$\mathbf{Cat}$ 上の natural モデル構造

よの

2024 年 3 月 7 日

概要

小圏の圏にモデル構造を入れることにより, 圏論 (の一部) をホモトピー論の枠組みで考えられるようになる．まず, 圏同値 (categorical equivalence) を weak equivalence とするような natural モデル構造が存在する．他にも, 圏の脈体の間の射が Kan weak equivalence であるような Thomason モデル構造が存在する．前者の存在は [Rez96] で, 後者の存在は [Tho80] でそれぞれ証明された．本稿では, natural モデル構造を定義し, 単体的集合の圏上の Joyal モデル構造と Quillen 随伴であることを示す．

目次

1 Natural モデル構造

小圏の圏にモデル構造を入れるとき, まず weak equivalence として圏同値 (categorical equivalence) が考えられる．選択公理を仮定すると, weak equivalence を圏同値とするような $\mathbf{Cat}$ 上のモデル構造は一意である．(Chris Schommer-Pries の The canonical model structure on Cat を参照)

定義 1.1 (擬ファイブレーション). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．任意の対象 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と domain が $F(c)$ の同型射 $g \in \mathcal{D}$ に対して, domain が c のある同型射 $f \in \mathcal{C}$ が存在して, $F(f) = g$ を満たすとき, F を擬ファイブレーション (quasi-fibration) という．

擬ファイブレーションはリフトを用いて特徴づけることができる．

注意 1.2. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．このとき, F が擬ファイブレーションであることと, 次の四角がリフトを持つことは同値である．

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

ここで, $\{0\}$ は 1 点圏, I は 2 点対象とその間の一意な同型射からなる圏とする.

定義 1.3 (対象上の mono 関手). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. $\mathrm{Ob}(F) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ が mono 射のとき, F を対象上の mono 関手 (monic on objects) という.

定義 1.4 (natural モデル構造). **Cat** には次のモデル構造が存在する. これを **Cat** 上の natural モデル構造[*1] といい, $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ と表す.

- weak equivalence は通常の圏同値
- fibration は擬ファイブレーション
- cofibration は対象上の mono 関手

注意 1.5. $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ において, 任意の対象 (小圏) はファイブラントかつコファイブラントである.

注意 1.6. $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ は

$$I := \{\emptyset \to \{0\}, \{0\} \sqcup \{1\} \to \{0 \to 1\}, \{0 \rightrightarrows 1\} \to \{0 \to 1\}\}$$
$$J := \{\{0\} \to \{0 \leftrightarrow 1\}\}$$

をそれぞれ generating cofibration, generating trivial cofibration の集合とするコファイブラント生成なモデル圏である.

Proof. まず, I に関して考える. $u : \emptyset \to \{0\}, v : \{0\} \sqcup \{1\} \to \{0 \to 1\}, w : \{0 \rightrightarrows 1\} \to \{0 \to 1\}$ とする. まず, u, v, w が cofibration であることは明らかである. よって, trivial fibration は u, v, w に対して RLP を持つ.

逆に, 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が u, v, w に対して RLP を持つとする. u に対して RLP を持つとき, F は対象上の epi 射である. v に対して RLP を持つとき, G は充満である. w に対して RLP を持つとき, G は忠実である. 注意 1.7 より, F は trivial fibration である.

J に関しては注意 1.2 より従う. □

$\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ における trivial fibration と trivial cofibration は簡単に表すことができる.

注意 1.7. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. このとき, F が trivial fibration であることと, F が圏同値かつ対象上の epi 関手[*2] であることは同値である.

注意 1.8. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. このとき, F が trivial cofibration であることと, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}$ と圏同値であるような $\mathcal{D}$ の部分圏であることは同値である.

Cat 上に natural モデル構造が存在することを示すために, いくつか準備をする.

[*1] 自明な (trivial) モデル構造や圏的 (categorical) モデル構造と呼ばれることもある. このとき, $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ における fibration を isofibraion, cofibration を isocofibration ということもある.

[*2] 対象上の epi 関手は対象上の mono 関手と同様に定義される. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ が epi 射のとき, F を対象上の epi 関手 (epic on objects) という.

まず, $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ がリフト性質を満たすことを示す.

補題 1.9. 次の図式において, F を対象上の mono 関手, G を擬ファイブレーションとする.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "V"'] \arrow[ur, dashed, "H"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

更に, F か G が圏同値のとき, この四角はリフト H を持つ.

Proof. まず, G が圏同値のときを考える. このとき, $\mathrm{Ob}(F) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ は mono 射, $\mathrm{Ob}(G) : \mathrm{Ob}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{F})$ は epi 射である. $\mathcal{D}$ の対象 d が $F(\mathcal{C})$ に属するとき, $d = F(c)$ を満たす一意な $\mathcal{C}$ の対象 c を用いて, $H(d) := U(c)$ とする. d が $F(\mathcal{C})$ に属さないとき, $V(d) = G(e)$ を満たす $e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ を用いて, $H(d) := e$ とする. [*3] G は圏同値かつ擬ファイブレーションなので, 注意 1.7 より, 任意の $f : d \to d' \in \mathcal{D}$ に対して,

$$G : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(H(d), H(d')) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(GH(d), GH(d')) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(V(d), V(d'))$$

は同型である. よって, 射の対応 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ はこの同型を用いて定める. このとき, 求める四角の可換性はすぐに示すことができる.

次に, F が圏同値のときを考える. 注意 1.8 より, ある関手 $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して, $F'F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ かつ $\alpha : FF' \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ は自然同型である. 更に, α を F の像に制限すると, $\alpha|_{F(\mathcal{C})} = \mathrm{Id}_{F(\mathcal{C})}$ である. まず, 対象の対応 $\mathrm{Ob}(H) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を次のように定義する. G は擬ファイブレーションなので, $UF'(d) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ と domain が $GUF'(d) = VFF'(d)$ である同型射 $V(\alpha_d) : VFF'(d) \to V(d)$ に対して, ある同型射 $\beta_d : UF'(d) \to x$ が存在して, $G(\beta_d) = V(\alpha_d)$ かつ $G(x) = V(d)$ となる. よって, 任意の $d \in \mathrm{Ob}(D)$ に対して, $\mathrm{Ob}(H)(d) := x$ とする.

$$\begin{tikzcd}
UF'(d) \arrow[d, "\beta_d"'] & & VFF'(d) = GUF'(d) \arrow[d, "V(\alpha_d)"] \\
\mathrm{Ob}(H)(d) := x & \arrow[r, mapsto, "G"] & V(d)
\end{tikzcd}$$

次に, 射の対応 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を次のように定める. 任意の $\mathcal{D}$ の射 $f : d \to d'$ に対して,

$$H(f) := \beta_{d'} \cdot UF'(f) \cdot \beta_d^{-1} : H(d) \xrightarrow{\beta_d^{-1}} UF'(d) \xrightarrow{UF'(f)} UF'(d') \xrightarrow{\beta_{d'}} H(d')$$

とする. また, $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ が $F(\mathcal{C})$ に属する, つまりある対象 $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が一意に存在して $d = F(c)$ と表せるときを考える. $\alpha|_{F(c)} = \mathrm{Id}_{F(c)}$ なので, $HF(c) = U(c)$ かつ $\beta_{F(c)} = \mathrm{id}_{U(c)}$ である. これらのことから, 求める四角の可換性はすぐに示すことができる. □

[*3] ここで選択公理を用いている. 実は, F が圏同値のときも同様の議論で示すことができる. nlab の Canonical model structure on Cat の Propositin 1.2 を参照. このとき, $\mathrm{Ob}(F)$ は epi 射なので, 選択公理は用いない. 本文中の証明は [Rez96] Theorem 3.1 を参考にした.

$\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ が分解系を持つことを示す.

補題 1.10. 任意の関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は圏同値かつ対象上の mono 射 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ と擬ファイブレーション $V:\mathcal{C}'\to\mathcal{D}$ を用いて $F=VU$ と分解できる. また, 任意の関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ は対象上の mono 射 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{D}'$ と圏同値かつ擬ファイブレーション $V:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}$ を用いて $F=VU$ と分解できる.

Proof. まず, 任意の関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が圏同値かつ対象上の mono 射 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ と擬ファイブレーション $V:\mathcal{C}'\to\mathcal{D}$ を用いて $F=VU$ と分解できることを示す. 圏 $\mathcal{C}'$ を次のように定義する. まず, $\mathcal{C}'$ の対象は

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') := \{(c,d,\alpha) \mid c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \alpha: F(c)\cong d\in\mathcal{D}\}$$

$\mathcal{C}'$ の任意の対象 $(c,d,\alpha),(c',d',\alpha')$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}((c,d,\alpha),(c',d',\alpha')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,c')$$

このとき, 関手 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ を任意の $c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $f:c\to c'\in\mathcal{C}$ に対して

$$U(c) := (c,F(c),\mathrm{id}_{F(c)}),\ U(f):=f$$

とする. 関手 $V:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ を任意の $(c,d,\alpha)\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ と $f:(c,d,\alpha)\to(c',d',\alpha')\in\mathcal{C}'$ に対して

$$V((c,d,\alpha)) := d,\ V(f):=\alpha^{-1}\cdot F(f)\cdot\alpha'$$

とする. このとき, U は圏同値かつ対象上の mono 射, V は擬ファイブレーションである.

次に, 任意の関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が対象上の mono 射 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{D}'$ と圏同値かつ擬ファイブレーション $V:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}$ を用いて $F=VU$ と分解できることを示す. 圏 $\mathcal{D}'$ を $D'=\mathcal{C}\sqcup\mathcal{D}$ で定義する. このとき, 関手 $U:\mathcal{C}\to\mathcal{D}'$ を任意の $c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $f:c\to c'\in\mathcal{C}$ に対して

$$U(c) := c,\ U(f):=F(f)$$

とする. 関手 $V:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}$ を任意の $(c,d)\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}\sqcup\mathcal{D})$ に対して,

$$V((c,d)) := (F(c),d)$$

とする. このとき, U は対象上の mono 射, V は圏同値かつ擬ファイブレーションである. □

Cat 上に natural モデル構造が存在することを示す.

Proof. まず, **Cat** は任意の (有限) 極限と (有限) 余極限を持つ.

次に, weak equivalence が 2-out-of-3 を満たすことは明らかである.

また, weak equivalence と cofibration が retract で閉じることは簡単に示すことができる. fibration が retract で閉じることは注意 1.2 より, リフトの一般論から示すことができる.

リフト性質を満たすことは補題 1.9 で, 分解系を持つことは補題 1.10 で既に示した. □

2 $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ と $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ の Quillen 随伴

第 2 章の目標は次の命題 2.1 を示すことである．

命題 2.1 ([Joy08] Proposition 6.14). 基本圏をとる関手 $\tau_1 : \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}} \to \mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ と脈体 $N : \mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}} \to \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ は，$\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ と $\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ の Quillen 随伴を定める．

$$\tau_1 : \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}} : N$$

Proof. まず，左随伴が cofibration を保つことを示す．任意の単体的集合 X に対して，$\mathrm{Ob}(\tau_1(X)) = X_0$ である．また，単体的集合の射 $f : X \to Y$ が mono 射 ($\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ における cofibration) のとき，特に $f_0 : X_0 \to Y_0$ は対象上の mono 射 ($\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ における cofibration) である．よって，左随伴は cofibration を保つ．

次に，左随伴が weak equivalence を保つことを示す．X を単体的集合，$\mathcal{C}$ を圏とする．[Joy08] B.0.16 より，

$$\mathrm{Fun}(X, N(\mathcal{C})) = \mathrm{Fun}(\tau_1(X), N(\mathcal{C}))$$

である．$\mathbf{sSet}^{\tau_0}$ の定義より，

$$\tau_0(X, N(\mathcal{C})) = \tau_0(\tau_1(X), N(\mathcal{C}))$$

である．従って，任意の単体的集合の射 $f : X \to Y$ に対して，

$$\tau_0(f, N(\mathcal{C})) = \tau_0(\tau_1(f), N(\mathcal{C}))$$

である．任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して $N(\mathcal{C})$ は擬圏である．よって，f が弱圏同値 ($\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ における weak equivalence) のとき，$\tau_0(f, N(\mathcal{C}))$ は同型である．つまり，$\tau_0(\tau_1(f), N(\mathcal{C}))$ も同型である．Yoneda の補題より，$\tau_1(f)$ は $\mathbf{Cat}^{\tau_0}$ における同型射である．つまり，$\tau_1(f)$ は圏同値 ($\mathbf{Cat}_{\mathrm{nat}}$ における weak equivalence) である． □

参考文献

[Joy08] Andre Joyal. The theory of quasi-categories and its applications, 2008.

[Rez96] Charles Rezk. A model category of categories, 1996.

[Tho80] R. W. Thomason. Cat as a closed model category. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 21(3):305–324, 1980.