安定 ∞ 圏

よの

2023 年 8 月 30 日

概要

目次

1 安定 ∞ 圏

定義 1.1 (基点付き ∞ 圏). $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする. $\mathcal{C}$ の対象 0 が始対象かつ終対象であるとき, 0 を零対象 (zero object) という. $\mathcal{C}$ が零対象を持つとき, $\mathcal{C}$ は基点付き (pointed) であるという.

補題 1.2. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, 0 を $\mathcal{C}$ の対象とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. 0 は零対象である.
2. 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, 0)$ と $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(0, X)$ は可縮である.

注意 1.3. 零対象は存在すれば同値を除いて一意である.

定義 1.4 (簡約関手). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を基点付き ∞ 圏, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を ∞ 圏の関手とする. $\mathcal{F}$ が零対象を保つとき, $\mathcal{F}$ は簡約 (reduced) であるという. 簡約関手のなす $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の部分圏を $\mathbf{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ と表す.

定義 1.5 (ヌルホモトピー). $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏, $f : X \to Y$ を $\mathcal{C}$ の射とする. 次の図式で表される 2

単体 $\Delta^2 \to \mathcal{C}$ を f のヌルホモトピーという．また, ヌルホモトピーを持つ f を 0 射 (0-map) という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

補題 1.6. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ が基点付きであることと, 次の 3 つの条件を満たすことは同値である．

1. $\mathcal{C}$ は始対象 $\emptyset$ を持つ．
2. $\mathcal{C}$ は終対象 1 を持つ．
3. $\mathcal{C}$ の射 $f : 1 \to \emptyset$ が存在する．

Proof. $\mathcal{C}$ が基点付きであるとき, 3 つの条件を満たすことは明らかである．
逆に, 条件 (1) から (3) が満たされているとする．$\emptyset$ は始対象なので, 射 $g : \emptyset \to 1$ が存在する．$\emptyset$ は始対象なので, $fg \simeq \mathrm{id}_\emptyset$ である．1 は終対象なので, $gf \simeq \mathrm{id}_1$ である．よって, g は f のホモトピー逆射なので, f は同型射である．従って, $\emptyset$ は終対象でもあるので, $\mathcal{C}$ は基点付きである． □

定義 1.7 ((コ) ファイバー). $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする．次の形で表される射 $\Delta^1 \times \Delta^1 \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の三角 (diagram) という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

この三角が pullback であるとき, 三角をファイバー列 (fibre sequence) という．双対的に, この三角が pushout であるとき, 三角をコファイバー列 (cofibre sequence) という．

このようなファイバー列が存在するとき, g はファイバーを持つという．双対的に, このようなコファイバー列が存在するとき, f はコファイバーを持つという．このとき, $X := \mathrm{fib}(g), Z := \mathrm{cofib}(f)$ と表す．

また, $\mathcal{C}$ の任意の射が (コ) ファイバーを持つとき, $\mathcal{C}$ は (コ) ファイバーを持つという．

注意 1.8. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ の三角は次のデータから構成される．

1. $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$
2. h が g と f の合成であることを表す 2 単体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

3. h のヌルトピックを表す 2 単体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

記法 1.9. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする. $\mathcal{C}$ の三角を

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

と表す.

定義 1.10 (安定 ∞ 圏). 基点付き ∞ 圏 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{C}$ は安定 (stable) であるという.

1. $\mathcal{C}$ はファイバーとコファイバーを持つ.
2. $\mathcal{C}$ の三角がファイバー列であることとコファイバー列であることは同値である.

注意 1.11. 安定 ∞ 圏は ∞ 圏に追加の構造を持たせたものではなく, ∞ 圏の持つ性質を用いて定義されている.

補題 1.12. $\mathcal{C}$ が安定 ∞ 圏であるとき, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ も安定 ∞ 圏である.

Proof. 安定 ∞ 圏の定義が双対的であることから従う. □

定義 1.13 (完全関手). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を安定 ∞ 圏, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を ∞ 圏の関手とする. $\mathcal{F}$ が 0 対象とファイバー列, コファイバー列を保つとき, $\mathcal{F}$ は完全 (exact) であるという. 完全関手のなす $\mathbf{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の部分圏を $\mathbf{Fun}^{\mathrm{Ex}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ と表す.

2　安定 ∞ 圏のホモトピー圏

$\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏, 0 と $0'$ を $\mathcal{C}$ の零対象とする. 次の pushout で表される図式の $\mathbf{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ の充満部分圏を $\mathcal{M}^{\Sigma}$ と表す.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

HTT.4.3.2.15 を 2 回用いると, 自明なファイブレーション $e : \mathcal{M}^{\Sigma} \to \mathcal{C}$ を得る. $s : \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\Sigma}$ を e の切断とする. このとき,

$$\Sigma_{\mathcal{C}} := e \circ s : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

を $\mathcal{C}$ 上の懸垂 (suspention functor) という. 双対的に, 同じ形の pulback で表される $\mathbf{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ の充満部分圏を $\mathcal{M}^{\Omega}$ と表す. $\mathcal{C}$ がファイバーを持つとき, 同様に自明なファイブレーション

$e' : \mathcal{M}^{\Omega} \to \mathcal{C}$ を得る. $s' : \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\Omega}$ を e' の切断とする. このとき,

$$\Omega\mathcal{C} := e' \circ s' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

を $\mathcal{C}$ 上のループ (loop functor) という. $\mathcal{C}$ が安定であるとき, $\mathcal{M}^{\Sigma} = \mathcal{M}^{\Omega}$ である.

記法 2.1. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする. 任意の $X \in \mathcal{C}$ と $n \geq 0$ に対して,

$$X[n] := \Sigma^n(X)$$

と表し, 懸垂の n 乗 (n-th power) という. $n \leq 0$ に対して,

$$X[n] := \Omega^n(X)$$

と表し, ループの $-n$ 乗という. 誘導されるホモトピー圏上の関手の対応も同じ記号を用いて表す.

注意 2.2. $\mathcal{C}$ が基点付き ∞ 圏のとき, 懸垂とループはホモトピー逆射ではないが, 随伴ではある.

3 安定 ∞ 圏における (余) 極限

安定 ∞ 圏の定義にはファイバーとコファイバーのみを用いて定義されたが, 任意の有限極限と有限余極限を持つことが分かる.

補題 3.1. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする. このとき, 次の 2 つが従う.

1. $\mathcal{C}$ は pushout と pullback を持つ.
2. $\mathcal{C}$ における四角が pushout であることと pullback であることは同値である.

Proof. (1) を示す. 補題 1.12 より, $\mathcal{C}$ が pushout を持つことを示せばよい. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

f がファイバーを持つので, 次の図式が存在する.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \\ 0 \arrow[r] & Y & \end{tikzcd}$$

ここで, 左の四角はファイバー列である．合成 gh はコファイバーを持ち, 左の四角はコファイバー列でもであるので 次の図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

ここで, 外側の四角は pushout である．左と外側の四角は pushout なので, 右側の四角も pushout である．

(2) を示す．補題 1.12 より, 任意の pullback が pushout であることを示せばよい．次の pulback を考える．

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

(1) と同様に, f がファイバーを持つので, 次の図式が存在する．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

左の四角はファイバー列かつコファイバー列なので, 外側の四角は pullback かつ pushout である．(1) より, 右の四角は pushout でもある． □

補題 3.2. $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を安定 ∞ 圏の関手とする．このとき, 次の 2 つは同値である．

1. $\mathcal{F}$ は完全である．
2. $\mathcal{F}$ は零対象と pushout を保つ．
3. $\mathcal{F}$ は零対象と pullback を保つ．

Proof. (2) と (3) の同値性は補題 3.1 の (2) より従う．
(1) と (2) の同値性は完全関手が pushout を保つことを示せばよい．これは補題 3.1 の (1) と同様の議論で示せる． □

定理 3.3. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏, $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を安定 ∞ 圏の関手とする．このとき, 次の 2 つが従う．

1. $\mathcal{C}$ は任意の有限極限と有限余極限を持つ．
2. $\mathcal{F}$ が完全であることと, $\mathcal{F}$ が有限 (余) 極限を保つことは同値である．

命題 3.4. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする. このとき, 次の 3 つは同値である.

1. $\mathcal{C}$ は安定である.
2. $\mathcal{C}$ はコファイバーを持ち, 懸垂関手は ∞ 圏同値である.
3. $\mathcal{C}$ はファイバーを持ち, ループ関手は ∞ 圏同値である.

Proof. 補題 1.12 より, (2) と (3) の同値性は従う.
(1) から (2) と (1) から (3) はすでに示している.
(2) から (1) を示す. $\mathcal{C}$ をコファイバーを持つ基点付き ∞ 圏, $\Sigma_{\mathcal{C}}$ は ∞ 圏同値であるとする. $\mathcal{C}$ が安定であるのは, 次の 3 つを示せばよい.

1. $\mathcal{C}$ の任意のコファイバー列はファイバー列である.
2. $\mathcal{C}$ はファイバーを持つ.
3. $\mathcal{C}$ の任意のファイバー列はコファイバー列である.

$\square$