

恒等射を持たない A_∞ 圏

よの

2024 年 2 月 28 日

概要

A_∞ 圏は Fukaya [Fuk93][Fuk96] により Lagrangian 部分多様体のなす Fukaya 圏の構造を調べるために導入された. A_∞ 圏は A_∞ 代数の多対象版であり, 射の高次の結合まで考える dg 圏の一般化である.

本稿では, まず恒等射を持たない A_∞ 圏と, その間の恒等射を考えない A_∞ 関手を定義する. ホモロジー的摂動論によって, A_∞ 圏から新たな A_∞ 圏を構成することができる. これにより, 任意の A_∞ 圏がある極小 A_∞ 圏と A_∞ 擬同型であることが分かる.

目次

1	恒等射を持たない A_∞ 圏	2
2	恒等射を考えない A_∞ 関手	6
3	形式的微分同相	9
4	(前) 自然変換と恒等射を考えない A_∞ 関手圏	10
5	恒等射を考えない A_∞ 合成関手	14
6	フィルトレーション	16
7	恒等射を考えない A_∞ 関手圏におけるホモトピー	17
8	ホモロジー的摂動論と極小模型	19
9	恒等射を考えない A_∞ 加群	22
10	A_∞ -Yoneda 埋め込み	26

1 恒等射を持たない A_∞ 圏

係数体 \mathbb{K} を 1 つ固定する. 本稿で登場する圏は全て \mathbb{K} 線形かつ small であるとする.

定義 1.1 (恒等射を持たない A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 (non-unital A_∞ -category) $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ とは, 次のデータ

- 対象の集まり $\text{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 次数付きベクトル空間 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu_{\mathcal{A}}^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_d)[2-d]$$

*1 が定まっていて, 次の A_∞ 結合式 (A_∞ -associativity equation) を満たすものをいう.

$$\sum_{m,n} (-1)^{\boxtimes n} \mu_{\mathcal{A}}^{d-m+1}(a_d, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) = 0$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} &:= \sum_{0 \leq n \leq d-m} \sum_{1 \leq m \leq d} = \sum_{m+n \leq d} \\ \boxtimes n &:= |a_1| + \dots + |a_n| - n \end{aligned}$$

である.

$\mu_{\mathcal{A}}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏の A_∞ 構造 (A_∞ -structure of non-unital A_∞ -category) という.

注意 1.2. A_∞ 結合式の低次の場合をみる.

($d = 1$) $\mu_{\mathcal{A}}^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1]$

$(m, n) = (1, 0)$ を考えると, $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は

$$\mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) = 0$$

を満たす. つまり, $(\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{A}}^1)$ は複体の構造を持ち, $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は微分とみなせる.

($d = 2$) $\mu_{\mathcal{A}}^2 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2)$

$(m, n) = (1, 0), (1, 1), (2, 0)$ を考えると, $\mu_{\mathcal{A}}^2$ は

$$\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) = 0$$

*1 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して, $[i]$ はベクトル空間のシフトを表している.

を満たす. よって, $\mu_{\mathcal{A}}^2$ は射の合成とみなせて, 微分 $\mu_{\mathcal{A}}^1$ は射の合成 $\mu_{\mathcal{A}}^2$ と整合的である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu_{\mathcal{A}}^1} & \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1] \\ \mu_{\mathcal{A}}^1 \otimes \mathrm{id} \downarrow & \searrow \mu_{\mathcal{A}}^1 \circ \mu_{\mathcal{A}}^2 & \downarrow \mu_{\mathcal{A}}^2 \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2)[1] \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}^2} & \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2)[1] \end{array}$$

($d = 3$) $\mu_{\mathcal{A}}^3 : \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_2, X_3) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_3)[-1]$

(m, n) = (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0) を考えると, $\mu_{\mathcal{A}}^3$ は

$$\begin{aligned} & \mu_{\mathcal{A}}^3(a_3, a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^3(a_3, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + (-1)^{|a_1|+|a_2|-2} \mu_{\mathcal{A}}^3(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_3), a_2, a_1) \\ & + \mu_{\mathcal{A}}^2(a_3, \mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_3, a_2), a_1) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^3(a_3, a_2, a_1)) \\ & = 0 \end{aligned}$$

を満たす. $\mu_{\mathcal{A}}^2(a_3, \mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_3, a_2), a_1)$ は射の合成 $\mu_{\mathcal{A}}^2$ の結合性の差を表している. よって, $\mu_{\mathcal{A}}^3$ は射の結合性のホモトピーとみなせて, 射の合成 $\mu_{\mathcal{A}}^2$ はホモトピー $\mu_{\mathcal{A}}^3$ を除いて結合的である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_2, X_3) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}^2 \otimes \mathrm{id}} & \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_3) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \\ \mathrm{id} \otimes \mu_{\mathcal{A}}^2 \downarrow & \searrow \mu_{\mathcal{A}}^1 \circ \mu_{\mathcal{A}}^3 & \downarrow \mu_{\mathcal{A}}^2 \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_2, X_3) \otimes \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}^2} & \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_3) \end{array}$$

*2

($d \geq 4$) $d = 3$ の時と同様に, 合成 $\mu_{\mathcal{A}}^d$ はより高次のホモトピー $\mu_{\mathcal{A}}^{d+1}, \mu_{\mathcal{A}}^{d+2}, \dots$ を除いて結合的である.

注意 1.3. 恒等射を持たない A_{∞} 圏 \mathcal{A} は任意の $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$ に対して, 恒等射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$ にあたる射が存在するとは限らない. 注意 1.2 にあるように, 射の合成はホモトピーを除いて結合的であるので, 射の結合律は成立しない. よって, 恒等射を持たない A_{∞} 圏は通常の圏の公理を満たさない.

注意 1.4. 恒等射を持たない A_{∞} 圏には恒等射にあたる射が存在しないので, 対象の同型と圏同値*3 は定義することができない. 一方, 充満性や忠実性, 圏同型は定義することができる.

恒等射を持たない A_{∞} 圏の定義は自己双対的である.

定義 1.5 (双対 A_{∞} 圏). 恒等射を持たない A_{∞} 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない A_{∞} 圏 $(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mu_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}})$ を次のように定義し, 双対 A_{∞} 圏 (opposite A_{∞} -category) という.

*2 この図式は $\mu_{\mathcal{A}}^3$ が射の結合性のホモトピーとみなせるという「イメージ」であることに注意. $\mu_{\mathcal{A}}^3(a_3, a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^3(a_3, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + (-1)^{|a_1|+|a_2|-2} \mu_{\mathcal{A}}^3(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_3), a_2, a_1)$ に関する部分は描いていないので, 図式は不完全である.

*3 対象の同型を定義できないので, 本質的全射を定義することができない.

- 対象の集まり $\text{Ob}\mathcal{A}^{\text{op}} := \text{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob}\mathcal{A}^{\text{op}}$ に対して

$$\text{hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(X_0, X_1) := \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_0)$$

- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu_{\mathcal{A}^{\text{op}}}^d(a_d, \dots, a_1) := (-1)^{\mathfrak{A}^d} \mu_{\mathcal{A}}^d(a_1, \dots, a_d)$$

$(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mu_{\mathcal{A}^{\text{op}}})$ が恒等射を持たない A_{∞} 圏の構造を持つことを示す.

Proof. $\mu_{\mathcal{A}^{\text{op}}}$ が A_{∞} 結合式を満たすことを示す.

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} (-1)^{\mathfrak{A}^n} \mu_{\mathcal{A}^{\text{op}}}^{d-m+1}(a_d, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}^{\text{op}}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \\ &= \sum_{m,n} (-1)^{\mathfrak{A}^n} (-1)^{\mathfrak{A}^{d-m+1}} (-1)^{\mathfrak{A}^m} \mu_{\mathcal{A}}^{d-m+1}(a_1, \dots, a_n, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}), a_{n+m+1}, \dots, a_d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

例 1.6. $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ を恒等射を持たない A_{∞} 圏とする. $d \geq 3$ において $\mu_{\mathcal{A}}^d = 0$ のとき, $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}}^1, \mu_{\mathcal{A}}^2)$ は恒等射を持たない dg 圏とみなせる. 逆に, 恒等射を持たない dg 圏は $d \geq 3$ で $\mu_{\mathcal{A}}^d = 0$ であるような恒等射を持たない A_{∞} 圏とみなせる.

例 1.7. 単位元のない A_{∞} 代数は恒等射を持たない 1 点 A_{∞} 圏とみなせる.

微分が自明であるような恒等射を持たない A_{∞} 圏は極小と呼ばれる.

定義 1.8 (恒等射を持たない極小 A_{∞} 圏). 恒等射を持たない A_{∞} 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ が $\mu_{\mathcal{A}}^1 = 0$ を満たすとき, \mathcal{A} は極小 (minimal) であるという.

例 1.9. 次の恒等射を持たない A_{∞} 圏 \mathcal{A} を考える.

$$X_0 \xrightarrow{\alpha_{0,1}} X_1 \xrightarrow{\alpha_{1,2}} X_2 \xrightarrow{\alpha_{2,3}} X_3$$

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, X_i) = \mathbb{K} \cdot \text{id}_{X_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{K} \cdot \alpha_{i,i+1} \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_i, X_{i+2}) = 0 \quad (i = 0, 1)$$

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_3) = \mathbb{K} \cdot \beta_{0,3}$$

$$\mu_{\mathcal{A}}^3(\alpha_{0,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}) = \beta_{0,3}$$

恒等射を含まない $\mu_{\mathcal{A}}^2$ や上の $\mu_{\mathcal{A}}^3$ 以外, それ以上の A_{∞} 構造は消えているとする. ここで $\alpha_{i,i+1}$ は次数 1 の基底, $\beta_{0,3}$ は次数 2 の基底である. このとき, \mathcal{A} は極小である.

恒等射を持たない A_∞ 圏の部分圏を考えることができる.

定義 1.10 (A_∞ 部分圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して, 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\tilde{\mathcal{A}}, \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})$ を次のように定義し, \mathcal{A} の A_∞ 部分圏 (A_∞ -subcategory) という. .

- 対象の集まり $\text{Ob}\tilde{\mathcal{A}}$ は $\text{Ob}\mathcal{A}$ の部分集合
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob}\tilde{\mathcal{A}}$ に対して, $\text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)$ は $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ の次数付き部分ベクトル空間
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^d : \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_d)[2-d]$$

が与えられていて, A_∞ 結合式を満たす.

恒等射を持たない A_∞ 圏からコホモロジー圏を考えることができる.

定義 1.11 (コホモロジー圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない次数つき線形圏 $H(\mathcal{A})$ を次のように定義し, \mathcal{A} のコホモロジー圏 (cohomological category) という.

- 対象の集まり $\text{Ob}H(\mathcal{A}) := \text{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob}H(\mathcal{A})$ に対して, $\text{hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ はコホモロジー群

$$\text{hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1) := H^\bullet(\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{A}}^1)$$

- 任意の $[a_1] \in \text{hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1), [a_2] \in \text{hom}_{H(\mathcal{A})}(X_1, X_2)$ に対して, 合成 \cdot は

$$[a_2] \cdot [a_1] := (-1)^{|a_1|} [\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)]$$

恒等射を持たない A_∞ 圏から 0 次コホモロジーをとる圏も定義される.

定義 1.12 (0 次コホモロジー圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ に対して, 恒等射を持たない線形圏 $H^0(\mathcal{A})$ を次のように定義し, \mathcal{A} の 0 次コホモロジー圏 (0-th cohomological category) という.

- 対象の集まり $\text{Ob}H^0(\mathcal{A}) := \text{Ob}\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob}H^0(\mathcal{A})$ に対して, $\text{hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ は 0 次コホモロジー群

$$\text{hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X_0, X_1) := H^0(\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{A}}^1)$$

- 任意の $[a_1] \in \text{hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X_0, X_1), [a_2] \in \text{hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X_1, X_2)$ に対して, 合成 \cdot は

$$[a_2] \cdot [a_1] := (-1)^{|a_1|} [\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)]$$

コホモロジー圏と 0 次コホモロジー圏には次のような関係がある.

注意 1.13. \mathcal{A} を恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} とする. hom 空間の定義から, $H^0(\mathcal{A})$ は $H(\mathcal{A})$ の部分圏である.

補題 1.14. 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して, Koszul 符号を除いて次の圏同型が成立する.

$$H(\mathcal{A})^{\text{op}} = H(\mathcal{A}^{\text{op}})$$

2 恒等射を考えない A_∞ 関手

恒等射を持たない A_∞ 圏の間の関手を定義する.

定義 2.1 (恒等射を考えない A_∞ 関手). 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 (non-unital A_∞ -functor) $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ とは, 次のデータ

- 対象の対応 $\mathcal{F}^0 : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$ ^{*4}
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{F}^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_d)[1-d]$$

が定まっていて, 多項等式 (polynomial equation)

$$\begin{aligned} & \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} \mu_{\mathcal{B}}^d(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) \\ &= \sum_{m, n} (-1)^{\mathfrak{A}n} \mathcal{F}^{d-m+1}(a_d, \dots, a_{m+n+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

を満たす. ここで

$$\sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} := \sum_{r \geq 1} \sum_{d=s_1+\dots+s_r}$$

である.

注意 2.2. 多項等式の低次の場合を見る.

($d=1$) $\mathcal{F}^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1)$

$r=1$ ($s_1=1$) / (m, n) = (0, 1) を考えると, \mathcal{F}^1 は

$$\mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^1(a_1)) = \mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1))$$

を満たす. よって, \mathcal{F}^1 は複体の写像とみなせる.

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}^1} & \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)[1] \\ \mathcal{F}^1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}^1 \\ \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{B}}^1} & \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1)[1] \end{array}$$

^{*4} $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1, \dots)$ であるが, [SS08] の記法に従い以降では \mathcal{F}^0 も \mathcal{F} と表す.

($d = 2$) $\mathcal{F}^2 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_2)[-1]$
 $r = 1$ ($s_1 = 2$), $r = 2$ ($s_1 = 1, s_2 = 1$) / (m, n) = $(1, 0), (1, 1), (2, 0)$ を考えると, \mathcal{F}^2 は

$$\begin{aligned} & \mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1)) \\ &= \mathcal{F}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mathcal{F}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) \end{aligned}$$

を満たす. $\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$ と $\mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1))$ が表れていることから, \mathcal{F}^2 はこの間のホモトピーとみなせて, 複体の写像 \mathcal{F}^1 と射の合成 μ^2 はホモトピー \mathcal{F}^2 を除いて可換である. ^{*5}

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{A}}^2} & \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2) \\ \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^1 \downarrow & \searrow \mu_{\mathcal{B}}^1 \circ \mathcal{F}^2 & \downarrow \mathcal{F}^1 \\ \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_1, \mathcal{F}X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_1) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{B}}^2} & \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}X_0, \mathcal{F}X_2) \end{array}$$

恒等射を持たない A_{∞} 圏上の恒等関手を定義する.

定義 2.3 (A_{∞} 恒等関手). 恒等射を持たない A_{∞} 圏 \mathcal{A} に対して, 恒等射を考えない A_{∞} 関手 $\text{Id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ を次のように定義し, \mathcal{A} 上の A_{∞} 恒等関手 (non-unital A_{∞} -identity functor on \mathcal{A}) という.

($d = 0$) 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{A}$ に対して, $\text{Id}_{\mathcal{A}}(X) := X$

($d = 1$) 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob} \mathcal{A}$ に対して, $\text{Id}_{\mathcal{A}}^1$ は複体の恒等写像 $\text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$

($d \geq 2$) $\text{Id}_{\mathcal{A}}^d := 0$

$\text{Id}_{\mathcal{A}}$ が恒等射を考えない A_{∞} 関手であることを示す.

Proof. $\text{Id}_{\mathcal{A}}$ が多項等式

$$\begin{aligned} & \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} \mu_{\mathcal{A}}^d(\text{Id}_{\mathcal{A}}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \text{Id}_{\mathcal{A}}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) \\ &= \sum_{m, n} (-1)^{\mathfrak{A}n} \text{Id}_{\mathcal{A}}^{d-m+1}(a_d, \dots, a_{m+n+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

を満たすことをみる. 左辺は $d = s_1 + \dots + s_d = 1 + \dots + 1$, 右辺は $(m, n) = (d, 0)$ のみを考えればよい. よって, 左辺と右辺はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} (L.H.S) &= \mu_{\mathcal{A}}^d(\text{Id}_{\mathcal{A}}^1(a_d), \dots, \text{Id}_{\mathcal{A}}^1(a_1)) = \mu_{\mathcal{A}}^d(a_d, \dots, a_1) \\ (R.H.S) &= \text{Id}_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^d(a_d, \dots, a_1)) = \mu_{\mathcal{A}}^d(a_d, \dots, a_1) \end{aligned}$$

□

恒等射を考えない A_{∞} 関手の合成は恒等射を考えない A_{∞} 関手となる.

^{*5} 射の合成 μ^2 を分かりやすく \circ と表すと, $\mathcal{F}^1(a_2 \circ_{\mathcal{A}} a_1) = \mathcal{F}^1(a_2) \circ_{\mathcal{B}} \mathcal{F}^1(a_1)$ がホモトピー \mathcal{F}^2 を除いて成立するということである.

定義 2.4. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ を次のように定義する.

($d = 0$) 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{A}$ に対して, $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(X))$

($d \geq 1$) 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して,

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^d(a_d, \dots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} \mathcal{G}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

注意 2.5. 恒等射を考えない A_∞ 関手の合成の低次の場合を見る.

($d = 1$) $r = 1$ ($s_1 = 1$) を考えると

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^1(a_1) = \mathcal{G}^1(\mathcal{F}^1(a_1))$$

つまり, 通常の関手における射の合成の定義と同じである.

($d = 2$) $r = 1$ ($s_1 = 1$), $r = 2$ ($s_1 = 1, s_2 = 1$) を考えると

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^2(a_2, a_1) = \mathcal{G}^1(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mathcal{G}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$$

つまり, \mathcal{C} におけるホモトピー $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})^2(a_2, a_1)$ は \mathcal{B} におけるホモトピー $\mathcal{F}^2(a_2, a_1)$ を \mathcal{G}^1 で送ったものと, ホモトピー $\mathcal{G}^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))$ の和である.

恒等射を考えない A_∞ 関手の合成は強結合的である.

補題 2.6. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{H} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 次が成立する.

$$(\mathcal{H} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{F} = \mathcal{H} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})$$

恒等射を考えない A_∞ 関手はコホモロジー圏の間の関手を定める.

定義 2.7 (恒等射を考えないコホモロジー圏上の関手). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない次数付き線形関手 $H(\mathcal{F}) : H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B})$ を次のように定義し, 恒等射を考えないコホモロジー圏上の関手 (non-unital functor on cohomological category) という.

- 任意の $X \in \text{Ob} H(\mathcal{A})$ に対して, $H(\mathcal{F})(X) := \mathcal{F}X$
- 任意の $[a] \in \text{hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ に対して, $H(\mathcal{F})([a]) := [\mathcal{F}^1(a)]$

恒等射を考えない A_∞ 関手の同型を定義する.

定義 2.8 (A_∞ 同型). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ において, 複体の写像 \mathcal{F}^1 が同型写像のとき, \mathcal{F} を A_∞ 同型 (A_∞ -isomorphism) という.

コホモロジー圏上の関手が通常の圏同型であるとき, A_∞ 擬同型という.

定義 2.9 (A_∞ 擬同型). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ がコホモロジー圏の圏同型

$$H(\mathcal{A}) \cong H(\mathcal{B})$$

を定めるとき, \mathcal{F} を A_∞ 擬同型 (A_∞ -quasi-isomorphism) という.

定義 2.7 より, A_∞ 擬同型は複体の写像を用いて表すことができる.

補題 2.10. 次の 2 つは同値である.

1. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は A_∞ 擬同型である.
2. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{F}(X) = X$ かつ, 複体の写像 \mathcal{F}^1 は通常の擬同型である.

定義 2.11 (コホモロジー圏上で忠実充満). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ が通常の忠実充満のとき, \mathcal{F} はコホモロジー圏上で忠実充満 (cohomologically fully faithful) であるという.

例 2.12. A_∞ 同型は A_∞ 擬同型かつ, A_∞ 擬同型はコホモロジー圏上で忠実充満である.

3 形式的微分同相

恒等射を持たない A_∞ 圏から, 新しい恒等射を持たない A_∞ 圏を構成することができる.

記法 3.1. 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して, A_∞ 構造を忘れた dg 叢を $\tilde{\mathcal{A}}$ と表す.

定義 3.2 (形式的微分同相). 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} と dg 叢 $\tilde{\mathcal{A}}$ に対して, 形式的微分同相 (formal diffeomorphism) $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ とは, 次のデータ

($d = 0$) 対象の対応 $\Phi : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \tilde{\mathcal{A}}$ は恒等写像

($d \geq 1$) 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\Phi^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_d)[1-d]$$

が定まっていて, $\Phi^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)$ が線形自己同型であるものをいう.

恒等射を持たない A_∞ 圏と形式的微分同相から, dg 叢に A_∞ 構造が定まる.

定理 3.3. 形式的微分同相 $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ に対して, 多項等式を満たすような $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が一意に帰納的に定まる. つまり, $(\tilde{\mathcal{A}}, \mu_{\tilde{\mathcal{A}}})$ は恒等射を持たない A_∞ 圏の構造を持つ.

Proof. $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}$ が帰納的に定まることを示す.

($d = 1$) $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1 : \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1)[1]$ を

$$\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1(\Phi^1(a_1)) := \Phi^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1))$$

と定義すると, $d = 1$ の多項等式を満たす. このとき, $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1$ が A_∞ 結合式を満たすことをみる.

$$\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1(\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1(a_1)) = \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1(\Phi^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1))) = \Phi^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1))) = 0$$

($d = 2$) $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^2 : \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_2)$ を

$$\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^2(\Phi^1(a_2), \Phi^1(a_1)) := \Phi^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \Phi^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \Phi^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1))$$

と定義すると, $d = 2$ の多項等式を満たす. このとき, $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^2$ が A_∞ 結合式を満たすことが分かる.

($d \geq 3$) $\mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^d(\Phi^1(a_d), \dots, \Phi^1(a_1))$ も同様に定義でき, A_∞ 結合式を満たすことが分かる.

□

系 3.4. 形式的微分同相 Φ は A_∞ 同型である.

Proof. まず, Φ が恒等射を考えない A_∞ 関手であることは, 形式的微分同相の定義と定理 3.3 から従う. 次に, Φ が A_∞ 同型であることは, Φ^1 が線形自己同型であることから従う. □

記法 3.5. 定理 3.3 で得られた $\tilde{\mathcal{A}}$ を $\Phi_*\mathcal{A}$ と表す.

恒等射を考えない A_∞ 関手の合成を帰納的に解くことで, 形式的微分同相の逆関手を構成できる.

補題 3.6. 形式的微分同相 $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \Phi_*\mathcal{A}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Phi^{-1} : \Phi_*\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ を次のように定義する.

($d = 0$) 対象の対応 $\Phi^{-1} : \text{Ob}\Phi_*\mathcal{A} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{A}$ は恒等写像

($d \geq 1$) 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\Phi_*\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\Phi_*\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$(\text{Id}_{\mathcal{A}})^d(a_d, \dots, a_1) = \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} (\Phi^{-1})^r(\Phi^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \Phi^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

により帰納的に $(\Phi^{-1})^d$ を定める.

このとき, Φ^{-1} は Φ の逆関手である.

例 3.7. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}}), (\mathcal{B}, \mu_{\mathcal{B}})$ が $\mu_{\mathcal{A}}^1 = \mu_{\mathcal{B}}^1 = 0$ を満たすとする. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が A_∞ 擬同型のとき, Φ は形式的微分同相である.

4 (前) 自然変換と恒等射を考えない A_∞ 関手圏

恒等射を考えない A_∞ 関手の間の前自然変換と, 恒等射を考えない A_∞ 関手のなす圏を定義する.

定義 4.1 (前自然変換). $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 への次数 g の前自然変換 T (pre-natural transformation of degree g from \mathcal{F}_0 to \mathcal{F}_1) を次のように定義する.

- $T = (T^0, T^1, \dots)$ であって, 任意の $d \geq 0$ に対して T^d は次のように表される.

$$T^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_d)[g-d]$$

このとき, \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 への次数 g の前自然変換の集まりを $\text{hom}^g(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ と表す.

注意 4.2. 前自然変換の低次の場合をみる.

($d = 0$) $T^0 : \mathbb{K} \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X \rightarrow \mathcal{F}_1 X)[k]$ は $\text{hom}_{\mathcal{B}}^k(\mathcal{F}_0 X \rightarrow \mathcal{F}_1 X)$ の元とみなせる.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_0 & \\ & \curvearrowright & \\ X & & \mathcal{F}_0 X \\ & \curvearrowleft & \\ & \mathcal{F}_1 & \\ & \curvearrowright & \\ & & \mathcal{F}_1 X \end{array}$$

$\downarrow T^0$

($d = 1$) $T^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_1)[g-1]$

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}_0} & \mathcal{F}_0 X_0 \\ a_1 \downarrow & & \downarrow T^1(a_1) \\ X_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & \mathcal{F}_1 X_1 \end{array}$$

($d = 2$) $T^2 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_0 X_0, \mathcal{F}_1 X_2)[g-2]$

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}_0} & \mathcal{F}_0 X_0 \\ a_1 \downarrow & & \downarrow T^2(a_2, a_1) \\ X_1 & & \\ a_2 \downarrow & & \\ X_2 & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & \mathcal{F}_1 X_2 \end{array}$$

恒等射を考えない A_∞ 関手と前自然変換は恒等射を持たない A_∞ 圏をなす.

定義 4.3 (恒等射を考えない A_∞ 関手圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して, 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を次のように定義し, 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 (non-unital A_∞ -functor category) という.

- 対象は \mathcal{A} から \mathcal{B} への恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
- 任意の $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して $\text{hom}_{\mathcal{Q}}^g(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) := \text{hom}^g(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$

- 任意の $e \geq 1$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ と $T_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \dots, T_e \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e)$ に対して, 合成

$$\mu_{\mathcal{Q}}^e : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_e)[2-e]$$

$$(e=1) \mu_{\mathcal{Q}}^1 : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)[1] \text{ は}$$

$$\begin{aligned} & (\mu_{\mathcal{Q}}^1(T_1))^d(a_d, \dots, a_1) \\ := & \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{s_1, \dots, s_r} (-1)^{\dagger} \mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}_1^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\dots+2s_i+1}, \dots, a_{s_1+\dots+s_i+1}), \\ & T_1^{s_i}(a_{s_1+\dots+s_i}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-1}+1}), \\ & \mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\dots+s_{i-1}}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-2}+2}), \dots, \mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) \\ & - \sum_{m,n} (-1)^{\mathfrak{K}n+|T_1|-1} T_1^{d-m+1}(a_d, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

ここで, s_1, \dots, s_r は 0 でもよく

$$\dagger := (|T_1| - 1)(|a_1| + \dots + |a_{s_1+\dots+s_{i-1}}| - s_1 - \dots - s_{i-1})$$

である.

$$(e=2) \mu_{\mathcal{Q}}^2 : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2) \text{ は}$$

$$\begin{aligned} & (\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1))^d(a_d, \dots, a_1) \\ := & \sum_{1 \leq i \leq j \leq r} \sum_{s_1, \dots, s_r} (-1)^{\circ} \mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}_2^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}_1^{s_j+1}(a_{s_1+\dots+2s_j+1}, \dots, a_{s_1+\dots+s_j+1}), \\ & T_2^{s_j}(a_{s_1+\dots+s_j}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{j-1}+1}), \\ & \mathcal{F}_0^{s_j-1}(a_{s_1+\dots+s_{j-1}}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{j-2}+2}), \dots, \mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\dots+2s_i+1}, \dots, a_{s_1+\dots+s_i+1}), \\ & T_1^{s_i}(a_{s_1+\dots+s_i}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-1}+1}), \\ & \mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\dots+s_{i-1}}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-2}+2}), \dots, \mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) \end{aligned}$$

ここで, s_1, \dots, s_r は 0 でもよく

$$\circ := \sum_{1 \leq k \leq s_1+\dots+s_{j-1}} (|T_2| - 1)(|a_k| - 1) + \sum_{1 \leq k \leq s_1+\dots+s_{i-1}} (|T_1| - 1)(|a_k| - 1)$$

である.

$$(e \geq 3) \mu_{\mathcal{Q}}^e \text{ は } \mu_{\mathcal{Q}}^2 \text{ と同じパターン (任意の } e \geq 2 \text{ において, } \mu_{\mathcal{Q}}^e \text{ に } \mu_{\mathcal{A}} \text{ は登場しない.)}$$

注意 4.4. $\mu_{\mathcal{Q}}^1$ の低次の場合をみる.

$$(d=1) \mu_{\mathcal{Q}}^1 : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)[1] \text{ は}$$

$$(\mu_{\mathcal{Q}}^1(T_1))^1(a_1) = (-1)^{(|T_1|-1)|a_1|} \mu_{\mathcal{B}}^1(T_1^1(a_1)) - (-1)^{|T_1|-1} T_1^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1))$$

を満たす.

定義 4.5 (自然変換). 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 \mathcal{Q} において, 次数 g の前自然変換 T が

$$\mu_{\mathcal{Q}}^1(T) = 0$$

を満たすとき, T を次数 g の自然変換 (natural transformation) という.

前自然変換はコホモロジー圏上の関手の間の射を定める.

補題 4.6. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. 前自然変換 $T : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1$ は任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して, $H(\mathcal{B})$ における射 $[T_X^0] \in \text{hom}_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{F}_0 X, \mathcal{F}_1 X)$ を定める.

自然変換はコホモロジー圏上で通常の変換のようにふるまう.

補題 4.7. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手. T を次数 g の自然変換とする. 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ に対して, $H(\mathcal{B})$ において

$$[T_{X_1}^0] \cdot [\mathcal{F}_0^1(a_1)] = (-1)^{|a_1|g} [\mathcal{F}_1^1(a_1)] \cdot [T_{X_0}^0]$$

が成立する. つまり, $H(\mathcal{B})$ において次の図式は符号を除いて可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_0 X_0 & \xrightarrow{[\mathcal{F}_0^1(a_1)]} & \mathcal{F}_0 X_1 \\ [T_{X_0}^0] \downarrow & & \downarrow [T_{X_1}^0] \\ \mathcal{F}_1 X_0 & \xrightarrow{[\mathcal{F}_1^1(a_1)]} & \mathcal{F}_1 X_1 \end{array}$$

特に, $g = 0$ のとき

$$H(T) := \{[T_X^0] \in \text{hom}_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{F}_0 X, \mathcal{F}_1 X)\}_{X \in \text{Ob } \mathcal{A}}$$

は $H(\mathcal{F}_0)$ から $H(\mathcal{F}_1)$ への通常の変換である.

定義 4.8 (恒等射を考えない次数付き線形関手圏). 恒等射を持たない次数付き線形圏 $Nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を次のように定義する.

- 対象は恒等射を考えない次数付き線形関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
- 任意の $F_0, F_1 \in \text{Ob } Nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対して, 射は恒等射を考えない次数付き線形関手の自然変換

$Nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を恒等射を考えない次数付き線形関手圏 (non-unital graded linear functor category) という.

系 4.9. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1$ を次数 g の前自然変換とする. 対応 $\mathcal{F}_0 \mapsto H(\mathcal{F}_0), [T] \mapsto H(T)$ は恒等射を考えない関手

$$H(\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \rightarrow Nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

を定める.

5 恒等射を考えない A_∞ 合成関手

恒等射を考えない A_∞ 関手を合成する操作は、恒等射を考えない A_∞ 関手を定める。

定義 5.1 (恒等射を考えない A_∞ 右合成関手). 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{C} と恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して、恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

を次のように定義する. $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ と表す.

($e = 0$) 任意の $\mathcal{F} \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) := \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$.

($e \geq 1$) 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ と $T_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \dots, T_e \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^e : \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \\ \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_e)[1 - e] \end{aligned}$$

($e = 1$) $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1 : \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_1)$ は

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(T_1))^d(a_d, \dots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} T_1^r(\mathcal{G}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

($e \geq 2$) $(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^e(T_e, \dots, T_1))^d(a_d, \dots, a_1) := 0$

$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ を恒等射を考えない A_∞ 右合成関手 (non-unital A_∞ -right composition functor) という.

Proof. $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ が恒等射を考えない A_∞ 関手であることをみる. つまり, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ が多項等式

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_{e=s_1+\dots+s_r} \mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}^e(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{s_r}(T_e, \dots, T_{e-s_r+1}), \dots, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{s_1}(T_{s_1}, \dots, T_1)) \\ = \sum_{m, n} (-1)^{\mathfrak{K}n} \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^{e-m+1}(T_e, \dots, T_{m+n+1}, \mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}^m(T_{n+m}, \dots, T_{n+1}), T_n, \dots, T_1) \end{aligned}$$

を満たすことをみる. 左辺は $e = s_1 + \dots + s_e = 1 + \dots + 1$, 右辺は $(m, n) = (e, 0)$ のみを考えればよい. よって, 左辺と右辺はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} (L.H.S) &= \mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}^e(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(T_e), \dots, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(T_1)) \\ (R.H.S) &= \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(\mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}^e(T_e, \dots, T_1)) \end{aligned}$$

あとはそれぞれ計算すればよい. □

同様に, 左合成も恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 5.2 (恒等射を考えない A_∞ 左合成関手). 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{C} と恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

を次のように定義する. $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ と表す.

($e = 0$) 任意の $\mathcal{F} \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}) := \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

($e \geq 1$) 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ と $T_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \dots, T_e \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^e : \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}_{e-1}, \mathcal{F}_e) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \\ \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_e)[1 - e] \end{aligned}$$

($e = 1$) $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1 : \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_1)$ は

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(T_1))^d(a_d, \dots, a_1) \\ &:= \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{s_1, \dots, s_r} (-1)^{\dagger} \mathcal{G}^r(\mathcal{F}_1^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}_1^{s_i+1}(a_{s_1+\dots+2s_i+1}, \dots, a_{s_1+\dots+s_i+1}), \\ & \quad T^{s_i}(a_{s_1+\dots+s_i}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-1}+1}), \\ & \quad \mathcal{F}_0^{s_i-1}(a_{s_1+\dots+s_{i-1}}, \dots, a_{s_1+\dots+s_{i-2}+2}), \dots, \mathcal{F}_0^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) \end{aligned}$$

($e \geq 2$) [Fuk02] を参照

$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ を恒等射を考えない A_∞ 左合成関手 (non-unital A_∞ -left composition functor) という.

注意 5.3. 任意の $e \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^e$ と $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^e$ に $\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{B}}, \mu_{\mathcal{C}}$ のいずれも登場していない.

恒等射を考えない A_∞ 合成関手は合成可能である.

補題 5.4. 適当な恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2} &= \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_2} &= \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_2} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2} &= \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1} \end{aligned}$$

が成立する.

補題 5.5. 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ と表す. $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_1, \text{Id}_{\mathcal{A}}), T_2 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_2, \text{Id}_{\mathcal{A}})$ を前自然変換とする. このとき, $H(\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_2, \text{Id}_{\mathcal{A}}))$ において

$$[\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_1, \mathcal{L}_{\mathcal{G}_1}^1(T_2))] = (-1)^{\$} [\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}^1(T_1))]$$

が成立する. ここで

$$\$:= (|T_1| - 1)(|T_2| - 1) + 1$$

である.

Proof. $U \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^{|T_1|+|T_2|-1}(\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_2, \text{Id}_{\mathcal{A}})$ を次のように定義する.

$$U^d(a_d, \dots, a_1) := \sum_{m,n,r} \sum_{s_1, \dots, s_r} (-1)^{(|T_2|-1)\sum n} T_1^{r+d-n-m+1}(a_d, \dots, a_{n+m+1}, \\ T_2^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), \\ \mathcal{G}_2^{s_r}(a_n, \dots, a_{n-s_r+1}) \cdots, \mathcal{G}_2^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

□

6 フィルトレーション

恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す.

定義 6.1 (フィルトレーション). $\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ の部分複体 F^\bullet が次の条件を満たすとき, F^\bullet はフィルトレーション (length filtration) であるという.

- $F^\bullet = (T^1, \dots, T^r, \dots)$ であり, それぞれの前自然変換 T^r は

$$(T^r)^0 = \dots = (T^r)^{r-1} = 0$$

を満たす.

補題 6.2. $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手, $T \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ を前自然変換とする. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して, $[T_X^0] \in \text{hom}_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_0 X, \mathcal{G}_1 X)$ の右合成が同型

$$- \circ [T_X^0] : \text{hom}_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_1 X, \mathcal{G}_2 X) \rightarrow \text{hom}_{H(\mathcal{B})}(\mathcal{G}_0 X, \mathcal{G}_2 X)$$

を定めるとする. このとき, $H(\mathcal{Q})$ において $[T] : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ の右合成は同型

$$- \circ [T] : \text{hom}_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \rightarrow \text{hom}_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_2)$$

を定める. 左合成に対しても同様に成立する.

恒等射を考えない A_∞ 左合成関手はコホモロジー圏上の忠実充満性を保つ.

補題 6.3. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ をコホモロジー圏上で忠実充満な恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である.

注意 6.4. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ をコホモロジー圏上で忠実充満な恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は一般にはコホモロジー圏上で忠実充満でない.

恒等射を考えない A_∞ 右合成関手に関しては、強く A_∞ 擬同型を課す必要がある。

補題 6.5. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を A_∞ 擬同型とする。このとき、任意の恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して、 $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である。

7 恒等射を考えない A_∞ 関手圏におけるホモトピー

恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す。

定義 7.1 (ホモトピー). 任意の $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して、前自然変換

$$D := \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^1(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$$

を次のように定義する。

$$(d = 0) \ D^0 := 0.$$

$$(d \geq 1) \ D^d := \mathcal{F}_0^d - \mathcal{F}_1^d.$$

$T^0 = 0$ である $T \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ が存在して

$$D = \mu_{\mathcal{Q}}^1(T)$$

を満たすとき、 T を \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 へのホモトピー (homotopy) という。このとき、 \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 はホモトピック (homotopic) であるといい、 $\mathcal{F}_0 \sim \mathcal{F}_1$ と表す。

ホモトピックな恒等射を考えない A_∞ 関手はコホモロジーをとると等しい。

補題 7.2. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする。 $\mathcal{F}_0 \sim \mathcal{F}_1$ のとき、 $H(\mathcal{F}_0) = H(\mathcal{F}_1)$ である。

恒等射を考えない A_∞ 合成関手はホモトピーを保つ。

補題 7.3. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする。 T が \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 へのホモトピーであるとき、 $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(T)$ は $\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}$ から $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}$ へのホモトピーである。左合成についても同様に成立する。

Proof. 右合成についてのみ考える。

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_0)^d - (\mathcal{R}_{\mathcal{G}}\mathcal{F}_1)^d = \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(\mathcal{F}_0^d - \mathcal{F}_1^d) = \mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(\mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})}^1(T)) = \mu_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})}^1(\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1(T))$$

最後に $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ が単位元のない A_∞ 関手である (特に、 $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}^1$ が複体の写像である) ことを用いた。 □

次の命題は定理 7.5 において有用である。

補題 7.4. $\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ の元である前自然変換を $T_{[jk]}$ と表す。 恒等射を考えない A_∞ 関手

$\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_l : A \rightarrow B$ に対して, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}^1(T_{[jl]}) &= \mu_{\mathcal{Q}}^1(T_{[jk]}) - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_l, T_{[jk]}) \\ &= \mu_{\mathcal{Q}}^1(T_{[kl]}) + \mu_{\mathcal{Q}}^2(T_{[kl]}, \mathcal{F}_j - \mathcal{F}_k)\end{aligned}$$

定理 7.5. ホモトピーは \mathcal{Q} における同値関係である.

Proof. ホモトピーが反射律, 推移律, 対称律をそれぞれ満たすことをみる. $\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ の元である前自然変換を $T_{[jk]}$ と表す. 任意の j, k に対して, 次数付きベクトル空間 $\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k)$ は等しいことに注意.

(反射律) $T \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ を任意の d において $T^d := 0$ とすればよい.

(推移律) \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 へのホモトピーを T_1 , \mathcal{F}_1 から \mathcal{F}_2 へのホモトピーを T_2 とする.

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[01]}) &= \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 \\ \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_2)_{[12]}) &= \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2\end{aligned}$$

このとき, \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_2 への射 T を次のように定義する.

$$T := (T_1)_{[02]} + (T_2)_{[02]} + \mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1)$$

補題 7.4 より

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[02]}) &= \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[01]}) - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) \\ &= \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) \\ \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_2)_{[02]}) &= \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[12]}) + \mu_{\mathcal{Q}}^2((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) \\ &= \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + \mu_{\mathcal{Q}}^2((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{Q}}^1(T) &= \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[02]} + (T_2)_{[02]} + \mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1)) \\ &= (\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2, (T_1)_{[01]}) + (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) + \mu_{\mathcal{Q}}^2((T_1)_{[12]}, \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1) + \mu_{\mathcal{Q}}^1(\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1)) \\ &= \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_2 + \mu_{\mathcal{Q}}^2((T_1)_{[12]}, \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[01]})) - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mu_{\mathcal{Q}}^1((T_2)_{[12]}), (T_1)_{[01]}) + \mu_{\mathcal{Q}}^1(\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1))\end{aligned}$$

注意 1.2 より*6

$$\mu_{\mathcal{Q}}^2((T_1)_{[12]}, \mu_{\mathcal{Q}}^1((T_1)_{[01]})) - \mu_{\mathcal{Q}}^2(\mu_{\mathcal{Q}}^1((T_2)_{[12]}), (T_1)_{[01]}) + \mu_{\mathcal{Q}}^1(\mu_{\mathcal{Q}}^2(T_2, T_1)) = 0$$

なので

$$\mu_{\mathcal{Q}}^1(T) = \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_2$$

つまり, T は \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_2 へのホモトピーである.

*6 \mathcal{Q} における $d = 2$ の A_{∞} 結合式である.

(対称律) \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 へのホモトピーを T_1 とする. 次の 2 つの写像を考える.

$$\begin{aligned}\phi : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0) &\rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) : T \mapsto (-1)^{|T|} \mu_{\mathcal{Q}}^2(T_1, T) + T_{[11]} \\ \psi : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) &\rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) : T \mapsto \mu_{\mathcal{Q}}^2(T, T_1) + T_{[01]}\end{aligned}$$

ϕ と ψ が同型射であることを示す. (途中)

□

定義 7.6 (A_{∞} ホモトピー同値関手).

ホモトピーは有理ホモトピー論の視点から次のように考えることができる. [[SS08] remark 1.11]

8 ホモロジー的摂動論と極小模型

恒等射を持たない A_{∞} 圏と複体などから新しい恒等射を持たない A_{∞} 圏を構成することができる.

定理 8.1 (ホモロジー的摂動論). 次の 4 つが与えられているとする.

- 恒等射を持たない A_{∞} 圏 $(\mathcal{B}, \mu_{\mathcal{B}})$
- ベクトル空間の複体 $(\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), d_{\mathcal{A}})$
- 複体の写像 $\mathcal{F}^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$ と $\mathcal{G}^1 : \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- $\mu_{\mathcal{B}}^1 T^1 + T^1 \mu_{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{F}^1 \circ \mathcal{G}^1 - \text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)}$ を満たす次数 -1 の複体の写像 $T^1 : \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$

このとき, 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

1. 恒等射を持たない A_{∞} 圏 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}})$ は

- 対象の集まり $\text{Ob } \mathcal{A} := \text{Ob } \mathcal{B}$
- 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{A}}^1 &:= d_{\mathcal{A}} \\ \mu_{\mathcal{A}}^d(a_d, \dots, a_1) &:= \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \dots, s_r} \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}^{s_1}(a_s, \dots, a_1)))\end{aligned}$$

2. 恒等射を考えない A_{∞} 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は

- $(d = 0)$ 対象の対応は恒等写像 $\mathcal{F} := \text{id} : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$
- $(d = 1)$ \mathcal{F}^1 は複体の写像 $\mathcal{F}^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$
- $(d \geq 2)$ 任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{F}^d(a_d, \dots, a_1) := \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \dots, s_r} T^1(\mu_{\mathcal{B}}^r(\mathcal{F}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{F}^{s_1}(a_s, \dots, a_1)))$$

3. 恒等射を考えない A_{∞} 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ は (おそらく)

($d = 0$) 対象の対応は恒等写像 $\mathcal{G} := \text{id} : \text{Ob}\mathcal{B} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{A}$

($d = 1$) \mathcal{G}^1 は複体の写像 $\mathcal{G}^1 : \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$

($d \geq 2$) 任意の $b_1 \in \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1), \dots, b_d \in \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$\mathcal{G}^d(b_d, \dots, b_1) := \sum_{r \geq 2} \sum_{s_1, \dots, s_r} \mu_{\mathcal{A}}^r(\mathcal{G}^{s_r}(T^1 b_d, \dots, T^1 b_{d-s_r+1}), \dots, \mathcal{G}^{s_1}(T^1 b_s, \dots, T^1 b_1))$$

4. $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ と $\text{Id}_{\mathcal{B}}$ のホモトピー T は

によって帰納的にそれぞれ定まる.

Proof. $d = 2$ のときをみる.

1. $\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1) := \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)) : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_2)$ が

$$\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) = 0$$

を満たすことをみる.

(*L.H.S*)

$$\begin{aligned} &= \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)))) + (-1)^{|a_1|-1} \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2))), \mathcal{F}^1 a_1)) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1))) \\ &= \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^1 a_1))) + (-1)^{|a_1|-1} \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^1 a_2), \mathcal{F}^1 a_1)) + \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1))) \\ &= \mathcal{G}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^1 a_1))) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{B}}^2(\mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^1 a_2), \mathcal{F}^1 a_1) + \mu_{\mathcal{B}}^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで, \mathcal{B} における $d = 2$ の A_{∞} 結合式を用いた.

2. $\mathcal{F}^2 : T^1(\mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1)) : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F} X_0, \mathcal{F} X_2)[1]$ が

$$\begin{aligned} &\mu_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mu_{\mathcal{B}}^2(\mathcal{F}^1 a_2, \mathcal{F}^1 a_1) \\ &= \mathcal{F}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mathcal{F}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mathcal{F}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) \end{aligned}$$

を満たすことをみる. これは \mathcal{B} における $d = 2$ の A_{∞} 結合式を用いればよい.

3. 2 と同様.

4.

□

ホモロジー的摂動論から A_{∞} 圏における極小模型定理を示すことができる.

定理 8.2 (極小模型定理). 任意の恒等射を持たない A_{∞} 圏は恒等射を持たない極小 A_{∞} 圏と A_{∞} 擬同型である.

Proof. X_0, X_1 を恒等射を持たない A_{∞} 圏 \mathcal{B} の任意の対象とする. 複体 $(\text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{B}}^1)$ を $\mu_{\mathcal{A}}^1 = 0$ である複体と acyclic complement に直和分解する. $\mu_{\mathcal{A}}^1 = 0$ である複体を $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ として, $\mathcal{F}^1 : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1)$ を入射, $\mathcal{G}^1 : \text{hom}_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ を射

影とする. acyclic complement の contracting homotopy は T^1 を定める. 定理 8.1 より, $\mu_{\mathcal{A}}^1 = 0$ である恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} を構成できる. このとき, \mathcal{A} と \mathcal{B} は A_∞ 擬同型である. \square

注意 8.3. 極小模型定理において, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \sim \text{Id}_B$ と $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \sim \text{Id}_A$ が成立する. 前者は定理 8.1 より従う. \mathcal{G} は A_∞ 擬同型なので補題 7.3 より, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \sim \mathcal{G}$ である. 補題 6.5 より, $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ がコホモロジー圏上で忠実充満なので

$$\mathcal{R}_\mathcal{G}^1 : \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A})}(\text{Id}_\mathcal{A}, \mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-fun}(\mathcal{B}, \mathcal{A})}(\mathcal{G}, \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G})$$

は複体の擬同型を定める. 0 次で消えているような前自然変換のなす部分複体を考えると, $\mathcal{R}_\mathcal{G}^1$ は $\text{Id}_\mathcal{A} - \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ を $\mathcal{G} - \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ に写す. よって, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ と $\text{Id}_\mathcal{A}$ のホモトピーが得られる.

系 8.4. A_∞ 擬同型はホモトピー逆関手をもつ.

Proof. $\mathcal{K} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ を A_∞ 擬同型とする. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ にそれぞれ定理 8.2 を用いると, 恒等射を持たない A_∞ 圏と A_∞ 擬同型の図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightleftharpoons[\mathcal{G}]{\mathcal{F}} & \mathcal{B} \\ \mathcal{H} \downarrow & & \downarrow \mathcal{K} \\ \tilde{\mathcal{A}} & \xrightleftharpoons[\tilde{\mathcal{G}}]{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{\mathcal{B}} \end{array}$$

が得られる. ここで, $\mu_{\mathcal{A}}^1 = \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^1 = 0$ である. このとき, ある $\mathcal{K}^{-1} : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ が存在して \mathcal{K} のホモトピー逆関手であることを示す.

$$\mathcal{H} := \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$

とする. $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{K}$ は A_∞ 擬同型なので, 定理 7.5 より \mathcal{H} も A_∞ 擬同型である. 例 3.7 より \mathcal{H} は形式的微分同相なので, 逆関手 $\mathcal{H}^{-1} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ をもつ. また

$$\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq \text{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}} \circ \mathcal{K} \circ \text{Id}_\mathcal{B} = \mathcal{K}$$

より, \mathcal{K} と $\tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$ はホモトピックである.

$$\mathcal{K}^{-1} := \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$$

とすると

$$\mathcal{K}^{-1} \circ \mathcal{K} \simeq \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} = \text{Id}_\mathcal{B}$$

$$\mathcal{K} \circ \mathcal{K}^{-1} \simeq \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{G}} = \text{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

よって, \mathcal{K}^{-1} は \mathcal{K} のホモトピー逆関手である. \square

A_∞ ホモトピー同値関手であることと A_∞ 擬同型であることは同値である.

系 8.5. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, 次の 2 つは同値である.

1. \mathcal{F} は A_∞ ホモトピー同値関手である.
2. \mathcal{F} は A_∞ 擬同型関手である.

9 恒等射を考えない A_∞ 加群

恒等射を持たない A_∞ 圏上の恒等射を考えない右 A_∞ 加群を定義する. \mathcal{A} を恒等射を持たない A_∞ 圏とする.

定義 9.1 (複体の圏 Ch). 恒等射を持たない dg 圏^{*7} Ch を次のように定義する.

- 対象はベクトル空間の複体 (C, d)
- 任意の $(C_0, d_0), (C_1, d_1) \in \text{Ob} Ch$ に対して

$$\text{hom}_{Ch}^i((C_0, d_0), (C_1, d_1)) := \bigoplus_k \text{hom}_{\mathbb{K}}(C_0^k, C_1^{k+i})$$

- 任意の $a_1 \in \text{hom}_{Ch}(X_0, X_1), a_2 \in \text{hom}_{Ch}(X_1, X_2)$ に対して

$$\begin{aligned} \mu_{Ch}^1(a_1) &:= d \circ a_1 + (-1)^{|a_1|+1} a_1 \circ d \\ \mu_{Ch}^2(a_2, a_1) &:= (-1)^{|x|(|y|+1)} a_2 \circ a_1 \end{aligned}$$

Ch を恒等射を持たない A_∞ 圏とみなす.

定義 9.2 (恒等射を考えない右 A_∞ 加群). 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow Ch$$

を \mathcal{A} 上の恒等射を考えない右 A_∞ 加群 (non-unital (right) A_∞ -module over \mathcal{A}) という. 以降では, 「 \mathcal{A} 上の」と「右」を省略する.^{*8}

恒等射を考えない A_∞ 加群を具体的に書き下す.

定義 9.3 (A_∞ 加群の A_∞ 構造). 恒等射を考えない A_∞ 加群 \mathcal{M} は恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow Ch$ なので次のようになる.

($d = 0$) 対象の対応 $\mathcal{M} : \text{Ob} \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ob} Ch$

($d = 1$) 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{A}^{\text{op}}$ に対して, $\mathcal{M}(X)$ はベクトル空間の複体である. よって, 微分 $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)[1]$ が存在する. この微分を

$$\mu_{\mathcal{A}}^1 : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)[1]$$

^{*7} Ch は恒等射を持つ (通常の dg 圏) が, 今は単位元の存在を課していない. 恒等射を考える A_∞ 圏以降では, Ch を恒等射を持つ dg 圏としている.

^{*8} 同様に, 恒等射を考えない左 A_∞ 加群も定義することができる. [Fuk02] を参照

と表す.

($d \geq 2$) テンソル-hom 随伴より

$$\mathcal{M}^{d-1} : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{Ch}(\mathcal{M}(X_{d-1}), \mathcal{M}(X_0))[2-d]$$

*9 に対応して

$$\mu_{\mathcal{M}}^d : \mathcal{M}(X_{d-1}) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \mathcal{M}(X_0)[2-d]$$

が得られる.

$\mu_{\mathcal{M}} = (\mu_{\mathcal{M}}^1, \mu_{\mathcal{M}}^2, \dots)$ を恒等射を考えない A_{∞} 加群の A_{∞} 構造 (A_{∞} -structure of non-unital A_{∞} -module) という.

恒等射を考えない A_{∞} 加群 \mathcal{M} に対する多項等式は次のようになる.

補題 9.4. 任意の $b \in \mathcal{M}(X_{d-1})$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して, $\mu_{\mathcal{M}}$ は次の等式をみたす.

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq n < d} (-1)^{\mathfrak{X}n} \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}(\mu_{\mathcal{M}}^{d-n}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \\ & + \sum_{n+m < d} (-1)^{\mathfrak{X}n} \mu_{\mathcal{M}}^{d-m+1}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) = 0 \end{aligned}$$

Proof. 任意の $d \geq 3$ に対して $\mu_{Ch}^d = 0$ であることに注意. □

恒等射を考えない A_{∞} 加群の間の前自然変換を定義する.

定義 9.5 (恒等射を考えない A_{∞} 加群の前準同型). 恒等射を考えない A_{∞} 加群 $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ に対して, 前自然変換 $t : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_1$ を恒等射を考えない A_{∞} 加群の前準同型 (pre-module homomorphism of A_{∞} -modules) という.

恒等射を考えない A_{∞} 加群の前準同型を具体的に書き下す.

注意 9.6. 恒等射を考えない A_{∞} 加群の前準同型は前自然変換なので, 各 g に対して $T = (T^0, T^1, \dots) \in \text{hom}^g(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ は次のようになる.

($d \geq 1$) テンソル-hom 随伴より

$$T^{d-1} : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{Ch}(\mathcal{M}_0(X_{d-1}), \mathcal{M}_1(X_0))[g-d+1]$$

に対応して

$$t^d : \mathcal{M}_0(X_{d-1}) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \mathcal{M}_1(X_0)[|t| - d + 1]$$

が得られる.

*9 恒等射を考えない A_{∞} 加群は反変関手なので, $\text{hom}_{Ch}(\mathcal{M}(X_{d-1}), \mathcal{M}(X_0))$ となっていることに注意.

恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型と前自然変換には次のような関係がある.

補題 9.7. 任意の $b \in \mathcal{M}_0(X_{d-1})$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$t^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) = (-1)^{\S} T^{d-1}(a_1, \dots, a_{d-1})(b)$$

が成立する. ここで

$$\S := (|T| - 1)|b| + |T|(|T| - 1)/2$$

である.

恒等射を考えない A_∞ 加群と恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型は恒等射を持たない A_∞ 圏をなす.

定義 9.8 (恒等射を考えない A_∞ 加群圏). 恒等射を考えない A_∞ 関手圏 $\text{nu-mod}(\mathcal{A}) := \text{nu-fun}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathcal{C}h)$ を次のように定義する. $\mathcal{Q} := \text{nu-mod}(\mathcal{A})$ と表す.

- 対象は \mathcal{A} 上の恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}h$
- 任意の $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して, 次数 g の各 hom 空間 $\text{hom}^g(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ は次数 g の恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_1$ の集まり
- 任意の $t_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1), \dots, t_e \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e)$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して
 $(e = 1) \text{ hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)[1]$ は

$$\begin{aligned} & (\mu_{\mathcal{Q}}^1(t_1))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) \\ &:= \sum_n (-1)^{\ddagger} \mu_{\mathcal{M}_1}^{n+1}(t_1^{d-n}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \\ &+ \sum_n (-1)^{\ddagger} t_1^{n+1}(\mu_{\mathcal{M}_0}^{d-n}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \\ &+ \sum_{m,n} (-1)^{\ddagger} t_1^{d-m+1}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^n(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

$(e = 2) \text{ hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \otimes \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_2)$ は

$$\begin{aligned} & (\mu_{\mathcal{Q}}^2(t_2, t_1))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) \\ &:= \sum_n (-1)^{\ddagger} t_2^{n+1}(t_1^{d-n}(b, a_{d-1}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

$(e \geq 3) (\mu_{\mathcal{Q}}^e(t_e, \dots, t_1))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := 0$

ここで

$$\ddagger := |a_{n+1}| + \dots + |a_{d-1}| + |b| - d + n + 1$$

である.

$\text{nu-mod}(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} 上の恒等射を考えない A_∞ 加群圏 (non-unital A_∞ -category of non-unital A_∞ -modules over \mathcal{A}) という.

恒等射を持たない A_∞ 圏上の恒等射を考えない A_∞ 加群はコホモロジー圏上の加群を定める.

注意 9.9. 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} 上の恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Ch}$ は恒等射を考えない関手 (単位元を持たない通常の加群)

$$H(\mathcal{M}) : H(\mathcal{A})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Grmod}$$

を定める. ここで, \mathcal{Grmod} は次数付きベクトル空間のなす圏である.

注意 9.10. $H(\mathcal{M})$ は任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{A}$ における $\mathcal{M}(X)$ のコホモロジー群 $H(\mathcal{M}(X))$ から構成される. 任意の $b \in \mathcal{M}(X_1)$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ に対して

- 微分 d は $d(b) := (-1)^{|b|} \mu_{\mathcal{M}}^1(b)$
- 作用 \cdot は $b \cdot a_1 := (-1)^{|a_1|} \mu_{\mathcal{M}}^2(b, a_1)$

である.

注意 9.11. 恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_1$ は任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対して, 単位元のない加群の準同型

$$H(t) : H(\mathcal{M}_0(X)) \rightarrow H(\mathcal{M}_1(X)) : [b] \mapsto [(-1)^{|b|} t^1(b)]$$

を定める.

次の命題は補題 6.2 の特別な場合である.

系 9.12. 恒等射を考えない A_∞ 加群の前準同型 $t : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_1$ が任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $H(t) : H(\mathcal{M}_0(X)) \rightarrow H(\mathcal{M}_1(X))$ が同型を定めるとする. このとき, 任意の恒等射を考えない A_∞ 加群 \mathcal{N} に対して, t の右合成と左合成

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t &: \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}) \\ \mathcal{L}_t &: \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M}_1) \end{aligned}$$

は A_∞ 擬同型を定める.

注意 9.13. \mathcal{A} を恒等射を持たない A_∞ 圏とする. 単位元のない A_∞ 加群 \mathcal{M} が任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対して, $H(\mathcal{M}(X), \mu_{\mathcal{M}}^1) = 0$ を満たすとする. 系 9.12 において $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$ とすると, 恒等射を考えない A_∞ 加群 \mathcal{N} に対して

$$H(\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = H(\text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})) = 0$$

となる. このとき, \mathcal{M} は K-projective かつ K-injective であるという.

恒等射を考えない A_∞ 関手は恒等射を考えない A_∞ 加群圏の間の恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 9.14 (恒等射を考えない A_∞ プルバック関手). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathcal{G}^* := \mathcal{R}_{\mathcal{G}^{\text{op}}} : \text{nu-mod}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{nu-mod}(\mathcal{A})$$

を次のように定義する.

($e = 0$) 任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{G}^*(\mathcal{M})(X) := \mathcal{M}(\mathcal{G}(X))$

(\mathcal{A} 上の A_∞ 加群の A_∞ 構造) 任意の $b \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y)$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_{d-1} \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1})$ に対して

$$\mu_{\mathcal{G}^*\mathcal{M}}^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} \mu_{\mathcal{M}}^r(b, \mathcal{G}^{s_r}(a_{d-1}, \dots, a_{d-s_r}), \dots, \mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

($e \geq 1$) 任意の $t_1 \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1), \dots, t_e \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e)$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}^*)^e : \text{hom}_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_{e-1}, \mathcal{M}_e) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \\ \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-mod}(\mathcal{A})}(\mathcal{G}^*\mathcal{M}_0, \mathcal{G}^*\mathcal{M}_e)[1-e] \end{aligned}$$

($e = 1$) $(\mathcal{G}^*)^1 : \text{hom}_{\text{nu-mod}(\mathcal{B})}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) \rightarrow \text{hom}_{\text{nu-mod}(\mathcal{A})}(\mathcal{R}^*\mathcal{M}_0, \mathcal{R}^*\mathcal{M}_1)$ は

$$((\mathcal{G}^*)^1(t_1))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} t_1^r(b, \mathcal{G}^{s_r}(a_d, \dots, a_{d-s_r}), \dots, \mathcal{G}^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1))$$

($e \geq 2$) $((\mathcal{G}^*)^e(t_e, \dots, t_1))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := 0$

\mathcal{G}^* を恒等射を考えない A_∞ プルバック関手 (non-unital A_∞ -pullback functor) という.

10 A_∞ -Yoneda 埋め込み

恒等射を考えない A_∞ 加群として A_∞ -Yoneda 埋め込みを定義する. \mathcal{A} を恒等射を持たない A_∞ 圏として, $\mathcal{Q} := \text{mod}(\mathcal{A})$ と表す.

定義 10.1 (A_∞ -Yoneda 埋め込み). $Y \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対する恒等射を考えない A_∞ 加群 $\mathcal{Y}_Y : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Ch}$ を次のように定義する.

($d = 0$) 任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{Y}_Y(X) := \text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ ^{*10}

($d \geq 1$) A_∞ 加群の A_∞ 構造は

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{Y}}^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) &\rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, Y)[2-d] \\ \mu_{\mathcal{Y}}^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) &:= \mu_{\mathcal{A}}^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) \end{aligned}$$

^{*10} \mathcal{A} は恒等射を持たない A_∞ 圏であるので, $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ は次数付きベクトル空間 ($\mu_{\mathcal{A}}^1$ により複体の構造を持つ), つまり $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \in \text{Ob}\mathcal{Ch}$ である.

\mathcal{Y}_Y を A_∞ -Yoneda 埋め込み (A_∞ -Yoneda embedding) ^{*11} という.

$Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ を動かすと, A_∞ -Yoneda 埋め込みは恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 10.2. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $l_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$ を次のように定義する.

($d = 0$) 任意の $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して $l_{\mathcal{A}}(Y) := \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$

($d = 1$) 任意の $c_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して

$$l_{\mathcal{A}}^1(c_1) := c_1 \circ - : \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, Y_0) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, Y_1)$$

($d \geq 2$) 任意の $c_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1), \dots, c_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(Y_{d-1}, Y_d)$ に対して

$$l_{\mathcal{A}}^d(c_{d-1}, \dots, c_1) := 0$$

A_∞ -Yoneda 埋め込みの前準同型を次のように定義する. $\mathcal{Y}_0(-) := \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, Y_0), \mathcal{Y}_1(-) := \text{hom}_{\mathcal{A}}(-, Y_1)$ と表す.

定義 10.3 (A_∞ -Yoneda 埋め込みの前準同型). 次数 g の A_∞ -Yoneda 埋め込みの前準同型 $l = (l^0, l^1, \dots) \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^g(\mathcal{Y}_0, \mathcal{Y}_1)$ を次のように定義する.

$$l^d : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y_0) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \dots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, Y_1)[g - d + 1]$$

$$l^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \mu_{\mathcal{A}}^{d+1}(c_1, b, a_{d-1}, \dots, a_1)$$

定義 10.4. \mathcal{M} を恒等射を考えない A_∞ 加群, \mathcal{Y}_Y を A_∞ -Yoneda 埋め込みとする. 複体の写像

$$\lambda_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Y, \mathcal{M})$$

を次のように定義する.

- 任意の $c \in \mathcal{M}(Y)$ と $b \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, Y)$ と $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して

$$(\lambda_{\mathcal{M}}(c))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \mu_{\mathcal{M}}^{d+1}(c, b, a_{d-1}, \dots, a_1)$$

コホモロジー圏において, $\lambda_{\mathcal{M}}$ と $\mu_{\mathcal{Q}}$ には次のような関係がある.

補題 10.5. $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ を恒等射を考えない A_∞ 加群とする. このとき, 次の 2 つが成立する.

1. 任意の $c \in \mathcal{M}(Y_1)$ と $b \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して, $\text{hom}_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{Y}_0, \mathcal{M})$ において

$$[\lambda_{\mathcal{M}}(\mu_{\mathcal{M}}^2(c, b))] = [\mu_{\mathcal{Q}}^2(\lambda_{\mathcal{M}}(c), l_{\mathcal{A}}^1(b))]$$

2. 任意の $t \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1)$ と $c \in \mathcal{M}_0(Y)$ に対して, $\text{hom}_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{Y}, \mathcal{M}_1)$ において

$$[\mu_{\mathcal{Q}}^2(t, \lambda_{\mathcal{M}_0}(c))] = [\lambda_{\mathcal{M}_1}(t^1(c))]$$

^{*11} 「恒等射を考えない」 A_∞ -Yoneda 埋め込みとすべきであるが, 省略することが一般的なようである.

A_∞ -Yoneda 埋め込みは恒等射を考えない A_∞ プルバック関手と可換である.

補題 10.6. $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. このとき, 前自然変換

$$T : l_A \rightarrow \mathcal{F}^* \circ l_B \circ \mathcal{F}$$

が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{l_A} & \text{nu-mod}(\mathcal{A}) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}^* \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{l_B} & \text{nu-mod}(\mathcal{B}) \end{array}$$

参考文献

- [Fuk93] Kenji. Fukaya. Morse homotopy, A_∞ -category and floer homologies. Proceeding of Garc Workshop on Geometry and Topology, 1993. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1572824499601341056>.
- [Fuk96] Kenji Fukaya. Morse homotopy and its quantization. Geometric topology (Athens, GA, 1993), Vol. 2, pp. 409–440, 1996.
- [Fuk02] Kenji Fukaya. Floer homology and mirror symmetry ii. preprint, 2002.
- [SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. <https://books.google.co.jp/books?id=NOQxS9Tp50UC>.