完備 Segal 空間

よの

2023 年 11 月 6 日

概要

新しい無限圏のモデルとして, [Rez00] で完備 Segal 空間が定義された．本稿は [Rez00] の lecture note である [Ras18] をまとめたものである．

目次

1 単体的空間

単体的集合には, 通常の圏の脈体 (nerve) と位相空間の特異単体 (singular functor) という 2 つの特別なクラスがある．高次圏論では, この圏論とホモトピー論を同時に一般化した枠組みで考える必要がある．この章では, 2 つの単体的集合のクラスを 1 つにまとめる方法として, 単体的空間を考える．

定義 1.1 (単体的集合). 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) といい, 単体的集合の圏 $\mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ を $\mathbf{sSet}$ と表す．

定義 1.2 (単体的空間). 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{sSet}$ を単体的空間 (simplicial space) といい, 単体的空間の圏 $\mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{sSet})$ を $\mathbf{sSpace}$ と表す．

注意 1.3. 積-Hom 随伴より, 次の同型が存在する.

$$\mathbf{sSpace} \cong \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{sSet}) \cong \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})) \cong \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$$

よって, 単体的空間は両単体的集合 (bisimplicial set) とも呼ばれる.

注意 1.4. 注意 1.3 より, 単体的空間は次のように表せる. ここで, $X_{i,j}$ は集合であり, $X_{i,-}$ や $X_{-,j}$ は単体的集合である.

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_{0,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{1,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{2,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & X_{-,0} \\
\Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\uparrow & & & & \Updownarrow\uparrow \\
X_{0,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{1,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{2,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & X_{-,1} \\
\Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & & & \Updownarrow\Updownarrow\uparrow \\
X_{0,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{1,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{2,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & X_{-,2} \\
\Updownarrow\Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & \Updownarrow\Updownarrow\Updownarrow\uparrow & & & & \Updownarrow\Updownarrow\Updownarrow\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & = & \vdots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
X_{0,-} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{1,-} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & X_{2,-} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & &
\end{array}$$

単体的集合を単体的空間に 2 種類の方法で埋め込むことができる.

注意 1.5. 次の 2 つの埋め込み関手 $\mathbf{sSet} \to \mathbf{sSpace}$ が存在する.

1. 関手

$$i_F : \Delta \times \Delta \to \Delta : ([n], [m]) \mapsto [n]$$

は関手

$$i_F^* : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSpace} : i_F^*(X)_{k,l} \mapsto X_k$$

を定める. この埋め込み i_F^* を垂直埋め込み (vertical embedding) という.

2. 関手

$$i_\Delta : \Delta \times \Delta \to \Delta : ([n], [m]) \mapsto [m]$$

は関手

$$i_\Delta^* : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSpace} : i_F^*(X)_{k,l} \mapsto X_l$$

を定める. この埋め込み $\imath_\Delta^*$ を水平埋め込み (horizontal embedding) という.

埋め込みを用いて, いくつかの代表的な単体的空間を定義する.

定義 1.6 (空間関手と標準的単体). 単体的空間 $F(n)$ を次のように定義し, n 次空間関手 (n-th space functor) という.

$$(F(n))_{k,l} := i_F^*(\Delta^n) = \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$$

単体的空間 Δ^n を次のように定義し, 標準的 n 単体 (standard n-simplex) という.

$$(\Delta^n)_{k,l} := i_\Delta^*(\Delta^n) = \mathrm{Hom}_\Delta([l],[n])$$

定義 1.7 (空間関手の境界). 単体的空間 $\partial F(n)$ を次のように定義し, n 次空間関手の境界 (boundary of the n-th space functor) という.

$$\partial F(n) := i_F^*(\partial\Delta^n)$$

記法 1.8. 単体的集合 $X_{n,-}$ を単に X_n と表す.

注意 1.9. Yoneda の補題より, 次の同型が存在する.

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n),X) \cong X_n$$

特に, 次の 2 つの同型が存在する.

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(0),X)_l \cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\Delta^l,X) \cong X_{0,l}$$
$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(0),X) \cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\emptyset,X) \cong \Delta^0 \cong \{*\}$$

2 Reedy ファイブラント

単体的空間の定義の動機づけにあるように, 無限圏のモデルには空間 (特異単体) の性質を持つ必要がある. 単体的空間に空間の性質を特徴づけるものが Reedy ファイブラント条件である. 実際, Reedy ファイブラント単体的空間 X に対して, X_n は Kan ファイブラント (つまり, 空間) となる. (補題 2.7)

定義 2.1 (Reedy ファイブレーション). $X \to Y$ を単体的空間の射とする. 任意の $n,l \geq 0$ と $0 \leq i \leq n$ に対して, 次の図式がリフトを持つとき, f を Reedy ファイブレーション (Reedy fibration) という.

$$\begin{tikzcd} \partial F(n)\times\Delta^l \coprod_{\partial F(n)\times\Lambda^l_i} F(n)\times\Lambda^l_i \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ F(n)\times\Delta^l \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

定義 2.2 (Reedy ファイブラント). X を単体的空間とする. 単体的空間の射 $X \to \Delta^0$ が Reedy ファイブレーションのとき, X を Reedy ファイブラント (Reedy fibrant) という.

Reedy ファイブラントは Kan ファイブレーションを用いて定義することができる.

定義 2.3 (Reedy ファイブラント). X を単体的空間とする．任意の $n, l \geq 0$ と $0 \leq i \leq n$ に対して, 次の単体的空間の射

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(n), X)$$

が Kan ファイブレーションのとき, X を Reedy ファイブラントという.

定理 2.4. 任意の $n \geq 0$ に対して, $F(n)$ は Reedy ファイブラントである.

Proof. 次の図式のリフト $\alpha : F(k) \times \Delta^l \to F(n)$ が存在することを言えばよい.

$$\begin{tikzcd}
\partial F(k) \times \Delta^l \coprod_{\partial F(k) \times \Lambda^l_i} F(k) \times \Lambda^l_i \arrow[r] \arrow[d] & F(n) \\
F(k) \times \Delta^l \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Yoneda の補題より,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(k) \times \Delta^l, F(n)) &\cong \mathrm{Hom}_{\Delta \times \Delta}(k \times [l], [n] \times [0]) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\Delta \times \Delta}([k], [l]) \\
&\cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(k), F(n))
\end{aligned}$$

次の図式において, θ と θ' は一致するので, $\alpha := \theta \circ p_1$ とすればよい.

$$\begin{tikzcd}
F(k) \times \Lambda^l_i \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\theta'"] & \partial F(k) \times \Delta^l \coprod_{\partial F(k) \times \Lambda^l_i} F(k) \times \Lambda^l_i \arrow[r] \arrow[d] & F(n) \\
& F(k) \times \Delta^l \arrow[r, "p_1"'] \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] & F(k) \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

□

注意 2.5. 任意の $0 \leq i \leq n$ における関手

$$i : [0] \to [n] : 0 \mapsto i$$

は単体的空間 X に対して, 単体的集合の射

$$i^* : X_n \to X_0$$

を定める．また, i は次の単体的集合の射

$$(0^*, \cdots, n^*) : X_n \to X_0 \times \cdots \times X_0 \cong (X_0)^{n+1}$$

を定める.

補題 2.6. X を Reedy ファイブラントとする．任意の $n \geq 0$ に対して, 単体的集合の射 $X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである.

Proof. 次の図式のリフト $\Delta^k \to X_n$ が存在することを言えばよい．

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_n \cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X) \arrow[d] \\
\Delta^k \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (X_0)^{n+1} \cong \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\coprod_{n+1} F(0), X)
\end{tikzcd}$$

これは次の射

$$\begin{gathered}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^k, \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X)) \\
\downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda^k_i, \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X)) \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\Lambda^k_i, \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\coprod_{n+1} F(0), X))} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^k, \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\coprod_{n+1} F(0), X
\end{gathered}$$

が全射であることと同値である．注意 1.3 より，これは次の射

$$\begin{gathered}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(F(n) \times \Delta^k, X) \\
\downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(F(n) \times \Lambda^k_i, X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\coprod_{n+1} F(0) \times \Lambda^k_i, X)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSpace}}(\coprod_{n+1} F(0) \times \Delta^k, X)
\end{gathered}$$

が全射であることと同値である．これは次の図式のリフト $F(n) \times \Delta^k \to X$ が存在することと同値である．

$$\begin{tikzcd}
(F(n) \times \Lambda^k_i) \coprod_{\coprod_{n+1} F(0) \times \Lambda^k_i} \times \Delta^k \arrow[r] \arrow[d] & X \\
F(n) \times \Delta^k \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

(途中) □

補題 2.7. X を Reedy ファイブラントとする．任意の $n \geq 0$ に対して，X_n は Kan ファイブラントである．

Proof. 単体的空間 X は Reedy ファイブラントなので，

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(n), X)$$

は Kan ファイブレーションである．$n = 0$ のとき，注意 1.9 より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(0), X) &\cong X_0 \\
\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(0), X) &\cong \Delta^0
\end{aligned}$$

なので，

$$X_0 \to \Delta^0$$

は Kan ファイブレーションである．よって，X_0 は Kan ファイブラントである．補題 2.6 より，$X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである．Kan ファイブラントは合成で閉じるので，任意の $n \geq 0$ に対して，X_n も Kan ファイブラントである． □

3 Segal 空間

単体的空間の Reedy ファイブラント条件は単体的空間の図式における垂直成分が空間のようにふるまうことを意味している．この章では, 単体的空間の図式における並行成分が圏の性質をもつようにふるまうための条件である Segal 空間を定義する．Segal 空間は **sSet** における Segal 条件の一般化である．

定義 3.1 (Segal 空間). X を Reedy ファイブラントとする．任意の $n \geq 2$ に対して, 単体的集合の射

$$\varphi_n : X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

が自明な Kan ファイブレーションのとき, X を Segal 空間 (Segal space) という．

注意 3.2. Reedy ファイブラント条件より, 単体的集合の射

$$\varphi_n : X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

は自動的に Kan ファイブレーションである．

単体的集合 $X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ は $F(n)$ の単体的部分空間として表すことができる．

定義 3.3 (椎). 単体的空間 $F(n)$ に対して, $F(n)$ の単体的部分空間

$$G(n) := F(1) \coprod_{F(0)} \cdots \coprod_{F(0)} F(1)$$

を $F(n)$ の椎 (spine) という．

注意 3.4. Yoneda の補題より, 次の同型が存在する．

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(G(n), X) \cong X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

Segal 空間 X は単体的空間なので, 空間 $X_0, X_0, X_2, \cdots$ を持つ．Segal 条件により, X_0 を「点の空間」, X_1 を「射の空間」, X_2 を「合成の空間」のように思うことができる．具体的には, 次のように考えることができる．(第 4 章でこの議論を厳密に考える.)

注意 3.5. $n = 2$ の Segal 空間の条件は $\varphi_2 : X_2 \xrightarrow{\simeq} X_1 \times_{X_0} X_1$ である．X_2 は 2 単体の集まりなので, 2 単体 $\sigma \in X_2$ は次のように表せる．

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \\
x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] & & z
\end{tikzcd}$$

同様に, $X_1 \times_{X_0} X_1$ は 2 つの合成可能な射の集まりとみなせて, 次のように表せる.

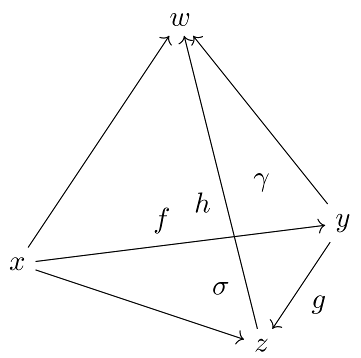
$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] & & z \end{tikzcd}$$

Segal 条件はこのような図式が次の 2 単体に拡張できることを意味している.

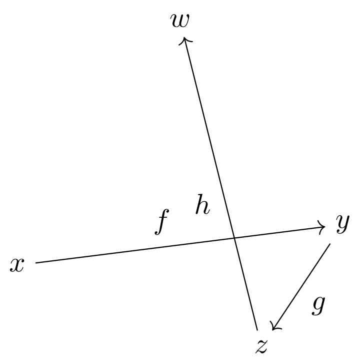
$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & z \end{tikzcd}$$

よって, h を gf と表すことが多いが, h は g と f(と σ) に対して一意に定まらないことに注意. しかし, 定理 5.2 で h はホモトピーの違いを除いて一意であることが分かる.

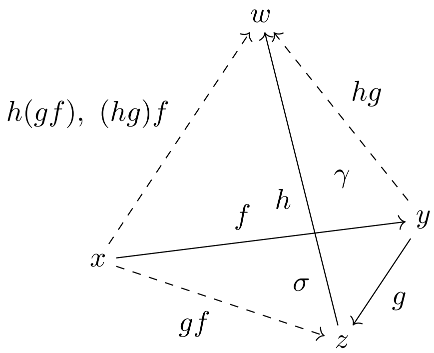
注意 3.6. $n = 3$ の Segal 空間の条件は $\varphi_3 : X_3 \xrightarrow{\simeq} X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1$ である. X_3 は 3 単体の集まりで, 3 単体は次のように表せる.



同様に, $X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1$ は 3 つの合成可能な射の集まりとみなせて, 次のように表せる.



Segal 条件はこのような図式が次の 3 単体に拡張できることを意味している．



よって，この 3 単体は合成可能な射の結合性を表している．2 単体において合成は一意ではなかったが，3 単体において $(hg)f$ と $h(gf)$ は等しいことを意味している．

注意 3.5 と注意 3.6 で見たように，Segal 条件は圏の脈体における状況と非常に似ている．例 3.7 で見るように，圏の脈体は Segal 空間であることが分かる．

例 3.7. 任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して，脈体 $N\mathcal{C}$ は Segal 空間である．

Proof. $N\mathcal{C}$ が単体的集合の Segal 条件を満たすことから従う． □

定理 3.8. X を Reedy ファイブラントとする．X が homotopically constant のとき，X は Segal 空間である．

4　Segal 空間における射の合成

Segal 空間とは Reedy ファイブラント条件と Segal 条件を満たすような単体的空間であった．第 3 章で見たように，Segal 空間における射の合成は一意ではなかった (注意 3.5)．しかし，射の合成に関する結合律は成立していた (注意 3.6)．この理由を考える．X を Segal 空間とする．

定義 4.1 (単体的空間における対象). X を Segal 空間とする．X_0 の点を X の対象 (object) という．X の対象の集まりを $\mathrm{Ob}(X)$ と表すと，$\mathrm{Ob}(X) = T_{0,0}$ である．

定義 4.2 (合成の空間). X の対象 $x_0, \cdots, x_n$ に対して，単体的集合 $\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n)$ を次の pullback で定義し，$\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n)$ を合成の空間 (space of composition) という．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_n \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r, "(x_0, \cdots, x_n)"'] & (X_0)^{n+1} = X_0 \times \cdots \times X_0
\end{tikzcd}$$

注意 4.3. 補題 2.6 より，$X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである．Kan ファイブレーショ

ンは pullback で閉じるので, $\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n)\to\Delta^0$ は Kan ファイブレーションである. つまり, $\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n)$ は Kan ファイブラントである.

定義 4.4 (単体的空間における射). 合成の空間において, $n=1$ のとき, 単体的集合 $\mathrm{map}_X(x_0,x_1)$ を射空間 (mapping space) という. $\mathrm{map}_X(x_0,x_1)$ の点を X の射 (morphism) といい, $f:x_0\to x_1$ と表す.

注意 4.5. X は Segal 空間なので, $X_n\to X_1\times_{X_0}\cdots\times_{X_0}X_1$ は自明な Kan ファイブレーションである. また, 合成の空間の図式は次の図式に拡張できる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_n \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & X_1\times_{X_0}\cdots\times_{X_0}X_1 \arrow[dl] \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(x_0,\cdots,x_n)}"'] & (X_0)^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

補題 4.6. 単体的集合の射

$$\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n)\to\mathrm{map}_X(x_0,x_1)\times\cdots\times\mathrm{map}_X(x_{n-1},x_n)$$

は自明な Kan ファイブレーションである.

Proof. 次の図式において, 下と全体の四角は pullback である.

$$\begin{tikzcd}
\bullet\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n) \arrow[rr] \arrow[d] & & X_n \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{map}_X(x_0,x_1)\times\cdots\times\mathrm{map}_X(x_{n-1},x_n) \arrow[rr] \arrow[d] & & X_1\times_{X_0}\cdots\times_{X_0}X_1 \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[rr] & & (X_0)^{n+1}
\end{tikzcd}$$

よって, 上の四角も pullback である. 自明な Kan ファイブレーションは pullback で閉じるので, 単体的集合の射

$$\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n)\to\mathrm{map}_X(x_0,x_1)\times\cdots\times\mathrm{map}_X(x_{n-1},x_n)$$

は自明な Kan ファイブレーションである. □

注意 4.7. x,y,z を X の任意の対象とする. 合成の空間の定義から, 次の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x,y,z) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{map}_X(x,z) \\
\mathrm{map}_X(x,y)\times\mathrm{map}_X(y,z) &
\end{tikzcd}$$

2 つの射 $f \in \mathrm{map}_X(x,y), g \in \mathrm{map}_X(y,z)$ に対して, $\mathrm{map}_X(x,y,z)$ の単体的部分集合 $\mathrm{Comp}(f,g)$ を次の pullback で定義する.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Comp}(f,g) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{map}_X(x,y,z) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{map}_X(x,z) \\ \Delta^0 \arrow[r] & \mathrm{map}_X(x,y) \times \mathrm{map}_X(y,z) & \end{tikzcd}$$

自明な Kan ファイブレーションは pullback で閉じるので, $\mathrm{Comp}(f,g) \to \Delta^0$ は自明な Kan ファイブレーションである．つまり, $\mathrm{Comp}(f,g)$ は可縮な Kan ファイブラントである．よって, 射の合成は可縮な空間の違いを除いて一意に定めることができる.

例 4.8. X を任意の圏 $\mathcal{C}$ の脈体とする．X の任意の対象 x,y,z と射 $f : x \to y, g : y \to z$ に対して, $\mathrm{Comp}(f,g) \cong \Delta^0$ である.

Proof. 次の図式において, 同型が pullback で閉じることから従う.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Comp}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & N\mathcal{C}_2 \arrow[d, "\cong"] \\ \Delta^0 \arrow[r] & N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0} N\mathcal{C}_1 \end{tikzcd}$$

□

定義 4.9 (単体的空間における恒等射). 任意の X の対象 x に対して, $s_0 : X_0 \to X_1$ の x の像 $s_0(x)$ を x の恒等射 (identity map) といい, id_x と表す.

$$s_0 : X_0 \to X_1 : x \mapsto \mathrm{id}_x$$

5 ホモトピー同値

第 4 章では主に Segal 空間の圏論的な側面を見た．この章では, Segal 空間のもつホモトピー論的な性質に着目する．X を Segal 空間とする.

定義 5.1 (単体的空間におけるホモトピック). x,y を X の対象, $f,g \in \mathrm{map}_X(x,y)$ を X の射とする．単体的集合の射 $f,g : \Delta^0 \to \mathrm{map}_X(x,y)$ が単体的集合の意味でホモトピックであるとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるといい, $f \sim g$ と表す.

射の合成はホモトピーの違いを除いて結合的かつ単位を持つ.

定理 5.2. x,y,z,w を X の対象, $f \in \mathrm{map}_X(x,y), g \in \mathrm{map}_X(y,z), h \in \mathrm{map}_X(z,w)$ を X の射とする．このとき, $h(gf) \sim (hg)f$ かつ $f\mathrm{id}_x \sim \mathrm{id}_y f \sim f$ である.

定理 5.2 より, 単体的空間の対して通常の圏が定まる.

定義 5.3 (単体的空間のホモトピー圏). 単体的空間 X に対して, 通常の圏 $\mathrm{Ho}(X)$ を次のように定義し, X のホモトピー圏 (homotopy category) という.

- $\mathrm{Ho}(X)$ の対象は X の対象と同じ
- 任意の $x, y \in \mathrm{Ho}(X)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(x, y)$ は x から y への射のホモトピー類の空間
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(x, y) := \pi_0(\mathrm{map}_X(x, y))$$
- 任意の $x, y, z \in \mathrm{Ho}(X)$ に対して, 合成
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(x, y) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(y, z) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(x, z)$$
は
$$\mathrm{map}_X(x, y) \times \mathrm{map}_X(y, z) \to \mathrm{map}_X \mathrm{Ho}(X)(x, z)$$
から定まる自然な対応

定理 5.4. 任意の圏 $\mathcal{C}$ は $\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ と圏同型である.

Proof. $\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ の対象は
$$\mathrm{ObHo}(N\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(N\mathcal{C}) = N\mathcal{C}_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$
任意の $x, y \in \mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ に対して,
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})} = \pi_0(\mathrm{Map}_{N\mathcal{C}}(x, y)) = \pi_0(N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0 \times N\mathcal{C}_0} *)$$
$N\mathcal{C}_1$ と $N\mathcal{C}_0 \times N\mathcal{C}_0$ は離散的なので,
$$\pi_0(N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0 \times N\mathcal{C}_0} *) = N\mathcal{C}_1 \times_{N\mathcal{C}_0 \times N\mathcal{C}_0} * = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$$
よって, $\mathcal{C}$ と $\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ は圏同型である. □

定義 5.5 (ホモトピー同値). X の射 $f \in \mathrm{map}_X(x, y)$ に対して, ある射 $g, h \in \mathrm{map}_X(y, x)$ が存在して,
$$gf \sim \mathrm{id}_x,\ fh \sim \mathrm{id}_y$$
を満たすとき, f をホモトピー同値 (homotopy equivalence) という. このとき, g を f の左ホモトピー逆射 (left homotopy inverse), h を f の右ホモトピー逆射 (right homotopy inverse) という.

ホモトピー逆射はホモトピーの違いを除いて一意である.

注意 5.6. g を f の左ホモトピー逆射, h を f の右ホモトピー逆射とする. 定理 5.2 より,
$$g \sim g\mathrm{id}_y \sim gfh \sim \mathrm{id}_x h \sim h$$
なので, ホモトピー逆射はホモトピーの違いを除いて一意である.

例 5.7. X の任意の対象 x に対して, x の恒等射 id_x はホモトピー逆射である.

ホモトピー同値がホモトピーに関して保たれることを見るために, いくつか準備をする.

定義 5.8. $Z(3)$ を次の図式の余極限で定まる $F(3)$ の単体的部分空間とする.

$$\begin{tikzcd} F(1) & & F(1) & & F(1) \\ & F(0) \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "1"'] & & F(0) \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

注意 5.9. 単体的空間 $Z(3)$ に対して, $\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(Z(3), X)$ は次の極限

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(Z(3), X) \cong X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1$$

で表され, 次の図式の極限として表せる.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[dr, "d_1"'] & & X_1 \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dr, "d_0"'] & & X_1 \arrow[dl, "d_0"] \\ & X_0 & & X_0 & \end{tikzcd}$$

補題 5.10. $f, g \in X_1$ を X の射とする. ある $\gamma : \Delta^1 \to X_1$ が存在して, $\gamma(0) = f, \gamma(1) = g$ を満たすとする. g がホモトピー同値のとき, f もホモトピー同値である.

定義 5.11 (ホモトピー同値の空間). X のホモトピー同値で生成される X_1 の単体的部分空間を X_{hoequiv} と表し, X のホモトピー同値の空間 (space of homotopy equivalences) という.

注意 5.12. X_{hoequiv} の点は X の射である. 具体的には, X_{hoequiv} はホモトピー逆射が存在するような X の射のなす X_1 の充満部分空間である.

ホモトピー同値の空間は可縮である. つまり, 射がホモトピー同値となるような逆射の選択はホモトピーの違いを除いて一意である.

補題 5.13. X のホモトピー同値 f, f の左ホモトピー逆射 g, f の右ホモトピー逆射 h の 3 つ組 (f, g, h) で生成される X_3 の単体的部分空間を $X_{\mathrm{hoeqchoice}}$ と表す. $U : X_{\mathrm{hoeqchoice}} \to X_{\mathrm{hoequiv}} : (f, g, h) \mapsto f$ をホモトピー逆射を忘れる射とする. このとき, U は次の図式を可換にする自明な Kan ファイブレーションである.

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[dr, hook] & X_{\mathrm{hoeqchoice}} \arrow[l, "U"'] \arrow[d] \\ & X_1 \end{tikzcd}$$

また, 次の pullback が存在する.

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[dr, hook] & X_{\mathrm{hoeqchoice}} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_3 \arrow[d, "(d_1 d_3, d_0 d_3, d_1 d_0)"] \\ & X_1 \arrow[r, "(s_0 d_0, \mathrm{id}_{x_1}, s_0 d_1)"'] & X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 \end{tikzcd}$$

ホモトピー同値を用いて定義される空間として, 次の 2 つが重要である.

定義 5.14 (Segal 空間亜群). X の任意の射がホモトピー同値のとき, X を Segal 空間亜群 (Segal space groupoid) という.

局所的なホモトピー同値の定義を与える.

定義 5.15 (x と y の間のホモトピー同値の空間). x, y を X の対象とする. 単体的集合 $\mathrm{hoequiv}_X(x,y)$ を次の pullback で定義し, x と y の間のホモトピー同値の空間 (space of homotopy equivalences between two objects x and y) という.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{hoequiv}_X(x,y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[d, "{(d_0,d_1)}"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "{(x,y)}"'] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

例 5.16. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする. 脈体 $N\mathcal{C}$ におけるホモトピー同値は $\mathcal{C}$ における同型射である.

Proof. $N\mathcal{C}$ において射 f がホモトピー同値であることと, $\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ において射 $[f]$ が同型射であることは同値である. 定理 5.4 より, $\mathrm{Ho}(N\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ である. よって, $N\mathcal{C}$ において射 f がホモトピー同値であることと, $\mathcal{C}$ において射 $[f]$ が同型射であることは同値である. □

6 完備 Segal 空間

第 2 章と第 3 章で Segal 空間がホモトピー論と圏論の 2 つの性質を持つことを見た. しかし, Segal 空間のホモトピー論と圏論は次で見るように整合性がない.

定義 6.1. $I(1)$ を 2 つの対象 x, y とその間の可逆な射からなる圏とする. [*1]

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "f"] & y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

注意 6.2. Segal 空間 $i_F^*(NI(1))$ を $E(1)$ と表す. $E(1)$ は離散単体的空間なので, 任意の n に対して,

$$E(1)_n = \{x, y\}^n$$

である. 具体的には, $E(1)_n$ は集合 $\{0, \cdots, n-1\}$ から $\{x, y\}$ への射の集まりである. よって, $E(1)_n$ は 2^{n+1} 個の元を持つ. 例えば, $E(1)_0$ は $\{x, y\}$ である. また, $E(1)_1$ は $\{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, f, f^{-1}\}$ である.

補題 6.3. 圏 $I(1)$ と $\{*\}$ は圏同値である. しかし, $E(1) := i_F^*(NI(1))$ と $F(1) := i_F^*(N\{*\})$ は Segal 空間として圏同値ではない.

[*1] 恒等射はもちろん存在するが, 恒等射は明記しない.

Proof. $E(1)$ は各次元で可縮ではないが, $F(1)$ は各次元で可縮であることから, 明らかに Segal 空間として圏同値でない. □

Segal 空間のホモトピー論と圏論に整合性を持たせる条件が完備性である.

注意 6.4. 単体的空間 X に対して, ホモトピー同値の空間 $X_{\mathrm{hoequiv}} \subset X_1$ が存在する. 恒等射の定義

$$s_0 : X_0 \to X_1 : x \mapsto \mathrm{id}_x$$

において, 例 5.7 より, 恒等射はホモトピー同値である. よって, s_0 は X_{hoequiv} を経由して分解される.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "s_0"] \arrow[dr] & & X_1 \\ & X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

単体的空間の射 $s_0 : X_0 \to X_1$ は単射ではあるが, 全射ではない. (X_1 の任意の同型射が恒等射のみであるとき, s_0 は全射である.) よって, 完備 Segal 空間は次のように定義される.

定義 6.5 (完備 Segal 空間). X を Segal 空間とする. 単体的集合の射

$$s_0 : X_0 \to X_{\mathrm{hoequiv}}$$

が弱同値のとき, X を完備 Segal 空間 (complete Segal space) という.

例 6.6. 単体的空間 $E(1)$ は完備 Segal 空間ではない.

Proof. 注意 6.2 より,

$$\begin{aligned} E(1)_0 &= \{x, y\} \\ E(1)_1 &= \{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, f, f^{-1}\} \\ E(1)_{\mathrm{hoequiv}} &= \{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, f, f^{-1}\} = E(1)_1 \end{aligned}$$

であるが,

$$E(1)_0 \to E(1)_{\mathrm{hoequiv}} = \{x, y\} \to \{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, f, f^{-1}\}$$

は弱同値ではない. よって, $E(1)$ は完備 Segal 空間ではない. □

完備 Segal 空間の定義と同値な条件がある.

定理 6.7. 単体的空間 X に対して, 次は同値である.

1. X は完備 Segal 空間である.
2. 次の図式はホモトピー pullback である.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_3 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 \end{tikzcd}$$

3. 次の単体的空間の射は弱同値である.

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(E(1), X) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(0), X)$$

4. 任意の対象 $x, y \in X$ に対して, x と y の間のホモトピー同値の空間 $\mathrm{hoequiv}_X(x, y)$ は x から y への X_0 における道の空間と弱同値である.

完備 Segal 空間の条件をまとめる.

注意 6.8. 完備 Segal 空間は次の条件を満たす単体的空間である.

(Reedy **ファイブラント条件**) 垂直な軸はホモトピー論の性質をもつ.
(Segal **条件**) 水平な軸は圏論的な性質をもつ.
(**完備性**) ホモトピー論の性質と圏論の性質は整合的である.

Segal 空間亜群の完備性も定義できる.

定義 6.9 (完備 Segal 空間亜群). X を完備 Segal 空間とする. X の任意の射がホモトピー同値のとき, X を完備 Segal 空間亜群 (complete Segal space groupoid) という.

定理 6.10. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする. 脈体 $N\mathcal{C}$ が完備 Segal 空間であることと, $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持たないことは同値である.

Proof. $(\Rightarrow)$: $N\mathcal{C}$ が完備 Segal 空間であるとする. このとき, 単体的空間の射

$$N\mathcal{C}_0 \to N^{\mathcal{C}}_{\mathrm{hoequiv}}$$

は弱同値である. $N\mathcal{C}_0$ と $N\mathcal{C}_{\mathrm{hoequiv}}$ は離散的なので,

$$N\mathcal{C}_0 \to N\mathcal{C}_{\mathrm{hoequiv}}$$

は集合の全単射である. よって, 恒等射以外のホモトピー同値は存在しない. 例 5.16 より, $N\mathcal{C}$ におけるホモトピー同値は $\mathcal{C}$ における同型射である. よって, $\mathcal{C}$ は恒等射以外の同型射を持たない.

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持たないとすると,

$$N\mathcal{C}_0 \to N\mathcal{C}_{\mathrm{hoequiv}} = \mathrm{Iso}\mathcal{C} : x \mapsto \mathrm{id}_x$$

は集合の全単射である. よって, ホモトピー同値である. 従って, 脈体 $N\mathcal{C}$ は完備 Segal 空間である. □

定理 6.10 より, 通常の圏 $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持つとき, 単体的集合の脈体ではうまくいかない. そのため, 圏のホモトピー論を考慮するような脈体として, 圏の分類図式と呼ばれる概念を定義する.

定義 6.11 (分類図式). $\mathcal{C}$ を通常の圏とする．単体的空間 $\mathcal{NC}$ を任意の $n, l \geq 0$ に対して次のように定義し, $\mathcal{C}$ の分類図式 (classifying diagram) という．

$$\mathcal{NC}_{n,l} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n] \times I(l), \mathcal{C})$$
$$\mathcal{NC}_n := N(\mathbf{Fun}([n], \mathcal{C})^{\mathrm{core}})$$

注意 6.12. $\mathcal{C}$ の分類図式において, $n = 0$ のとき,

$$\mathcal{NC}_0 = N(\mathbf{Fun}([0], \mathcal{C})^{\mathrm{core}}) = N(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})$$

注意 6.13. $\mathcal{C}$ の分類図式は次のように表せる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{NC}_{0,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{1,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{2,0} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & \mathcal{NC}_{-,0} \\
\uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow & & & & \uparrow\downarrow\uparrow \\
\mathcal{NC}_{0,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{1,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{2,1} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & \mathcal{NC}_{-,1} \\
\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \\
\mathcal{NC}_{0,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{1,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathcal{NC}_{2,2} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & = & \mathcal{NC}_{-,2} \\
\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow & & & & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & = & \vdots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
\mathcal{C}^{\mathrm{core}} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathbf{Fun}([1], \mathcal{C})^{\mathrm{core}} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \mathbf{Fun}([2], \mathcal{C})^{\mathrm{core}} & \substack{\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow} & \cdots & &
\end{array}$$

圏の分類図式が完備 Segal 空間であることを示す．

補題 6.14. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする．圏の分類図式 $\mathcal{NC}$ は Reedy ファイブラントである．

補題 6.15. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする．圏の分類図式 $\mathcal{NC}$ は Segal 空間である．

Proof. 圏の脈体の定義より, 任意の $n \geq 0$ に対して, $N\mathcal{C}_n = \mathbf{Fun}([n], \mathcal{C})$ である．例 3.7 より, $N\mathcal{C}$ は Segal 空間である．pullback をとる操作は核をとる操作と脈体をとる操作で保たれる．よって, 圏の分類図式 $\mathcal{NC}$ は Segal 空間である． □

定理 6.16. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする．圏の分類図式 $\mathcal{NC}$ は完備 Segal 空間である．

Proof. 完備性を示す．これは

$$\mathcal{NC}_0 = N(\mathcal{C}^{\mathrm{core}}) \cong N(\mathbf{Fun}(I(1), \mathcal{C})^{\mathrm{core}}) \cong N(\mathrm{Iso}(\mathcal{C}^{\mathrm{core}})) = \mathcal{NC}_{\mathrm{hoequiv}}$$

から従う． □

7 Reedy モデル構造

単体的集合の圏 **sSet** に入る Kan-Quillen モデル構造を復習する．

定義 7.1 (Kan-Quillen モデル構造). **sSet** に次のモデル構造を入れる．これを **sSet** 上の Kan-Quiilen モデル構造といい, $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ と表す.

- weak equivalence は単体的集合の弱ホモトピー同値
- fibration は Kan ファイブレーション
- cofibration は各次元で単射となる射

注意 7.2. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ において, 任意の単体的集合はファイブラントであり, 任意の Kan 複体はコファイブラントである.

注意 7.3. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ は

$$I := \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 0\},\ J := \{\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n \mid n \geq 0, 0 \leq i \leq n\}$$

をそれぞれ generating cofibration の集まり, generating trivial cofibration の集まりとするコファイブラント生成モデル圏である.

注意 7.4. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Kan}}$ は次の条件を満たすモデル圏である.

- コファイブラント生成
- proper
- Cartesina 閉

sSpace に入るモデル構造を紹介する.

定義 7.5 (Reedy モデル構造). **sSpace** に次のモデル構造を入れる．これを **sSpace** 上の Reedy モデル構造といい, $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Reedy}}$ と表す.

- weak equivalence は **sSet** における各次数が弱同値となる射
- fibration は次の射

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(n), X) \times_{\mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(\partial F(n), Y)} \mathrm{Map}_{\mathbf{sSpace}}(F(n), Y)$$

  が Kan ファイブレーションとなる射 $f : X \to Y$
- cofibration は **sSet** における各次数が単射となる射

注意 7.6. $\mathbf{sSet}_{\mathrm{Reedy}}$ は次の条件を満たすモデル圏である.

- コファイブラント生成
- proper
- Cartesina 閉
- 単体的

$\mathbf{sSet}_{\mathrm{Reedy}}$ の Bousfield 局所化により, **sSpace** 上の Segal 空間モデル構造が得られる.

参考文献

[Ras18] Nima Rasekh. Introduction to complete segal spaces, 2018.

[Rez00] Charles Rezk. A model for the homotopy theory of homotopy theory, 2000.