安定 ∞ 圏

よの

2023 年 10 月 30 日

概要

目次

1 安定 ∞ 圏

1.1 安定性

定義 1.1 (始対象と終対象). $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする. $\mathcal{C}$ のある対象 $\emptyset$ が, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\emptyset, X)$ が可縮な Kan 複体であるとき, $\emptyset$ を始対象 (initial object) という.

双対的に, $\mathcal{C}$ のある対象 1 が, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, 1)$ が可縮な Kan 複体であるとき, 1 を終対象 (terminal object) という.

定義 1.2 (基点付き ∞ 圏). $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする. $\mathcal{C}$ のある対象 0 が始対象かつ終対象であるとき, 0 を零対象 (zero object) という. $\mathcal{C}$ が零対象を持つとき, $\mathcal{C}$ は基点付き (pointed) であるという.

注意 1.3. 零対象は存在すれば同型を除いて一意である.

定義 1.4 (ヌルホモトピー). $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏, $f : X \to Y$ を $\mathcal{C}$ の射とする. 次の図式で表される 2

単体 $\Delta^2 \to \mathcal{C}$ を f のヌルホモトピーという．また, ヌルホモトピーを持つ f を 0 射 (0-map) という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

補題 1.5. $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ が基点付きであることと, 次の 3 つの条件を満たすことは同値である．

1. $\mathcal{C}$ は始対象 $\emptyset$ を持つ．
2. $\mathcal{C}$ は終対象 1 を持つ．
3. $\mathcal{C}$ の射 $f : 1 \to \emptyset$ が存在する．

Proof. $\mathcal{C}$ が基点付きであるとき, 3 つの条件を満たすことは明らかである．

逆に, 条件 (1) から (3) が満たされているとする．$\emptyset$ は始対象なので, 射 $g : \emptyset \to 1$ が存在する．$\emptyset$ は始対象なので, $fg \simeq \mathrm{id}_\emptyset$ である．1 は終対象なので, $gf \simeq \mathrm{id}_1$ である．よって, g は f のホモトピー逆射なので, f は同型射である．従って, $\emptyset$ は終対象でもあるので, $\mathcal{C}$ は基点付きである． □

定義 1.6 ((コ) ファイバー). $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする．次の形で表される射 $\Delta^1 \times \Delta^1 \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の三角 (diagram) という．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

この三角が pullback であるとき, 三角をファイバー列 (fibre sequence) という．双対的に, この三角が pushout であるとき, 三角をコファイバー列 (cofibre sequence) という．

このようなファイバー列が存在するとき, g はファイバーを持つという．双対的に, このようなコファイバー列が存在するとき, f はコファイバーを持つという．このとき, $X := \mathrm{fib}(g), Z := \mathrm{cofib}(f)$ と表す．

また, $\mathcal{C}$ の任意の射が (コ) ファイバーを持つとき, $\mathcal{C}$ は (コ) ファイバーを持つという．

注意 1.7. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ の三角は次のデータから構成される．

1. $\mathcal{C}$ の射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$
2. h が g と f の合成であることを表す 2 単体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

3. h のヌルトピックを表す 2 単体

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

記法 1.8. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする. $\mathcal{C}$ の三角を次のように表す.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ファイバーやコファイバーをとる操作は関手とみなせる

注意 1.9.

補題 1.10.

定義 1.11 (安定 ∞ 圏). ∞ 圏 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{C}$ は安定 (stable) であるという.

(S1) $\mathcal{C}$ は基点付きである, つまり零対象 0 を持つ.
(S2) $\mathcal{C}$ はファイバーとコファイバーを持つ.
(S3) $\mathcal{C}$ の三角がファイバー列であることとコファイバー列であることは同値である.

注意 1.12. 安定 ∞ 圏の条件 (1) は Abel 圏における零対象の存在, (2) は核と余核の存在, (3) は準同型定理 (射の像と余像が同型である) をそれぞれ表している. つまり, 安定 ∞ 圏は Abel 圏の無限圏 ver であると考えられる.

注意 1.13. 安定 ∞ 圏は ∞ 圏に追加の構造を持たせたものではなく, ∞ 圏の持つ性質を用いて定義されている.

補題 1.14. $\mathcal{C}$ が安定 ∞ 圏であるとき, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ も安定 ∞ 圏である.

Proof. 安定 ∞ 圏の定義が双対的であることから従う. □

1.2 安定 ∞ 圏のホモトピー圏

∞ 圏のホモトピー圏が三角圏の構造を持つ条件について考える.

$\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏, 0 と $0'$ を $\mathcal{C}$ の零対象とする. 次の pushout で表される図式の $\mathbf{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ の充満部分圏を $\mathcal{M}^{\Sigma}$ と表す.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

HTT.4.3.2.15 を 2 回用いると, 自明なファイブレーション $e : \mathcal{M}^{\Sigma} \to \mathcal{C}$ を得る. $s : \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\Sigma}$ を e の切断とする. このとき,

$$\Sigma_{\mathcal{C}} := e \circ s : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

を $\mathcal{C}$ 上の懸垂 (suspention functor) という. 双対的に, 同じ形の pulback で表される $\mathbf{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ の充満部分圏を $\mathcal{M}^{\Omega}$ と表す. $\mathcal{C}$ がファイバーを持つとき, 同様に自明なファイブレーション $e' : \mathcal{M}^{\Omega} \to \mathcal{C}$ を得る. $s' : \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\Omega}$ を e' の切断とする. このとき,

$$\Omega\mathcal{C} := e' \circ s' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

を $\mathcal{C}$ 上のループ (loop functor) という. $\mathcal{C}$ が安定であるとき, $\mathcal{M}^{\Sigma} = \mathcal{M}^{\Omega}$ である. よって, 懸垂とループは互いに $\mathcal{C}$ 上の逆関手である.

記法 1.15. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする. 任意の $X \in \mathcal{C}$ と $n \geq 0$ に対して,

$$X[n] := \Sigma^n(X)$$

と表し, 懸垂の n 乗 (n-th power of the suspension functor) という. $n \leq 0$ に対して,

$$X[n] := \Omega^n(X)$$

と表し, ループの $-n$ 乗 ($(-n)$-th power of the loop functor) という. 誘導されるホモトピー圏上の関手の対応も同じ記号を用いて表す.

注意 1.16. $\mathcal{C}$ が安定ではない基点付き ∞ 圏のとき, 懸垂とループはホモトピー逆関手ではないが, 随伴ではある.

補題 1.17. $\mathcal{C}$ をコファイバーを持つ基点付き ∞ 圏かつ懸垂 $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が圏同値であるとする. このとき, $h\mathcal{C}$ は加法圏である.

Proof. $h\mathcal{C}$ が有限余直積を持つことを示す. $\mathcal{C}$ は終対象を持つので, 2 つの対象の余直積を持つことを示せばよい. $\mathrm{cofib} : \mathbf{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ をコファイバーをとる関手とする. 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, 次の同型が存在する.

$$X \cong \mathrm{cofib}(X[-1] \xrightarrow{u} 0), \quad Y \cong \mathrm{cofib}(0 \xrightarrow{v} Y)$$

よって, $u \oplus v : X[-1] \to Y$ が得られるが, これは 0 射である. 補題 1.10 より, cofib 関手は余直積を保つので,

$$\mathrm{cofib}(u \oplus v) = \mathrm{cofib}(X[-1] \xrightarrow{u \oplus v} Y) = \mathrm{cofib}(X[-1] \xrightarrow{u} 0) \oplus \mathrm{cofib}(0 \xrightarrow{v} Y) = X[-1] \oplus Y$$

となる. □

定義 1.18 (完全三角). $\mathcal{C}$ をコファイバーを持つ基点付き ∞ 圏とする．ホモトピー圏 $h\mathcal{C}$ における図式

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

が与えられているとする．次の形で表される図式 $\Delta^1 \times \Delta^2 \to \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}"] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r, "\tilde{h}"] & W \end{tikzcd}$$

が次の条件を満たすとき, $h\mathcal{C}$ における上の図式を完全三角 (distinguished triangle) という．

1. 左と右の四角は $\mathcal{C}$ の pushout である．
2. $h(\tilde{f}) = f$ かつ $h(\tilde{g}) = g$ である．
3. $\tilde{h} : Z \to W$ と外の四角により定まる同型 $\tilde{i} : W \xrightarrow{\cong} X[1]$ の合成に対して, $h = h(\tilde{i} \circ \tilde{h})$ である．

定義 1.18 の完全三角

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

で貼られる $\mathbf{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^2, \mathcal{C})$ の充満部分圏を $\mathcal{E}$ と表す．

命題 1.19. $\mathcal{C}$ をコファイバーを持つ基点付き ∞ 圏かつ懸垂 $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が圏同値であるとする．このとき, $h\mathcal{C}$, 記法 1.15 の懸垂とループ, $\mathcal{E}$ の 3 つ組 $(h\mathcal{C}, [-], \mathcal{E})$ は三角圏の構造を持つ．

Proof. 三角圏の公理を順番に示す．

(TR1) (b) $\mathcal{E}$ が同型で閉じていることは pushout の普遍性などから明らかである．(c) 上の図式において $f = \mathrm{id}_X$ とすると, Z は 0 対象となることから従う．

(TR2) $h\mathcal{C}$ における完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

を定める $\mathcal{E}$ における図式を σ とする. σ を次の図式に拡張する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "u"] \\ & 0'' \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

ここで, 右下の四角は pushout である. 次の 2 つの四角

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0' \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0'' \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

の間の射は $h\mathcal{C}$ における次の可換図式を定める.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "u"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ V \arrow[r, "\cong"] & Y[1] \end{tikzcd}$$

Lemma.1.1.2.13 を右の四角に適応すると,

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

は $h\mathcal{C}$ における完全三角である. 逆に, 次の図式

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

が完全三角であるとする. 懸垂 $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は圏同値なので, 次の図式

$$Y[-2] \xrightarrow{g[-2]} Z[-2] \xrightarrow{h[-2]} X[-1] \xrightarrow{-f[-1]} Y[-1]$$

は完全三角である. 先の議論を 5 回用いると, 次の図式

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

は完全三角である.

(TR3) $h\mathcal{C}$ における完全三角

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow X'[1]$$

を定める $\mathcal{E}$ における図式をそれぞれ σ, σ' とする．$h\mathcal{C}$ における次の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

は $\mathcal{C}$ のある四角に (一意とは限らないが) リフトする．この四角を

□

定義 1.20 (Ext 群).

1.3 安定 ∞ 圏における (余) 極限

安定 ∞ 圏の部分圏を定義する．

定義 1.21 (安定部分圏). $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする．$\mathcal{C}_0$ を 0 対象を持ち，ファイバーとコファイバーをとる操作で安定であるとする．このとき，$\mathcal{C}_0$ は安定 ∞ 圏であり，$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の安定部分圏 (stable subcategory) という．

Proof. $\mathcal{C}_0$ が安定 ∞ 圏であることを示す．$\mathcal{C}_0$ は 0 対象を持つので，(S1) を満たす．$\mathcal{C}_0$ はファイバーとコファイバーをとる操作で安定なので，(S2) を満たす．$\mathcal{C}_0$ の三角は $\mathcal{C}$ の三角なので，$\mathcal{C}$ の安定性から，(S3) を満たす． □

補題 1.22. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする．$\mathcal{C}_0$ をコファイバーと translation をとる操作で安定な $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする．このとき，$\mathcal{C}_0$ は $\mathcal{C}$ の安定部分圏である．

命題 1.23. $\mathcal{C}$ を基点付き ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ が安定であることと，次の 2 つが成立することは同値である．

1. $\mathcal{C}$ は有限極限と有限余極限を持つ．
2. $\mathcal{C}$ の四角が pushout であることと pullback であることは同値である．

Proof. (1) と (2) が満たされているとする．(1) は $\mathcal{C}$ のファイバーとコファイバーを持つことを示し

ているので, (S2) を満たす. (2) はファイバー列とコファイバー列の同値性を示しているので, (S3) を満たす.

逆に, $\mathcal{C}$ が安定であるとする. (途中) $\square$

安定 ∞ 圏はファイバーとコファイバーのみを用いて定義された. しかし, 命題 1.23 より次が従う.

系 1.24. 安定 ∞ 圏は有限極限と有限余極限を持つ.

注意 1.25. $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする. 系 1.24 より, $\mathcal{C}$ は有限極限と有限余極限を持つ. 更に, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, 自然な射

$$X \sqcup Y \to X \times Y$$

が行列

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_X & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_Y \end{pmatrix}$$

によって与えられる. 命題 1.19 より, この射は同型である. よって, $\mathcal{C}$ における X と Y の直積かつ余直積を $X \otimes Y$ と表す.

1.4 完全関手

基点付き ∞ 圏の間の関手を定義する.

定義 1.26 (簡約関手). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を基点付き ∞ 圏, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を ∞ 圏の関手とする. $\mathcal{F}$ が零対象を保つとき, $\mathcal{F}$ は簡約 (reduced) であるという. 簡約関手のなす $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の部分圏を $\mathbf{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ と表す.

安定 ∞ 圏の間の関手を定義する.

定義 1.27 (完全関手). $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を安定 ∞ 圏, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を ∞ 圏の関手とする. $\mathcal{F}$ が 0 対象とファイバー列, コファイバー列を保つとき, $\mathcal{F}$ は完全 (exact) であるという. 完全関手のなす $\mathbf{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の部分圏を $\mathbf{Fun}^{\mathrm{Ex}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ と表す. また, 安定 ∞ 圏と完全関手のなす $\mathbf{Cat}_\infty$ の部分圏を $\mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{Ex}}$ と表す.

$\mathcal{F}$ の完全性は次のように特徴づけることができる.

命題 1.28. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を安定 ∞ 圏の関手とする. このとき, 次の 3 つは同値である.

1. $\mathcal{F}$ は左完全である. つまり, $\mathcal{F}$ は有限直積を保つ.
2. $\mathcal{F}$ は右完全である. つまり, $\mathcal{F}$ は有限余直積を保つ.
3. $\mathcal{F}$ は完全である.

Proof. 補題 1.14 より, (2) と (3) の同値性を示せばよい. まず, (2) から (3) を示す. $\mathcal{F}$ が有限余直積を保つとき, 特に $\mathcal{F}$ はコファイバー列を保つ. 安定 ∞ 圏において, 三角がファイバー列であることとコファイバー列であることは同値であるので, $\mathcal{F}$ はファイバー列を保つ.

(3) から (2) を示す．$\mathcal{F}$ が完全であるとする．安定 ∞ 圏において coequalizer は cofib で表されるので, $\mathcal{F}$ は coequalizer を保つ．補題 1.17 より, 有限余直積は cofib で表されるので, $\mathcal{F}$ は有限余直積を保つ．HTT.4.4.3.2 より, $\mathcal{F}$ は有限余直積を保つ． □

2 安定 ∞ 圏と Homological Algebra

2.1 安定 ∞ 圏上の t 構造

定義 2.1 (局所化). $\mathcal{C}$ を ∞ 圏, $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の充満部分圏とする．包含 $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ が左随伴をもつとき, $\mathcal{C}'$ を $\mathcal{C}$ の局所化 (localization) という．

定義 2.2 (安定 ∞ 圏上の t 構造). $\mathcal{C}$ を安定 ∞ 圏とする．$h\mathcal{C}$ 上の t 構造を $\mathcal{C}$ 上の t 構造 (t-structure) という．$\mathcal{C}$ が t 構造を持つとき, $(h\mathcal{C})_{\geq n}$ と $(h\mathcal{C})_{\leq n}$ の対象で貼られる $\mathcal{C}$ の充満部分圏をそれぞれ $\mathcal{C}_{\geq n}$ と $\mathcal{C}_{\leq n}$ と表す．

命題 2.3. $\mathcal{C}$ を t 構造を持つ安定 ∞ 圏とする．任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 充満部分圏 $\mathcal{C}_{\leq n}$ は $\mathcal{C}$ の局所化である．

Proof. $n = -1$ のときを示す．HTT.5.2.7.8. より, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, ある対象 $X'' \in \mathcal{C}_{\leq -1}$ と射 $f : X \to X''$ が存在して, 任意の $Y \in \mathcal{C}_{\leq -1}$ に対して, 射

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X'', Y) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

が弱ホモトピー同値であることを示せばよい．t 構造の定義より, ある対象 $X' \in \mathcal{C}_{\leq 0}$ が存在して,

$$X' \to X \xrightarrow{f} X''$$

はファイバー列である．Whitehead の定理より, 任意の $k \leq 0$ に対して, 射

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{C}}(X'', Y) \to \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

が Abel 群の同型であることを示せばよい．(途中) □

系 2.4. $\mathcal{C}$ を t 構造を持つ安定 ∞ 圏とする．$\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{C}_{\leq n}$ は $\mathcal{C}$ における極限で安定である．双対的に, $\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{C}_{\geq n}$ は $\mathcal{C}$ における余極限で安定である．

Proof. $\mathcal{C}_{\leq n}$ は $\mathcal{C}$ の局所化なので, 包含 $\mathcal{C}_{\leq n} \to \mathcal{C}$ は右随伴である．よって, $\mathcal{C}_{\leq n}$ は $\mathcal{C}$ における極限で安定である． □

定義 2.5 (trancation 関手). $\mathcal{C}$ を t 構造を持つ安定 ∞ 圏とする．包含 $\mathcal{C}_{\leq n} \to \mathcal{C}$ の左随伴を $\tau_{\leq n} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\leq n}$, 包含 $\mathcal{C}_{\geq n} \to \mathcal{C}$ の右随伴を $\tau_{\geq n} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\geq n}$ と表す．$\tau_{\leq n}$ と $\tau_{\geq n}$ をともに trancation 関手 (trancation functor) という．

注意 2.6. $\mathcal{C}$ を t 構造を持つ安定 ∞ 圏とする．このとき, trancation 関手 $\tau_{\leq n}, \tau_{\geq n}$ は $\mathcal{C}$ の充満部分圏 $\mathcal{C}_{\leq m}$ 上の関手である．つまり,

$(m \leq n)$ $\tau_{\leq n} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\leq n}$ は $\tau_{\leq m}$ 上の恒等関手に一致する．
$(m \geq n)$ $\tau_{\leq n} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\leq n}$ の本質的像は $\mathcal{C}_{\leq m} \subset \mathcal{C}_{\leq n}$ に含まれる．

Proof. まず, $m \leq n$ のときを示す．このとき, $\mathcal{C}_{\leq m} \subset \mathcal{C}_{\leq n}$ である．任意の $Y \in \mathcal{C}_{\leq m}$ に対して,

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}_{\leq m}}(\tau_{\leq m}\tau_{\leq n}X, Y) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_{\leq n}}(\tau_{\leq n}X, Y) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_{\leq m}}(\tau_{\leq m}X, Y)$$

Yoneda の補題より, $\tau_{\leq m}\tau_{\leq n}X \to \tau_{\leq m}X$ は同型である．

$\tau_{\leq n}\mathcal{C}_{\leq m} = \mathcal{C}_{\leq m}$ を示す．$\tau_{\leq n}\mathcal{C}_{\leq m} \subset \mathcal{C}_{\leq m}$ は上の議論より従う． □

系 2.7. $\mathcal{C}$ を t 構造を持つ安定 ∞ 圏とする．注意 2.6 より, 次の単体的集合の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{\geq n} \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{\leq m}"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\tau_{\leq m}"] \\
C_{\geq n} \cap \mathcal{C}_{\leq m} \arrow[r] & \mathcal{C}_{\leq m}
\end{tikzcd}$$

Proof. □

定理 2.8. a