A_∞ 圏のホモトピー論

よの

2023 年 11 月 4 日

概要

dg 圏のホモトピー論と A_∞ 圏のホモトピー論が 1 圏として圏同値であるだけでなく, ∞ 圏として圏同値であることを示す．本章は [COS20] と [Pas23] のまとめである．dg 圏のなす圏に入るモデル構造についてもまとめる．(執筆中)

$\mathbb{K}$ を体とし, 圏は small かつ $\mathbb{K}$ 線形であるとする．

目次

1 A_∞ 圏のホモトピー論と dg 圏のホモトピー論

記法 1.1. 以下のような記号を用いる．

- 箙と箙の射のなす圏を $\mathbf{Qu}$
- 次数付き箙と次数付き箙の射のなす圏を $\mathbf{gQu}$
- dg 箙と dg 箙の射のなす圏を $\mathbf{dgQu}$
- 恒等射を持たない dg 圏と恒等射を考えない dg 関手を $\mathbf{dgCat}^n$
- c 恒等射を持つ dg 圏と c 恒等射を保つ dg 関手を $\mathbf{dgCat}^c$
- s 恒等射を持つ dg 圏と s 恒等射を保つ dg 関手を $\mathbf{dgCat}$
- 恒等射を持たない A_∞ 圏と恒等射を考えない A_∞ 関手のなす圏を $\mathbf{A_\infty Cat}^n$
- c 恒等射を持つ A_∞ 圏と c 恒等射を保つ A_∞ 関手のなす圏を $\mathbf{A_\infty Cat}^c$
- s 恒等射を持つ A_∞ 圏と s 恒等射を保つ A_∞ 関手のなす圏を $\mathbf{A_\infty Cat}$

dg 圏は高次のホモトピーが自明な A_∞ 圏であり, dg 関手は高次の成分が自明な A_∞ 関手なので,

埋め込み

$$i : \mathbf{dgCat} \to \mathbf{A_\infty Cat}$$

が存在する．

A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ に対して，バー構成により dg 余圏 $B\mathcal{A}$ が得られ，コバー構成により dg 圏 $\Omega(B\mathcal{A})$ が得られる．A_∞ 関手に対しても同様に dg 関手が得られる．よって，rectification 関手と呼ばれる関手

$$U : \mathbf{A_\infty Cat} \to \mathbf{dgCat}$$

が存在する．

記法 1.2. dg 圏と dg 擬同値のなす圏を $\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}} \subset \mathbf{dgCat}$, A_∞ 圏と A_∞ 擬同値のなす圏を $\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}} \subset \mathbf{A_\infty Cat}$ と表す．

定理 1.3. 関手 $U : \mathbf{A_\infty Cat} \to \mathbf{dgCat}, i : \mathbf{dgCat} \to \mathbf{A_\infty Cat}$ に対して，次が成立する．

1. U は i の左随伴である．
2. $\mathbf{A_\infty Cat}$ において $i(\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}) \subset \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}$ である．
3. $\mathbf{dgCat}$ において $U(\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}) \subset \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}$ である．
4. 単位 $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{A_\infty Cat}} \to iU$ の成分は $\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}$ に属する．
5. 余単位 $\varepsilon : Ui \to \mathrm{id}_{\mathbf{dgCat}}$ の成分は $\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}$ に属する．

記法 1.4. $\mathbf{dgCat}$ の $\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}$ による局所化を $\mathbf{dgCat}[(\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})^{-1}]$, $\mathbf{A_\infty Cat}$ の $\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}$ による局所化を $\mathbf{A_\infty Cat}[(\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{-1}]$ と表す．それぞれ，dg 圏のホモトピー圏，A_∞ 圏のホモトピー圏という．

定理 1.5. 随伴 $U \dashv i$ はホモトピー圏の擬圏同値

$$\mathbf{A_\infty Cat}[(\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{-1}] \cong \mathbf{dgCat}[(\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})^{-1}]$$

を定める．

定理 1.5 は「A_∞ 圏のホモトピー論」と「dg 圏のホモトピー論」が 1 圏として等しいことを示している．しかし，「A_∞ 圏のホモトピー論」と「dg 圏のホモトピー論」は $(\infty, 1)$ 圏のレベルで等しいのだろうか．これは定理 1.3 から直ちに従うことが分かる．

2　相対圏の Dwyer-Kan 対応

定義 2.1 (相対圏). $\mathbf{C}$ を圏とする．$\mathbf{W}$ を $\mathbf{C}$ の全ての対象 (と恒等射を含む)$\mathbf{C}$ の部分圏とする．このとき，組 $(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ を相対圏 (relative category) といい，$\mathbf{W}$ に属する射を弱同値 (weak equivalence) という．

定義 2.2 (相対関手). $(\mathbf{C}_1, \mathbf{W}_1), (\mathbf{C}_2, \mathbf{W}_2)$ を相対圏とする．関手 $F : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2$ が $F(\mathbf{W}_1) \subset \mathbf{W}_2$ を満たすとき，$F : (\mathbf{C}_1, \mathbf{W}_1) \to (\mathbf{C}_2, \mathbf{W}_2)$ を相対関手 (relative functor) という．

定義 2.3 (相対圏の Dwyer-Kan 随伴). $(\mathbf{C}_1, \mathbf{W}_1), (\mathbf{C}_2, \mathbf{W}_2)$ を相対圏, $L : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2, R : \mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_1$ を相対関手とする. 次の条件を満たすとき, 組 $(L, R, \eta, \varepsilon)$ を相対圏の Dwyer-Kan 随伴 (Dwyer-Kan adjuction) という.

1. 任意の $X \in \mathbf{C}_1$ に対して, 単位の成分 $\eta_X : X \to RLX$ は $\mathbf{W}_1$ に属する.
2. 任意の $Y \in \mathbf{C}_2$ に対して, 余単位の成分 $\varepsilon_X : LRY \to Y$ は $\mathbf{W}_2$ に属する.

注意 2.4. $i = 1, 2$ に対して, $C_i = W_i$ であるとき, 相対圏の Dwyer-Kan 随伴は通常の随伴である. W_i が C_i における同型射を全て含むとき, 相対圏の Dwyer-Kan 随伴は随伴同値である.

定理 1.3 は相対圏の Dwyer-Kan 随伴を用いて次のように表される.

定理 2.5. $(\mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}), (\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ は相対圏である. $U : \mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat} \to \mathbf{dgCat}, i : \mathbf{dgCat} \to \mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}$ に対して, $(U, i, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ は相対圏の Dwyer-Kan 随伴である.

相対圏 $(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ に対して, 局所化により, 圏 $\mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ を得る.

定義 2.6 (hammock 局所化). 相対圏 $(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ に対して, **sSet** 豊穣圏 $L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ を hammock 局所化を用いて構成する.

3 モデル構造

記法 3.1. 相対圏と相対関手のなす圏を **RelCat**, 単体的空間のなす圏を **sSpace** と表す.

RelCat には Barwick-Kan モデル構造, **sSpace** には Rezk 完備 Segal 空間モデル構造を入れる.

定理 3.2. **RelCat** と **sSpace** には次のような関係がある.

1. 関手 $K_\xi : \mathbf{sSpace} \to \mathbf{RelCat}$ と $N_\xi : \mathbf{RelCat} \to \mathbf{sSpace}$ が存在して, K_ξ は N_ξ の左随伴である. また, この随伴は **sSpace** と **RelCat** の Quillen 同値である.
2. **RelCat** の射 F が弱同値であることと, $N_\xi(F)$ が **sSpace** の弱同値であることは同値である.
3. **RelCat** の射 F が弱同値であることと, $L^H(F)$ が **sSet** 豊穣圏の Dwyer-Kan 同値であることは同値である.

系 3.3. 相対関手 $U : \mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat} \to \mathbf{dgCat}, i : \mathbf{dgCat} \to \mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}$ は **RelCat** の弱同値である. また, $N_\xi(U)$ と $N_\xi(i)$ は **sSpace** 上の弱同値である.

RelCat におけるファイブラント対象を考える.

定理 3.4. $(\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ は **RelCat** におけるファイブラント対象である.

注意 3.5. $(\mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})$ が **RelCat** におけるファイブラント対象であるかは分かっていない. **RelCat** におけるファイブラント置換 $j_{A_\infty} : (\mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}) \to (\mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{\mathrm{fib}}$ を固定す

る．この対応から，射 $U^{\mathrm{fib}} : (\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{\mathrm{fib}} \to (\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ と $i^{\mathrm{fib}} : (\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}) \to (\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{\mathrm{fib}}$ が存在して，次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}) \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "i^{\mathrm{fib}}"] & \\
(\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}) \arrow[r, "j_{A_\infty}"'] & (\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{\mathrm{fib}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}) \arrow[r, "j_{A_\infty}"] \arrow[dr, "U"'] & (\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{\mathrm{fib}} \arrow[d, "U^{\mathrm{fib}}"] \\
& (\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})
\end{tikzcd}$$

ここで，U^{fib} と i^{fib} は $\mathbf{RelCat}$ におけるファイブラント対象の弱同値である．

右 Quillen 関手はファイブラント対象と，ファイブラント対象の弱同値を保つ．

系 3.6. $N_\xi(\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})$ と $N_\xi(\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ は完備 Segal 空間である．また，$N_\xi(U^{\mathrm{fib}})$ と $N_\xi(i^{\mathrm{fib}})$ はそれらの間の弱同値である．

sSet には Joyal モデル構造を入れる．Joyal-Tierney の定理を紹介する．

定理 3.7. 関手 $p_1^* : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSpace}$ と $i_1^* : \mathbf{sSpace} \to \mathbf{sSet}$ が存在して，p_1^* は i_1^* の左随伴である．また，この随伴は **sSet** と **sSpace** の Quillen 同値である．

今までの議論で用いた随伴関係をまとめる．(上が左随伴，下が右随伴)

$$\mathbf{sSet} \underset{i_1^*}{\overset{p_1^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSpace} \underset{N_\xi}{\overset{K_\xi}{\rightleftarrows}} \mathbf{RelCat}$$

右 Quillen 関手はファイブラント対象と，ファイブラント対象の弱同値を保つことを再び用いる．

系 3.8. $i_1^* N_\xi(\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})$ と $i_1^* N_\xi(\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ は擬圏である．また，$i_1^* N_\xi(U^{\mathrm{fib}})$ と $i_1^* N_\xi(i^{\mathrm{fib}})$ はそれらの間の弱同値である．

注意 3.9. 系 3.8 は定理 1.5 を擬圏まで拡張したものである．実際，$i_1^* N_\xi(\mathbf{A_\infty Cat}, \mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})$ のホモトピー圏は $\mathbf{A_\infty Cat}[(\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}})^{-1}]$ であり，$i_1^* N_\xi(\mathbf{dgCat}, \mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})$ のホモトピー圏は $\mathbf{dgCat}[(\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}})^{-1}]$ である．つまり，系 3.8 においてホモトピー圏をとると，定理 1.5 が導かれる．

sSet 豊穣圏 **sSet-enriched** には Bergner モデル構造を入れる．

$L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ は **sSet-enriched** におけるファイブラント対象ではないので，ファイブラント置換 $(L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W}))^{\mathrm{fib}}$ をとる必要がある．

定理 3.10. 関手 $F : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet\text{-}enriched}$ と homotopy coherence nerve $N_c : \mathbf{sSet\text{-}enriched} \to \mathbf{sSet}$ が存在して，F は N_c の左随伴である．また，この随伴は **sSet** と **sSet-enriched** の Quillen 同

値である.

右 Quillen 関手はファイブラント対象と, ファイブラント対象の弱同値を保つことを再び用いる.

系 3.11. $N_c((L^H(\mathbf{C},\mathbf{W}))^{\mathrm{fib}})$ は擬圏である.

今までの議論で用いた随伴関係をまとめる. (上が左随伴, 下が右随伴)

$$\begin{tikzcd}
& \textbf{sSet-enriched} \arrow[dl, shift left, "N_c"] & \\
\textbf{sSet} \arrow[ur, shift left, "F"] \arrow[dr, shift left, "p_1^*"] & & \textbf{RelCat} \arrow[dl, shift left, "N_\xi"] \\
& \textbf{sSpace} \arrow[ul, shift left, "i_1^*"] \arrow[ur, shift left, "K_\xi"] &
\end{tikzcd}$$

定理 3.12. $i_1^* N_\xi(\mathbf{C},\mathbf{W})$ と $N_c((L^H(\mathbf{C},\mathbf{W}))^{\mathrm{fib}})$ は $(\infty,1)$ 圏同値である.

系 3.13. $N_c((L^H(\mathbf{A}_\infty\mathbf{Cat},\mathbf{W}^{A_\infty}_{\mathrm{qeq}}))^{\mathrm{fib}})$ と $N_c((L^H(\mathbf{dgCat},\mathbf{W}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{qeq}}))^{\mathrm{fib}})$ は $(\infty,1)$ 圏同値である.

4 dg 圏の圏に入るモデル構造

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ を dg 圏とする. dg 圏の圏 **dgCat** に入る 2 種類の組み合わせ論的モデル構造を説明する. (途中)

定義 4.1 (DK 同値). dg 関手 $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を DK 同値 (Dwyer-Kan equivalence) という.

- 任意の $x_0,x_1\in\mathcal{C}$ に対して, 複体の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_0,x_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}x_0,\mathcal{F}x_1)$ は擬同型
- $H^0(\mathcal{F}):H^0(\mathcal{C})\to H^0(\mathcal{D})$ は通常の圏同値

定義 4.2 (DK ファイブレーション). dg 関手 $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を DK ファイブレーション (Dwyer-Kan fibration) という.

- 任意の $x_0,x_1\in\mathcal{C}$ に対して, 複体の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_0,x_1)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}x_0,\mathcal{F}x_1)$ は複体のファイブレーション (つまり, 任意の次数において全射)
- 任意の同型射 $f'\in\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{D})}(x_0',x_1')$ と $\mathcal{F}x_1=x_1'$ を満たす $x_1\in H^0(\mathcal{C})$ に対して, ある同型射 $u\in\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(x_0,x_1)$ が存在して, $H^0(\mathcal{F})u=u'$ を満たす.

定義 4.3 (Dwyer-Kan モデル構造). **dgCat** に次のモデル構造を定義する.

- 弱同値は DK 同値
- ファイブレーションは DK ファイブレーション

このモデル構造を **dgCat** 上の DK モデル構造 (Dwyer-Kan モデル構造) という.

注意 4.4. DK モデル構造を入れた **dgCat** において, 任意の $\mathcal{C} \in \mathbf{dgCat}$ はファイブラントである.

$\mathcal{C}$ 上の右加群のなす圏を $\hat{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}_{\mathrm{dg}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ck}(\mathbb{K}))$ と表す. $\mathbf{Ck}(\mathbb{K})$ には組み合わせ論的モデル構造が入る. モデル圏論の一般論により, $\hat{\mathcal{C}}$ にも組み合わせ論的モデル構造が入る.

定義 4.5 ($\hat{\mathcal{C}}$ のモデル構造). $\hat{\mathcal{C}}$ に次のモデル構造を定義する.

- 弱同値は $\mathbf{Ck}(\mathbb{K})$ における pointwise の弱同値
- ファイブレーションは $\mathbf{Ck}(\mathbb{K})$ における pointwise のファイブレーション

注意 4.6. 表現可能な右加群はコファイブラントかつコンパクトである.

注意 4.7. ファイブラントかつコファイブラントな右加群のなす圏を $\hat{\mathcal{C}}^{cf}$, $\mathcal{C}$ の導来圏を $D(\mathcal{C})$ と表す. このとき, 三角圏同値 $H^0(\hat{\mathcal{C}}^{cf}) \cong D(\mathcal{C})$ が成立する. よって, $\hat{\mathcal{C}}^{cf}$ は $D(\mathcal{C})$ の dg 増強である.

定義 4.8 (DK 埋め込み). dg 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{F}$ を DK 埋め込み (Dwyer-Kan embedding) という.

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathcal{C}$ に対して, 複体の射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_0, x_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}x_0, \mathcal{F}x_1)$ は擬同型

定理 4.9. 任意の dg 圏は前三角的 dg 圏に DK 埋め込みすることができる.

Proof. 任意の dg 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\hat{\mathcal{C}}$ は前三角的である. U を集合とする. $\mathbf{Ck}(\mathbb{K})$ の台集合 U に値をとる右加群 (関手) のなす $\hat{\mathcal{C}}$ の充満部分圏を $U\hat{\mathcal{C}}$ とする. $U\hat{\mathcal{C}}$ は dg 圏である. また, U が十分大きい基数の冪集合であるとき, $U\hat{\mathcal{C}}$ のモデル構造は $\mathcal{C}$ と同じものをとれる. [*1] $U\hat{\mathcal{C}}$ のファイブラントかつコファイブラント対象のなす充満部分圏を $\tilde{\mathcal{C}}$ とする. $\tilde{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ と DK 埋め込みな前三角的 dg 圏である. □

参考文献

[COS20] Alberto Canonaco, Mattia Ornaghi, and Paolo Stellari. Localizations of the category of a_∞ categories and internal homs, 2020.

[Pas23] James Pascaleff. Remarks on the equivalence between differential graded categories and a-infinity categories, 2023.

[*1] small object argument の話で必要となる仮定だと思われる.