

$(\infty, 1)$ 圏のモデルについて

よの

2024 年 3 月 28 日

概要

任意の $n > 1$ に対して n 射が可逆であるような $(\infty, 1)$ 圏の異なるモデルを比較する. ホモトピー論の視点から見ると, $(\infty, 1)$ 圏はホモトピー論のホモトピー論のモデルであると考えられる. 本稿では, $(\infty, 1)$ 圏のモデルとして考えられる擬圏と完備 Segal 空間が $(\infty, 1)$ 圏のモデルとして同値であることを見る.

目次

0	準備	3
1	モデル圏論	6
1.1	proper なモデル圏	6
1.2	単体的モデル圏	8
1.3	組み合わせ論的モデル圏	9
1.4	Cartesian モデル圏	10
1.5	Bousfield 局所化	11
1.6	Reedy モデル構造	13
2	単体的集合の圏に入るモデル構造	15
2.1	Kan-Quillen モデル構造	15
2.2	Joyal モデル構造	19
2.3	$\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ の Quillen 随伴 1	20
2.4	$\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴 2	21
3	単体的空間の圏に入るモデル構造	23
3.1	射影的モデル構造	23
3.2	入射的モデル構造	24
3.3	垂直 Reedy モデル構造	25
3.4	水平 Reedy モデル構造	25

3.5	Segal 空間モデル構造	26
3.6	Rezk モデル構造	26
4	\mathbf{sSpace} 上のモデル構造と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴, Quillen 同値	28
4.1	全関手とその随伴	28
4.2	$\mathbf{sSpace}_v, \mathbf{sSpace}_h, \mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴	28
4.3	$\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 同値	31
4.4	$\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ の Quillen 同値	31
付録 A	擬圏について	33
A.1	単体的集合の同値	33
付録 B	完備 Segal 空間について	35
B.1	ボックス積	35
B.2	\mathbf{sSpace} 上の垂直 Reedy モデル構造	37
B.3	\mathbf{sSpace} 上の水平 Reedy モデル構造	38
B.4	補足 : Segal 空間と完備 Segal 空間について	39

0 準備

$(\infty, 1)$ 圏 ($(\infty, 1)$ -category) は任意の $n > 1$ に対して n 射が可逆であるような弱 ∞ 圏 (weak ∞ -category) である. この $(\infty, 1)$ 圏の情報をうまく組み込む方法 (数学的対象) が多く考えられてきた. 実際, $(\infty, 1)$ 圏のモデルとして単体的圏 (simplicial category), Segal 圏 (Segal category), 完備 Segal 空間 (complete Segal space), 擬圏 (quasi-category), 相対圏 (relative category) などがある.

*1 これらの圏はホモトピー論と (高次) 圏論の両方の異なる動機から考えられた. そして, Bergner [Ber07] や Joyal-Tierney [JT06] により, これらの $(\infty, 1)$ 圏のモデルが等価であることが示された.

まず, 「ホモトピー論」というと位相空間のホモトピー論が挙げられる. ここでは, ホモトピー同値 (homotopy equivalence) や弱ホモトピー同値 (weak homotopy equivalence) である位相空間は同一視して扱いたい. これを考えるために, CW 複体や CW 近似が定義され研究された. この流れはホモロジー代数における複体の projective resolution などにも見られる.

このような操作を一般的に行う枠組みとして, Quillen [Qui67b] は 1960 年代にモデル圏 (model category) を定義した. モデル圏は weak equivalence, fibration, cofibration の 3 つ組を用いて定義される. モデル圏の局所化は集合論的な問題を避けることができる利点がある. モデル圏の同値として Quillen 同値 (Quillen equivalence) がある. この Quillen 同値は圏とホモトピーの両方を保つような同値である. よって, $(\infty, 1)$ 圏のモデルの等価であるかは, 2 つのモデル圏が Quillen 同値であるかで判断することができる.

単体的圏は 1980 年代に Dwyer と Kan により「ホモトピー論」を考えるために深く研究された. weak equivalence を持つ圏に対して, 単体的局所化 (simplicial localization) やハンモック局所化 (hammock localization) により単体的圏が得られる. 更に, 任意の単体的圏が DK 同値 (Dwyer-Kan equivalence) の違いを除いてこの方法により得られることが示された. よって, 「ホモトピー論」が weak equivalence を持つ圏であると思うと, 単体的圏はホモトピー論のモデルとして考えられる.

更に, 単体的圏の圏自体も DK 同値を weak equivalence として持つ圏となる. つまり, 単体的圏の圏も「ホモトピー論」を表すと考えられる. よって, 単体的圏の圏は「ホモトピー論のホモトピー論」のモデルと思える. この単体的圏の圏上には Bergner モデル構造 [Ber05] が存在する. しかし, このモデル構造は単体的モデル圏 (simplicial model category) でなかったり, weak equivalence の判定が難しかったりなど扱いづらい. そのため, 単体的圏の圏上の Bergner モデル構造と Quillen 同値である, より良い構造を持つモデル圏が考えられるようになった.

$(\infty, 1)$ 圏の他のモデルとして Segal 圏がある. Segal 圏は 1990 年代に Dwyer, Kan, Smith により「up to homotopy で合成が定義されるような単体的圏」として定義された. Hirschowitz と Simpson は圏論的な視点から Segal 圏を調べ, Pellissier は Segal 前圏上のモデル構造を与えた.

完備 Segal 空間は 2000 年代始めに Rezk [Rez00] により「ホモトピー論のホモトピー論」のモデ

*1 他にも, 位相的圏 (topological category), dg 圏 (dg-category), A_∞ 圏 (A_∞ -category), ホモトピカル圏 (homotopical category) などがある.

ルとして考案された。完備 Segal 空間はいくつかの条件を満たす単体的空間である。単体的空間の圏上の Reedy モデル構造における weak equivalence は levelwise に定義されるために扱いやすい。Reedy モデル構造の Bousfield 局所化 (left Bousfield localization) で得られる Rezk モデル構造は Cartesian モデル圏であるなど、単体的圏の圏上の Bergner モデル構造より良い性質を多く持つ。

擬圏は 1970 年代に Boardman と Vogt により定義され、Joyal や Lurie [Lur09] などにより深く調べられた。Segal 圏や完備 Segal 空間は単体的空間上で定義されるが、擬圏は単体的集合上で定義される。このため、擬圏は他のモデルよりも扱いやすいという利点がある。Quillen [Qui67b] により単体的集合の圏上に Quillen モデル構造が定義され、Joyal [Joy] により Joyal モデル構造が定義された。Quillen モデル構造は位相空間の圏上の Kan-Quillen モデル構造と Quillen 同値であるため、 $(\infty, 0)$ 圏のモデルと見れる。一方、Joyal モデル構造は単体的圏の圏上の Bergner モデル構造と Quillen 同値であるため、 $(\infty, 1)$ 圏のモデルと思える。

Barwick と Kan [BK11] は 2010 年代始めに weak equivalence を持つ圏を相対圏として定義し、「ホモトピー論のホモトピー論」のモデルの枠組みとして考えた。彼らは単体的空間の圏上の Rezk モデル構造と Quillen 同値になるように、相対圏の圏上の Barwick モデル構造を与えた。

本稿の目的

第一の目的は、 $(\infty, 0)$ 圏のモデルと $(\infty, 1)$ 圏のモデルについてまとめることである。

主目的は、次の図式にある $(\infty, 1)$ 圏のモデルとその間の Quillen 同値を示すことである。

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} & \xleftarrow{(i_1^* \dashv p_1^*)} & \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} & \xleftarrow{(K_\xi \dashv N_\xi)} & \mathbf{RelCat}_{\text{Bar}} \\
 \uparrow (\mathfrak{C} \dashv \hat{N}) & & \uparrow (I \dashv R) & & \\
 \mathbf{sSet-Cat}_{\text{Berg}} & \xleftarrow{(F \dashv R)} & \mathbf{PreSeCat}_c & & \\
 & \searrow (F \dashv R) & \downarrow (\text{Id} \dashv \text{Id}) & & \\
 & & \mathbf{PreSeCat}_f & &
 \end{array}$$

本稿で示す Quillen 随伴と Quillen 同値をまとめておく。(随時更新予定) ^{*2}

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{Top}_{\text{Quillen}} & \xleftarrow[|\text{Sing}|]{|-|} & \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} & \xleftarrow[k^!]{k_!} & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} & \xleftarrow{(i_1^* \dashv p_1^*)} & \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} \xleftarrow{(K_\xi \dashv N_\xi)} \mathbf{RelCat}_{\text{Bar}} \\
 \text{Id} \updownarrow \text{Id} & & & & \uparrow (\mathfrak{C} \dashv \hat{N}) & & \uparrow (I \dashv R) \\
 \mathbf{Top}_{\text{Strøm}} & & & & \mathbf{sSet-Cat}_{\text{Berg}} & \xleftarrow{(F \dashv R)} & \mathbf{PreSeCat}_c \\
 & & & & \searrow (F \dashv R) & & \downarrow (\text{Id} \dashv \text{Id}) \\
 & & & & & & \mathbf{PreSeCat}_f
 \end{array}$$

^{*2} 同じモデル圏の複数の Quillen 随伴については、特徴的ものを図にまとめている。例えば、Bousfield 局所化で得られる Quillen 随伴はこの図に載せていない。

記法

本稿で登場する圏の記法をまとめる.

- 位相空間のなす圏を \mathbf{Top} , コンパクト生成弱 Hausdorff 空間のなす圏を \mathbf{CGWH}
- 小圏のなす圏を \mathbf{Cat}
- 単体的集合のなす圏を \mathbf{sSet}
- 単体的空間のなす圏を \mathbf{sSpace}
- 小相対圏のなす圏を \mathbf{RelCat}

1 モデル圏論

モデル圏 (model category) はホモトピー論を抽象的に行うための枠組みとして, Quillen [Qui67b] により導入された. ホモトピー論を抽象的に行う方法として, 弱同値 (weak equivalence) をもつような圏の構造を公理化して扱うことが考えられる. 動機としては, 弱ホモトピー同値を weak equivalence とするような位相空間の圏がある. この位相空間の圏に対して定義されるホモトピー圏 (homotopy category) を, 一般のモデル圏に対して定義することができる.

1.1 proper なモデル圏

モデル圏において, fibration は pullback で閉じ, cofibration は pushout で閉じる. しかし, weak equivalence が pullback や pushout で閉じるとは限らない. ここでは, weak equivalence が fibration (cofibration) に沿った pullback (pushout) で閉じるようなモデル圏を考える.

定義 1.1.1 (proper なモデル圏). \mathcal{M} をモデル圏とする.

- cofibration に沿った weak equivalence の pushout が weak equivalence になるとき, \mathcal{M} は左 proper (left proper) であるという. つまり, weak equivalence $f : A \rightarrow X$ と cofibration $i : A \rightarrow B$ に対して $g : B \rightarrow Y$ が weak equivalence になるときである.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

- fibration に沿った weak equivalence の pullback が weak equivalence になるとき, \mathcal{M} は右 proper (right proper) であるという. つまり, weak equivalence $g : B \rightarrow Y$ と fibration $p : X \rightarrow Y$ に対して $f : A \rightarrow X$ が weak equivalence となるときである.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

- \mathcal{M} が左 proper かつ右 proper であるとき, \mathcal{M} は proper であるという.

次の命題はモデル圏が proper であるかを確かめる方法の 1 つである. これは命題 1.1.7 の系として得られる.

命題 1.1.2. \mathcal{M} をモデル圏とする.

1. \mathcal{M} の任意の対象がコファイブ란トのとき, \mathcal{M} は左 proper である.
2. \mathcal{M} の任意の対象がファイブ란トのとき, \mathcal{M} は右 proper である.

Reedy モデル構造は proper を保つ.

命題 1.1.3 ([Hir03] Theorem 15.3.4). \mathcal{R} を Reedy 圏, \mathcal{M} を左 (右) proper なモデル圏とする. このとき, $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})_{\text{Reedy}}$ は左 (右) proper なモデル圏である.

Bousfield 局所化は左 proper を保つ.

命題 1.1.4. 左 proper な組み合わせ論的モデル圏の Bousfield 局所化は左 proper である.

本稿で登場する多くのモデル圏は左 proper である.

例 1.1.5. 左 proper なモデル圏の例を挙げる.

- 命題 1.1.2 の (1) より, sSet_{Kan} と $\text{sSet}_{\text{Joyal}}$ は左 proper である.
- $\text{Top}_{\text{Quillen}}$ において任意の対象はコファイブラントではないが, $\text{Top}_{\text{Quillen}}$ は左 proper である.
- $\text{RelCat}_{\text{Bar}}$ は左 proper である.

右 proper なモデル圏の例を挙げる.

- 命題 1.1.2 の (2) より, $\text{Top}_{\text{Quillen}}$ は右 proper である.
- sSet_{Kan} において任意の対象はファイブラントではないが, sSet_{Kan} は右 proper である.

proper なモデル圏の例を挙げる.

- 命題 1.1.2 の (1) と (2) より, $\text{Top}_{\text{Strøm}}$ は proper である.
- 命題 1.1.2 の (1) と (2) より, Cat_{nat} は proper である.
- 上の 2 つの例より, $\text{Top}_{\text{Quillen}}$ と sSet_{Kan} は proper である.

左 (右) proper でないモデル圏も存在する.

反例 1.1.6. 左 (右) proper でないモデル圏の例を挙げる.

- simplicial associative unital algebra の圏上の standard model structure は左 proper ではない. ([Rez00] Example 2.11)
- $\text{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\text{sSpace}_{\text{CSS}}$ は右 proper ではない.

コファイブラント (ファイブラント) の間の左 (右) proper 性は一般のモデル圏で成立する.

命題 1.1.7. 一般のモデル圏に対して, 次が成立する.

- cofibration に沿ったコファイブラントの間の weak equivalence の pushout は weak equivalence である.
- fibration に沿ったファイブラントの間の weak equivalence の pullback は weak equivalence である.

1.2 単体的モデル圏

単体的モデル圏は [Qui67b] で導入された.

定義 1.2.1 (単体的圏). \mathbf{sSet} 豊穡圏を単体的圏 (simplicial category) という.

定義 1.2.2 (単体的モデル圏). $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ 豊穡圏を単体的モデル圏 (simplicial model category) という.

単体的モデル圏の定義を具体的に書き下すと次のようになる.

定義 1.2.3 (単体的モデル圏). \mathcal{M} を単体的圏かつモデル圏とする. ^{*3} \mathcal{M} が次の条件を満たすとき, \mathcal{M} は単体的 (simplicial) であるという.

1. \mathcal{M} の任意の対象 X, Y と単体的集合 K に対して, \mathcal{M} のある対象 $X \otimes Y$ と Y^K と単体的集合の同型

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(X \otimes K, Y) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(K, \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(X, Y)) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(X, Y^K)$$

が存在して, この同型は X, Y, K に関して自然である.

2. \mathcal{M} の任意の cofibration $i : A \rightarrow B$ と fibration $p : X \rightarrow Y$ に対して, 単体的集合の射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(B, X) \rightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(A, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(A, Y)} \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(B, Y)$$

は fibration である. 更に, i か p のいずれかが weak equivalence のとき, この射も weak equivalence である.

Bousfield 局所化は単体的であることを保つ.

命題 1.2.4. 左 proper な単体的かつ組み合わせ論的モデル圏の Bousfield 局所化は単体的モデル圏である.

例 1.2.5. 単体的モデル圏の例を挙げる.

- $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は自明な単体的モデル圏である.
- $\mathbf{sSpace}_{\mathbf{Reedy}}$ は単体的モデル圏である.

単体的モデル圏でないモデル圏も存在する.

反例 1.2.6. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Joyal}}$ は \mathbf{sSet} 豊穡圏 (つまり単体的圏) ではあるが, $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ 豊穡圏ではなく $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Joyal}}$ 豊穡圏なので, 単体的モデル圏ではない.

単体的モデル圏の条件 (2) より, 次の命題が従う.

^{*3} \mathcal{M} の underlying category が単体圏であるとき, という意味である. このような省略は今後でも用いる.

系 1.2.7. \mathcal{M} を単体的モデル圏, $f : A \rightarrow B$ を \mathcal{M} における cofibration, X をファイブラントとする. このとき, 誘導される射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(B, X) \rightarrow \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(A, X)$$

は単体的集合の fibration である. 更に, f が weak equivalence のとき, この射も weak equivalence である.

Proof. 単体的モデル圏の条件 (2) において, Y を \mathcal{M} における終対象とすればよい. □

1.3 組み合わせ論的モデル圏

モデル圏の扱いやすいクラスの 1 つに組み合わせ論的 (combinatorial) モデル圏がある. 組み合わせ論的モデル圏は J.H.Smith により導入された. 組み合わせ論的モデル圏は small object の間の (trivial) generating cofibration から生成されるような圏といえる. 多くのモデル圏は組み合わせ論的であるか, 組み合わせ論的モデル圏と Quillen 同値である.

定義 1.3.1 (局所表現可能圏). \mathcal{C} を通常の圏とする. \mathcal{C} が次の条件を満たすとき, \mathcal{C} は局所表現可能 (locally presentable) であるという.

- \mathcal{C} は任意の小余極限を持つ.
- ある対象の集まり S が存在して, \mathcal{C} の任意の対象は S のある対象の有限余極限で表せる.

定義 1.3.2 (組み合わせ論的モデル圏). \mathcal{M} が局所表現可能圏かつコファイブラント生成なモデル圏のとき, \mathcal{M} は組み合わせ論的 (combinatorial) であるという.

Bousfield 局所化組み合わせ論的であることを保つ.

命題 1.3.3. 左 proper な単体的かつ組み合わせ論的モデル圏の Bousfield 局所化は組み合わせ論的モデル圏である.

組み合わせ論的モデル圏の例を挙げる.

例 1.3.4. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ は組み合わせ論的モデル圏である.

コファイブラント生成であるが, 組み合わせ論的ではないモデル圏も存在する.

反例 1.3.5. $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ はコファイブラント生成であるが, 組み合わせ論的ではない.

注意 1.3.6. 反例 1.3.5 で見たように, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ は組み合わせ論的ではない. しかし, ??より, $\mathbf{Top}_{\mathrm{Quillen}}$ は組み合わせ論的モデル圏である $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ と Quillen 同値である. そこで, 任意のコファイブラント生成なモデル圏はある組み合わせ論的モデル圏と Quillen 同値となるか, という疑問が生じる. Vopenka principle を仮定すると, 任意のコファイブラント生成なモデル圏はある組み合わせ

論的モデル圏と Quillen 同値となることが証明されている。しかし, Vopenka principle は ZFC 上で証明することができないことには注意が必要である。

組み合わせ論的モデル圏を特徴づける Smith の定理を紹介する。Smith の定理は組み合わせ論的なモデル構造をより小さいデータから決定できることを示している。例えば, 命題 1.3.3 などで有用である。

命題 1.3.7 (Smith の定理). \mathcal{M} を局所表現可能圏, W を \mathcal{M} の部分圏, $I \subset \text{Mor}(\mathcal{M})$ を \mathcal{M} の射の集合とし, 次の条件を満たすとする。

- W はレトラクトで閉じ, 2-out-of-3 を満たす。
- $\text{RLP}(I) \subset W$ である。
- $\text{LLP}(\text{RLP}(I)) \cap W$ は pushout と超限合成で閉じる。

このとき, weak equivalence の集まりを W , cofibration の集まりを $\text{LLP}(\text{RLP}(I))$ とする組み合わせ論的モデル構造 \mathcal{M} が存在する。

1.4 Cartesian モデル圏

圏の Cartesian 構造とモデル構造がある整合性を持つとき, モデル圏は Cartesian であるという。

定義 1.4.1 (Cartesian モデル圏). \mathcal{M} を Cartesian 閉なモデル圏とする。 \mathcal{M} が次の条件を満たすとき, \mathcal{M} は Cartesian であるという。

- \mathcal{M} の終対象はコファイブラントである。
- \mathcal{M} の任意の cofibration $f : A \rightarrow A', g : B \rightarrow B'$ に対して, 誘導される射

$$h : A \times B' \coprod_{A \times B} A' \times B \rightarrow A' \times B'$$

は cofibration である。更に, f か g のいずれかが weak equivalence のとき, h も weak equivalence である。

- \mathcal{M} の任意の cofibration $f : A \rightarrow A'$ と fibration $p : X' \rightarrow X$ に対して, 誘導される射

$$q : (X')^{A'} \rightarrow (X')^A \times_{X^A} X^{A'}$$

は fibration である。更に, f か p のいずれかが weak equivalence のとき, q も weak equivalence である。

例 1.4.2. Cartesian モデル圏の例を挙げる。

- CGWH の圏上の Quillen モデル構造は Cartesian モデル圏である。
- Cat_{nat} は Cartesian モデル圏である。

- $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ は Cartesian モデル圏である.
- $\mathbf{sSpace}_{\text{proj}}$, $\mathbf{sSpace}_{\text{Reedy}}$, $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ は Cartesian モデル圏である.

1.5 Bousfield 局所化

\mathcal{C} を圏, W を \mathcal{C} の射の集まりとする. W の元は \mathcal{C} における同型射ではないが, 何かしらの意味で同型射であると思いたいものとする. このような射は weak equivalence と呼ばれる. 通常の圏の局所化 (localization) は, 圏 \mathcal{C} から weak equivalence が実際に同型射となるような圏 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ を構成する方法である. この局所化をモデル圏に対して考える.

記法 1.5.1. \mathcal{M} をモデル圏とする. \mathcal{M} の対象 X のファイブランチ置換を X^f , コファイブランチ置換を X^c と表す.

定義 1.5.2 (ホモトピー射空間). \mathcal{M} をモデル圏とする. \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して,

$$\text{Map}_{\mathcal{M}}^h(X, Y) := \text{Map}_{\mathcal{M}}(X^c, Y^f)$$

を X と Y のホモトピー射空間 (homotopy mapping space) という.

定義 1.5.3 (T 局所対象と T 局所同値). \mathcal{M} をモデル圏, T を \mathcal{M} のある射の集合とする.

- W を \mathcal{M} のファイブランチとする. T の任意の射 $f : A \rightarrow B$ に対して,

$$\text{Map}_{\mathcal{M}}^h(B, W) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{M}}^h(A, W)$$

が weak equivalence のとき, W を T 局所対象 (T -local object) という.

- $g : X \rightarrow Y$ を \mathcal{M} の任意の射とする. 任意の T 局所対象 W に対して,

$$\text{Map}_{\mathcal{M}}^h(Y, W) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{M}}^h(X, W)$$

が weak equivalence のとき, g を T 局所同値 (T -local equivalence) という.

T 局所対象と T 局所同値を用いて, モデル圏から新しいモデル圏を構成することができる.

定理 1.5.4 ([Hir03] Proposition 4.1.1). \mathcal{M} を左 proper な, cellular または組み合わせ論的モデル圏, T を \mathcal{M} のある射の集合とする. このとき, 同じ underlying category 上に次の条件を満たすモデル構造 $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ が存在する.

- $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ の weak equivalence は \mathcal{M} の T 局所同値
- $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ の cofibration は \mathcal{M} の cofibration

このとき, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ も左 proper な, cellular または組み合わせ論的モデル圏である. 更に, \mathcal{M} が単体的モデル圏のとき, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ も単体的モデル圏である.

定義 1.5.5 (Bousfield 局所化). 定理 1.5.4 で得られる局所化 $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ を T による \mathcal{M} の Bousfield 局所化 (Bousfield localization) ^{*4} という.

Bousfield 局所化における weak equivalence は T 局所同値を用いて特徴づけられる. また, 次の命題から Bousfield 局所化が「局所化」であることが分かる.

補題 1.5.6 ([Hir03] Proposition 3.1.5). \mathcal{M} をモデル圏, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ を Bousfield 局所化とする. このとき, \mathcal{M} の weak equivalence は \mathcal{M} の T 局所同値である. つまり, $W_{\mathcal{M}} \subset W_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}}$ が成立する.

Bousfield 局所化におけるファイブラントは T 局所対象を用いて特徴づけられる.

注意 1.5.7. \mathcal{M} をモデル圏, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ を Bousfield 局所化とする. このとき, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ におけるファイブラントは T 局所対象である.

元のモデル圏と Bousfield 局所化における fibration などには次のような関係がある.

注意 1.5.8. \mathcal{M} をモデル圏, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ を \mathcal{M} の Bousfield 局所化とする.

- $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ の fibration の集まりは \mathcal{M} の fibration の部分クラスである.

$$\text{Fib}_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}} = \text{RLP}(\text{Cof}_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}} \cap W_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}}) \subset \text{RLP}(\text{Cof}_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}} \cap W_{\mathcal{M}}) = \text{Fib}_{\mathcal{M}}$$

- $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ の trivial fibration の集まりは \mathcal{M} の trivial fibration の集まりと一致する.

$$\text{Fib}_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}} \cap W_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}} = \text{RLP}(\text{Cof}_{\mathcal{L}_T\mathcal{M}}) = \text{RLP}(\text{Cof}_{\mathcal{M}}) = \text{Fib}_{\mathcal{M}} \cap W_{\mathcal{M}}$$

元のモデル圏と Bousfield 局所化の間には恒等関手による Quillen 随伴が存在する.

命題 1.5.9. 恒等関手 $\text{Id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_t\mathcal{M}$ と恒等関手 $\text{Id} : \mathcal{L}_T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ は, \mathcal{M} と $\mathcal{L}_T\mathcal{M}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\text{Id} : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{L}_t\mathcal{M} : \text{Id}$$

Proof. Bousfield 局所化の定義より, $\text{Id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}_t\mathcal{M}$ は cofibration を保つ. 注意 1.5.8 より, $\text{Id} : \mathcal{L}_T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ は fibration を保つ. □

命題 1.5.10. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ を同じ underlying category 上のモデル圏とする. T を underlying category における射の集合とする. \mathcal{M}_1 と \mathcal{M}_2 における weak equivalence が一致するとき, $\mathcal{L}_T\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{L}_T\mathcal{M}_2$ における weak equivalence は一致する.

Proof. 一般のモデル圏 \mathcal{M} の任意の対象 X, Y に対して,

$$\pi_0 \text{Map}_{\mathcal{M}}^h(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y)$$

^{*4} 同様に, モデル圏の Bousfield 余局所化 (Bousfield colocalization) も定義される.

が成立するので、ホモトピー射空間は underlying category と weak equivalence のみで決定され、fibration や cofibration によらない。局所同値の定義より、局所化 $\mathcal{L}_T \mathcal{M}$ の weak equivalence は T と underlying category のみによる。局所化 $\mathcal{L}_T \mathcal{M}$ における weak equivalence は T 局所同値で定義されることから従う。□

命題 1.5.11. \mathcal{M} を単体的モデル圏、 T をコファイブ란トの間の cofibration、 $\mathcal{L}_T \mathcal{M}$ を T による \mathcal{M} の Bousfield 局所化とする。このとき、 \mathcal{M} のファイブ란ト Z が T 局所対象であることと、 $Z \rightarrow 0$ が次の射の集合に対して RLP を持つことは同値である。

$$\{A \otimes \Delta[m] \cup_{A \otimes \partial \Delta[m]} B \otimes \partial \Delta[m] \rightarrow B \otimes \Delta[m] \mid A \rightarrow B \in T, m \geq 0\}$$

1.6 Reedy モデル構造

\mathcal{R} を圏、 \mathcal{M} をモデル圏とする。このとき、関手圏 $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ にどのようなモデル構造が入るかを考える。射影的/入射的モデル構造では、 \mathcal{M} に更に条件を課すことで定義することができた。ここでは、 \mathcal{R} に条件を課し、 \mathcal{M} に全く条件を課さずに定まる関手圏上の Reedy モデル構造 (Reedy model structure) を定義する。この Reedy モデル構造は射影的モデル構造と入射的モデル構造の中間的なモデル構造である。

定義 1.6.1 (Reedy 圏). \mathcal{R} を圏、 $\mathcal{R}_+, \mathcal{R}_-$ を \mathcal{R} の全ての対象を含む \mathcal{R} の部分圏、 α を基数、 $d : \text{Ob}(\mathcal{R}) \rightarrow \alpha$ を関数とする。この d を次数関数 (degree function) という。4 組 $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_+, \mathcal{R}_-, d)$ が次の条件を満たすとき、 \mathcal{R} を Reedy 圏 (Reedy category) という。

- \mathcal{R}_+ における恒等射以外の射は次数を上げる。
- \mathcal{R}_- における恒等射以外の射は次数を下げる。
- \mathcal{R} の任意の射 f はある \mathcal{R}_- の射 f' と \mathcal{R}_+ の射 f'' を用いて、 $f = f' f''$ と一意に分解できる。

Reedy 圏は単体圏の構造を抽出して公理化された構造である。

例 1.6.2. Δ を単体圏とする。次数関数 $d : \text{Ob}(\mathcal{R}) \rightarrow \alpha$ は $[k] \mapsto k$ 、 Δ_+ の射は mono 射 $[k] \mapsto [n]$ 、 Δ_- の射は epi 射 $[n] \mapsto [k]$ とすると、 Δ は Reedy 圏である。

例 1.6.3. 基数 α を半順序集合とみなす。次数関数 $d : \alpha \rightarrow \alpha$ は恒等関数、 α_+ は α 、 α_- を α 上の離散圏とすると、 α は Reedy 圏である。

Reedy 構造は双対的である。

注意 1.6.4. $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_+, \mathcal{R}_-, d)$ を Reedy 圏とする。このとき、 $(\mathcal{R}^{\text{op}}, \mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+, d)$ は Reedy 圏である。

関手圏上に定まる Reedy モデル構造を定義するためにいくつか準備する。

定義 1.6.5 (latching and matching object). \mathcal{R} を Reedy 圏、 \mathcal{M} をモデル圏とする。 $X : \mathcal{R} \rightarrow$

\mathcal{M} を関手, r を \mathcal{R} の対象とする. このとき, スライス圏 R_+/r の id_r を含まない部分圏における余極限

$$L_r(X) := \text{colim} X(s)$$

を r における X の *latching object* という.

双対的に, コスライス圏 r/R_- の id_r を含まない部分圏における余極限

$$M_r(X) := \lim X(s)$$

を r における X の *matching object* という.

関手圏上に定まる Reedy モデル構造を定義する.

定義 1.6.6 (Reedy モデル構造). \mathcal{R} を Reedy 圏, \mathcal{M} をモデル圏, $f : X \rightarrow Y$ を $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ の射とする. このとき, $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ には次のモデル構造が存在する. これを $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ 上の Reedy モデル構造といい, $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})_{\text{Reedy}}$ と表す.

- weak equivalence は f の各成分 f_r が \mathcal{M} における weak equivalence である自然変換 f
- fibration は \mathcal{R} の任意の対象 r に対して,

$$X(r) \rightarrow M_r(X) \times_{M_r(Y)} Y(r)$$

が \mathcal{M} における fibration である自然変換 f

- cofibration は \mathcal{R} の任意の対象 r に対して,

$$L_r(Y) \sqcup_{L_r(X)} X(r) \rightarrow Y(r)$$

が \mathcal{M} における cofibration である自然変換 f

Reedy モデル構造における (コ) ファイブラントは次のように特徴づけることができる.

注意 1.6.7. $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})_{\text{Reedy}}$ における対象 X がファイブラントであることと, \mathcal{R} の任意の対象 r に対して射 $X(r) \rightarrow M_r(X)$ が fibration であることは同値である.

双対的に, $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})_{\text{Reedy}}$ における対象 X がコファイブラントであることと, \mathcal{R} の任意の対象 r に対して射 $L_r(X) \rightarrow X(r)$ が cofibration であることは同値である.

Reedy モデル構造はコファイブラント生成であることを保つ.

命題 1.6.8. \mathcal{R} を Reedy 圏, \mathcal{M} をコファイブラント生成なモデル圏とする. このとき, $\text{Fun}(\mathcal{R}, \mathcal{M})_{\text{Reedy}}$ はコファイブラント生成である.

2 単体的集合の圏に入るモデル構造

単体的集合は $(\infty, 0)$ 圏のなす $(\infty, 1)$ 圏のモデルや, $(\infty, 1)$ 圏のなす $(\infty, 1)$ 圏のモデルとして考えられてきた. 前者は \mathbf{sSet} 上の Kan-Quillen モデル構造, 後者は \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル構造として表される. Kan-Quillen モデル構造は [Qui67a] で, Joyal モデル構造は [Joy] でそれぞれ証明された.

2.1 Kan-Quillen モデル構造

Kan-Quillen モデル構造は, ファイブラントが Kan 複体 (Kan complex) であり, weak equivalence が弱ホモトピー同値 (weak homotopy equivalence) であるようなモデル構造である.

定義 2.1.1 (単体的集合の弱ホモトピー同値). $f : A \rightarrow B$ を単体的集合の射とする. 任意の Kan 複体 X に対して, f の合成から定まる射

$$\pi_0(f, X) : \pi_0(B, X) \rightarrow \pi_0(A, X)$$

が集合の同型射のとき, f を単体的集合の弱ホモトピー同値 (weak homotopy equivalence) という.

定義 2.1.2 (Kan ファイブレーション). $f : X \rightarrow S$ を単体的集合の射とする. 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, 次の四角がリフト $\sigma : \Delta[n] \rightarrow X$ をもつとき, f を Kan ファイブレーション (Kan fibration) という.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \xrightarrow{\sigma_0} & X \\ \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow f \\ \Delta[n] & \longrightarrow & S \end{array}$$

定義 2.1.3 (単体的集合の mono 射). $f : X \rightarrow Y$ を単体的集合の射とする. 任意の $n \geq 0$ に対して, $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ が集合の mono 射のとき, f を単体的集合の mono 射 (mono morphism) という.

定義 2.1.4 (Kan-Quillen モデル構造). \mathbf{sSet} には次のモデル構造が存在する. これを \mathbf{sSet} 上の Kan-Quillen モデル構造^{*5} といい, $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と表す.

- weak equivalence は単体的集合の弱ホモトピー同値
- fibration は Kan ファイブレーション
- cofibration は単体的集合の mono 射

注意 2.1.5. $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ において, 任意の Kan 複体はファイブラントであり, 任意の対象 (単体的集合) はコファイブラントである.

^{*5} 古典的 (classical) モデル構造や Quillen モデル構造と呼ばれることもある.

注意 2.1.6. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は

$$\begin{aligned} I &:= \{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid n \geq 0\}, \\ J &:= \{\Lambda[n, i] \hookrightarrow \Delta[n] \mid n \geq 0, 0 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

をそれぞれ generating cofibration, generating trivial cofibration の集合とするコファイブ rant 生成なモデル圏である.

定理 2.1.7. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は proper である.

Proof. 左 proper であることは, $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ において任意の対象がコファイブ rant であることと, 命題 1.1.2 より従う. 右 proper であることの証明は [GJ09] II.8.6-7 を参照. \square

定理 2.1.8. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は単体的モデル圏である.

Proof. 任意の $X, Y \in \mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ と $n \geq 0$ に対して, 単体的集合 $\mathrm{Map}_{\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}}(X, Y)$ の n 単体を $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta[n], Y)$ とする. 任意の単体的集合 K に対して, $X \otimes K$ を通常単体的集合の直積 $X \times K, Y^K$ を通常単体的集合の $\mathrm{Map}(K, Y)$ とする. このとき, 次の集合の同型を示せばよい.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}((X \times K) \times \Delta[n], Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta[n], Y)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(X \times \Delta[n], \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K \times \Delta[n], Y)) \end{aligned}$$

これは単体的集合の直積と Hom 空間の随伴性より従う. \square

定理 2.1.9. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は組み合わせ論的モデル圏である.

Proof. 注意 2.1.6 より, $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ はコファイブ rant 生成なモデル圏である. 任意の単体的集合は標準 n 単体 $\Delta[n]$ の余極限で表せるので, \mathbf{sSet} は局所表現可能圏である. よって, $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は組み合わせ論的モデル圏である. \square

定理 2.1.10. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ は Cartesian モデル圏である.

Proof. $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ において任意の対象はコファイブ rant なので, 特に $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ における終対象 $\Delta[0]$ もコファイブ rant である. Cartesian モデル圏の条件 (2) の前半は単体的集合の mono 射の定義から, 後半は [Lur23, Tag 014D] より従う. Cartesian モデル圏の条件 (3) は [Lur23, Tag 00TK] と [Lur23, Tag 014E] より従う. \square

$\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ における trivial fibration と trivial cofibration はリフトを用いて表すことができる.

補題 2.1.11 ([GJ09] Proposition I.11.1). $f : X \rightarrow Y$ を単体的集合の射とする. このとき, f が trivial fibration であることと, f が自明な Kan ファイブレーションであることは同値である.

補題 2.1.12. $f : X \rightarrow Y$ を単体的集合の射とする. このとき, f が trivial cofibration であることと, f が緩射であることは同値である.

sSet 上に Kan-Quillen モデル構造が存在することを示すために、いくつか準備をする。

まず、sSet_{Kan} が分解系を持つことを示す。Quillen の小対象論法 (small object argument) の系として得られるが、本稿では分解を具体的に構成することで (片方を) 証明する。

命題 2.1.13. $f : X \rightarrow Y$ を単体的集合の射とする。このとき、ある緩射 $f' : X \rightarrow Q(f)$ と Kan ファイブレーション $f'' : Q(f) \rightarrow Y$ が存在して、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f' & \nearrow f'' \\ & Q(f) & \end{array}$$

更に、単体的集合 $Q(f)$ と f', f'' は関手的である。

Proof. 単体的集合の列 $\{X(m)\}_{m \geq 0}$ と単体的集合の射 $f(m) : X(m) \rightarrow Y$ を帰納的に定義する。まず $X(0) := X, f(0) := f$ とする。定義された単体的集合の射 $f(m) : X(m) \rightarrow Y$ に対して、任意の $0 \leq i \leq n, n > 0$ において、 $S(m)$ を次の可換図式 σ の集まりとする。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \longrightarrow & X(m) \\ \downarrow & & \downarrow f(m) \\ \Delta[n] & \xrightarrow{u_\sigma} & Y \end{array}$$

図式 $\sigma \in S(m)$ に対して、 $X(m+1)$ を次の pushout で定義する。

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in S(m)} \Lambda[n, i] & \longrightarrow & X(m) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in S(m)} \Delta[n] & \longrightarrow & X(m+1) \end{array}$$

また、 $f(m+1) : X(m+1) \rightarrow Y$ を $X(m)$ への制限が $f(m)$ に等しく、各 $\Delta[n]$ への制限が u_σ に等しい一意な射とする。 $X(m)$ の定義より、次の緩射の列が存在する。

$$X = X(0) \hookrightarrow X(1) \hookrightarrow X(2) \hookrightarrow \dots$$

ここで、 $Q(f) := \operatorname{colim}_m X(m)$ とする。緩射の集まりは超限合成で閉じるので、自然な射 $f' : X \rightarrow Q(f)$ も緩射である。また、ある射 $f'' : Q(f) \rightarrow Y$ が一意に存在して、次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{f'} & & & \\ X = X(0) & \hookrightarrow & X(1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Q(f) = \operatorname{colim}_m X(m) \\ & \searrow f & & & & & \nearrow f'' \\ & & & & & & Y \end{array}$$

構成より、 $f \mapsto Q(f)$ は関手的である。後は、 $f'' : Q(f) \rightarrow Y$ が Kan ファイブレーションであること

を示せばよい. つまり, 次の図式がリフトを持つことを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \xrightarrow{v} & Q(f) \\ \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow f'' \\ \Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$\Lambda[n, i]$ は有限単体的集合なので, v の像は十分大きな $m \gg 0$ に対して, $X(m)$ の像に含まれる. つまり, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \xrightarrow{v} & Q(f) \\ & \searrow v' & \nearrow \\ & X(m) & \end{array}$$

次の図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[n, i] & \xrightarrow{v'} & X(m) \\ \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow f(m) \\ \Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

は $S(m)$ に属するので, 次の図式は可換かつリフトを持つ.

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_i^n & \hookrightarrow & \coprod_{\sigma \in S(m)} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\coprod v'} & X(m) & \hookrightarrow & X(m+1) \\ \downarrow & & \searrow & & \nearrow & & \downarrow f(m+1) \\ & & \coprod_{\sigma \in S(m)} \Delta^n & & & & \\ \Delta^n & \hookrightarrow & & \nearrow & & \longrightarrow & Y \end{array}$$

□

次に, $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ がリフト性質を満たすことを示す.

補題 2.1.14. 次の図式において, i を単体的集合の mono 射, p を Kan ファイブレーションとする.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ i \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow p \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

i か p が弱ホモトピー同値のとき, この四角はリフトを持つ.

Proof. まず, p が自明な Kan ファイブレーションのときを考える. 補題 2.1.11 より, 次の図式はリフトを持つ.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow p \\ \Delta[n] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

単体的集合の mono 射の集まりは $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}_{n \geq 0}$ で生成される弱飽和なクラスである。RLP の性質は弱飽和なクラスについて閉じるので、求める四角はリフトを持つ。

次に、 i が緩射のときを考える。命題 2.1.13 より、 i は緩射 $j : U \rightarrow X$ と Kan ファイブレーション $p : X \rightarrow V$ を用いて $i = pj$ と分解できる。2-out-of-3 より p も弱ホモトピー同値なので、 p は自明な Kan ファイブレーションである。上述の議論より、この図式はリフト $s : V \rightarrow X$ を持つ。

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & X \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \end{array}$$

次の図式を考えると、 i は j の retract であり、緩射の集まりは retract で閉じるので、 i も緩射である。

$$\begin{array}{ccccc} U & \xlongequal{\quad} & U & \xlongequal{\quad} & U \\ \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{s} & X & \xrightarrow{p} & V \\ & \searrow \text{id}_V & & & \end{array}$$

緩射は任意の kan ファイブレーションに対して LLP を持つので、求める四角はリフトを持つ。 \square

sSet 上に Kan-Quillen モデル構造が存在することを示す。

Proof. まず、sSet は任意の (有限) 極限と (有限) 余極限を持つ。

次に、weak equivalence が 2-out-of-3 を満たすことと、retract で閉じることは位相空間の一般論より従う。fibration は RLP で定義されているので、retract で閉じることはリフトの一般論から示すことができる。cofibration が retract で閉じることは簡単に示すことができる。

分解系を持つことは命題 2.1.13 で、リフト性質を満たすことは補題 2.1.14 で既に示した。 \square

2.2 Joyal モデル構造

Joyal モデル構造は、ファイブラントが擬圏 (quasi-category) であり、weak equivalence が弱圏同値 (weak categorical equivalence) であるようなモデル構造である。

定義 2.2.1 (弱圏同値). $f : A \rightarrow B$ を単体的集合の射とする。任意の擬圏 X に対して、 f の合成から定まる射

$$\tau_0(f, X) : \tau_0(B, X) \rightarrow \tau_0(A, X)$$

が集合の同型射のとき、 f を弱圏同値 (weak categorical equivalence) という。

定義 2.2.2 (擬ファイブレーション). 任意の弱圏同値と単体的集合の mono 射に対して RLP を持つ単体的集合の射を擬ファイブレーション (quasi fibration) という。

定義 2.2.3 (Joyal モデル構造). \mathbf{sSet} には次のモデル構造が存在する. これを \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル構造^{*6} といい, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と表す.

- weak equivalence は弱圏同値
- fibration は擬ファイブレーション^{*7}
- cofibration は単体的集合の mono 射

注意 2.2.4. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ において, ファイブラント対象はちょうど擬圏であり, 任意の対象 (単体的集合) はコファイブラントである.

注意 2.2.5. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は

$$I := \{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid n \geq 0\}$$

を generating cofibration の集合とするコファイブラント生成なモデル圏である. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ における generating trivial cofibration の集合の明示的な表示は知られていない.

定理 2.2.6. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は左 proper である.

Proof. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ において任意の対象がコファイブラントであることと, 命題 1.1.2 より従う. \square

定理 2.2.7. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は組み合わせ論的モデル圏である.

Proof. 注意 2.2.5 より, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ はコファイブラント生成なモデル圏である. 任意の単体的集合は標準 n 単体 $\Delta[n]$ の余極限で表せるので, \mathbf{sSet} は局所表現可能圏である. よって, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は組み合わせ論的モデル圏である. \square

定理 2.2.8. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は Cartesian モデル圏である.

2.3 $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ の Quillen 随伴 1

\mathbf{sSet} 上の Kan-Quillen モデル構造と Joyal 構造における weak equivalence などとを区別するために, 次のような呼び方を用いる.

記法 2.3.1. $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ における weak equivalence をそれぞれ Kan weak equivalence, Joyal weak equivalence と呼ぶ. fibration に対しても同様である. cofibration はともに単体的集合の mono 射なので特に区別しない.

恒等関手による $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ の Quillen 随伴を示す. (系 2.3.6)

^{*6} 擬圏のモデル (model structure for quasi-categories) と呼ばれることもある.

^{*7} $\mathbf{Cat}_{\text{nat}}$ における fibrant である擬ファイブレーションと区別するために, これを general quasi-fibration と呼ぶこともある.

補題 2.3.2 ([Rie08] Proposition 5.8). X を Kan 複体とする. このとき, $\tau_0(X) = \pi_0(X)$ である.

命題 2.3.3. 任意の Joyal weak equivalence は Kan weak equivalence である.

Proof. $f : A \rightarrow B$ を Joyal weak equivalence とする. つまり, 任意の Kan 複体 X に対して, $\pi_0(f, X) : \pi_0(B, X) \rightarrow \pi_0(A, X)$ が集合の同型射であるとする. 補題 2.3.2 より, $\tau_0(f, X)$ も集合の同型射である. よって, f は Kan weak equivalence である. \square

系 2.3.4. $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ は $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Bousfield 局所化である.

Proof. $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ における cofibration はともに単体的集合の mono 射である. 命題 2.3.3 より, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ における weak equivalence は $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ における weak equivalence である. \square

系 2.3.5. 任意の Kan fibration は Joyal fibration である.

系 2.3.6. $\text{Id} : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\text{Id} : \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は, $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{Id}} & \\ \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} & \perp & \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \\ & \xleftarrow{\text{Id}} & \end{array}$$

Proof. 系 2.3.4 と命題 1.5.9 より従う. \square

注意 2.3.7. Quillen 随伴 $\text{Id} : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightleftarrows \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} : \text{Id}$ は Quillen 同値ではない.

2.4 $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴 2

恒等関手ではない $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴を示す. (命題 2.4.6)

注意 2.4.1. 任意の $n \geq 0$ に対して, 圏 $[n]$ で自由生成された亜群の脈体を $\Delta'[n]$ と表すと, 構成 $[n] \mapsto \Delta'[n]$ は関手 $k : \Delta \rightarrow \mathbf{sSet}$ を定める.

定義 2.4.2. X を単体的集合とする. このとき, 単体的集合 $k^!(X)$ を任意の $n \geq 0$ に対して次のように定義する.

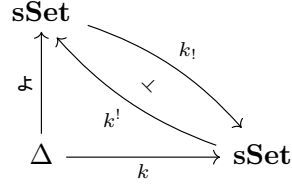
$$k^!(X)_n := \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta'[n], X)$$

注意 2.4.3. 構成 $X \mapsto k^!(X)$ は関手 $k^! : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を定める.

注意 2.4.4. 包含 $\Delta[n] \hookrightarrow \Delta'[n]$ は任意の $n \geq 0$ に対して, $k^!(X)_n \rightarrow X_n$ を定める. これから, 単体的集合の射 $\beta_X : k^!(X) \rightarrow X$ が定まる. この構成は自然変換 $\beta : k^! \rightarrow \text{Id}$ を定める.

注意 2.4.5. 普遍随伴の一般論より, $k^! : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ は左随伴 $k_! : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を持つ. また, 自

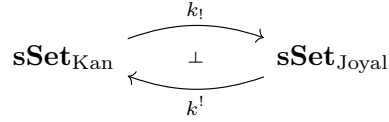
然変換 $\alpha : \text{Id} \rightarrow k_!$ を定める.



また, 任意の $n \geq 0$ に対して次が成立する.

$$k_!(\Delta[n]) = \Delta'[n]$$

命題 2.4.6 ([Joy08] Proposition 6.22). $k_! : \text{sSet}_{\text{Kan}} \rightarrow \text{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $k^! : \text{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \text{sSet}_{\text{Kan}}$ は, sSet_{Kan} と $\text{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴を定める.



Proof. まず, 左随伴が cofibration を保つことを示す. $k_!$ は包含 $\partial\Delta[1] \hookrightarrow \Delta[1]$ を包含 $\partial\Delta[1] \hookrightarrow \Delta'[1]$ にうつす. [Joy08] B.0.17 より, $k_!$ は任意の単体的集合の mono 射を保つ. つまり, $k_!$ は cofibration を保つ.

次に, 左随伴が weak equivalence を保つことを示す. $k_!(\Delta[n]) = \Delta'[n]$ より, 単体的集合の射 $\alpha_{\Delta[n]}$ は包含 $\Delta[n] \hookrightarrow \Delta'[n]$ に一致する. この射は Kan weak equivalence である. [Joy08] B.0.18 より, 任意の単体的集合 X に対して α_X は Kan weak equivalence である. 自然変換から定まる次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_X} & k_!(X) \\ f \downarrow & & \downarrow k_!(f) \\ Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & k_!(Y) \end{array}$$

f が Kan weak equivalence のとき, 2-out-of-3 より $k_!(f)$ も Kan weak equivalence である. よって, $k_!$ は weak equivalence を保つ. *8 □

*8 と [Joy08] Proposition 6.22 にあるが, この証明は不十分に思える. $k_!(f)$ は Kan weak equivalence ではあるが, Joyal weak equivalence であるとは限らないからである. Kan weak equivalence ならば Joyal weak equivalence であるが, 逆は一般には成立しない. Kan 複体に対しては, 逆が成立する. この行間について分かる方はご連絡ください.

3 単体的空間の圏に入るモデル構造

単体的空間の圏において, levelwise で \mathbf{sSet} において weak equivalence であるような射とするようなモデル構造が考えられる. このとき, fibration や cofibration も levelwise で定義したいが, リフト条件を考えるとこれは不可能であることが分かる. よって, weak equivalence と fibration が levelwise で定義されるモデル構造と, weak equivalence と cofibration が levelwise で定義されるモデル構造が考えられる. 前者を射影的モデル構造, 後者を入射的モデル構造という. (射影的/入射的モデル構造はより一般に定義される.)

Reedy モデル構造の一般論から, 単体的集合の圏上の Kan-Quillen モデル構造, Joyal モデル構造から定まる Reedy モデル構造がそれぞれ存在する. つまり, 前者は各列が Kan weak equivalence であるような単体的空間上のモデル構造である. 後者は各行が Joyal weak equivalence であるような単体的空間上のモデル構造である.

更に, 前者の Reedy モデル構造の Bousfield 局所化により, Segal 空間モデル構造と Rezk モデル構造が得られる. また, Rezk モデル構造は Joyal モデル構造から定まる Reedy モデル構造の Bousfield 局所化でもある.

3.1 射影的モデル構造

関手圏上の射影的モデル構造の一般論から, \mathbf{sSpace} 上の射影的モデル構造が得られる.

定義 3.1.1 (射影的モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する. これを \mathbf{sSpace} 上の射影的モデル構造といい, $\mathbf{sSpace}_{\text{proj}}$ と表す.

- weak equivalence は各次数で Kan weak equivalence である単体的空間の射
- fibration は各次数で Kan fibration である単体的空間の射

注意 3.1.2. $\mathbf{sSpace}_{\text{proj}}$ は

$$\begin{aligned} I &:= \{\partial\Delta[m] \times \Delta[n]^t \hookrightarrow \Delta[m] \times \Delta[n]^t \mid m, n \geq 0\}, \\ J &:= \{\Lambda[m, k] \times \Delta[n]^t \hookrightarrow \Delta[m] \times \Delta[n]^t \mid m \geq 1, 0 \leq k \leq m, n \geq 0\} \end{aligned}$$

をそれぞれ generating cofibration, generating trivial cofibration の集合とするコファイブラント生成なモデル圏である.

Proof. \mathbf{sSpace} 上の射影的モデル構造において, cofibration は trivial fibration に対して LLP を持つ射として定義される. 射影的モデル構造における trivial fibration は各次数で trivial Kan fibration となる射である. つまり, 単体的空間の射 $X \rightarrow Y$ が trivial fibration であることは, 任意の $n \geq 0$ に対して単体的集合の射 $X_n \rightarrow Y_n$ が trivial Kan fibration であることと同値である. つまり, 任意の

$m, n \geq 0$ に対して, 次の四角がリフトを持つような射である.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^m & \longrightarrow & X_n \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^m & \longrightarrow & Y_n \end{array}$$

自然な同型 $X_n \cong \text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta[n]^t, X)$ より, 次の図式のリフト性と同値である.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[m] & \longrightarrow & \text{Map}(\Delta[n]^t, X) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[m] & \longrightarrow & \text{Map}(\Delta[n]^t, Y) \end{array}$$

直積と写像空間の随伴性より, 次の図式のリフト性と同値である.

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[m] \times \Delta[n]^t & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[m] \times \Delta[n]^t & \longrightarrow & Y \end{array}$$

よって,

$$\{\partial\Delta[m] \times \Delta[n]^t \hookrightarrow \Delta[m] \times \Delta[n]^t \mid m, n \geq 0\}$$

を generating cofibration の集合とすればよい. generating trivial cofibration についても同様である. \square

3.2 入射的モデル構造

関手圏上の入射的モデル構造の一般論から, \mathbf{sSpace} 上の入射的モデル構造が得られる.

定義 3.2.1 (単体的空間の mono 射). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする. 任意の $n \geq 0$ に対して, $f_{n,-} : X_{n,-} \rightarrow Y_{n,-}$ が単体的集合の mono 射のとき, f を単体的空間の mono 射 (mono morphism) という.

定義 3.2.2 (入射的モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する. これを \mathbf{sSpace} 上の入射的モデル構造といい, $\mathbf{sSpace}_{\text{inj}}$ と表す.

- weak equivalence は各次数で Kan weak equivalence である単体的空間の射
- cofibration は単体的空間の mono 射

注意 3.2.3. $\mathbf{sSpace}_{\text{inj}}$ はコファイブラント生成なモデル圏である.

3.3 垂直 Reedy モデル構造

weak equivalence が各列で Kan weak equivalence であるような垂直 Reedy モデル構造が存在する。つまり、単体的空間の圏上の垂直 Reedy モデル構造は単体的集合の圏上の Kan-Quillen モデル構造から誘導されるようなモデル構造である。

定義 3.3.1 (各列 Kan weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の $m \geq 0$ に対して、 $\Delta[m] \backslash f = f_m : X_{m,-} \rightarrow Y_{m,-}$ が Kan weak equivalence のとき、 f を各列 Kan weak equivalence (column-wise weak homotopy equivalence) という。

定義 3.3.2 (垂直ファイブレーション). 任意の $m, n \geq 0$ において、 $\delta_m \square' h_n^k$ に対して RLP を持つ射を単体的空間の垂直ファイブレーション (v-fibration) という。

定義 3.3.3 (垂直 Reedy モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する。これを \mathbf{sSpace} 上の垂直 Reedy モデル構造といい、 \mathbf{sSpace}_v と表す。

- weak equivalence は各列 Kan weak equivalence
- fibration は垂直ファイブレーション
- cofibration は単体的空間の mono 射

\mathbf{sSpace}_v は $\mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}}$ から定まる Reedy モデル構造である。

3.4 水平 Reedy モデル構造

weak equivalence が各行で Joyal weak equivalence であるような水平 Reedy モデル構造が存在する。つまり、単体的空間の圏上の水平 Reedy モデル構造は単体的集合の圏上の Joyal モデル構造から誘導されるようなモデル構造である。

定義 3.4.1 (各行 Joyal weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の $n \geq 0$ に対して、 $\Delta[n] \backslash f = f_n : X_{-,n} \rightarrow Y_{-,n}$ が Joyal weak equivalence のとき、 f を各行 Joyal weak equivalence (row-wise Joyal weak equivalence) という。

定義 3.4.2 (水平ファイブレーション). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の $n \geq 0$ に対して、 $\langle f/\delta_n \rangle$ が Joyal fibration のとき、 f を水平ファイブレーション (horizontal fibration) という。

定義 3.4.3 (水平 Reedy モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する。これを \mathbf{sSpace} 上の水平 Reedy モデル構造といい、 \mathbf{sSpace}_h と表す。

- weak equivalence は各行 Joyal weak equivalence
- fibration は水平ファイブレーション
- cofibration は単体的空間の mono 射

\mathbf{sSpace}_v は $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ から定まる Reedy モデル構造である。

3.5 Segal 空間モデル構造

垂直 Reedy モデル構造の Bousfield 局所化により, Segal 空間モデル構造が得られる。

定義 3.5.1 (Segal weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の Segal 空間 W に対して,

$$\text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(f, W) : \text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(X, W) \rightarrow \text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(Y, W)$$

が各次数で Kan weak equivalence のとき, f を Segal weak equivalence という。

定義 3.5.2 (Segal 空間モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する。これを \mathbf{sSpace} 上の Segal 空間モデル構造といい, $\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ と表す。

- weak equivalence は Segal weak equivalence
- cofibration は単体的空間の mono 射

注意 3.5.3. $\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ において, 任意の Segal 空間はファイブラントであり, 任意の対象 (単体的空間) はコファイブラントである。

注意 3.5.4. $\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ はコファイブラント生成なモデル圏である。

Segal 空間モデル構造は垂直 Reedy モデル構造の Bousfield 局所化である。

命題 3.5.5. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ は \mathbf{sSpace}_v の Bousfield 局所化である。

Proof. 注意 B.4.2 と Segal weak equivalence の定義より従う。 □

3.6 Rezk モデル構造

Segal 空間モデル構造の Bousfield 局所化により, Rezk モデル構造が得られる。

定義 3.6.1 (Rezk weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の完備 Segal 空間 W に対して,

$$\text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(f, W) : \text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(Y, W) \rightarrow \text{Map}_{\mathbf{sSpace}}(X, W)$$

が各次数で Kan weak equivalence のとき, f を Rezk weak equivalence という。

定義 3.6.2 (Rezk モデル構造). \mathbf{sSpace} には次のモデル構造が存在する。これを \mathbf{sSpace} 上の Rezk モデル構造といい, $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と表す。

- weak equivalence は Rezk weak equivalence

- cofibration は単体的空間の mono 射

注意 3.6.3. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ において, ファイブランチ対象はちょうど完備 Segal 空間であり, 任意の対象 (単体的空間) はコファイブランチである.

注意 3.6.4. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ はコファイブランチ生成なモデル圏である.

Rezk モデル構造は Segal 空間構造モデル構造の Bousfield 局所化により得られた. ここでは, Rezk モデル構造が水平 Reedy モデル構造の Bousfield 局所化でもあることを見る. (命題 3.6.7)

補題 3.6.5. $f : X \rightarrow Y$ を $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ におけるファイブランチの間の Rezk fibration とする. このとき, 任意の単体的集合の mono 射 $v : S \rightarrow T$ に対して,

$$\langle f/v \rangle : X/T \rightarrow Y/T \times_{Y/S} X/S$$

は Joyal fibration である.

補題 3.6.6. X を単体的空間とする. X が完備 Segal 空間であることと, 次を満たすことは同値である.

1. 任意の $n \geq 0$ に対して, X/δ_n は Joyal fibration である.
2. X は圏的定値である.

命題 3.6.7. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ は \mathbf{sSpace}_h の Bousfield 局所化である.

Proof. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と \mathbf{sSpace}_h における cofibration はともに単体的空間の mono 射である. $f : X \rightarrow Y$ を $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ におけるファイブランチの間の Rezk fibration とする. 補題 3.6.5 より, 任意の $n \geq 0$ に対して $\langle f/\delta_n \rangle$ は Joyal fibration である. つまり, 完備 Segal 空間の間の Rezk fibration は水平ファイブレーションである. (途中) \square

4 sSpace 上のモデル構造と sSet_{Joyal} の Quillen 随伴, Quillen 同値

4.1 全関手とその随伴

定義 4.1.1. 関手 $t : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbf{sSet}$ を次のように定義する.

$$t : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbf{sSet} : ([m], [n]) \mapsto \Delta[m] \times \Delta'[n]$$

定義 4.1.2. X を単体的集合とする. このとき, 単体的空間 $t^!(X)$ を任意の $m, n \geq 0$ に対して次のように定義する.

$$t^!(X)_{m,n} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[m] \times \Delta'[n], X)$$

注意 4.1.3. 構成 $X \mapsto t^!(X)$ は関手 $t^! : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSpace}$ を定める.

注意 4.1.4. 普遍随伴の一般論より, $t^! : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSpace}$ は左随伴 $t_! : \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を持つ.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{sSpace} & \\ \uparrow \text{よ} & \swarrow t_! & \\ \Delta \times \Delta & \xrightarrow{t} & \mathbf{sSet} \end{array}$$

特に, 任意の $m, n \geq 0$ に対して次が成立する.

$$t_!(\Delta[m] \square \Delta'[n]) = \Delta[m] \times \Delta'[n]$$

補題 4.1.5. A, B, X を単体的集合とする. このとき, 次の単体的集合の同型が成立する.

$$t_!(A \square B) = A \times k_!(B), \quad A \setminus t^!(X) = k^!(X^A), \quad t^!(X)/B = X^{k_!(B)}$$

4.2 sSpace_v, sSpace_h, sSpace_{Segal} と sSet_{Joyal} の Quillen 随伴

sSpace 上の垂直 Reedy モデル構造と sSet 上の Joyal モデル構造は Quillen 随伴である.

命題 4.2.1 ([JT06] Theorem 2.12). $t_! : \mathbf{sSpace}_v \rightarrow \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ と $t^! : \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_v$ は, \mathbf{sSpace}_v と $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{t_!} & \\ \mathbf{sSpace}_v & \perp & \mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}} \\ & \xleftarrow{t^!} & \end{array}$$

Proof. まず, 左随伴が cofibration を保つことを示す. $t_!(u)$ が単体的集合の mono 射 ($\mathbf{sSet}_{\mathrm{Joyal}}$ における cofibration) である sSpace における射 u の飽和クラスを A と表す. 補題 4.1.5 より, 任意

の $m, n \geq 0$ に対して, $t_!(\delta_m \square' \delta_n) = \delta_m \times' k_!(\delta_n)$ である. 命題 2.4.6 より, $k_!$ は cofibration を保つ. よって, $k_!(\delta_n)$ は単体的集合の mono 射である. つまり, $t_!(\delta_m \square' \delta_n)$ は単体的空間の mono 射なので, $\delta_m \square' \delta_n$ は A に属する. 命題 B.2.2 より, A の任意の元 u は単体的空間の mono 射 (\mathbf{sSpace}_v における cofibration) である. よって, $t_!$ は cofibration を保つ.

次に, 右随伴が fibration を保つことを示す. つまり, Joyal fibration $f : X \rightarrow Y$ に対して, $t^!(f) : t^!(X) \rightarrow t^!(Y)$ が垂直ファイブレーション (\mathbf{sSpace}_v における fibration) であることを示す. 命題 B.2.7 より, 任意の単体的集合の mono 射 u に対して, $\langle u \setminus t^!(f) \rangle$ が Kan fibration であることを示せばよい. 補題 4.1.5 より, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} B \setminus t^!(X) & \xrightarrow{\langle u \setminus t^!(f) \rangle} & A \setminus t^!(X) \times_{A \setminus t^!(Y)} B \setminus t^!(Y) \longrightarrow A \setminus t^!(X) \\ & & \downarrow \quad \lrcorner \quad \downarrow \\ & & B \setminus t^!(Y) \longrightarrow A \setminus t^!(Y) \end{array}$$

は次の図式

$$\begin{array}{ccc} k^!(X^B) & \xrightarrow{k^!(\langle u, f \rangle)} & k^!(X^A) \times_{k^!(Y^A)} k^!(Y^B) \longrightarrow k^!(X^A) \\ & & \downarrow \quad \lrcorner \quad \downarrow \\ & & k^!(Y^B) \longrightarrow k^!(Y^A) \end{array}$$

と同一視できる. よって, 射 $\langle u \setminus t^!(f) \rangle$ は射 $k^!(\langle u, f \rangle)$ と同一視できる. Joyal モデル構造は Cartesian モデル圏なので, $\langle u, f \rangle$ は Joyal fibration である. 命題 2.4.6 より $k^!$ は fibration を保つので, $k^!(\langle u, f \rangle)$ は Kan fibration である. つまり, $\langle u \setminus t^!(f) \rangle$ も Kan fibration である. 系 2.3.5 より, $\langle u \setminus t^!(f) \rangle$ は Joyal fibration である. 以上より, $t^!$ は fibration を保つ. \square

\mathbf{sSpace} 上の水平 Reedy モデル構造と \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル構造は Quillen 随伴である.

命題 4.2.2 ([JT06] Theorem 2.12). $t_! : \mathbf{sSpace}_h \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $t^! : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_h$ は, \mathbf{sSpace}_h と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{t_!} & \\ \mathbf{sSpace}_h & \perp & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \\ & \xleftarrow{t^!} & \end{array}$$

Proof. 左随伴が cofibration を保つことは命題 4.2.1 ですでに示した.

右随伴が fibration を保つことを示す. つまり, Joyal fibration $f : X \rightarrow Y$ に対して, $t^!(f) : t^!(X) \rightarrow t^!(Y)$ が水平ファイブレーション (\mathbf{sSpace}_h における fibration) であることを示す. 任意の

単体的集合の mono 射 u に対して, $\langle t^!(f)/u \rangle$ が Joyal fibration であることを示せばよい. 補題 4.1.5 より, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} t^!(X)/B & \xrightarrow{\langle t^!(f)/u \rangle} & t^!(X)/A \times_{t^!(Y)/A} t^!(Y)/B \longrightarrow t^!(X)/A \\ & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & & t^!(Y)/B \longrightarrow t^!(Y)/A \end{array}$$

は次の図式

$$\begin{array}{ccc} X^{k_!(B)} & \xrightarrow{\langle k^!(u), f \rangle} & X^{k_!(A)} \times_{Y^{k_!(A)}} Y^{k_!(B)} \longrightarrow X^{k_!(A)} \\ & & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & & Y^{k_!(B)} \longrightarrow Y^{k_!(A)} \end{array}$$

と同一視できる. よって, 射 $\langle t^!(u)/u \rangle$ は射 $\langle k_!(u), f \rangle$ と同一視できる. 命題 2.4.6 より $k_!$ は cofibration を保つので, $k_!(u)$ は単体的集合の mono 射である. Joyal モデル構造は Cartesian モデル圏なので, $\langle k_!(u), f \rangle$ は Joyal fibration である. つまり, $\langle t^!(f)/u \rangle$ も Joyal fibration である. \square

\mathbf{sSpace} 上の Segal 空間モデル構造と \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル構造は Quillen 随伴である.

命題 4.2.3 ([JT06] Theorem 3.3). $t_! : \mathbf{sSpace}_{\text{Segal}} \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $t^! : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ は, $\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 随伴を定める.

$$\begin{array}{ccc} & t_! & \\ \mathbf{sSpace}_{\text{Segal}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \\ & t^! & \end{array}$$

Proof. 命題 4.2.1 より, $t_!$ は cofibration を保つ. 次に, $t^!$ がファイブントを保つことを示す. 命題 4.2.1 より, 任意の擬圏 ($\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ におけるファイブント) X に対して, $t^!(X)$ は垂直ファイブント (\mathbf{sSpace}_v におけるファイブント) である. よって, この $t^!(X)$ が Segal 空間 ($\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ におけるファイブント) であることを示す. つまり, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$\varphi_n \backslash t^!(X) : \Delta[n] \backslash t^!(X) \rightarrow I_n \backslash t^!(X)$$

が Kan weak equivalence であることを示せばよい. 補題 4.1.5 より, $\varphi_n \backslash t^!(X)$ は $k^!(X^{\varphi_n})$ と同一視できる. $\varphi_n : I_n \hookrightarrow \Delta[n]$ は内緩射なので, φ_n は Joyal weak equivalence である. φ_n は単体的集合の mono 射かつ, $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は Cartesian 閉であることから, X^{φ_n} は Joyal fibration である. 以上より, X^{φ_n} は Joyal trivial fibration である. 命題 2.4.6 より, $k^!$ は右 Quillen 随伴である. よって, $k^!(X^{\varphi_n})$ は Kan trivial fibration である. 従って, $\varphi_n \backslash t^!(X)$ も Kan trivial fibration である. 特に $\varphi_n \backslash t^!(X)$ は Kan weak equivalence なので, $t^!(X)$ は Segal 空間である. \square

4.3 $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 同値

\mathbf{sSpace} 上の Rezk モデル構造と \mathbf{sSet} 上の Joyal モデル構造は Quillen 同値である。

命題 4.3.1 ([JT06] Theorem 4.12). $t_! : \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $t^! : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ は, $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ の Quillen 同値を定める。

$$\begin{array}{ccc} & t_! & \\ \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \\ & t^! & \end{array}$$

Proof. まず, $(t_! \dashv t^!)$ が Quillen 随伴であることを示す。命題 4.2.3 より, 任意の擬圏 ($\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ におけるファイブラント) X に対して, $t^!(X)$ は Segal 空間 ($\mathbf{sSpace}_{\text{Segal}}$ におけるファイブラント) である。よって, この $t^!(X)$ が完備 Segal 空間 ($\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ におけるファイブラント) であることを示せばよい。補題 B.4.3 より, $u_0 \backslash X : J \backslash X \rightarrow \{0\} \backslash X$ が Kan trivial fibration であることを示せばよい。補題 4.1.5 より, 射 $u_0 \backslash X$ は射 $k^!(X^{u_0})$ と同一視できる。 $u_0 : \{0\} \rightarrow J$ は通常の圏同値なので, u_0 は Joyal weak equivalence である。また, u_0 は単体的空間の mono 射なので, X^{u_0} は Joyal trivial fibration である。命題 2.4.6 より $k^!$ は trivial fibration を保つので, $k^!(X^{u_0})$ は Kan trivial fibration である。よって, $u_0 \backslash X$ も Kan trivial fibration である。

次に, $(t_! \dashv t^!)$ が Quillen 同値であることを示す。任意の単体的集合 A に対して, 補題 4.1.5 より,

$$t_! p_1^*(A) = t_!(A \square \Delta[0]) = A \times k_!(\Delta[0]) = A$$

なので, $t_! p_1^*$ は $\text{Id}_{\mathbf{sSet}}$ と同型である。同様に,

$$i_1^* t^!(A) = i_1^*(\text{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta[-] \times \Delta'[?], X)) = \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[-], X) = X$$

なので, $i_1^* t^!$ は $\text{Id}_{\mathbf{sSet}}$ と同型である。^{*9} 命題 4.4.1 より, (p_1^*, i_1^*) は Quillen 同値である。2-out-of-3 より, $(t_! \dashv t^!)$ も Quillen 同値である。□

4.4 $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ の Quillen 同値

第 4.4 節の目標は次の命題 4.4.1 を示すことである。

命題 4.4.1. $p_1^* : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ と $i_1^* : \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} \rightarrow \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ は $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ と $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ の Quillen 同値を定める。

$$\begin{array}{ccc} & p_1^* & \\ \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} \\ & i_1^* & \end{array}$$

^{*9} 随伴の一意性からも従う。

補題 4.4.2. ボックス積を与える関手 $\mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSpace}$ は Quillen 双関手

$$\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \times \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$$

を定める.

注意 4.4.3. 第一射影

$$p_1 : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta : ([m], [n]) \mapsto [m]$$

と第一入射

$$i_1 : \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta : [m] \mapsto ([m], [0])$$

は次の随伴を定める.

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times \Delta & \xrightarrow{p_1} & \Delta \\ & \xleftarrow{i_1} & \end{array}$$

Proof. (命題 4.4.1) まず, 注意 4.4.3 より $(p_1^* \dashv i_1^*)$ は随伴である.

次に, $(p_1^* \dashv i_1^*)$ が Quillen 随伴であることを示す. まず, 左随伴が cofibration を保つことを示す. 任意の単体的集合 A に対して,

$$p_1^* : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightarrow \mathbf{sSpace}_{\text{CSS}} : A \mapsto A \square \Delta[0]$$

である. 補題 4.4.2 より, ボックス積を与える関手は左 Quillen 関手である. よって, p_1^* も左 Quillen 関手である.

次の, $(p_1^* \dashv i_1^*)$ の余単位射が weak equivalence であることを示す. $\mathbf{sSpace}_{\text{CSS}}$ におけるファイブラントは完備 Segal 空間である. $\mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}$ において, 任意の対象 (単体的集合) はコファイブラントである. よって, 任意の完備 Segal 空間 X に対して,

$$\varepsilon_X : p_1^* i_1^*(X) \rightarrow X$$

が Rezk weak fibration であることを示せばよい. 命題 3.6.7 より, ε が各列弱圏同値であることを示せばよい. ここで,

$$p_1^* i_1^*(X) = p_1^*(X_{-,0}) = X_{-,0} \square \Delta[0]$$

であり, $X_{-,0} \square \Delta[0]$ は任意の $n \geq 0$ に対して, $X_{-,n} = X_{-,0}$ であるような単体的空間である. よって, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$\varepsilon_{-,n} : X_{-,0} \rightarrow X_{-,n}$$

が Joyal weak equivalence であることを示せばよい. X は完備 Segal 空間なので, X は圏的同値である. よって, 任意の $n \geq 0$ に対して, $\varepsilon_{-,n}$ は Joyal weak equivalence である. \square

付録 A 擬圏について

A.1 単体的集合の同値

単体的集合の同値として、ホモトピー同値や弱ホモトピー同値、弱圏同値がある。実際、Kan-Quillen モデル構造における weak equivalence は弱ホモトピー同値であり、Joyal モデル構造における weak equivalence は弱圏同値である。まずは、この 2 つの weak equivalence の定義を見る。それぞれ同値な定義がたくさんあるが、ここでは 2 つの weak equivalence を対比するように表せる定義を用いる。

\mathbf{sSet} は Cartesian 閉であり、ホモトピー圏の対象の同型類をとる関手 $\pi_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Set}$ は有限直積を保つ。単体的集合 A, B に対して

$$\pi_0(A, B) := \pi_0(\mathrm{Fun}(A, B))$$

とおく。単体的集合 A, B, C に対して、合成から定まる射 $\mathrm{Fun}(B, C) \times \mathrm{Fun}(A, B) \rightarrow \mathrm{Fun}(A, C)$ に関手 π_0 を作用させると、

$$\pi_0(B, C) \times \pi_0(A, B) \rightarrow \pi_0(A, C)$$

を得る。これらから自然に圏が定まる。

定義 A.1.1. 圏 \mathbf{sSet}^{π_0} を次のように定義する。

- 対象は \mathbf{sSet} と同じ
- \mathbf{sSet}^{π_0} の任意の対象 (単体的集合) に対して、 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}^{\pi_0}}(A, B) := \pi_0(A, B)$

定義 A.1.2 (弱ホモトピー同値). $f : A \rightarrow B$ を単体的集合の射とする。任意の Kan 複体 X に対して、 f の合成から定まる射

$$\pi_0(f, X) : \pi_0(B, X) \rightarrow \pi_0(A, X)$$

が集合の同型射のとき、 f を弱ホモトピー同値 (weak homotopy equivalence) という。

同様に、基本群の対象の同型類をとる関手 $\tau_0 : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対しても圏が定まる。

定義 A.1.3. 圏 \mathbf{sSet}^{τ_0} を次のように定義する。

- 対象は \mathbf{sSet} と同じ
- \mathbf{sSet}^{τ_0} の任意の対象 (単体的集合) に対して、 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}^{\tau_0}}(A, B) := \tau_0(A, B)$

定義 A.1.4 (弱圏同値). $f : A \rightarrow B$ を単体的集合の射とする。任意の擬圏 X に対して、 f の合成から定まる射

$$\tau_0(f, X) : \tau_0(B, X) \rightarrow \tau_0(A, X)$$

が集合の同型射のとき, f を弱圏同値 (weak categorical equivalence) という.

付録 B 完備 Segal 空間について

B.1 ボックス積

記法は [JT06] の chapter 2 に従う.

定義 B.1.1 (ボックス積). A, B を単体的集合とする. このとき, 単体的空間 $A \square B$ を任意の $m, n \geq 0$ に対して次のように定義し, $A \square B$ を A と B のボックス積 (box product) という.

$$(A \square B)_{m,n} := A_m \times B_n$$

注意 B.1.2. 構成 $(A, B) \mapsto A \square B$ は双関手 $-\square? : \mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSpace}$ を定める. 特に, 任意の $m, n \geq 0$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} \Delta[m] \square \Delta[n] &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[-], \Delta[m]) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[?], \Delta[n]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet} \times \mathbf{sSet}}(\Delta[-] \times \Delta[?], \Delta[m] \times \Delta[n]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\Delta \times \Delta}(- \times ?, m \times n) \end{aligned}$$

ボックス積を与える双関手は両方の変数に対して右随伴を持つ.

定義 B.1.3. A を単体的集合, X を単体的空間とする. このとき, 単体的集合 $A \setminus X$ を任意の $n \geq 0$ に対して次のように定義する.

$$(A \setminus X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(A \square \Delta[n], X)$$

定義 B.1.4. B を単体的集合, X を単体的空間とする. このとき, 単体的集合 X/B を任意の $n \geq 0$ に対して次のように定義する.

$$(X/B)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta[n] \square B, X)$$

注意 B.1.5. 構成 $(A, X) \mapsto A \setminus X$ は双関手 $-\setminus? : \mathbf{sSet}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{sSpace} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を定める. 特に, 任意の $m \geq 0$ に対して次が成立する.

$$\Delta[m] \setminus X = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta[m] \square \Delta[-], X) \cong X_{m,-}$$

同様に, 構成 $(X, B) \mapsto X/B$ は双関手 $?/- : \mathbf{sSpace} \times \mathbf{sSet}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{sSet}$ を定める. 特に, 任意の $n \geq 0$ に対して次が成立する.

$$X/\Delta[n] = \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta[-] \square \Delta[n], X) \cong X_{-,n}$$

注意 B.1.6. A, B を単体的集合, X を単体的空間とする. このとき, 次の同型が存在する.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(A \square B, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(B, A \setminus X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(A, X/B)$$

つまり, 次の随伴が存在する.

$$(-\square?) \dashv (-\setminus?), \quad (-\square?) \dashv (-/?)$$

ボックス積を与える操作は arrow category 上の双関手 (とその随伴) を定める。

記法 B.1.7. 圏 \mathcal{C} に対して, \mathcal{C} 上の arrow category を \mathcal{C}^I と表す。

定義 B.1.8. $u : A \rightarrow B, v : S \rightarrow T$ を単体的集合の射とする。このとき, 次の pushout の普遍性から定まる単体的空間の射を次のように表す。

$$u \square' v := A \square T \sqcup_{A \square S} B \square S \rightarrow B \square T$$

注意 B.1.9. 構成 $(u, v) \mapsto u \square' v$ は双関手 $-\square' : \mathbf{sSet}^I \times \mathbf{sSet}^I \rightarrow \mathbf{sSpace}^I$ を定める。

この双関手は両方の変数に対して右随伴を持つ。

定義 B.1.10. $u : A \rightarrow B$ を単体的集合の射, $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。このとき, 次の pullback の普遍性から定まる単体的集合の射を次のように表す。

$$\langle u \setminus f \rangle := B \setminus X \rightarrow B \setminus Y \times_{A \setminus Y} A \setminus X$$

定義 B.1.11. $v : S \rightarrow T$ を単体的集合の射, $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。このとき, 次の pullback の普遍性から定まる単体的集合の射を次のように表す。

$$\langle f / v \rangle := X / T \rightarrow Y / T \times_{Y / S} X / S$$

注意 B.1.12. 構成 $(u, f) \mapsto \langle u \setminus f \rangle$ は双関手 $(\mathbf{sSet}^{\text{op}})^I \times \mathbf{sSpace}^I \rightarrow \mathbf{sSet}^I$ を定める. 特に, 任意の単体的集合 A に対して, 次が成立する.

$$\langle (\emptyset \rightarrow A) \setminus f \rangle \cong A \setminus f$$

注意 B.1.13. 構成 $(f, v) \mapsto \langle f/v \rangle$ は双関手 $\mathbf{sSpace}^I \times (\mathbf{sSet}^{\text{op}})^I \rightarrow \mathbf{sSet}^I$ を定める. 特に, 任意の単体的空間 X に対して, 次が成立する.

$$\langle (X \rightarrow 1)/v \rangle \cong X/v$$

注意 B.1.14. 次の随伴が存在する.

$$(-\square'?) \dashv \langle - \setminus ? \rangle, \quad (-\square'?) \dashv \langle - / ? \rangle$$

B.2 \mathbf{sSpace} 上の垂直 Reedy モデル構造

記法 B.2.1. 任意の $n \geq 0$ に対して, 単体的集合の包含 $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ を δ_n と表す.

任意の $n \geq 0$ に対して, 包含 $\Delta[n, k] \hookrightarrow \Delta[n]$ を h_n^k と表す.

命題 B.2.2. \mathbf{sSpace} における mono 射は次の射の集合の飽和クラスである.

$$\{\delta_m \square' \delta_n : (\partial\Delta[m] \square \Delta[n]) \cup (\Delta[m] \square \partial\Delta[n]) \hookrightarrow \Delta[m] \cup \Delta[n] \mid m, n \geq 0\}$$

定義 B.2.3 (自明なファイブレーション). 任意の $m, n \geq 0$ において, $\delta_m \square' \delta_n$ に対して RLP を持つ射を単体的空間の自明な垂直ファイブレーション (trivial vertical fibration) という.

命題 B.2.4. 単体的空間の射 $f : X \rightarrow Y$ に対して, 次は全て同値である.

1. f は単体的空間の自明な垂直ファイブレーションである.
2. 任意の $m \geq 0$ に対して, $\langle \delta_m \setminus f \rangle$ は Kan trivial fibration である.
3. 任意の単体的集合の mono 射 u に対して, $\langle u \setminus f \rangle$ は Kan trivial fibration である.
4. 任意の $n \geq 0$ に対して, $\langle f/\delta_n \rangle$ は Kan trivial fibration である.
5. 任意の単体的集合の mono 射 v に対して, $\langle f/v \rangle$ は Kan trivial fibration である.

\mathbf{sSpace} 上の垂直 Reedy モデル構造における weak equivalence を定義する.

定義 B.2.5 (各列 Kan weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする. 任意の $m \geq 0$ に対して, $\Delta[m] \setminus f = f_{m,-} : X_{m,-} \rightarrow Y_{m,-}$ が Kan weak equivalence のとき, f を各列 Kan weak equivalence (column-wise Kan weak equivalence) という.

\mathbf{sSpace} 上の垂直 Reedy モデル構造における fibration を定義する.

定義 B.2.6 (垂直ファイブレーション). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする. 任意の $m \geq 0$ に対して, $\langle \delta_m \setminus f \rangle$ が Kan fibration のとき, f を垂直ファイブレーション (vertical fibration) という.

命題 B.2.7. 単体的空間の射 $f : X \rightarrow Y$ に対して、次は全て同値である。

1. f は垂直ファイブレーションである。
2. 任意の $m \geq 0$ に対して、 $\langle \delta_m \backslash f \rangle$ は Kan fibration である。
3. 任意の単体的集合の mono 射 u に対して、 $\langle u \backslash f \rangle$ は Kan fibration である。
4. 任意の $n \geq 0$ と $0 \leq k \leq n$ に対して、 $\langle f/h_n^k \rangle$ は Kan trivial fibration である。
5. 任意の単体的集合の緩射 v に対して、 $\langle f/v \rangle$ は Kan trivial fibration である。

定義 B.2.8 (垂直ファイブラント). X を単体的空間とする。単体的空間の射 $X \rightarrow \Delta[0]^t$ が垂直ファイブレーションのとき、 X を垂直ファイブラント (vertical fibrant) という。

命題 B.2.4 と同様に、垂直ファイブレーションを特徴づけることができる。

B.3 sSpace 上の水平 Reedy モデル構造

定義 B.3.1 (圏的定値). X を単体的空間とする。任意の $n \geq 0$ に対して、 Δ における射 $[n] \rightarrow [0]$ が定める単体的集合の射 $X_{-,0} \rightarrow X_{-,n}$ が Joyal weak equivalence のとき、 X は圏的定値 (categorically constant) であるという。

例 B.3.2. 任意の垂直ファイブラントは圏的定値である。

Proof. X を垂直ファイブラントな単体的空間とする。このとき、単体的空間の射 $X \rightarrow \Delta[0]$ は垂直ファイブレーションである。任意の $n \geq 0$ に対して、 $i : \Delta[0] \hookrightarrow \Delta[n]$ は Kan trivial cofibration である。命題 B.2.7 より、 $X/i : X/\Delta[n] \rightarrow X/\Delta[0]$ は Kan trivial fibration である。一意な射 $t : \Delta[n] \rightarrow \Delta[0]$ は $ti = \text{id}_{\Delta[0]}$ を満たす。このとき、 $(X/i) \circ (X/t) = \text{id}_{X/\Delta[0]}$ である。2-out-of-3 より、 X/t も Kan weak equivalence である。ここで、 $X/\Delta[n] \cong X_{-,n}$ である。つまり、 $X_{-,0} \rightarrow X_{-,n}$ は Kan weak equivalence である。(ことまでしか言えない気がする。) \square

sSpace 上の水平 Reedy モデル構造における weak equivalence を定義する。

定義 B.3.3 (各行 Joyal weak equivalence). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の $n \geq 0$ に対して、 $\Delta[n] \backslash f = f_{-,n} : X_{-,n} \rightarrow Y_{-,n}$ が Joyal weak equivalence のとき、 f を各行 Joyal weak equivalence (row-wise Joyal weak equivalence) という。

sSpace 上の水平 Reedy モデル構造における fibration を定義する。

定義 B.3.4 (水平ファイブレーション). $f : X \rightarrow Y$ を単体的空間の射とする。任意の $n \geq 0$ に対して、 $\langle f/\delta_n \rangle$ が Joyal fibration のとき、 f を水平ファイブレーション (horizontal fibration) という。

定義 B.3.5 (水平ファイブラント). X を単体的空間とする。単体的空間の射 $X \rightarrow \Delta[0]^t$ が水平ファイブレーションのとき、 X を水平ファイブラント (horizontal fibrant) という。

B.4 補足：Segal 空間と完備 Segal 空間について

記法 B.4.1. 任意の $n \geq 0$ に対して, n 鎖を $I_n \subset \Delta[n]$ と表す.

注意 B.4.2. 任意の単体的空間 X に対して, 任意の $n \geq 0$ において, 次の単体的空間の同型が存在する.

$$I_n \backslash X = X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

補題 B.4.3. Segal 空間 X に対して, 次の 3 つは同値である.

1. X は完備である.
2. $t : J \rightarrow \{0\}$ から定まる単体的集合の射 $t \backslash X : 1 \backslash X \rightarrow J \backslash X$ は Kan weak equivalence である.
3. 包含 $u_0 : \{0\} \hookrightarrow J$ から定まる単体的集合の射 $u_0 \backslash X : J \backslash X \rightarrow 1 \backslash X$ は Kan trivial fibration である.

Proof. (2) と (3) の同値性を示す. $t : J \rightarrow \{0\}$ と $u_0 : \{0\} \hookrightarrow J$ は $tu_0 = \text{id}_{\{0\}}$ を満たすので, $(u_0 \backslash X) \circ (t \backslash X) = \text{id}_{1 \backslash X}$ である. 2-out-of-3 より, $t \backslash X$ が Kan weak equivalence であることと, $u_0 \backslash X$ が Kan weak equivalence であることは同値である. また, 命題 B.2.7 より, $u_0 \backslash X$ は Kan fibration である. \square

参考文献

- [Ber05] Julia E. Bergner. A model category structure on the category of simplicial categories, 2005.
- [Ber07] Julia E. Bergner. Three models for the homotopy theory of homotopy theories. *Topology*, 46(4):397–436, 2007.
- [BK11] C. Barwick and D. M. Kan. Relative categories: Another model for the homotopy theory of homotopy theories, 2011.
- [GJ09] P.G. Goerss and J.F. Jardine. Simplicial Homotopy Theory. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2009.
- [Hir03] P.S. Hirschhorn. Model Categories and Their Localizations. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [Joy] Andre Joyal. Theory of quasi-categories 1.
- [Joy08] Andre Joyal. The theory of quasi-categories and its applications, 2008.
- [JT06] Andre Joyal and Myles Tierney. Quasi-categories vs segal spaces, 2006.
- [Lur09] Jacob Lurie. Higher Topos Theory (AM-170). Princeton University Press, 2009.
- [Lur23] Jacob Lurie. Kerodon. <https://kerodon.net>, 2023.
- [Qui67a] Daniel G. Quillen. Axiomatic homotopy theory, pages 1–64. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1967.
- [Qui67b] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [Rez00] Charles Rezk. Every homotopy theory of simplicial algebras admits a proper model, 2000.
- [Rie08] Emily Riehl. A model structure for quasi-categories, 2008.