恒等射を持つ A_∞ 圏

よの

2023 年 8 月 13 日

概要

恒等射を持つ A_∞ 圏を定義し，A_∞ 圏が A_∞ 加群に埋め込まれることをみる．このことから，任意の A_∞ 圏が dg 圏と A_∞ 擬同値であることが分かる．(A_∞-Yoneda の補題)

目次

1 恒等射を持つ A_∞ 圏と恒等射を保つ A_∞ 関手

「恒等射を持つ」A_∞ 圏には複数の定義がある．

「任意の $a_1 \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \cdots, a_d \in \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して」を以降では省略する．

定義 1.1 (恒等射を持つ A_∞ 圏). $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする．任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対してある $e_X \in \hom^0_{\mathcal{A}}(X, X)$ が一意に存在して，次の条件を満たすとき，$\mathcal{A}$ は恒等射を持つ A_∞ 圏 (strictly unital A_∞-category) であるという．このとき，e_X を X の恒等射 (strict unit) という．

$(d = 1)$ $\mu^1_{\mathcal{A}}(e_X) = 0$ [*1]

[*1] この定義は課さないことが多い．

$(d=2)$ $(-1)^{|a_1|}\mu^2_{\mathcal{A}}(e_{X_1}, a_1) = a_1 = \mu^2_{\mathcal{A}}(a_1, e_{X_0})$
$(d \geq 3)$ 任意の $0 \leq n < d$ に対して $\mu^d_{\mathcal{A}}(a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}, e_{X_n}, a_n, \cdots, a_1) = 0$

定義 1.2 (コホモロジー圏上で恒等射を持つ A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ のコホモロジー圏 $H(\mathcal{A})$ が通常の意味で恒等射を持つとき, $\mathcal{A}$ はコホモロジー圏上で恒等射を持つ A_∞ 圏 (cohomologically unital A_∞-category) であるという. 以降では, c-unital な A_∞ 圏という. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して $[e_X]$ が $H(\mathcal{A})$ における恒等射であるとき, e_X を X の c-unit という.

定義 1.3 (ホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏). ホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏 (homotopy unital A_∞-category) $(\mathcal{A}, \mu^{-,(i)}_{\mathcal{A}})$ は次のデータから構成される.

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 次数付きベクトル空間 $\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- 任意の $d + i_0 \cdots + i_d \geq 0$ に対して

$$\mu^{d,(i_d,\cdots,i_0)}_{\mathcal{A}} : \hom_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_d)[2-d-2\sum_k i_k]$$

  が与えられていて, 一般化 A_∞ 結合式 (generalized A_∞-associativity equation) を満たす. ([Fuk02] Section 5)

3 つの「恒等射を持つ」A_∞ 圏には次のような関係がある.

補題 1.4. 次の 2 つが成立する.

1. 任意の恒等射を持つ A_∞ 圏はホモトピー恒等射を持つ.
2. 任意のホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏は c-unital である.

Proof. それぞれ次のように示すことができる.

1. $\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏とする. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ の恒等射を e_X とする. $\mu^{0,(1)}_{\mathcal{A}} := e_X$ として, 任意の $i_0 + \cdots + i_d > 0$ に対して $\mu^{d,(i,\cdots,i_0)}_{\mathcal{A}} := 0$ とすると, $\mathcal{A}$ はホモトピー恒等射を持つ.
2. 一般化 A_∞ 結合式より従う.

□

「恒等射を持つ」A_∞ 圏の間の「恒等射を保つ」A_∞ 関手が定義される.

定義 1.5 (恒等射を保つ A_∞ 関手). 恒等射を持つ A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ は恒等射を保つ A_∞ 関手 (strictly unital A_∞-functor) であるという.

$(d=1)$ 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{F}^1(e_X) = e_{\mathcal{F}X}$
$(d \geq 2)$ 任意の $0 \leq n < d$ に対して $\mathcal{F}^d(a_{d-1}, \cdots, a_{n+1}, e_{X_n}, a_n, \cdots, a_1) = 0$

定義 1.6 (コホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 関手). c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, コホモロジー圏上の関手 $H(\mathcal{F}) : H(\mathcal{A}) \to H(\mathcal{B})$ が通常の関手であるとき, $\mathcal{F}$ はコホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 関手 (cohomologically unital A_∞-functor) であるという. 以降では, c-unit を保つ A_∞ 関手という.

定義 1.7 (ホモトピー恒等射を保つ A_∞ 関手). [Fuk02] Section 5 を参照.

「恒等射を保つ」A_∞ 恒等関手や「恒等射を保つ」A_∞ 関手の合成がそれぞれに対して定義される.
3 つの「恒等射を持つ」A_∞ 圏の間にはさらに次のような関係がある.

補題 1.8. 任意のホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏は恒等射を持つ A_∞ 圏と A_∞ 擬同型である.

Proof. [Fuk02] を参照. □

次の命題は非常に重要である.

補題 1.9. $\mathcal{A}$ を c-unital な A_∞ 圏とする. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $\hom_{\mathcal{A}}(X, X)$ は 0 か非自明なコホモロジーをもつとする. このとき, $\Phi^1 = \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相 Φ が存在して, $\Phi_* \mathcal{A}$ は恒等射を持つ.

Proof. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $e_X \in \hom^0_{\mathcal{A}}(X, X)$ は $\mu^1_{\mathcal{A}}$ で閉じている $H(\mathcal{A})$ における c-unit とする. (途中) □

注意 1.10 ([Sei]). [SS08] の命題の主張には誤りがある. 元の主張は

- 任意の c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, $\Phi^1 = \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相 Φ が存在して, $\Phi_* \mathcal{A}$ は恒等射を持つ.

であるが, 次のような反例がある. (執筆中)

2 A_∞ 関手圏と A_∞ 合成関手に対する c-unital 性

恒等射を持つ A_∞ 圏に対して成立する命題を c-unital な A_∞ 圏に対して拡張することが本節の目標である.
例えば, 恒等射を持つ A_∞ 圏への A_∞ 関手のなす A_∞ 関手圏は恒等射を持つ.

補題 2.1. $\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏とする. 任意の A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{Q} := nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ は恒等射を持つ.

Proof. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ と $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ に対して, $E_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を次のように定義する.

$(e = 0)$ $E^0_{\mathcal{F}} := e_{\mathcal{F}X} \in \hom^0_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}X)$
$(e \geq 1)$ $E^e_{\mathcal{F}} := 0$

このとき, 任意の $t_1 \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \cdots, t_{e-1} \in \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-2}, \mathcal{F}_{e-1})$ に対して

$(e=1)$ $\mu^1_{\mathcal{Q}}(E_{\mathcal{F}}) = 0$
$(e=2)$ $(-1)^{|t_1|}\mu^2_{\mathcal{Q}}(E_{\mathcal{F}_1}, t_1) = t_1 = \mu^2_{\mathcal{Q}}(t_1, E_{\mathcal{F}_0})$
$(e \geq 3)$ $\mu^e_{\mathcal{Q}}(t_{e-1}, \cdots, t_{n+1}, E_{\mathcal{F}_n}, t_n, \cdots, t_1) = 0$

を示せばよいが, これらは計算すればわかる. □

この命題を c-unital な場合に拡張する. 次の命題はこの拡張において非常に重要である.

補題 2.2. $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を A_∞ 擬同型とする. このとき, $\mathcal{A}$ が c-unital であることと $\mathcal{B}$ が c-unital であることは同値である.

Proof. $d = 2$ における多項等式より

$$\begin{aligned}
&\mu^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1)) \\
&= \mathcal{F}^2(a_2, \mu^1_{\mathcal{A}}(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1}\mathcal{F}^2(\mu^1_{\mathcal{A}}(a_2), a_1) + \mathcal{F}^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1))
\end{aligned}$$

である. a_1, a_2 が $\mu^1_{\mathcal{A}}$ で閉じている射のとき, $H(\mathcal{B})$ において

$$[\mu^2_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))] = [\mathcal{F}^1(\mu^2_{\mathcal{A}}(a_2, a_1))]$$

となる.

($\mathcal{A}$ **が** c-unital) 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, e_X が $H(\mathcal{A})$ における c-unit であるとする. $\mathcal{F}$ は A_∞ 擬同型なので, 任意の $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ に対して, ある $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ が存在して $\mathcal{F}X = Y$ となる. この Y に対して, $e_Y : Y \to Y$ を $e_Y = e_{\mathcal{F}X} := \mathcal{F}^1(e_X)$ と定義する. この e_Y が $H(\mathcal{B})$ における c-unit であることを示す. $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は A_∞ 擬同型なので, $\mu^1_{\mathcal{B}}$ で閉じている任意の射 $\tilde{a_1}, \tilde{a_2}$ に対して, $\mu^1_{\mathcal{A}}$ で閉じているある射 a_1, a_2 が存在して

$$[\mathcal{F}^1(a_1)] = [\tilde{a_1}],\ [\mathcal{F}^1(a_2)] = [\tilde{a_2}]$$

となる. $H(\mathcal{B})$ における多項等式において $a_1 = e_X$ または $a_2 = e_X$ とすると, $\mathcal{B}$ が c-unital であることが分かる.

($\mathcal{B}$ **が** c-unital) 任意の $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}$ に対して, e_Y が $H(\mathcal{B})$ における c-unit であるとする. $\mathcal{F}$ は A_∞ 擬同型なので, $\mathcal{F}X = Y$ となる $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ と $\mu^1_{\mathcal{A}}$ で閉じている射 $e_X : X \to X$ が存在して, $[\mathcal{F}^1(e_X)] = [e_Y]$ となる. この e_X が $H(\mathcal{A})$ における c-unit であることを示す. $H(\mathcal{B})$ における多項等式において $a_1 = e_X$ または $a_2 = e_X$ とすると, $\mathcal{A}$ が c-unital であることが分かる.

□

定理 2.3. 任意の c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, 次の 2 つが成立する.

1. 任意の A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{Q} := nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ は c-unital である.

2. $E_{\mathcal{F}} \in \hom^0_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F},\mathcal{F})$ が $H(\mathcal{Q})$ における c-unit であるとき，任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ に対して，$E^0_{\mathcal{F}} \in \hom^0_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}X,\mathcal{F}X)$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である．

Proof. 補題 1.9 を用いて，$\Phi^1 = \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1)}$ である形式的微分同相を Φ, $\tilde{\mathcal{A}} := \Phi_*\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏とする．それぞれ次のように示すことができる．

1. 補題 2.1 より $\tilde{\mathcal{Q}} := nu\text{-}fun(\mathcal{C},\tilde{\mathcal{A}})$ は恒等射を持つ． $\Phi : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ は A_∞ 擬同型なので，$\mathcal{L}_\Phi : \mathcal{Q} \to \tilde{\mathcal{Q}}$ は A_∞ 擬同型である．補題 2.2 より，$\mathcal{Q}$ は c-unital である．
2. $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\mathcal{Q}$ の Φ による左合成を $\tilde{\mathcal{F}}$ とあらわす．自然変換性より，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\hom_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \arrow[r, "H(\mathcal{L}^1_\Phi)\ \cong"] \arrow[d] & \hom_{H(\tilde{\mathcal{Q}})}(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{F}}) \arrow[d] \\
\hom_{Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\mathcal{A}))}(H(\mathcal{F}),H(\mathcal{F})) \arrow[r, "="'] & \hom_{Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\tilde{\mathcal{A}}))}(H(\tilde{\mathcal{F}}),H(\tilde{\mathcal{F}}))
\end{tikzcd}$$

$\Phi : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ は A_∞(擬) 同型なので，$\mathcal{L}_\Phi : \mathcal{Q} \to \tilde{\mathcal{Q}}$ は A_∞ 擬同型である．よって，$H(\mathcal{L}^1_\Phi)$ はコホモロジー圏における複体の同型射である．また，$\Phi^1 = \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0,X_1)}$ なので $H(\mathcal{A}) = H(\tilde{\mathcal{A}})$ である．よって

$$Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\mathcal{A})) = Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\tilde{\mathcal{A}}))$$

である．$H(\tilde{\mathcal{Q}})$ における c-unit である $\mathcal{Q}$ における射を $E_{\mathcal{F}}$ とあらわす．つまり，$E_{\mathcal{F}}$ は

$$\mathcal{L}^1_\Phi : \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \hom_{\tilde{\mathcal{Q}}}(\mathcal{L}_\Phi\mathcal{F},\mathcal{L}_\Phi\mathcal{F}) : E_{\mathcal{F}} \mapsto E_{\tilde{\mathcal{F}}}$$

によって，$H(\tilde{\mathcal{Q}})$ において

$$[E_{\tilde{\mathcal{F}}}] = H(\mathcal{L}^1_\Phi)([E_{\mathcal{F}}])$$

となる $\mathcal{Q}$ における射である．$H(\mathcal{L}_\Phi)$ は関手なので，$[E_{\mathcal{F}}]$ は $H(\mathcal{Q})$ における恒等射である．上の図式の diagram chasing

$$\begin{tikzcd}
{[E_{\mathcal{F}}]} \arrow[rr, mapsto, "H(\mathcal{L}_\Phi)"] \arrow[dr, mapsto] & & {[E_{\tilde{\mathcal{F}}}]} \arrow[dl, mapsto] \\
& H(E_{\mathcal{F}}) &
\end{tikzcd}$$

より，$H(E_{\mathcal{F}})$ は $Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\mathcal{A}))(= Nu\text{-}fun(H(\mathcal{C}),H(\tilde{\mathcal{A}})))$ における恒等射である．よって，$[E^0_{\mathcal{F}}] : \mathcal{F}X \to \mathcal{F}X$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である．

□

恒等射を保つ A_∞ 関手の A_∞ 合成関手は恒等射を保つ．

補題 2.4. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を恒等射を保つ A_∞ 関手とする．任意の A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して，左合成関手 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A}) \to nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ は恒等射を保つ．

Proof. 補題 2.1 より, $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})$ と $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ は恒等射を持つ. 任意の $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})$ における恒等射を $E_{\mathcal{F}}$ と表すとき, $\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}})$ が $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ における恒等射であることを示せばよい.

□

この命題を c-unital な場合に拡張する. A_∞ 左合成関手と A_∞ 右合成関手でわずかに主張が異なる.

定理 2.5. $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を c-unit を保つ A_∞ 関手とする. 任意の A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, 左合成関手 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}: nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A}) \to nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ は c-unit を保つ.

Proof. 定理 2.3 より $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})$ と $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ は c-unital である. $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{A}$ を c-unit を保つ A_∞ 関手とする. $E_{\mathcal{F}} \in \hom^0_{nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})}(\mathcal{F},\mathcal{F})$ を $H(nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A}))$ における c-unit とする. このとき

$$[\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}})] \in \hom^0_{H(nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B}))}(\mathcal{G}\circ\mathcal{F},\mathcal{G}\circ\mathcal{F})$$

である. 定理 2.3 より, 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ に対して $E^0_{\mathcal{F}} \in \hom^0_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}X,\mathcal{F}X)$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である. よって

$$(\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}}))^0 = \mathcal{G}^1(E^0_{\mathcal{F}}) \in \hom^0_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}(\mathcal{F}X),\mathcal{G}(\mathcal{F}X))$$

は $H(\mathcal{B})$ における c-unit である. フィルトレーションの章の A_∞ 合成関手の性質と $nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B})$ が c-unital であることより, $[\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}})]$ は同型射である. $E_{\mathcal{F}}$ は冪等で $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は関手なので, $[\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}})]$ は冪等である. 冪等な同型射は恒等射なので, $\mathcal{L}^1_{\mathcal{G}}(E_{\mathcal{F}})$ は $H(nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{B}))$ における c-unit である. よって, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は c-unit を保つ. □

定理 2.6. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. 任意の c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して, 右合成関手 $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}: nu\text{-}fun(\mathcal{B},\mathcal{C}) \to nu\text{-}fun(\mathcal{A},\mathcal{C})$ は c-unit を保つ.

Proof. 定理 2.5 と同様. □

定義 2.7 (修正前自然変換). $\mathcal{C}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏, $\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1:\mathcal{C}\to\mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. $T^0=0$ である次数 0 の前自然変換 $T:\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1$ に対して, 前自然変換 $S:\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1$ を次のように定義する.

$(e=0)$ $S^0 := e_{\mathcal{F}_0 X}$
$(e\geq 1)$ $S^e := T^e$

S を修正前自然変換 (modified pre-natural transformation) という.

補題 2.8. 定義 2.7 の記号を用いる. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. T は $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ へのホモトピーである.

2. S は $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ への自然変換である．

恒等射を持つ A_∞ 圏へのホモトピックな A_∞ 関手は A_∞ 関手圏の 0 次コホモロジー圏において同型である．

補題 2.9. $\mathcal{C}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする．$\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ がホモトピックであるとき, $H^0(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ は同型である．

Proof. 補題 2.8 より, 修正前自然変換 S は $\mathcal{F}_0$ から $\mathcal{F}_1$ への自然変換である．$S^0 := e_{\mathcal{F}_0 X}$ よりフィルトレーションの章の A_∞ 合成関手の性質を用いると, $H^0(\mathcal{Q})$ において $[S]$ の右合成は同型

$$\hom_{H^0(\mathcal{Q})}(\mathcal{F}_0, -) \cong \hom_{H^0(\mathcal{Q})}(\mathcal{F}_1, -)$$

を定める．$H^0(\mathcal{Q})$ における Yoneda の補題より, $H^0(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ は同型である． □

この命題を c-unital な場合に拡張する．

定理 2.10. $\mathcal{C}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\mathcal{A}$ を c-unital な A_∞ 圏, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする．$\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ がホモトピックであるとき, $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ は $H^0(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において同型である．

Proof. 定理 2.3 の記号を用いる．**??**より, 左合成関手はホモトピーを保つ．よって, $\tilde{\mathcal{F}}_1 := \Phi \circ \mathcal{F}_1$ と $\tilde{\mathcal{F}}_2 := \Phi \circ \mathcal{F}_2$ は $\tilde{\mathcal{Q}}$ においてホモトピックである．補題 2.9 より, $\tilde{\mathcal{F}}_1$ と $\tilde{\mathcal{F}}_2$ は $H^0(\tilde{\mathcal{Q}})$ において同型である．**??**より $\mathcal{L}_\Phi$ は A_∞ 擬同型なので, $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ は $H^0(\mathcal{Q})$ において同型である． □

3 Morita 不変量

A, B を恒等射を持つ次数付き線形圏, $F_0, F_1 : A \to B$ を恒等射を保つ次数付き線形関手とする．A への包含関手が圏同値であるような A の部分圏を $\tilde{A} \subset A$ と表す．

補題 3.1. F_0, F_1 の $\tilde{A}$ への制限は Hochschild コホモロジー上の同型

$$HH(A, B) \cong HH(\tilde{A}, B)$$

を定める．

4 A_∞ 擬同値

定義 4.1 (c-unit を保つ A_∞ 関手圏). c-unit を保つ A_∞ 関手のなす A_∞ 関手圏を c-unit を保つ A_∞ 関手圏 (c-unital A_∞-functor category) といい, $fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す．

注意 4.2. $fun(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は $nu\text{-}fun(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の充満部分圏である．

定義 4.3 (A_∞ 擬同値). c-unit を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ がコホモロジー圏の圏同値

$$H(\mathcal{A})\simeq H(\mathcal{B})$$

を定めるとき, $\mathcal{F}$ は A_∞ 擬同値 (A_∞-quasi-equivalence) であるという．

例 4.4. A_∞ 擬同型は A_∞ 擬同値である．また, A_∞ 擬同値はコホモロジー圏上で忠実充満である．

c-unit を保つ A_∞ 関手の制限は A_∞ 関手圏の間の A_∞ 擬同値を定める．

補題 4.5. c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ への包含関手が A_∞ 擬同値であるような $\mathcal{A}$ の A_∞ 充満部分圏を $\tilde{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$ と表す．任意の c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{B}$ に対して, c-unit を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ と前自然変換の $\tilde{\mathcal{A}}$ への制限は A_∞ 擬同値

$$H(fun(\mathcal{A},\mathcal{B}))\simeq H(fun(\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{B}))$$

を定める．

Proof. □

注意 4.6. 補題 4.5 の証明より, ある c-unit を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{P}:\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}$ が存在して

$$\mathcal{P}|_{\tilde{\mathcal{A}}}=\mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$$

を満たす．包含関手を $\mathcal{K}:\tilde{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}$ と表すと

$$\mathcal{P}\circ\mathcal{K}=\mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K}\circ\mathcal{P})&=\mathcal{P}\circ\mathcal{K}\circ\mathcal{P}=\mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}\circ\mathcal{P}=\mathcal{P}\\ \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})&=\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}=\mathcal{P}\end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K}\circ\mathcal{P})=\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$$

である．定義より, $\mathcal{K}$ は A_∞ 擬同値なので, $\mathcal{P}$ も A_∞ 擬同値である．特に, $\mathcal{P}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である．A_∞ 左合成関手はコホモロジー圏上で忠実充満なので, $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である．よって, $\mathcal{K}\circ\mathcal{P}$ と $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ は $H^0(fun(\mathcal{A},\mathcal{A}))$ において同型である．

A_∞ 擬同値は 0 次コホモロジー圏においてホモトピー逆関手をもつ．

定理 4.7. A_∞ 擬同値 $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, ある A_∞ 擬同値 $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ が存在して次を満たす．

- $H^0(fun(\mathcal{A},\mathcal{A}))$ において $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}\cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$
- $H^0(fun(\mathcal{B},\mathcal{B}))$ において $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\cong \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$

Proof. 次の条件を満たす A_∞ 充満部分圏 $\tilde{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ がそれぞれ存在する．

- 包含関手 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}:\tilde{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}$ と $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}:\tilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$ は A_∞ 擬同値である．
- $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ のそれぞれへの制限 $\tilde{\mathcal{F}}:\tilde{\mathcal{A}}\to\tilde{\mathcal{B}}$ は A_∞ 擬同型である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\mathcal{F}"] & & \mathcal{B} \\
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[u, hook, "\mathcal{K}_{\mathcal{A}}"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{\mathcal{F}}", "A_\infty\text{-}qis"'] & & \tilde{\mathcal{B}} \arrow[u, hook', "\mathcal{K}_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}$$

この図式において，$\tilde{\mathcal{F}}$ 以外は A_∞ 擬同値である． 注意 4.6 より，A_∞ 擬同値 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}$ と $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}:\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}$ が存在する．**??**より，A_∞ 擬同型 $\tilde{\mathcal{G}}:\tilde{\mathcal{B}}\to\tilde{\mathcal{A}}$ が存在する．ここで

$$\mathcal{G}:=\mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\tilde{\mathcal{G}}\circ\mathcal{P}_{\mathcal{B}}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$$

と定義する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{B} \\
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "\tilde{\mathcal{F}}"'] & \tilde{\mathcal{B}} \arrow[u, "\mathcal{K}_{\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} & \mathcal{B} \arrow[l, "\mathcal{G}"'] \arrow[d, "\mathcal{P}_{\mathcal{B}}"] \\
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathcal{K}_{\mathcal{A}}"] & \tilde{\mathcal{B}} \arrow[l, "\tilde{\mathcal{G}}"]
\end{tikzcd}$$

注意 4.6 より，$H^0(fun(\mathcal{A},\mathcal{A}))$ において

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}\circ\mathcal{F} &\cong (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\tilde{\mathcal{G}}\circ\mathcal{P}_{\mathcal{B}})\circ(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}\circ\tilde{\mathcal{F}}\circ\mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \\
&= \mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\tilde{\mathcal{G}}\circ\mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}}\circ\tilde{\mathcal{F}}\circ\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \\
&\cong \mathcal{K}_{\mathcal{A}}\circ\mathrm{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}\circ\mathcal{P}_{\mathcal{A}} \\
&= \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

$H^0(fun(\mathcal{B},\mathcal{B}))$ において $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\cong\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$ となることも同様に示せる． □

A_∞ 擬同値を合成する A_∞ 合成関手は A_∞ 擬同値である．

補題 4.8. $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を A_∞ 擬同値とする．任意の A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}:fun(\mathcal{B},\mathcal{C})\to fun(\mathcal{A},\mathcal{C})$ は A_∞ 擬同値である．左合成に対しても同様に成立する．

Proof. 定理 2.5 より，$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である．あとはコホモロジー圏上で本質的全射であることを示せばよい．[*2] つまり，任意の $\mathcal{H}\in\mathrm{Ob}fun(\mathcal{A},\mathcal{C})$ に対して，ある $-\in fun(\mathcal{B},\mathcal{C})$

[*2] 例えば，$\mathcal{G}$ が A_∞ 擬同型であるときは**??**より従う．$\mathcal{G}$ が充満部分圏からの包含関手であるときは補題 4.5 より従う．(これは A_∞ 擬同値であることまで言えている.)

が存在して $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(-) \cong \mathcal{H}$ を満たすことを言えばよい．定理 4.7 より，ある $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が存在して，$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ を満たす．よって，$H^0(fun(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$ において

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$$

□

5 恒等射を保つ A_∞ 加群

補題 5.1. c-unital な A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して，$nu\text{-}mod(\mathcal{A})$ は恒等射を持つ．

Proof. $\mathcal{C}h$ は恒等射を持つので，定理 2.3 より $nu\text{-}mod(\mathcal{A}) = nu\text{-}fun(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}h)$ は恒等射を持つ． □

注意 5.2. $nu\text{-}mod(\mathcal{A})$ における恒等射 $e_{\mathcal{M}}$ は次のように表される．任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ と $b \in \mathcal{M}(X)$ に対して

$(e=1)$ $e^1_{\mathcal{M}}(b) = (-1)^{|b|}b$
$(e \geq 2)$ $e^e_{\mathcal{M}} = 0$

定義 5.3 (コホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 加群). A_∞ 加群 $\mathcal{M}$ が A_∞ 関手として c-unit を保つとき，$\mathcal{M}$ はコホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 加群 (cohomologically unital A_∞-module) であるという．以降では，c-unit を保つ A_∞ 加群という．

注意 5.4.

定義 5.5 (c-unit を保つ A_∞ 加群のなす圏). c-unit を保つ A_∞ 加群のなす A_∞ 関手圏を c-unit を保つ A_∞ 加群圏 (category of c-unital A_∞-modules) といい，$mod(\mathcal{A})$ と表す．

6 A_∞ プルバック関手に対する c-unital 性

7 A_∞-Yoneda の補題

補題 7.1. A_∞-Yoneda 埋め込みは c-unit を保つ．

Proof. A_∞-Yoneda 埋め込みの定義より従う． □

補題 7.2 (A_∞-Yoneda の補題). $\mathcal{A}$ を c-unital な A_∞ 圏とする．任意の $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ と c-unit を保つ A_∞ 加群 $\mathcal{M}$ に対して，「恒等射を持たない A_∞ 圏」で定義された

$$\lambda_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(Y) \to \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}, \mathcal{M})$$
$$(\lambda_{\mathcal{M}}(c))^d(b, a_{d-1}, \cdots, a_1) := \mu^{d+1}_{\mathcal{M}}(c, b, a_{d-1}, \cdots, a_1)$$

は擬同型である．

Proof. $\lambda_{\mathcal{M}}$ の写像錐を -1 だけシフトした複体を考える．

$$\left(\mathcal{M}(Y) \oplus \hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}, \mathcal{M})[-1], \begin{pmatrix} \mu^1_{\mathcal{M}} & \lambda_{\mathcal{M}} \\ 0 & -\mu^1_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}\right)$$

□

補題 7.2 において c-unit を保つ A_∞ 加群として Yoneda 埋め込み $\mathcal{Y}$ をとると，$\lambda_{\mathcal{M}}$ は $l_{\mathcal{A}}$ に一致して次の系が得られる．

系 7.3. $\mathcal{A}$ を c-unital な A_∞ 圏とする．$l_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to mod(\mathcal{A})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である．

$l_{\mathcal{A}}$ の像を考えると次の命題が従う．

系 7.4. 任意の c-unital な A_∞ 圏は恒等射を持つ dg 圏と A_∞ 擬同型である．

Proof. $mod(\mathcal{A})$ が恒等射を持つ dg 圏であることより従う． □

参考文献

[Fuk02] Kenji Fukaya. Floer homology and mirror symmetry ii. preprint, 2002.

[Sei] Paul Seidel. Fukaya categories and picard-lefschetz theory errata. https://math.mit.edu/~seidel/errata/.

[SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. https://books.google.co.jp/books?id=NOQxS9Tp5OUC.