A_∞ 圏と ∞ 圏の関係

よの

2023 年 10 月 8 日

概要

通常の圏の脈体 (nerve) を考えると，これは擬圏 (quasi-category) の構造を持つ．同様に，A_∞ 圏の A_∞ 脈体を定義し，A_∞ 圏の A_∞ 脈体も同様に擬圏となることを示す．[Fao13] また，A_∞ 脈体は dg-nerve [Lur08] の一般化であることが分かる．

特に断らない限り，A_∞ 圏は恒等射を持ち，A_∞ 関手と A_∞ 加群は恒等射を保つとする．

目次

1 A_∞ 圏の A_∞ 脈体

線形順序集合 $\mathbb{\Delta}$ を自然に圏とみなすのと同様に，$\mathbb{\Delta}$ を A_∞ 圏とみなす．

定義 1.1. A_∞ 圏 $A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]$ を次のように定義する．

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{\Delta}^n] := [n] = \{0, 1, \cdots, n\}$
- 任意の $i_0, i_1 \in \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]$ に対して

$$\hom_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]}(i_0, i_1) := \begin{cases} \mathbb{K}\cdot(i_0, i_1) & (i_0 < i_1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{K}} & (i_0 = i_1) \\ \emptyset & (i_0 > i_1) \end{cases}$$

  ここで，$\deg((i, j)) = 0$ である．
- 任意の $d \geq 1$ と $i_0, \cdots, i_k \in \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]$ に対して

$$\mu^d_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]} : \hom_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]}(i_0, i_1) \otimes \cdots \otimes \hom_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]}(i_{d-1}, i_d) \to \hom_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]}(i_0, i_d)[2-d]$$

  $(d = 1)$ $m^1_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]} := 0$
  $(d = 2)$ $m^2_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]}((i_0, i_1), (i_1, i_2)) := (i_0, i_2)$ $(i_0 \leq i_1 \leq i_2)$
  $(d \geq 3)$ $m^d_{A_\infty[\mathbb{\Delta}^n]} := 0$

定義 1.2. 関手

$$A_\infty[\mathbb{A}^-] : \mathbb{A} \to \mathbf{A_\infty Cat}$$

を次のように定義する.

- 任意の $[n] \in \mathbb{A}$ に対して

$$A_\infty[\mathbb{A}^-]([n]) := A_\infty[\mathbb{A}^n]$$

- $\mathbb{A}_j^n : [n-1] \to [n]$ に対して

$$(\mathbb{A}_j^n)_\star := A_\infty[\mathbb{A}^-](\mathbb{A}_j^n) : A_\infty[\mathbb{A}^{n-1}] \to A_\infty[\mathbb{A}^n]$$

$(d=0)$ 任意の $i \in \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{A}^{n-1}]$ に対して $(\mathbb{A}_j^n)_\star^0(k) := \mathbb{A}_j^n(k)$
$(d=1)$ 任意の (i_0, i_1) に対して $(\mathbb{A}_j^n)_\star^1((i_0, i_1)) := (\mathbb{A}_j^n(i_0), \mathbb{A}_j^n(i_1))$
$(d \geq 2)$ $(\mathbb{A}_j^n)_\star^d := 0$

- $\sigma_j^n : [n] \to [n-1]$ に対して, A_∞ 関手

$$(\sigma_j^n)_\star := A_\infty[\mathbb{A}^-](\sigma_j^n) : A_\infty[\mathbb{A}^n] \to A_\infty[\mathbb{A}^{n-1}]$$

$(d=0)$ 任意の $i \in \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{A}^n]$ に対して $(\sigma_j^n)_\star^0(k) := \sigma_j^n(k)$
$(d=1)$ 任意の (i_0, i_1) に対して $(\sigma_j^n)_\star^1((i_0, i_1)) := (\sigma_j^n(i_0), \sigma_j^n(i_1))$
$(d \geq 2)$ $(\sigma_j^n)_\star^d := 0$

定義 1.3 (A_∞ 脈体). A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, 単体的集合

$$N_{A_\infty}(\mathcal{A}) : \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

を次のように定義する.

- 任意の $n \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$ に対して $N_{A_\infty}(\mathcal{A})_n := \hom_{\mathbf{A_\infty Cat}}(A_\infty[\mathbb{A}^n], \mathcal{A})$
- 任意の $\alpha \in \hom_{\mathbb{A}^n}([m], [n])$ に対して, 単体的構造は $A_\infty[\mathbb{A}^-](\alpha)$ の右合成

$N_{A_\infty}(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の A_∞ 脈体 (simplicial nerve of A_∞-category) という.

注意 1.4. A_∞ 脈体の n 単体は A_∞ 関手 $\mathcal{F} : A_\infty[\mathbb{A}^n] \to \mathcal{A}$ である.

$(d=0)$ 任意の $i \in \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{A}^n]$ に対して, 対象の対応

$$\mathcal{F} : \mathrm{Ob}A_\infty[\mathbb{A}^n] \to \mathrm{Ob}\mathcal{A}$$

は $\mathcal{A}$ の $n+1$ 個の対象

$$X_i := \mathcal{F}(i)$$

と同一視できる.

$(1 \le d \le n)$ 任意の $i_0, \cdots, i_k \in \mathrm{Ob} A_\infty[\Delta^n]$ $(0 \le i_0 < \cdots < i_k \le n)$ に対して

$$\mathcal{F}^d : \hom_{A_\infty[\Delta^n]}(i_0, i_1) \otimes \cdots \otimes \hom_{A_\infty[\Delta^n]}(i_{d-1}, i_d) \to \hom_{A_\infty[\Delta^n]}(X_{i_0}, X_{i_d})[1-d]$$

は次数 $1-d$ の射

$$f_{i_0,\cdots,i_d} := \mathcal{F}^d((i_0,i_1) \otimes \cdots \otimes (i_{d-1}, i_d)) \in \hom^{1-d}_{\mathcal{A}}(X_{i_0}, X_{i_d})$$

と同一視できる．

補題 1.5. $f_{i_0,\cdots,i_d} \in \hom^{1-d}_{\mathcal{A}}(X_{i_0}, X_{i_d})$ を注意 1.4 で定義された写像とする．任意の $0 \le i_0 < \cdots < i_d \le n$ に対して, 次の 2 つが成立する．

$$(1)\ f_{i_0,i_0} = \mathrm{id}_{X_{i_0}}$$
$$(2)\ f_{i_0,\cdots,i_p,i_p,\cdots,i_d} = 0\ (2 \le d \le n)$$

Proof. それぞれ次のように示すことができる．

$$(1) : f_{i_0,i_0} = \mathcal{F}^1((i_0, i_1)) = \mathcal{F}^1(\mathrm{id}_{i_0}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}i_0} = \mathrm{id}_{X_{i_0}}$$

$$\begin{aligned}(2) : f_{i_0,\cdots,i_p,i_p,\cdots,i_d} &= \mathcal{F}^d((i_0,i_1), \cdots, (i_p, i_p), \cdots, (i_{d-1}, i_d)) \\ &= \mathcal{F}^d((i_0,i_1), \cdots, \mathrm{id}_{i_p}, \cdots, (i_{d-1}, i_d)) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

また, A_∞ 関手の結合式は次のようになる．

注意 1.6 (執筆中). ここで,

$$\varepsilon_r = \varepsilon(i_1, \cdots, i_r) := \sum_{2 \le k \le r} (1 - j_k + j_{k-1}) \cdot j_{k-1}$$

注意 1.7. A_∞ 脈体の単体的構造は次のようになる．

- A_∞ 脈体の j 番目の面写像 $d^n_j : N_{A_\infty}(\mathcal{A})_n \to N_{A_\infty}(\mathcal{A})_{n-1}$ は $d^n_j(f) = f \circ (\Delta^n_j)_\star$ で定まる．
- A_∞ 脈体の j 番目の退化写像 $s^n_j : N_{A_\infty}(\mathcal{A})_{n-1} \to N_{A_\infty}(\mathcal{A})_n$ は $s^n_j(f) = f \circ (\sigma^n_j)_\star$ で定まる．

補題 1.8. 任意の $1 \le p \le d \le n$ と $0 \le i_0 < \cdots < i_d \le n-1$ に対して, $d^n_j(f)$ は次のようになる．

$$d^n_j(f)_{i_0,\cdots,i_d} = \begin{cases} f_{i_0,\cdots,i_{p-1},i_p+1,\cdots,i_d+1} & (j \le i_p, 0 \le p \le d) \\ f_{i_0,\cdots,i_d} & (j > i_d) \end{cases}$$

補題 1.9. 任意の $1 \le d \le n$ と $0 \le i_0 < \cdots < i_d \le n-1$ に対して, $s^n_j(f)$ は次のようになる．
$d = 1$ のとき

$$s^n_j(f)_{i_0,i_1} = \begin{cases} f_{(i_0-1)(i_1-1)} & (j \le i_0 - 1) \\ f_{i_0(i_1-1)} & (i_0 < j < i_1 - 1) \\ \mathrm{Id}_{X_{i_0}} & (i_0 = j, i_1 = j+1) \\ f_{i_0,i_1} & (j \ge i_d) \end{cases}$$

$d \geq 2$ のとき

$$s_j^n(f)_{i_0,\cdots,i_d} = \begin{cases} f_{(i_0-1)(i_d-1)} & (j \leq i_0 - 1) \\ f_{i_0,\cdots,i_{p-1},i_{p+1}-1,\cdots,i_d-1} & (i_p < j < i_{p+1} - 1, 0 < p < d) \\ 0 & (i_p = j, i_{p+1} = j+1) \\ f_{i_0,\cdots,i_d} & (j > i_d) \end{cases}$$

定義 1.10 (A_∞ 脈体の射). A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して, 単体的集合の射

$$\mathcal{G}_\star : N_{A_\infty}(\mathcal{A}) \to N_{A_\infty}(\mathcal{B})$$

を次のように定義する.

$(d = 0)$ 任意の $\mathcal{F} : A_\infty[\Delta^n] \to \mathcal{A} \in N_{A_\infty}(\mathcal{A})_n$ に対して

$$(g_\star(f))_0 = (\mathcal{G}_\star(\mathcal{F}))^0 := \mathcal{G}^0 \circ \mathcal{F}^0 : \mathrm{Ob}A_\infty[\Delta^n] \to \mathrm{Ob}\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\mathcal{B}$$

$(1 \leq d \leq n)$ 任意の $0 \leq i_0 < \cdots < i_d \leq n$ に対して[*1]

$$(g_\star(f))_{i_0,\cdots,i_d} = (\mathcal{G}_\star(\mathcal{F}))^d := \sum_r \sum_{s_1,\cdots,s_r} (-1)^{\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)} g_r(f_{i_{s_r+\cdots+s_2},\cdots,s_r}, \cdots, f_{i_0,\cdots,i_{s_r}})$$

$\mathcal{G}_\star$ を A_∞ 脈体の射 (morphism of A_∞-nerve) という.

補題 1.11. 定義 1.3 と定義 1.10 は関手

$$N_{A_\infty} : \mathbf{A_\infty Cat} \to \mathbf{sSet}$$

を定める.

A_∞ 脈体は小 dg 脈体の一般化である.

注意 1.12. dg 圏に対する A_∞ 脈体は [Lur08] で定義された dg 脈体に一致する.

定理 1.13. A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ の A_∞ 脈体 $N_{A_\infty}(\mathcal{A})$ は擬圏である.

Proof. $n > 0, 0 < p < n$ とする. 単体的集合の射

$$\gamma : \Lambda_p^n \to N_{A_\infty}(\mathcal{A})$$

は $N_{A_\infty}(\mathcal{A})$ の n 単体

$$(\{X_{i_0}\}_{0 \leq i_0 \leq n}, \{f_{i_0,i_1}\}_{0 \leq i_0 \leq i_1 \leq n}, \cdots, \{f_{0,\cdots,n}\})$$

[*1] 通常の A_∞ 関手の合成であると [Fao13] には書かれているが, [SS08] の定義と符号が異なっている. 本稿では, [Fao13] の書き方に合わせたが, [SS08] で計算しても問題ない. もしかすると, [Lur08] で定義されている小 dg 脈体の符号と整合するようにしているのかも (勉強中).

と同一視できる．ここで, $p=0,n$ にあたる $f_{0,\cdots,n}$ と $f_{0,\cdots,\hat{p},\cdots,n}$ は与えられていないが, 次のように定義すればよい.

$$f_{0,\cdots,n}=0$$

また,

$$\begin{aligned}
f_{0,\cdots,\hat{p},\cdots,n} = & \sum_{0<j<n, j\neq p} (-1)^{j-1+p} f_{0,\cdots,\hat{j},\cdots,n} \\
& + \sum_{0<j<n} (-1)^{1+n(j-1)+p} f_{j,\cdots,n} \circ f_{0,\cdots,j} \\
& + \sum_{\substack{1\leq r\leq n \\ 0<j_1<\cdots<j_{r-1}<n}} (-1)^{1+\varepsilon(j_1,\cdots,j_{r-1})+p} \mu_r(f_{i_{j_{r-1}},\cdots,i_k},\cdots,f_{i_0,\cdots,i_{j_1}})
\end{aligned}$$

□

参考文献

[Fao13] Giovanni Faonte. Simplicial nerve of an A_∞-category. 2013. https://arxiv.org/abs/1312.2127.

[Lur08] Jacob Lurie. Higher topos theory, 2008.

[SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. https://books.google.co.jp/books?id=N0QxS9Tp50UC.