

Bridgeland 安定性

よの

2023 年 8 月 16 日

概要

三角圏の t 構造について簡単に復習し, Abel 圏の安定性条件を見たあと, 三角圏の安定性条件を考える.

目次

1	t 構造	1
2	Abel 圏上の安定性条件	4
3	スライス	4
4	Bridgeland 安定性	7
5	安定性条件のなす空間	8

1 t 構造

\mathcal{D} を三角圏, n を整数とする.

定義 1.1 (拡大). \mathcal{D} の充満部分圏 \mathcal{X}, \mathcal{Y} に対して

$$X \rightarrow D \rightarrow Y \rightarrow X[1] \quad (X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y})$$

が完全三角となるような $D \in \mathcal{D}$ のなす \mathcal{D} の部分圏を \mathcal{X} による \mathcal{Y} の拡大部分圏といい, $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ と表す.

定義 1.2 (t 構造). 同型と直和因子で閉じた \mathcal{D} の充満加法部分圏 $t^{\leq 0}, t^{\geq 0}$ の対 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が次の条件を満たすとき, $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ を \mathcal{D} 上の t 構造 (t -structure) という. 以下では, 次の記号を導入する.

$$t^{\leq n} := t^{\leq 0}[-n], \quad t^{\geq n} := t^{\geq 0}[-n]$$

1. $t^{\leq 0} \perp t^{\geq 1}$

$$2. \mathcal{D} = t^{\leq 0} * t^{\geq 1}$$

$$3. t^{\leq 0} \subset t^{\leq 1} \text{ かつ } t^{\geq 1} \supset t^{\geq 0}$$

$(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ を \mathcal{D} 上の t 構造とする.

補題 1.3. $t^{\leq 0} = {}^{\perp}(t^{\geq 1})$ かつ $t^{\geq 0} = (t^{\leq -1})^{\perp}$ である.

系 1.4. 完全三角 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ において, $X, Z \in t^{\leq 0}$ のとき, $Y \in t^{\leq 0}$ である.

定義 1.5 (t 構造の核). \mathcal{D} の充満部分圏

$$\mathcal{D}^{\heartsuit} := t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$$

を t 構造の核 (heart, core) という.

t 構造の核は Abel 圏の構造をもつ.

定理 1.6. t 構造 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ の核 \mathcal{D}^{\heartsuit} は前 Abel 圏である.

Proof. 任意の $A, B \in \mathcal{D}^{\heartsuit}$ と $f : \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\heartsuit}}(A, B)$ に対して, ある $C \in \mathcal{D}$ が存在して

$$C \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C[1] \quad (1.1)$$

は完全三角である. $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ は \mathcal{D} 上の t 構造なので, この C に対して, ある $X_C \in t^{\leq -1}$ と $Y_C \in t^{\geq 0}$ が存在して

$$X_C \xrightarrow{x_C} C[1] \xrightarrow{y_C} Y_C \rightarrow X_C[1] \quad (1.2)$$

は完全三角である. このとき, $y_C \circ g : B \rightarrow Y_C$ が f の余核であることを示す. $y_C \circ g$ に対して, ある $M \in \mathcal{D}$ が存在して

$$M \xrightarrow{m} B \xrightarrow{y_C \circ g} Y_C \rightarrow M[1] \quad (1.3)$$

は完全三角である. 八面体公理より

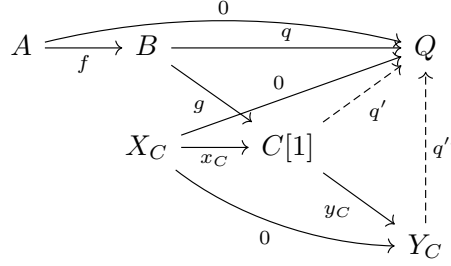
$$A \xrightarrow{l} M \rightarrow X_C \rightarrow A[1] \quad (1.4)$$

は次の図式を可換にする完全三角である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X[-1] & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 A[-1] & \longrightarrow & B[-1] & \xrightarrow{g[-1]} & C & \longrightarrow & A \\
 & & \searrow & & \downarrow y_C[-1] & & \downarrow \\
 & & (y_C \circ g)[-1] & \searrow & Y_C[-1] & \longrightarrow & M \\
 & & & & \searrow & & \downarrow \\
 & & & & & & X_C
 \end{array}$$

まず, $Y_C \in \mathcal{D}^\heartsuit$ を示す. $Y_C \in t^{\geq 0}$ なので, $Y_C \in t^{\leq 0}$ を示せばよい. 式 (1.1) において, $B \in \mathcal{D}^\heartsuit$ かつ $A[1] \in t^{\leq -1} \subset t^{\leq 0}$ なので, 系 1.4 より $C[1] \in t^{\leq 0}$ である. 式 (1.2) において, $X[1] \in t^{\leq -2} \subset t^{\leq 0}$ かつ $C[1] \in t^{\leq 0}$ なので, 同様に $Y_C \in t^{\leq 0}$ である. よって, $Y_C \in \mathcal{D}^\heartsuit$ である.

次に, $Q \in \mathcal{D}^\heartsuit$ と $q \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^\heartsuit}(B, Q)$ が $q \circ f = 0$ を満たすとする. このとき, ある $q' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^\heartsuit}(C[1], Q)$ が存在して, $q' \circ g = q$ である. $X_C \in t^{\leq -1}$ かつ $q' \circ x_C = 0$ である. よって, ある $q'' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^\heartsuit}(Y_C, Q)$ が存在して, $q'' \circ y_C = 0$ である.



一意性を示す. 以上より, $y_C \circ g: B \rightarrow Y_C$ は f の余核である.

同様に, $e \circ x_C[-1]: X_C[-1] \rightarrow A$ は f の核である. □

定理 1.6 より, 次の命題が成立する.

補題 1.7. 任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^\heartsuit}(A, B)$ を補完する \mathcal{D} における完全三角

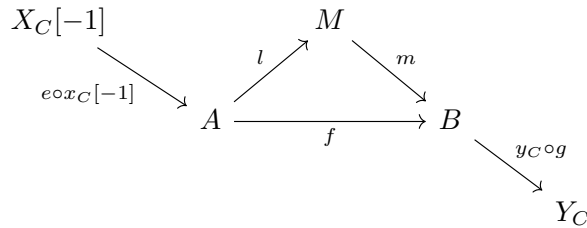
$$C \xrightarrow{e} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C[1]$$

において, 次の 2 つが成立する.

1. $C[1] \in t^{\geq 0}$ のとき, g は f の余核である.
2. $C \in t^{\leq 0}$ のとき, e は f の核である.

定理 1.8. t 構造の核 \mathcal{D}^\heartsuit は Abel 圏である.

Proof. 任意の $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^\heartsuit}(A, B)$ に対して, $\text{Im}(f) \cong \text{Coim}(f)$ が成立することを示す. 式 (1.4) において, $A \in \mathcal{D}^\heartsuit$ かつ $X_C[1] \in t^{\leq -2} \subset t^{\leq 0}$ より, $M \in t^{\leq 0}$ である. 補題 1.7 より, $m = \ker(y_C \circ g) = \ker(\text{coker}(f))$ である. よって, $\text{im}(f) = m$ なので, $f = m \circ l$ と像経由分解できる. 同様に, $\text{coim}(f) = l$ となっているので, $f = m \circ l$ は余像経由分解でもある. よって, 同型 $\text{Im}(f) \cong \text{Coim}(f)$ が存在する.



□

2 Abel 圏上の安定性条件

\mathcal{A} を Abel 圏, $K(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} 上の Grothendieck 群とする.

定義 2.1 (Abel 圏上の安定関数). 群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ は次の条件を満たすとき, Z を \mathcal{A} 上の安定関数 (stability function) という.

- 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ に対して, $Z(E) \in \mathbb{H}$ である. ここで

$$\mathbb{H} := \{r \exp(i\pi\phi) \mid r > 0, 0 < \phi \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

安定関数 Z に対して, $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ の位相 (phase) $\phi(E)$ を次の式で定義する.

$$\phi(E) := \frac{1}{\pi} \arg Z(E) \in (0, 1]$$

定義 2.2 (半安定対象). $Z : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathcal{A} 上の安定関数とする. $E(\neq 0) \in \mathcal{A}$ の任意の部分対象 $A \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(A) \leq \phi(E)$ であるとき, E を Z による半安定対象 (the semistable object with respect to Z) という.

定義 2.3 (Harder-Narasimhan フィルトレーション).

3 スライス

\mathcal{D} を三角圏とする.

定義 3.1 (スライス). 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi)$ を \mathcal{D} の充満加法部分圏とする. $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ が次の条件を満たすとき, \mathcal{P} を \mathcal{D} のスライス (slicing) という. $\mathcal{P}(\phi)$ の 0 でない対象を位相 ϕ の対象という.

1. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$
2. $\phi_1 > \phi_2$ のとき, $\mathcal{P}(\phi_1) \perp \mathcal{P}(\phi_2)$
3. 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, ある実数の有限列

$$\phi_1 > \cdots > \phi_n$$

と, 完全三角の列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n = E \\ & \nearrow \text{---} & \nwarrow & \nearrow \text{---} & \nwarrow & \nearrow \text{---} & \nwarrow \\ & A_1 & & A_2 & & & A_n \end{array}$$

が存在して, 各 i に対して, $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ である.

注意 3.2.

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & \xrightarrow{f_1} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & A_1 & \xrightarrow{h_1} & E_0[1] \\ & & \downarrow f_2 & & & & \\ & & E_2 & \xrightarrow{g_2} & A_2 & \xrightarrow{h_2} & E_1[1] \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_n & & & & \\ & & E_n & \xrightarrow{g_n} & A_n & \xrightarrow{h_n} & E_{n-1}[1] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 = E_0 & \xrightarrow{f_1} & E_1 & \xrightarrow{f_2} & E_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n = E \\
& & \swarrow g_1 & & \swarrow g_2 & & \swarrow g_n \\
& & A_1 & & A_2 & & A_n \\
& \nwarrow h_1 & & \nwarrow h_2 & & & \nwarrow h_n
\end{array}$$

\mathcal{P} を \mathcal{D} のスライスとする.

補題 3.3 より, 0 でない対象から最大の位相と最小の位相という不変量が定まる.

$$\phi_{\mathcal{P}}^+(E) := \phi_1, \quad \phi_{\mathcal{P}}^-(E) := \phi_n$$

補題 3.5. 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, 次の式が成立する.

$$\phi_{\mathcal{P}}^+(E) \geq \phi_{\mathcal{P}}^-(E)$$

定義 3.6. 任意の $I \subset \mathbb{R}$ に対して, 各 $\phi \in I$ における $\mathcal{P}(\phi)$ によって生成される \mathcal{D} の拡大で閉じた部分圏を $\mathcal{P}(I)$ とする. つまり, $\mathcal{P}(I)$ は次のように表せる.

$$\mathcal{P}(I) := \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E), \phi^-(E) \in I\}$$

また, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 次のような省略を用いる.

$$\mathcal{P}(\leq t) := \mathcal{P}((-\infty, t]) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E) \leq t\}$$

$$\mathcal{P}(< t) := \mathcal{P}((-\infty, t)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^+(E) < t\}$$

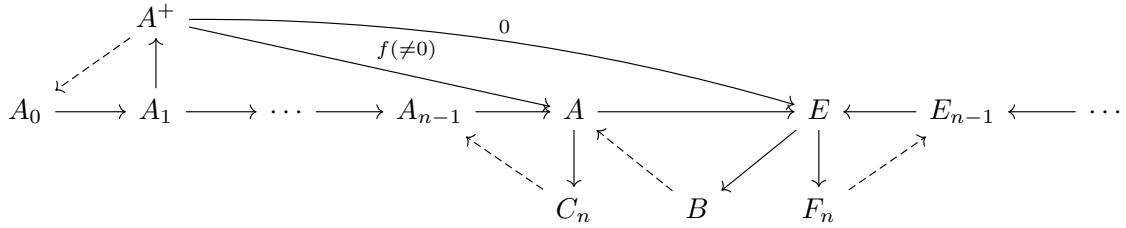
$$\mathcal{P}(\geq t) := \mathcal{P}([t, \infty)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^-(E) \geq t\}$$

$$\mathcal{P}(> t) := \mathcal{P}((t, \infty)) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi^-(E) > t\}$$

補題 3.7. I を長さ 1 上の区間とする. \mathcal{D} における完全三角 $A \rightarrow E \rightarrow B$ において, A, E, B は $\mathcal{P}(I)$ の 0 でない対象とする. このとき, $\phi^+(A) \leq \phi^+(E)$ かつ $\phi^-(E) \leq \phi^-(B)$ である.

Proof. $\phi^+(A) \leq \phi^+(E)$ を示す. ある $t \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ を用いて, $I = [t, t + \alpha]$ と表す. 定義より, ある $A^+ \in \mathcal{P}(\phi^+(A))$ が存在する. $A_1 \cong A^+$ なので, 0 でない射 $f: A^+ \rightarrow A$ が存在する.

$\phi^+(A) > \phi^+(E)$ であると仮定する. 定義より, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A^+, F_n) = 0$ である. $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F_n) \neq 0$ なので, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A^+, E) = 0$ であり, f は $B[-1]$ を経由する (らしい).



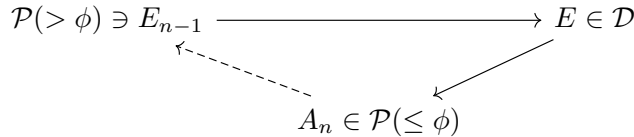
□

補題 3.8. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ と $(\mathcal{P}(\geq \phi), \mathcal{P}(< \phi + 1))$ は \mathcal{D} 上の t 構造である.

Proof. $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ が t 構造であることを示す.

まず, $\mathcal{P}(> \phi) \perp \mathcal{P}(\leq \phi)$ を示す. 任意の $E \in \mathcal{P}(> \phi)$ と $F \in \mathcal{P}(\leq \phi)$ に対して, $\phi^-(E) > \phi \geq \phi^+(F)$ なので, $\text{Hom}(E, F) = 0$ である.

次に, $\mathcal{D} = \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ を示す. $\mathcal{D} \supset \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ は明らかなので, 逆を示す. 任意の $E \in \mathcal{D}$ に対して, 条件 (3) の ϕ 以下と ϕ より大きい実数で完全三角の列を分ける. このとき, 次の完全三角が存在するので, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(> \phi) * \mathcal{P}(\leq \phi)$ である.



最後に, $\mathcal{P}(> \phi) \subset \mathcal{P}(> \phi)[-1]$ を示す. 定義より

$$\mathcal{P}(> \phi)[-1] = \mathcal{P}(\leq \phi - 1) = \{0\} \cup \{E \in \mathcal{D} \mid \phi - 1 < \phi^-(E)\}$$

なので, $\mathcal{P}(> \phi) \subset \mathcal{P}(> \phi)[-1]$ である. 同様に, $\mathcal{P}(\leq \phi)[-1] \supset \mathcal{P}(\leq \phi)$ も示せる.

以上より, $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ は t 構造である.

□

系 3.9. t 構造 $(\mathcal{P}(> \phi), \mathcal{P}(\leq \phi + 1))$ の核は $\mathcal{P}((\phi, \phi + 1])$ の部分集合である. t 構造 $(\mathcal{P}(\geq \phi), \mathcal{P}(< \phi + 1))$ の核は $\mathcal{P}([\phi, \phi + 1))$ の部分集合である.

4 Bridgeland 安定性

\mathcal{D} を三角圏, $K(\mathcal{D})$ を \mathcal{D} の Grothendieck 群とする.

定義 4.1 (三角圏上の安定性条件). 群準同型 $Z : K(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ と次の条件を満たす \mathcal{D} のスライス \mathcal{P} の組 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ を \mathcal{D} 上の安定性条件 (stability condition) という.

- 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して, ある $m(E) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して, $Z(E) = m(E) \exp(i\pi\phi)$ である.

群準同型 Z を安定性条件の中心電荷 (central charge), $\mathcal{P}(\phi)$ の対象を位相 ϕ の半安定対象 (semistable objects with phase ϕ), $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象を位相 ϕ の安定対象 (stable objects with phase ϕ) という.

(Z, \mathcal{P}) を \mathcal{D} 上の安定性条件とする.

補題 4.2. 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi)$ は Abel 圏である.

定義 4.3 (質量). 任意の $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して

$$m_\sigma(E) := \sum_i |Z(A_i)|$$

を E の質量 (mass) という. σ が明らかな場合は σ を省略する.

補題 4.4. $E(\neq 0) \in \mathcal{D}$ に対して, 次の式が成立する.

$$m_\sigma(E) \geq |Z(E)|$$

ある $\phi \in \mathbb{R}$ が存在して, $E \in \mathcal{P}(\phi)$ となるときに等号は成立する.

定理 4.5. 次の 2 つは同値である.

1. \mathcal{D} 上に安定性条件を与える.
2. \mathcal{D} 上の有界 t 構造の核と HN フィルトレーションをもつその上の安定性条件を与える.

Proof. (1) から (2) を示す. \mathcal{D} 上の有界 t 構造の核を \mathcal{D}^\heartsuit とすると, 自然な同型 $(\mathcal{D}^\heartsuit)^\vee \cong K(\mathcal{D})$ がある.

□

定義 4.6 (局所有限).

5 安定性条件のなす空間

\mathcal{D} を三角圏とする.

定義 5.1 (スライスと安定性条件のなす集合). 局所有限なスライスのなす集合を $\text{Slice}(\mathcal{D})$, 局所有限な安定性条件のなす集合を $\text{Stab}(\mathcal{D})$ と表す.

補題 5.2. 任意の $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \text{Slice}(\mathcal{D})$ に対して

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sup_{E(\neq 0) \in \mathcal{D}} \{|\phi_{\mathcal{P}}^-(E) - \phi_{\mathcal{Q}}^-(E)|, |\phi_{\mathcal{P}}^+(E) - \phi_{\mathcal{Q}}^+(E)|\} \in [0, \infty)$$

は $\text{Slice}(\mathcal{D})$ 上の距離を定める.