三角圏の ∞ 増強

よの

2023 年 10 月 8 日

概要

目次

1 ∞ 増強

定義 1.1 (**∞ 増強を持つ**)**.** $\mathcal{T}$ を三角圏とする．ある安定 ∞ 圏 $\mathcal{C}$ が存在して，三角圏同値 $h\mathcal{C} \cong \mathcal{T}$ が成立するとき，$\mathcal{T}$ は ∞ 増強を持つ (admits an ∞-categorical enhancement) という．

このような $\mathcal{C}$ が ∞ 圏同値を除いて一意に定まるとき，$\mathcal{T}$ は一意な ∞ 増強を持つ (admits a unique ∞-categorical enhancement) という．

∞ 圏の表現可能性の定義だけ書いておく．

定義 1.2 (**表現可能**)**.**

三角圏のコンパクト生成について復習する．

定義 1.3 (**生成する**)**.** $\mathcal{T}$ は有限余直積を持つとする．$\{X_i\}$ を $\mathcal{T}$ の対象の集まりとする．$Y \in \mathcal{T}$ が任意の X_i と n に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, Y[n])$ ならば $Y \cong 0$ であるとき，$\{X_i\}$ は $\mathcal{T}$ を生成する (generate) という．

定義 1.4 (**コンパクト**)**.** $\mathcal{T}$ は有限余直積を持つとする．$\mathcal{T}$ の対象 X に対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, -)$ が余直積を保つとき，X はコンパクト (compact) であるという．

定義 1.5 (**コンパクト生成**)**.** $\mathcal{T}$ は有限余直積を持つとする．コンパクト対象のなす $\mathcal{T}$ の充満部分圏を $\mathcal{T}^{\omega}$ と表す．$\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}^{\omega}$ で生成されるとき，$\mathcal{T}$ はコンパクト生成 (compactly generated) であるという．

定理 1.6 (**HA 1.4.4.2, 1.4.4.3**)**.** $\mathcal{T}$ はコンパクト生成かつ ∞ 増強 $\mathcal{C}$ を持つとする．このとき，$\mathcal{C}$ は表現可能である．

三角圏の t 構造と安定 ∞ 圏の t 構造について復習する.

定義 1.7 (三角圏の t 構造).

定義 1.8 (安定 ∞ 圏の t 構造).

特別な性質を持つ t 構造を定義する. $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ を三角圏の t 構造, $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ を安定 ∞ 圏の t 構造とする.

定義 1.9 (分離的). $\mathcal{T}$ 上の t 構造 $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ に対して,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\geq n} = 0$$

であるとき, $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ は左分離的 (left separated) であるという.

双対的に, $\mathcal{T}$ 上の t 構造 $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ に対して,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\leq n} = 0$$

であるとき, $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ は右分離的 (right separated) であるという.

定義 1.10 (完備). $\mathcal{C}$ 上の t 構造 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ に対して, 自然な射

$$\mathcal{C} \to \lim(\cdots \mathcal{C}_{\leq 2} \xrightarrow{\tau_{\leq 1}} \mathcal{C}_{\leq 1} \xrightarrow{\tau_{\leq 0}} \mathcal{C}_{\leq 0})$$

が圏同値であるとき, $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ は左完備 (left complete) であるという.

双対的に, $\mathcal{C}$ 上の t 構造 $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ に対して, 自然な射

$$\mathcal{C} \to \lim(\cdots \mathcal{C}_{\geq -2} \xrightarrow{\tau_{\geq -1}} \mathcal{C}_{\geq -1} \xrightarrow{\tau_{\geq 0}} \mathcal{C}_{\geq 0})$$

が圏同値であるとき, $(\mathcal{C}_{\geq 0}, \mathcal{C}_{\leq 0})$ は右完備 (right complete) であるという.

補題 1.11. $\mathcal{T}$ 上の t 構造 $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ が左分離的であるとする. 対象 $X \in \mathcal{T}$ が任意の n に対して $\tau_{\leq n} X \cong 0$ であるとき, $X \cong 0$ である.

Proof. 条件を満たす X に対して完全三角を考えると, 任意の n に対して $\tau_{\leq n} X \cong 0$ なので, 任意の n に対して $\tau_{\geq n+1} X \cong X$ である. $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$ は左分離的なので,

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \tau_{\geq n+1} X \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\geq n} = 0$$

となる. □

補題 1.12. $\mathcal{C}$ が左 (右) 完備であるとき, $\mathcal{C}$ は左 (右) 分離的である.