三角圏と三角関手

よの

2023 年 10 月 3 日

概要

三角圏は複体の導来圏の持つ性質を調べるために Grothendieck と Verdier により導入された, Abel 圏の持つ写像錐とシフトの性質に注目して公理化された圏である．一方, 代数的トポロジーの分野で, Puppe が安定ホモトピー圏を調べるために三角圏の公理を考えている．よって, 三角圏は複体の導来圏や安定ホモトピー圏を例に持つ.

本稿では, まず三角圏を定義し, [Nee01] で定義されている triangulated categories との違いを説明する．次に, 2-out-of-3 など, 三角圏の持つ様々な性質を示す．また, 三角圏の重要な部分圏である thick 部分圏と, 三角圏の間の関手である三角関手を定義する.

目次

1 三角圏

前三角圏で成立する命題もあるが, 基本的には三角圏において議論する.

定義 1.1 (三角系列). $\mathcal{T}$ を加法圏, $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする．$\mathcal{T}$ における三角系列 (triangle) とは, $\mathcal{T}$ の対象 X, Y, Z と射 $u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to TX$ [*1] の組 (X, Y, Z, u, v, w) からなる次の図式である.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

[*1] 対象 X と射 f に対して, $T(X)$ を TX, $T(f)$ を Tf, $T^{-1}(X)$ を $-TX$, $T^{-1}(f)$ を $-Tf$ とあらわす.

記法 1.2. 三角系列の名前の由来は次のように三角系列を表記することがあるからである.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & Z \arrow[ul, squiggly, "w"] & \end{tikzcd}$$

ここで, 波線は $w : Z \to TX$ をあらわしている.

定義 1.3 (三角系列の射). $\mathcal{T}$ を加法圏, $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. $\mathcal{T}$ の三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

に対して, 三角系列の射 (morphism of triangles) とは, $\mathcal{T}$ における射 $f : X \to X', g : Y \to Y', h : Z \to Z'$ の組 (f, g, h) であって, 次の図式を可換にするものである.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd}$$

三角系列の図式は圏をなす. f, g, h がすべて同型射であるとき, 三角系列の射 (f, g, h) は同型射であるといい, 三角系列 $(X, Y, Z, u, v, w), (X,', Y', Z', u', v', w')$ は同型であるという.

定義 1.4 (三角圏). $\mathcal{T}$ を加法圏, $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を加法的自己圏同値とする. 三角系列のなす圏の充満部分圏を Δ と表す. 組 $(\mathcal{T}, T, \Delta)$ が次の条件を満たすとき, $(\mathcal{T}, T, \Delta)$ を三角圏 (triangulated category), T を $\mathcal{T}$ 上のシフト関手 (shift functor), Δ に属する三角系列を完全三角 (exact triangle) という. [*2]

(TR1) Δ は同型で閉じている. すなわち, 完全三角に同型な三角系列は完全三角である.

(TR2) 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対して, 三角系列

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

は完全三角である.

(TR3) 任意の射 $f : X \to Y$ を補完する完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が存在する.

[*2] シフト関手は Σ や $[-]$ で表されることも多い. また, 完全三角は特三角 (distinguished triangle) とも呼ばれる.

(TR4) 2 つの三角系列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

について, 一方が完全三角であることと他方が完全三角であることは同値である.

(TR5) 2 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

と, ある射 $f : X \to X', g : Y \to Y'$ が次の図式を可換にするとする.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

このとき, ある射 $h : Z \to Z'$ が存在して, 次の図式を可換にする. *3

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX'
\end{tikzcd}$$

(TR6) 3 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow TX$$

$$X \xrightarrow{v \circ u} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow TX$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow TY$$

に対して, ある射 $Z' \to Y', Y' \to X', X' \to TZ'$ が存在して,

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow TZ'$$

*3 h が一意であることは課していないことに注意.

は完全三角であって, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] \\
X \arrow[r, "v\circ u"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "Tu"] \\
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X'}"] & TY \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, dashed] & Y' \arrow[r, dashed] & X' \arrow[r, dashed] & TZ'
\end{tikzcd}$$

(TR6) を八面体公理 (octahedron axiom) という. 三角圏の公理から (TR6) を抜いたものを前三角圏 (pretriangulated category) という.

注意 1.5. 三角圏の定義は完全圏と違って統一されている. [Nee01] の定義と本稿の定義の対応を述べておく.

- [Nee01] の Definition 1.1.1. で定義される candidate triangle は, 本稿における三角系列であって射の合成が 0 となるものである.
- Definition 1.1.2. にあるように, 三角圏における candidate triangle の集まりの元を distinguished triangle と呼んでいる. Remark 1.1.3. や本稿の補題 1.6 にあるように, distinguished であれば candidate である. Notation 1.1.4. で, 三角圏において distinguished は省略すると注記されている.
- Definition 1.1.2. では pre-triangulated category (本稿の前三角圏) しか定義されておらず, triangulated category (本稿の三角圏) はのちに定義されている. 本稿でもそうだが, 八面体公理を使用する命題が少ないからである. (t-構造などでは重要となる.)
- Definition 1.1.12. で homological functor に decent であるという条件を定義している. Example 1.1.13 にあるように, hom 関手は decent homological functor である. [Nee01] では decent homological functor であることをいくつかの命題で仮定している. 本稿では, hom 関手を使って議論しているので, decent homological functor を hom 関手として読み替えてもらえばよい.
- Definition 1.1.14 で pre-triangle が定義されている. Example 1.1.15. にあるように, 任意の distinguished は pre-triangle である. 本稿では注意 1.10 に対応する.
- Caution 1.1.16. にあるように, pre-triangle であっても distinguished であるとは限らない. 例えば, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ において写像錐は pre-triangle の条件を満たすが, distinguished ではない. つまり, $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ は三角圏ではない.

以降では, $\mathcal{A}$ は Abel 圏, $\mathcal{T}$ は三角圏, $T:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ はシフト関手であるとする.

補題 1.6. $\mathcal{T}$ における完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して, 合成 $v \circ u, w \circ v, Tu \circ w$ は 0 である.

Proof. (TR2) と (TR5) より, ある射 $0 \to Z$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

よって, $v \circ u = 0$ である. (TR4) を用いると, $w \circ v = 0$ と $Tu \circ w = 0$ も従う. □

定理 1.7. シフト関手 T は積と余積を保つ.

Proof. T は自己圏同値であるので, 左随伴と右随伴をもつ. 左随伴は余積を保ち, 右随伴は積を保つことから従う. □

注意 1.8. $\mathcal{T}$ が三角圏のとき, $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ も T^{-1} [*4] により三角圏となるので, T^{-1} も積と余積を保つ.

三角圏の構造を調べる際に, (コ) ホモロジカル関手という概念が重要となる.

定義 1.9 ((コ) ホモロジカル関手). 加法関手 $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ が次の条件を満たすとき, ホモロジカル関手 (homological functor) であるという.

- 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$H(X) \xrightarrow{Hu} H(Y) \xrightarrow{Hv} H(Z)$$

が $\mathcal{A}$ において完全である.

双対的に, 関手 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$ がホモロジカル関手であるとき, $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ はコホモロジカル関手 (cohomological functor) であるという.

注意 1.10. ホモロジカル関手 $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ と任意の i に対して, 関手 H^i を

$$H^i := H \circ T^i : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$$

と定義する. (TR4) より, 長完全列

$$\cdots \longrightarrow H^{i-1}(Z) \xrightarrow{H^{i-1}w} H^i(X) \xrightarrow{H^i u} H^i(Y) \xrightarrow{H^i v} H^i(Z) \xrightarrow{H^i w} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

が存在する.

定理 1.11. $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の 2 つが成立する.

[*4] T^{-1} は T の準逆である. 任意の i に対して, T^n は well-defined であり, 一意な同型を除いて一意である. (unique up to unique somorphism)

1. hom 関手

$$\hom(A, -) : \mathcal{T} \to \mathbf{Ab}$$

はホモロジカル関手である.

2. hom 関手

$$\hom(-, A) : \mathcal{T} \to \mathbf{Ab}$$

はコホモロジカル関手である.

Proof. (2) は (1) の双対なので, (1) のみを示す. 任意の完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

に対して,

$$\hom(A, X) \xrightarrow{u\circ -} \hom(A, Y) \xrightarrow{v\circ -} \hom(A, Z)$$

が完全であることを示す. 補題 1.6 より, 任意の $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ に対して

$$v \circ u \circ e = 0$$

である. $v \circ f = 0$ を満たす射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)$ に対して, ある射 $h : A \to X$ が存在して, $f = u \circ h$ を満たすことを示す. (TR2) と (TR4) より, 完全三角

$$A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA \xrightarrow{-\mathrm{id}_{TA}} TA$$

が存在する. (TR4) より, 完全三角

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

が存在する. (TR5) より, ある射 $Th : TA \to TX$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & TA \arrow[r, "-\mathrm{id}_{TA}"] \arrow[d, dashed, "Th"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX \arrow[r, "-Tu"'] & TY
\end{tikzcd}$$

右の四角の可換性より,

$$Tf = Tu \circ Th$$

である. T は忠実充満なので, ある射 $h : A \to X$ が存在して,

$$f = u \circ h$$

となる. □

定理 1.12 (two-out-of-three). $\mathcal{T}$ において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd}$$

このとき, f, g, h のうち 2 つが同型射であるとき, 残り 1 つも同型射となる.

Proof. (TR4) より, f と g が同型射であると仮定しても, 一般性は失われない. (TR4) と定理 1.11 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して, 次の完全列の可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd} \hom(A,X) \arrow[r] \arrow[d, "f\circ-"] & \hom(A,Y) \arrow[r] \arrow[d, "g\circ-"] & \hom(A,Z) \arrow[r] \arrow[d, "h\circ-"] & \hom(A,TX) \arrow[r] \arrow[d, "Tf\circ-"] & \hom(A,TY) \arrow[d, "Tg\circ-"] \\ \hom(A,X') \arrow[r] & \hom(A,Y') \arrow[r] & \hom(A,Z') \arrow[r] & \hom(A,TX') \arrow[r] & \hom(A,TY') \end{tikzcd}$$

f, g は同型射なので, 五項補題より $h \circ -$ も同型射である. 米田の補題より, Z と Z' は同型である. □

系 1.13. $\mathcal{T}$ において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX \end{tikzcd}$$

このとき, Z と Z' は同型である.

Proof. (TR5) より, ある射 $Z \to Z'$ が存在して, 次の完全三角の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "\mathrm{id}_{Tf}"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX \end{tikzcd}$$

定理 1.12 より, この射 $Z \to Z'$ は同型射である. □

定義 1.14 (錐). 系 1.13 より, 三角圏 $\mathcal{T}$ における射 $f : X \to Y$ に対して,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

が完全三角となるような $Z \in \mathcal{T}$ は同型を除いて一意に定まる. Z を f の錐 (cone) といい, $\mathrm{Cone} f$ とあらわす.

以下では, 定理 1.12 から示される命題をいくつか証明する.

系 1.15. $\mathcal{T}$ において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 2 つが成立することは同値である.

- $u : X \to Y$ は同型射である.
- Z は 0 と同型である

Proof. 仮定と (TR1) で与えられる完全三角に対して, (TR5) を用いると, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & TX \arrow[d, "Tu"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TY \end{tikzcd}$$

定理 1.12 より, u が同型射であることとと, $Z \to 0$ が同型射であることは同値である. □

系 1.16. $\mathcal{T}$ において, 次の完全三角の可換図式が与えられているとする.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, 次の 4 つが成立する.

1. v がエピ射であることと, $w = 0$ は同値である.
2. v がモノ射であることと, $u = 0$ は同値である.
3. v がエピ射であることと, u がモノ射であることは同値である.
4. $w = 0$ のとき, $Y \simeq X \oplus Z$ である.

$$X \xrightarrow{u} X \oplus Z \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{0} TX$$

Proof. (1) : まず $\Rightarrow$ を示す. 補題 1.6 より, $w \circ v = 0$ である. v がエピ射であるとき, $w = 0$ である. $\Leftarrow$ を示す. 定理 1.11 より, 任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して,

$$\hom(TX, A) \xrightarrow{-\circ w} \hom(Z, A) \xrightarrow{-\circ v} \hom(Y, A)$$

は完全列なので, $w = 0$ のとき,

$$- \circ v : \hom(Z, A) \to \hom(Y, A)$$

はモノ射である. よって, v はエピ射である.
(2) : (1) の双対である.
(3) : $h = 0$ と $-h = 0$ が同値であることから従う.
(4) : $w = 0$ であるとき, 1 と 2 より,

$$0 \longrightarrow \hom(Z, A) \xrightarrow{-\circ v} \hom(Y, A) \xrightarrow{-\circ u} \hom(X, A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \hom(A, X) \xrightarrow{u\circ -} \hom(A, Y) \xrightarrow{v\circ -} \hom(A, Z) \longrightarrow 0$$

は短完全列である．このとき，

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

は分裂短完全列であるので，

$$Y \simeq X \oplus Z$$

となる． $\square$

注意 1.17. 系 1.16 より，三角圏において任意のモノ射は分裂モノ射であり，任意のエピ射は分裂エピ射である．もちろん，一般の Abel 圏においては成立しない．

注意 1.18. 系 1.16 の (4) を直接示すこともできる．

Proof. u が分裂モノ射であることを示す．v が分裂エピ射であることも同様に示される．仮定の完全三角と (TR2) に (TR3) を用いる．(TR5) より，ある射 $Tu' : TY \to TX$ が存在して，次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "w=0"] \arrow[d] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{TX}"] & TY \arrow[r, "-Tv"] \arrow[d, dashed, "Tu'"] & TZ \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & TX \arrow[r, "-\mathrm{id}_{TX}"'] & TX \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

よって，

$$Tu' \circ Tu = \mathrm{id}_{TX}$$

が成立する．T は忠実充満なので，$u' \circ u = \mathrm{id}_X$ を満たす $u' : Y \to X$ が存在する． $\square$

(TR5) で定義される射 $h : Z \to Z'$ は一意ではない．一意であるための条件としては次のようなものが存在する．

補題 1.19. (TR5) と同様の用語を用いる．2 つの完全三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

において，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, X') = 0, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(TX, Y') \qquad\qquad = 0$$

のとき，射 $h : Z \to Z'$ は一意に存在する．

完全三角の (余) 直積は完全三角となる．

定理 1.20. Λ を添え字集合とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次の完全三角が与えられているとする．

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

$\mathcal{T}$ において直積

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \quad \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする．このとき, 次の図式は完全三角である．

$$\textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \prod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w} T(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$$

ここで,

$$u := \prod_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda, \quad v := \prod_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda, \quad w := \prod_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda$$

Proof. □

双対的に次の命題が成立する．

系 1.21. Λ を添え字集合とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 次の完全三角が与えられているとする．

$$X_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} TX_\lambda$$

$\mathcal{T}$ において余直積

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \quad \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$$

が存在するとする．このとき, 次の図式は完全三角である．

$$\textstyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \xrightarrow{u} \coprod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \xrightarrow{v} \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda \xrightarrow{q} T(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$$

ここで,

$$u := \coprod_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda, \quad v := \coprod_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda, \quad w := \coprod_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda$$

八面体公理を用いる命題は次のようなものがある．

補題 1.22 (一般化八面体公理). $\mathcal{T}$ において次の可換図式が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_1 \arrow[d, "f_2"] \\
X_2 \arrow[r, "u_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

このとき, すべての行と列が完全三角であり, すべての四角形が可換であるような次の図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & TX_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & TX_2 \arrow[d] \\
X_3 \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[r] \arrow[d] & TX_3 \\
TX_1 \arrow[r] & TY_1 \arrow[r] & TZ_1 &
\end{tikzcd}$$

Proof. 定義 1.14 より,

$$Z_1 := \mathrm{Cone}u_1,\quad Z_2 := \mathrm{Cone}u_2,\quad X_3 := \mathrm{Cone}f_1,\quad Y_3 := \mathrm{Cone}f_2$$

としてよい. $f_2 \circ u_1$ に (TR3) を用いると, 次の完全三角を得る.

$$X_1 \xrightarrow{f_2 \circ u_1} Y_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \longrightarrow TX_1$$

3 つの完全三角

$$X_1 \xrightarrow{u_1} Y_1 \longrightarrow \mathrm{Cone}u_1 \longrightarrow TX_1$$

$$X_1 \xrightarrow{f_2 \circ u_1} Y_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \longrightarrow TX_1$$

$$Y_1 \xrightarrow{f_2} Y_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}f_2 \longrightarrow TY_1$$

に (TR6) を用いると, 次の完全三角を得る.

$$\mathrm{Cone}u_1 \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \longrightarrow \mathrm{Cone}f_2 \longrightarrow T(\mathrm{Cone}u_1)$$

同様に, 次の完全三角を得る.

$$\mathrm{Cone}f_1 \longrightarrow \mathrm{Cone}(u_2 \circ f_1) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Cone}u_2 \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_1)$$

(TR4) より, 次の完全三角を得る.

$$\mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Cone}u_2 \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_1) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1))$$

3 つの完全三角

$$\mathrm{Cone}u_1 \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \longrightarrow \mathrm{Cone}f_2 \longrightarrow T(\mathrm{Cone}u_1)$$

$$\mathrm{Cone}u_1 \xrightarrow{\psi \circ \varphi} \mathrm{Cone}u_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}(\psi \circ \varphi) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}u_1)$$

$$\mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Cone}u_2 \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_1) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}(f_2 \circ u_1))$$

に (TR6) を用いると, 次の完全三角を得る.

$$\mathrm{Cone}f_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}(\psi\circ\varphi) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_1) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_2)$$

(TR4) より, 次の完全三角を得る.

$$\mathrm{Cone}f_1 \longrightarrow \mathrm{Cone}f_2 \longrightarrow \mathrm{Cone}(\psi\circ\varphi) \longrightarrow T(\mathrm{Cone}f_1)$$

よって, $Z_3 := \mathrm{Cone}(\psi\circ\varphi)$ とすればよい. 各四角形の可換性は (TR5) より従う. □

2 thick 部分圏と生成

三角圏における部分圏を定義する.

定義 2.1 (三角部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を充満加法部分圏とする. $\mathcal{T}'$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{T}$ の三角部分圏 (triangulated subcategory) であるという.

1. $\mathcal{T}'$ は三角圏であり, $\mathcal{T}'$ のシフト関手は $\mathcal{T}$ のシフト関手の $\mathcal{T}'$ への制限である.
2. $\mathcal{T}'$ における完全三角
$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$
は $\mathcal{T}$ においても完全三角である.

定理 2.2. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. $\mathcal{T}'$ は三角部分圏である.
2. 次の 2 つが成立する.
   (a) $\mathcal{T}'$ はシフトで閉じている. つまり, $\mathcal{T}' = T\mathcal{T}'$ が成立する.
   (b) $\mathcal{T}$ における完全三角
   $$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$
   において $X, Y \in \mathcal{T}'$ のとき, $Z \in \mathcal{T}'$ である.

Proof. $1 \Rightarrow 2$: (a) は定義から明らかであり, (b) は定義 1.14 より従う.
$2 \Rightarrow 1$: (a) と (b) から $\mathcal{T}'$ に三角構造が定まることをみる. (a) より $\mathcal{T}'$ 上にシフト関手 $T : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}'$ が定まる. $\mathcal{T}'$ の完全三角を $\mathcal{T}$ における完全三角であって, 各対象が $\mathcal{T}'$ に属するときと定義する. このとき, (TR3) 以外は $\mathcal{T}$ が三角圏であることから従う. $u : X \to Y$ に対して, (TR3) が成立することを示す. $\mathcal{T}$ における (TR3) より, ある対象 $Z \in \mathcal{T}$ が存在して, 次の図式は完全三角である.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

このとき, (b) より $Z \in \mathcal{T}'$ となる. よって, u を補完する完全三角が $\mathcal{T}'$ において存在する. □

定義 2.3 (thick 部分圏). $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ を同型で閉じている充満加法部分圏とする. $\mathcal{T}'$ が直和因子で閉じているとき, thick 部分圏 (thick subcategory) であるという.

定理 2.4. ホモロジカル関手 $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ が任意の i に対して,

$$H^i(X) = 0$$

を満たす $X \in \mathcal{T}$ のなす充満部分圏は $\mathcal{T}$ の thick 部分圏となる.

定義 2.5 (生成). $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ を充満部分圏とする. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ が同型で閉じている充満加法部分圏であって, $\mathcal{S}$ を含む最小のものであるとき, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{T}'$ を三角圏として生成する (generate) という.

3 三角関手

三角圏の間の三角関手を定義する.

定義 3.1 (三角関手). $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏とする. 加法関手 $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ が次の条件を満たすとき, 三角関手 (triangulated functor) [*5] であるという.

1. 自然同型
$$\varphi : F \circ T \simeq T' \circ F$$
が存在する.
2. $\mathcal{T}$ の任意の完全三角
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$
に対して,
$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{Fw} FTX$$
は $\mathcal{T}'$ における完全三角である.

三角関手の合成はまた三角関手となる.

補題 3.2. 三角圏 $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}''$ と三角関手 $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}', F' : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ に対して, 合成

$$F' \circ F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}''$$

は三角関手となる.

三角関手とホモロジカル関手の合成はホモロジカル関手となる.

[*5] 完全関手 (exact functor) ともいう.

補題 3.3. 三角関手 $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ とホモロジカル関手 $H : \mathcal{T}' \to \mathcal{A}$ に対して, 合成

$$H \circ F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$$

はホモロジカル関手となる.

以降では, $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を三角圏, $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ を三角関手とする.

定義 3.4 (三角同値). 三角関手 F が圏同値であるとき, 三角同値 (triangle equivalence) であるという.

定理 3.5. 関手 $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}', G : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ が随伴 $F \dashv G$ であるとき, 次の 2 つは同値である.

1. F は三角関手である.
2. G は三角関手である.

系 3.6. F が三角同値であるとき, F^{-1} も三角同値である. 特に, $T^n : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ は三角同値である.

参考文献

[Nee01] Amnon Neeman. Triangulated Categories. (AM-148). Princeton University Press, 2001.