mathrm{Ob}\mathcal{B}$
   - 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu_{\mathcal{A}}^1 := d_{\mathcal{A}}$$
$$\mu_{\mathcal{A}}^d(a_d, \cdots, a_1) := \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}^{s_1}(a_s, \cdots, a_1)))$$

2. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は

   ($d = 0$) 対象の対応は恒等写像 $\mathcal{F} := \mathrm{id} : \mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$

   ($d = 1$) $\mathcal{F}^1$ は複体の写像 $\mathcal{F}^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$

   ($d \geq 2$) 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{F}^d(a_d, \cdots, a_1) := \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \cdots, s_r} T^1(\mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{F}^{s_1}(a_s, \cdots, a_1)))$$

3. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ は (おそらく)

   ($d = 0$) 対象の対応は恒等写像 $\mathcal{G} := \mathrm{id} : \mathrm{Ob}\mathcal{B} \to \mathrm{Ob}\mathcal{A}$

   ($d = 1$) $\mathcal{G}^1$ は複体の写像 $\mathcal{G}^1 : \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$

   ($d \geq 2$) 任意の $b_1 \in \hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1), \cdots, b_d \in \hom_{\mathcal{B}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{G}^d(b_d, \cdots, b_1) := \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mu_{\mathcal{A}}^r(\mathcal{G}^{s_r}(T^1 b_d, \cdots, T^1 b_{d-s_r+1}), \cdots, \mathcal{G}^{s_1}(T^1 b_s, \cdots, T^1 b_1))$$

4. $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ と $\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ のホモトピー T は

によって帰納的にそれぞれ定まる.

Proof. $d=2$ のときをみる.

1. $\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,a_1) := \mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)) : \hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_2)\otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_2)$ が
$$\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\mu^2_{\mathcal{A}}(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2),a_1) + \mu^1_{\mathcal{A}}(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,a_1)) = 0$$
を満たすことをみる.
$$\begin{aligned}
&(L.H.S)\\
&= \mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)))) + (-1)^{|a_1|-1}\mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2)), \mathcal{F}^1 a_1)) + \mu^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)))\\
&= \mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_1))) + (-1)^{|a_1|-1}\mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2), \mathcal{F}^1 a_1)) + \mathcal{G}^1(\mu^1_{\mathcal{B}}(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)))\\
&= \mathcal{G}^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\mu^2_{\mathcal{B}}(\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2), \mathcal{F}^1 a_1) + \mu^1_{\mathcal{B}}(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)))\\
&= 0
\end{aligned}$$
ここで, $\mathcal{B}$ における $d=2$ の A_∞ 結合式を用いた.
2. $\mathcal{F}^2 : T^1(\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)) : \hom_{\mathcal{A}}(X_1,X_2)\otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}X_0,\mathcal{F}X_2)[1]$ が
$$\begin{aligned}
&\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^2(a_2,a_1)) + \mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)\\
&= \mathcal{F}^2(a_2,\mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\mathcal{F}^2(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2),a_1) + \mathcal{F}^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2,a_1))
\end{aligned}$$
を満たすことをみる. これは $\mathcal{B}$ における $d=2$ の A_∞ 結合式を用いればよい.
3. 2 と同様.
4.

□

ホモロジー的摂動論から A_∞ 圏における極小模型定理を示すことができる.

定理 8.2 (極小模型定理). 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏は恒等射を持たない極小 A_∞ 圏と A_∞ 擬同型である.

Proof. X_0, X_1 を恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{B}$ の任意の対象とする. 複体 $(\hom_{\mathcal{B}}(X_0,X_1), \mu^1_{\mathcal{B}})$ を $\mu^1_{\mathcal{A}}=0$ である複体と acyclic complement に直和分解する. $\mu^1_{\mathcal{A}}=0$ である複体を $\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1)$ として, $\mathcal{F}^1 : \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1) \to \hom_{\mathcal{B}}(X_0,X_1)$ を入射, $\mathcal{G}^1 : \hom_{\mathcal{B}}(X_0,X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1)$ を射影とする. acyclic complement の contracting homotopy は T^1 を定める. 定理 8.1 より, $\mu^1_{\mathcal{A}}=0$ である恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ を構成できる. このとき, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は A_∞ 擬同型である. □

注意 8.3. 極小模型定理において, $\mathcal{F}\circ\mathcal{G} \sim \mathrm{Id}_B$ と $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ が成立する. 前者は定理 8.1 より従う. $\mathcal{G}$ は A_∞ 擬同型なので補題 7.3 より, $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{G} \sim \mathcal{G}$ である. 補題 6.5 より, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ がコホモロジー圏上で忠実充満なので

$$\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}} : \hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{A},\mathcal{A})}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{G}\circ\mathcal{F}) \to \hom_{\text{nu-fun}(\mathcal{B},\mathcal{A})}(\mathcal{G}, \mathcal{G}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{G})$$

は複体の擬同型を定める．0 次で消えているような前自然変換のなす部分複体を考えると，$\mathcal{R}^1_{\mathcal{G}}$ は $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}} - \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ を $\mathcal{G} - \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ に写す．よって，$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ と $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ のホモトピーが得られる．

系 8.4. A_∞ 擬同型はホモトピー逆関手をもつ．

Proof. $\mathcal{K} : \mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}$ を A_∞ 擬同型とする．恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ にそれぞれ定理 8.2 を用いると，恒等射を持たない A_∞ 圏と A_∞ 擬同型の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift left, Rightarrow, "\mathcal{F}"] \arrow[d, dashed, "\mathcal{H}"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, Rightarrow, "\mathcal{G}"] \arrow[d, "\mathcal{K}"] \\
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[r, shift left, Rightarrow, "\tilde{\mathcal{F}}"] & \tilde{\mathcal{B}} \arrow[l, shift left, Rightarrow, "\tilde{\mathcal{G}}"]
\end{tikzcd}$$

が得られる．ここで，$\mu^1_{\mathcal{A}} = \mu^1_{\tilde{\mathcal{A}}} = 0$ である．このとき，ある $\mathcal{K}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ が存在して $\mathcal{K}$ のホモトピー逆関手であることを示す．

$$\mathcal{H} := \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$$

とする．$\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{K}$ は A_∞ 擬同型なので，定理 7.5 より $\mathcal{H}$ も A_∞ 擬同型である．例 3.7 より $\mathcal{H}$ は形式的微分同相なので，逆関手 $\mathcal{H}^{-1} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ をもつ．また

$$\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}} \circ \mathcal{K} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}$$

より，$\mathcal{K}$ と $\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$ はホモトピックである．

$$\mathcal{K}^{-1} := \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} : \tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$$

とすると

$$\mathcal{K}^{-1} \circ \mathcal{K} \simeq \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$
$$\mathcal{K} \circ \mathcal{K}^{-1} \simeq \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

よって，$\mathcal{K}^{-1}$ は $\mathcal{K}$ のホモトピー逆関手である． □

A_∞ ホモトピー同値関手であることと A_∞ 擬同型であることは同値である．

系 8.5. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して，次の 2 つは同値である．

1. $\mathcal{F}$ は A_∞ ホモトピー同値関手である．
2. $\mathcal{F}$ は A_∞ 擬同型関手である．

9 恒等射を考えない A_∞ 加群

恒等射を持たない A_∞ 圏上の恒等射を考えない右 A_∞ 加群を定義する．$\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする．

定義 9.1 (複体の圏 $\mathcal{C}h$). 恒等射を持たない dg 圏[*6] $\mathcal{C}h$ を次のように定義する.

- 対象はベクトル空間の複体 (C, d)
- 任意の $(C_0, d_0), (C_1, d_1) \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}h$ に対して

$$\hom^i_{\mathcal{C}h}((C_0, d_0), (C_1, d_1)) := \bigoplus_k \hom_{\mathbb{K}}(C_0^k, C_1^{k+i})$$

- 任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{C}h}(X_0, X_1), a_2 \in \hom_{\mathcal{C}h}(X_1, X_2)$ に対して

$$\mu^1_{\mathcal{C}h}(a_1) := d \circ a_1 + (-1)^{|a_1|+1} a_1 \circ d$$
$$\mu^2_{\mathcal{C}h}(a_2, a_1) := (-1)^{|x|(|y|+1)} a_2 \circ a_1$$

$\mathcal{C}h$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とみなす.

定義 9.2 (恒等射を考えない右 A_∞ 加群). 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}h$$

を $\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない右 A_∞ 加群 (non-unital (right) A_∞-module over $\mathcal{A}$) という. 以降では,「$\mathcal{A}$ 上の」と「右」を省略する. [*7]

恒等射を考えない A_∞ 加群を具体的に書き下す.

定義 9.3 (A_∞ 加群の A_∞ 構造). 恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M}$ は恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}h$ なので次のようになる.

($d = 0$) 対象の対応 $\mathcal{M} : \mathrm{Ob}\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ob}\mathcal{C}h$

($d = 1$) 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ に対して, $\mathcal{M}(X)$ はベクトル空間の複体である. よって, 微分 $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)[1]$ が存在する. この微分を

$$\mu^1_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)[1]$$

と表す.

($d \geq 2$) テンソル-hom 随伴より

$$\mathcal{M}^{d-1} : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{C}h}(\mathcal{M}(X_{d-1}), \mathcal{M}(X_0))[2-d]$$

[*8] に対応して

$$\mu^d_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(X_{d-1}) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \mathcal{M}(X_0)[2-d]$$

が得られる.

[*6] $\mathcal{C}h$ は恒等射を持つ (通常の dg 圏) が, 今は単位元の存在を課していない. 恒等射を考える A_∞ 圏以降では, $\mathcal{C}h$ を恒等射を持つ dg 圏としている.

[*7] 同様に, 恒等射を考えない左 A_∞ 加群も定義することができる. [Fuk02] を参照

[*8] 恒等射を考えない A_∞ 加群は反変関手なので, $\hom_{\mathcal{C}h}(\mathcal{M}(X_{d-1}), \mathcal{M}(X_0))$ となっていることに注意.

$\mu_{\mathcal{M}} = (\mu^1_{\mathcal{M}}, \mu^2_{\mathcal{M}}, \cdots)$ を恒等射を考えない A_∞ 加群の A_∞ 構造 (A_∞-structure of non-unital A_∞-module) という.

恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M}$ に対する多項等式は次のようになる.

補題 9.4. 任意の $b \in \mathcal{M}(X_{d-1})$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して, $\mu_{\mathcal{M}}$ は次の等式をみたす.

$$\begin{aligned}&\sum_{0 \le n < d} (-1)^{\maltese n} \mu^{n+1}_{\mathcal{M}}(\mu^{d-n}_{\mathcal{M}}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)\\ &+ \sum_{n+m<d} (-1)^{\maltese n} \mu^{d-m+1}_{\mathcal{M}}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+m+1}, \mu^m_{\mathcal{A}}(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) = 0\end{aligned}$$

Proof. 任意の $d \ge 3$ に対して $\mu^d_{\mathcal{C}h} = 0$ であることに注意. □

恒等射を考えない A_∞ 加群の間の前自然変換を定義する.

定義 9.5 (恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型). 恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ に対して, 前自然変換 $t : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ を恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 (pre-module homomorphism of A_∞-modules) という.

恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型を具体的に書き下す.

注意 9.6. 恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型は前自然変換なので, 各 g に対して $T = (T^0, T^1, \cdots) \in \hom^g(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ は次のようになる.

($d \ge 1$) テンソル-hom 随伴より

$$T^{d-1} : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{C}h}(\mathcal{M}_0(X_{d-1}), \mathcal{M}_1(X_0))[g-d+1]$$

に対応して

$$t^d : \mathcal{M}_0(X_{d-1}) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \mathcal{M}_1(X_0)[|t| - d + 1]$$

が得られる.

恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型と前自然変換には次のような関係がある.

補題 9.7. 任意の $b \in \mathcal{M}_0(X_{d-1})$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$t^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) = (-1)^{\S} T^{d-1}(a_1, \cdots, a_{d-1})(b)$$

が成立する. ここで

$$\S := (|T| - 1)|b| + |T|(|T| - 1)/2$$

である.

恒等射を考えない A_∞ 加群と恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型は恒等射を持たない A_∞ 圏をなす.

定義 9.8 (恒等射を考えない A_∞ 加群圏). 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 nu-mod$(\mathcal{A})$:= nu-fun$(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}h)$ を次のように定義する. $\mathcal{Q} :=$ nu-mod$(\mathcal{A})$ と表す.

- 対象は $\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}h$
- 任意の $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して, 次数 g の各 hom 空間 $\hom^g(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ は次数 g の恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ の集まり
- 任意の $t_1 \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1), \cdots, t_e \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e)$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

  $(e = 1)$ $\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)[1]$ は

  $$\begin{aligned}
  &(\mu^1_{\mathcal{Q}}(t_1))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) \\
  &:= \sum_n (-1)^{\ddagger} \mu^{n+1}_{\mathcal{M}_1}(t_1^{d-n}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) \\
  &+ \sum_n (-1)^{\ddagger} t_1^{n+1}(\mu^{d-n}_{\mathcal{M}_0}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) \\
  &+ \sum_{m,n} (-1)^{\ddagger} t_1^{d-m+1}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+m+1}, \mu^n_{\mathcal{A}}(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)
  \end{aligned}$$

  $(e = 2)$ $\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \otimes \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ は

  $$\begin{aligned}
  &(\mu^2_{\mathcal{Q}}(t_2, t_1))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) \\
  &:= \sum_n (-1)^{\ddagger} t_2^{n+1}(t_1^{d-n}(b, a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1)
  \end{aligned}$$

  $(e \geq 3)$ $(\mu^e_{\mathcal{Q}}(t_e, \cdots, t_1))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := 0$

  ここで

  $$\ddagger := |a_{n+1}| + \cdots + |a_{d-1}| + |b| - d + n + 1$$

  である.

nu-mod$(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない A_∞ 加群圏 (non-unital A_∞-category of non-unital A_∞-modules over $\mathcal{A}$) という.

恒等射を持たない A_∞ 圏上の恒等射を考えない A_∞ 加群はコホモロジー圏上の加群を定める.

注意 9.9. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}h$ は恒等射を考えない関手 (単位元を持たない通常の加群)

$$H(\mathcal{M}) : H(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}rmod$$

を定める. ここで, $\mathcal{G}rmod$ は次数付きベクトル空間のなす圏である.

注意 9.10. $H(\mathcal{M})$ は任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ における $\mathcal{M}(X)$ のコホモロジー群 $H(\mathcal{M}(X))$ から構成される．任意の $b \in \mathcal{M}(X_1)$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ に対して

- 微分 d は $d(b) := (-1)^{|b|}\mu^1_{\mathcal{M}}(b)$
- 作用 $\cdot$ は $b \cdot a_1 := (-1)^{|a_1|}\mu^2_{\mathcal{M}}(b, a_1)$

である．

注意 9.11. 恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ は任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 単位元のないの加群の準同型

$$H(t) : H(\mathcal{M}_0(X)) \to H(\mathcal{M}_1(X)) : [b] \mapsto [(-1)^{|b|}t^1(b)]$$

を定める．

次の命題は補題 6.2 の特別な場合である．

系 9.12. 恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$ が任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $H(t) : H(\mathcal{M}_0(X)) \to H(\mathcal{M}_1(X))$ が同型を定めるとする．このとき, 任意の恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{N}$ に対して, t の右合成と左合成

$$\mathcal{R}_t : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{N})$$
$$\mathcal{L}_t : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M}_1)$$

は A_∞ 擬同型を定める．

注意 9.13. $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする．単位元のない A_∞ 加群 $\mathcal{M}$ が任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $H(\mathcal{M}(X), \mu^1_{\mathcal{M}}) = 0$ を満たすとする．系 9.12 において $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$ とすると, 恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{N}$ に対して

$$H(\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = H(\hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})) = 0$$

となる．このとき, $\mathcal{M}$ は K-projective かつ K-injective であるという．

恒等射を考えない A_∞ 関手は恒等射を考えない A_∞ 加群圏の間の恒等射を考えない A_∞ 関手を定める．

定義 9.14 (恒等射を考えない A_∞ プルバック関手). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{G}^* := \mathcal{R}_{\mathcal{G}^{\mathrm{op}}} : \text{nu-mod}(\mathcal{B}) \to \text{nu-mod}(\mathcal{A})$$

を次のように定義する．

$(e = 0)$ 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{G}^*(\mathcal{M})(X) := \mathcal{M}(\mathcal{G}(X))$

($\mathcal{A}$ **上の** A_∞ **加群の** A_∞ **構造**) 任意の $b \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y)$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_{d-1} \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1})$ に対して

$$\mu^d_{\mathcal{G}^*\mathcal{M}}(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} \mu^r_{\mathcal{M}}(b, \mathcal{G}^{s_r}(a_{d-1}, \cdots, a_{d-s_r}), \cdots, \mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1))$$

($e \geq 1$) 任意の $t_1 \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1), \cdots, t_e \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e)$ に対して

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}^*)^e : \hom_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e) \otimes \cdots \otimes \hom_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \\ \to \hom_{\text{nu-mod}(\mathcal{A})}(\mathcal{G}^*\mathcal{M}_0, \mathcal{G}^*\mathcal{M}_e)[1-e]\end{aligned}$$

($e = 1$) $(\mathcal{G}^*)^1 : \hom_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \to \hom_{\text{nu-mod}(\mathcal{A})}(\mathcal{R}^*\mathcal{M}_0, \mathcal{R}^*\mathcal{M}_1)$ は

$$((\mathcal{G}^*)^1(t_1))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \cdots, s_r} t^r_1(b, \mathcal{G}^{s_r}(a_d, \cdots, a_{d-s_r}), \cdots, \mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1}, \cdots, a_1))$$

($e \geq 2$) $((\mathcal{G}^*)^e(t_e, \cdots, t_1))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := 0$

$\mathcal{G}^*$ を恒等射を考えない A_∞ プルバック関手 (non-unital A_∞-pullback functor) という.

10 A_∞-Yoneda 埋め込み

恒等射を考えない A_∞ 加群として A_∞-Yoneda 埋め込みを定義する. $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏として, $\mathcal{Q} := \mathrm{mod}(\mathcal{A})$ と表す.

定義 10.1 (A_∞-Yoneda 埋め込み). $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対する恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{Y}_Y : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}h$ を次のように定義する.

($d = 0$) 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{Y}_Y(X) := \hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ [*9]
($d \geq 1$) A_∞ 加群の A_∞ 構造は

$$\mu^d_{\mathcal{Y}} : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, Y)[2-d]$$
$$\mu^d_{\mathcal{Y}}(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \mu^d_{\mathcal{A}}(b, a_{d-1}, \cdots, a_1)$$

$\mathcal{Y}_Y$ を A_∞-Yoneda 埋め込み (A_∞-Yoneda embedding) [*10] という.

$Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ を動かすと, A_∞-Yoneda 埋め込みは恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 10.2. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $l_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{Q}$ を次のように定義する.

($d = 0$) 任意の $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して $l_{\mathcal{A}}(Y) := \hom_{\mathcal{A}}(-, Y)$

[*9] $\mathcal{A}$ は恒等射を持たない A_∞ 圏であるので, $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ は次数付きベクトル空間 ($\mu^1_{\mathcal{A}}$ により複体の構造を持つ), つまり $\hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}h$ である.

[*10] 「恒等射を考えない」A_∞-Yoneda 埋め込みとすべきであるが, 省略することが一般的なようである.

$(d=1)$ 任意の $c_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して

$$l^1_{\mathcal{A}}(c_1) := c_1 \circ - : \hom_{\mathcal{A}}(-, Y_0) \to \hom_{\mathcal{A}}(-, Y_1)$$

$(d \geq 2)$ 任意の $c_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1), \cdots, c_d \in \hom_{\mathcal{A}}(Y_{d-1}, Y_d)$ に対して

$$l^d_{\mathcal{A}}(c_{d-1}, \cdots, c_1) := 0$$

A_∞-Yoneda 埋め込みの前準同型を次のように定義する. $\mathcal{Y}_0(-) := \hom_{\mathcal{A}}(-, Y_0), \mathcal{Y}_1(-) := \hom_{\mathcal{A}}(-, Y_1)$ と表す.

定義 10.3 (A_∞-Yoneda 埋め込みの前準同型). 次数 g の A_∞-Yoneda 埋め込みの前準同型 $l = (l^0, l^1, \cdots) \in \hom^g_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1)$ を次のように定義する.

$$l^d : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y_0) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, Y_1)[g-d+1]$$
$$l^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \mu^{d+1}_{\mathcal{A}}(c_1, b, a_{d-1}, \cdots, a_1)$$

定義 10.4. $\mathcal{M}$ を恒等射を考えない A_∞ 加群, $\mathcal{Y}_Y$ を A_∞-Yoneda 埋め込みとする. 複体の写像

$$\lambda_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(Y) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Y, \mathcal{M})$$

を次のように定義する.

- 任意の $c \in \mathcal{M}(Y)$ と $b \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y)$ と $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$(\lambda_{\mathcal{M}}(c))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \mu^{d+1}_{\mathcal{M}}(c, b, a_{d-1}, \cdots, a_1)$$

コホモロジー圏において, $\lambda_{\mathcal{M}}$ と $\mu_{\mathcal{Q}}$ には次のような関係がある.

補題 10.5. $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ を恒等射を考えない A_∞ 加群とする. このとき, 次の 2 つが成立する.

1. 任意の $c \in \mathcal{M}(Y_1)$ と $b \in \hom_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して, $\hom_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{Y}_0, \mathcal{M})$ において

$$[\lambda_{\mathcal{M}}(\mu^2_{\mathcal{M}}(c, b))] = [\mu^2_{\mathcal{Q}}(\lambda_{\mathcal{M}}(c), l^1_{\mathcal{A}}(b))]$$

2. 任意の $t \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ と $c \in \mathcal{M}_0(Y)$ に対して, $\hom_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{Y}, \mathcal{M}_1)$ において

$$[\mu^2_{\mathcal{Q}}(t, \lambda_{\mathcal{M}_0}(c))] = [\lambda_{\mathcal{M}_1}(t^1(c))]$$

A_∞-Yoneda 埋め込みは恒等射を考えない A_∞ プルバック関手と可換である.

補題 10.6. $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 前自然変換

$$T : l_A \to \mathcal{F}^* \circ l_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{F}$$

が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "l_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & \text{nu-mod}(\mathcal{A}) \\
\mathcal{B} \arrow[r, "l_{\mathcal{B}}"'] & \text{nu-mod}(\mathcal{B}) \arrow[u, "\mathcal{F}^*"']
\end{tikzcd}$$

参考文献

[Fuk93] Kenji. Fukaya. Morse homotopy, A_∞-category and floer homologies. Proceeding of Garc Workshop on Geometry and Topology, 1993. https://cir.nii.ac.jp/crid/1572824499601341056.

[Fuk96] Kenji Fukaya. Morse homotopy and its quantization. Geometric topology (Athens, GA, 1993), Vol. 2, pp. 409–440, 1996.

[Fuk02] Kenji Fukaya. Floer homology and mirror symmetry ii. preprint, 2002.

[SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. https://books.google.co.jp/books?id=NOQxS9Tp5OUC.