dg 増強

よの

2023 年 8 月 24 日

概要

目次

1 ねじれ複体

加法圏から複体の圏を構成したように, dg 圏からねじれ複体の圏を構成する. $\mathcal{A}$ を dg 圏とする.

定義 1.1 (ねじれ複体). $\{E_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $\mathcal{A}$ の対象, $q_{i,j} : E_i \to E_j$ を次数 $i-j+1$ の $\mathcal{A}$ の射とする. $\{E_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が有限個を除いて 0 であり,

$$dq_{i,j} + \sum_k q_{k,j}q_{i,k} = 0$$

を満たすとき, 組 $\{(E_i)_{i\in\mathbb{Z}}, q_{i,j} : E_i \to E_j\}$ を $\mathcal{A}$ 上のねじれ複体 (twisted complex) という.

例 1.2. $\mathcal{A}$ が加法圏 $\mathcal{B}$ 上の複体の圏のとき, ねじれ複体は通常の複体に一致する.

Proof. 加法圏は自明な微分を持つので, $dq = 0$ である. よって, ねじれ複体の条件は $q^2 = 0$ となり, 通常の複体の定義に一致する. □

dg 圏上のねじれ複体の圏は dg 圏の構造を持つ.

補題 1.3. ねじれ複体 $C = \{E_i, q_{i,j}\}, C' = \{E'_i, q'_{i,j}\}$ に対して

$$\mathrm{Hom}^k(C, C') := \bigoplus_{l+j-i=k} \mathrm{Hom}^l_{\mathcal{A}}(E_i, E'j)$$

として, 任意の $f \in \mathrm{Hom}^l_{\mathcal{A}}(E_i, E'j)$ に対して

$$df := d_{\mathcal{A}}f + \sum_m \left(q_{j,m}f + (-1)^{l(i-m+1)}fq_{m,i}\right)$$

と定義すると, ねじれ複体の圏は dg 圏の構造を持つ.

定義 1.4. ねじれ複体の次数 0 の閉じた射をねじれ射 (twisted morphism) という.

$\mathcal{A}^{\oplus}$ を $\mathcal{A}$ に対象の有限直和を付け加えた圏とする. $\mathcal{A}^{\oplus}$ 上のねじれ複体の dg 圏を Pre-Tr($\mathcal{A}$), その 0 次コホモロジー圏を Tr($\mathcal{A}$) と表す.

補題 1.5. dg 関手 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ は dg 関手

$$\text{Pre-Tr}(F) : \text{Pre-Tr}(\mathcal{A}) \to \text{Pre-Tr}(A')$$

と関手

$$\mathrm{Tr}(F) : \mathrm{Tr}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Tr}(\mathcal{A})$$

を定める.

定義 1.6 (シフト).

定義 1.7 (錐). $C = \{E_i, q_{i,j}\}, C' = \{E'_i, q'_{i,j}\}$ をねじれ複体, $f = \{f_{i,j} : E_i \to E'_j\}$ をねじれ射とする. このとき, ねじれ複体 $\mathrm{Cone}(f) = \{E''_i, q''_{i,j}\}$ を次のように定義して, f の錐 (cone) という.

$$E''_i := E_i \oplus E'_{i-1}, \quad q''_{i,j} := \begin{pmatrix} q_{i,j} & f_{i,j} \\ 0 & q_{i,j} \end{pmatrix}$$

定義 1.8. dg 関手

$$\alpha : \text{Pre-Tr}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \text{dg-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathbf{Ab}))$$

を次のように定義する. $K = \{E_i, q_{i,j}\}$ を Pre-Tr$\mathcal{A}$ の任意の対象とする. 任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して, dg 関手 $\alpha(K) : \mathcal{A} \to C(\mathbf{Ab})$ を

$$\alpha(K)(E) := \bigoplus_i (E, E_i)[i]$$

として, 微分を $d + Q$ とする.

$(\text{Pre-Tr})^2(\mathcal{A}) := \text{Pre-Tr}(\text{Pre-Tr}(\mathcal{A}))$ とする.

定義 1.9. dg 関手

$$\mathrm{Tot}_{\mathcal{A}} : (\text{Pre-Tr})^2(\mathcal{A}) \to \text{Pre-Tr}(\mathcal{A})$$

を次のように定義する. $C = \{(C_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}, q_{i,j,k,l} : C_{i,j} \to C_{k,l}\}$ を $(\text{Pre-Tr})^2(\mathcal{A})$ の任意の対象とする. このとき,

$$\mathrm{Tot}_{\mathcal{A}}(C) := \{(D_k)_{k\in\mathbb{Z}}, r_{k,l} : D_k \to D_l\}$$

を

$$D_k := \bigoplus_{i+j=k} C_{i,j}, r_{k,l} := |q_{i,j,m,n}|, i+j=k, m+n=l$$

とする．このとき, $\mathrm{Tot}_{\mathcal{A}}(C)$ を Pre-Tr($\mathcal{A}$) 上のねじれ複体の convolution という．

定義 1.10 (前三角的). $\mathcal{A}$ 上の任意のねじれ複体 K に対する dg 関手 $\alpha(K)$ が表現可能であるとき, $\mathcal{A}$ は前三角的 (pre-triangulated) であるという．