

# $A_\infty$ 圏のなす圏はモデル構造を持たない

よの

2023 年 11 月 4 日

## 概要

dg 圏のなす圏は完備かつ余完備でモデル構造を持つ。しかし、 $A_\infty$  圏のなす圏はそもそも完備ではない。特に、 $A_\infty$  圏のなす圏が equalizer を持たないことを示す。

## 目次

### 1 $A_\infty$ 圏のなす圏はモデル構造を持たない

1

## 1 $A_\infty$ 圏のなす圏はモデル構造を持たない

定義 1.1. 次数付き代数  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \mathbb{K}[a_0, a_1], \mathcal{A}' := \mathbb{K}[a] \\ a_0^2 &= a_1^2 = a_0a_1 = a_1a_0 = a^2 = 0 \\ |a_0| &= |a_1| = 0, |a| = -1\end{aligned}$$

次数付き代数  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  を微分が自明な dg 代数とみなし、1 対象の高次のホモトピーが自明な  $A_\infty$  圏とみなす。

dg 関手  $\mathcal{F}_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  を次のように定義する。

$$\mathcal{F}_0^1(a_0) = \mathcal{F}_0^1(a_1) := 0$$

dg 関手  $\mathcal{F}_0$  を高次のホモトピーが自明な  $A_\infty$  関手とみなす。

$A_\infty$  関手  $\mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  を  $\mathcal{F}_1^1 = \mathcal{F}_0^1$ ,

$$\mathcal{F}_1^2(a_i, a_j) := \begin{cases} a & (i = 0, j = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で、任意の  $d \geq 3$  に対して  $\mathcal{F}_1^d := 0$  として定義する。

補題 1.2. 定義 1.1 の記号を用いる。 $A_\infty \text{Cat}$  において、 $\mathcal{F}_0$  と  $\mathcal{F}_1$  の equalizer は存在しない。 $A_\infty \text{Cat}^c$  においても同様に成立する。

*Proof.*  $A_\infty \text{Cat}$  における場合を考える.  $\mathcal{F}_0$  と  $\mathcal{F}_1$  の equalizer が存在すると仮定する.  $\mathcal{B}$  を  $A_\infty$  圏として,  $\text{equalizer}(A_\infty \text{ 関手})$  を  $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  と表す.

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{A} \xrightarrow[\mathcal{F}_1]{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}'$$

任意の  $B \in \text{Ob} \mathcal{B}$  に対して,  $A_\infty$  関手

$$\mathcal{H}_B : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{B} : * \mapsto B$$

が存在する.

$$\mathbb{K} \xrightarrow{\mathcal{H}_B} \mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{A} \xrightarrow[\mathcal{F}_1]{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}'$$

次に,  $\mathcal{B}$  が 1 対象であることを示す. 任意の  $B_0, B_1 \in \text{Ob} \mathcal{B}$  に対して,  $\mathcal{H}_{B_0}, \mathcal{H}_{B_1}$  を上で定義した  $A_\infty$  関手とする.  $\mathbb{K}$  と  $\mathcal{A}$  は次数 0 に集中しているので,  $i = 0, 1$  に対して,  $A_\infty$  関手

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}_{B_i} : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$$

は恒等射を保ち,  $H(\mathcal{G} \circ \mathcal{H}_{B_i})$  は  $(\mathcal{G} \circ \mathcal{H}_{B_i})^1$  と同一視できる.  $\mathbb{K}$  と  $\mathcal{A}$  は 1 対象なので

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}_{B_1} = \mathcal{G} \circ \mathcal{H}_{B_0}$$

である.  $\mathcal{G}$  は  $A_\infty \text{Cat}$  における mono 射なので

$$\mathcal{H}_{B_1} = \mathcal{H}_{B_0}$$

である. つまり  $B_1 = B_0$  である.  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{A}$  は  $A_\infty$  代数なので,  $\mathcal{G}$  は  $A_\infty$  代数の射である. よって,  $\mathcal{F}_0$  と  $\mathcal{F}_1$  の equalizer は  $A_\infty$  代数のなす圏における equalizer である. ここで, 代数  $\mathcal{B}'$  を次のように定義する.

$$\mathcal{B}' := \mathbb{K}[b], \quad b^2 = 0, \quad |b| = 0$$

代数  $\mathcal{B}'$  を次数 0 に集中した微分が自明な dg 代数とみなし, 高次のホモトピーが自明な  $A_\infty$  代数とみなす.  $i = 0, 1$  に対して,  $A_\infty$  代数の射

$$\mathcal{I}_i : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{A} : b \mapsto a_i$$

が存在して

$$\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{I}_i = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{I}_i$$

を満たす. equalizer の普遍性より, 次の図式を可換にする  $A_\infty$  代数の射  $\mathcal{J} : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\mathcal{H}_B} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{A} \xrightarrow[\mathcal{F}_1]{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}' \\ & & \uparrow \mathcal{J} & \nearrow \mathcal{I}_i & \\ & & \mathcal{B}' & & \end{array}$$

$\mathcal{G}^1$  は全射であるが

$$(\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G})^2 \neq (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G})^2$$

なので,  $(\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}) = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G})$  となることはない.

□

**定理 1.3.**  $A_\infty \text{Cat}$  と  $A_\infty \text{Cat}^c$  はモデル構造を持たない.