$\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ と $\mathrm{Tr}\mathcal{A}$

よの

2023 年 8 月 13 日

概要

ねじれ複体を定義することで, 具体的な三角圏の構成を与えることができる.

目次

1 加法的拡大

I を有限集合, $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする. $\{X^i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{A}$ の対象の族, $\{V^i\}_{i\in I}$ を次数付き有限次元ベクトル空間の族とする.

定義 1.1 ($\mathcal{A}$ の対象の加法的拡大). $\{X^i\}_{i\in I}$ と $\{V^i\}_{i\in I}$ に対して, 形式的なテンソル積 $\otimes$ と直和 $\bigoplus$ [*1] を用いて

$$X = (I, \{X^i\}, \{V^i\}) := \bigoplus_{i\in I} V^i \otimes X^i$$

を $\mathcal{A}$ の対象の加法的拡大 (additive enlargement of object in $\mathcal{A}$) という.

定義 1.2 (加法的拡大の射). $\mathcal{A}$ の対象の加法的拡大 $X_0 = \bigoplus_{i\in I_0} V_0^i \otimes X_0^i, X_1 = \bigoplus_{j\in I_1} V_1^j \otimes X_1^j$ に対して, X_0 から X_1 への射の集まり $\hom(X_0, X_1)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\hom(X_0, X_1) &= \hom\left(\bigoplus_{i\in I_0} V_0^i \otimes X_0^i, \bigoplus_{j\in I_1} V_1^j \otimes X_1^j\right) \\ &:= \left(\bigoplus_{i,j} \hom_{\mathbb{K}}(V_0^i, V_1^j) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0^i, X_1^j)\right)\end{aligned}$$

[*2] $\hom(X_0, X_1)$ の元を加法的拡大の射 (morphism of additive enlargements) という.

加法的拡大の射は行列表示することができる.

記法 1.3 (加法的拡大の射の行列表示). 加法的拡大の射に対して

$$\begin{aligned} a^{ji} &\in \hom_{\mathbb{K}}(V_0^i, V_1^j) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0^i, X_1^j) \\ \sum_k \phi^{j,i,k} &\in \hom_{\mathbb{K}}(V_0^i, V_1^j) \\ \sum_k x^{j,i,k} &\in \hom_{\mathcal{A}}(X_0^i, X_1^j)\end{aligned}$$

とすると, 任意の $a \in \hom(X_0, X_1)$ は

$$a = (a^{j,i}) = \begin{pmatrix} a^{1,1} & \cdots & a^{1,I_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{I_0,1} & \cdots & a^{I_0,I_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k \phi^{1,1,k} \otimes x^{1,1,k} & \cdots & \sum_k \phi^{1,I_1,k} \otimes x^{1,I_1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k \phi^{I_0,1,k} \otimes x^{I_0,1,k} & \cdots & \sum_k \phi^{I_0,I_1,k} \otimes x^{I_0,I_1,k}\end{pmatrix}$$

と表される. [*3]

加法的拡大の集まりは恒等射を持たない A_∞ 圏を定める.

定義 1.4 (恒等射を持たない A_∞ 圏 $\Sigma\mathcal{A}$). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\Sigma\mathcal{A}$ を次のように定義する.

[*1] この 2 つは単なる記号であることに注意. 3 章で定義されたテンソル積と直和とは「今は」関係がない.

[*2] 最後の $\hom_{\mathbb{K}}$ は集合で $\hom_{\mathcal{A}}$ はベクトル空間なので, 最後のテンソル積と直和は通常のものである.

[*3] $(a^{j,i})$ において $\sum$ の添え字は k で固定して書いているが, 実際は異なることに注意. 簡単のため, $k = 1$ で $\sum$ を省略する場合を考えることがある.

- $\Sigma\mathcal{A}$ の対象 X は $\mathcal{A}$ の対象の加法的拡大

$$X := \bigoplus_{i \in I} V^i \otimes X^i$$

- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ に対して, $\hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ は加法的拡大の射の集まり

$$\hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0, X_1) := \hom\left(\bigoplus_{i,j} \hom_{\mathbb{K}}(V_0^i, V_1^j) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(X_0^i, X_1^j)\right)$$

- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 = (a_1^{j,i}) = (\phi_1^{j,i} \otimes x_1^{j,i}), \cdots, a_d = (a_d^{j,i}) = (\phi_d^{j,i} \otimes x_d^{j,i})$ に対して, 合成

$$\mu_{\Sigma\mathcal{A}}^d : \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0, X_d)[2-d]$$

  は次のように定義される.

$$\mu_{\Sigma\mathcal{A}}^d(a_d, \cdots, a_1)^{i_d, i_0} := \sum_{i_1, \cdots, i_{d-1} \geq 0} (-1)^{\triangleleft} \phi_d^{i_d, i_{d-1}} \circ \cdots \circ \phi_1^{i_1, i_0} \otimes \mu_{\mathcal{A}}^d(x_d^{i_d, i_{d-1}}, \cdots, x_1^{i_1, i_0})$$
$$\mu_{\Sigma\mathcal{A}}^d(a_d, \cdots, a_1) := (\mu_{\Sigma\mathcal{A}}^d(a_d, \cdots, a_1)^{i_d, i_0})$$

  ここで

$$\triangleleft := \sum_{p<q} |\phi_p^{i_p, i_{p-1}}| \cdot (|x_q^{i_q, i_{q-1}}| - 1)$$

  である.

$\Sigma\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の加法的拡大 (additive enlargement of $\mathcal{A}$) という.

Proof. 加法的拡大 $\Sigma\mathcal{A}$ が恒等射を持たない A_∞ 圏であることをみる. つまり, $\mu_{\Sigma\mathcal{A}}$ が A_∞ 結合式

$$\sum_{m,n} (-1)^{\maltese n} \mu_{\Sigma\mathcal{A}}^{d-m+1}(a_d, \cdots, a_{n+m+1}, \mu_{\Sigma\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \cdots, a_{n+1}), a_n, \cdots, a_1) = 0$$

を満たすことをみる. これは $\mu_{\Sigma\mathcal{A}}$ の定義と $\mu_{\mathcal{A}}$ が A_∞ 結合式を満たすことより従う. □

恒等射を持たない A_∞ 圏は加法的拡大に埋め込むことができる.

補題 1.5. 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathcal{A}$ は加法的拡大 $\Sigma\mathcal{A}$ に充満部分圏として埋め込むことができる.

Proof. I は 1 点集合 $\{*\}$, X^* は任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$, V^* は標数 0 の体 $\mathbb{K}$ とすればよい.

$$X := (\{*\}, X, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \otimes X = X$$

□

2 ねじれ複体

$\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\Sigma\mathcal{A}$ を加法的拡大とする.

定義 2.1 (前ねじれ複体). $X \in \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ と $\delta_X \in \hom^1_{\Sigma\mathcal{A}}(X, X)$ の組 (X, δ_X) を前ねじれ複体 (pre-twisted complex) という. δ_X を微分 (differntial) や連結 (connection) という.

注意 2.2. $X = \bigoplus_{i \in I} V^i \otimes X^i \in \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ に対して, $\phi^{j,i,k} \in \hom_{\mathbb{K}}(V^i, V^j), x^{j,i,k} \in \hom_{\mathcal{A}}(X^i, X^j)$ とする. このとき $\delta^{j,i}_X = \sum_k \phi^{j,i,k} \otimes x^{j,i,k}$ は $|\phi^{j,i,k}| + |x^{j,i,k}| = 1$ を満たす.

前ねじれ複体に対する部分複体と商複体を形式的に定義する.

定義 2.3 (部分複体).

定義 2.4 (商複体).

定義 2.5 (ねじれ複体). 前ねじれ複体 (X, δ_X) が次の条件を満たすとき, 組 (X, δ_X) はねじれ複体 (twisted complex) [*4] であるという.

- $\delta_X = (\delta^{j,i}_X)$ はストリクト下三角行列[*5] である.
- $\Sigma\mathcal{A}$ の A_∞ 構造 $\mu_{\Sigma\mathcal{A}}$ は A_∞-Maurer-Cartan 等式 (A_∞-Maurer-Cartan equation)

$$\sum_{d \geq 1} \mu^d_{\Sigma\mathcal{A}}(\underbrace{\delta_X, \cdots, \delta_X}_{d}) = \mu^1_{\Sigma\mathcal{A}}(\delta_X) + \mu^2_{\Sigma\mathcal{A}}(\delta_X, \delta_X) + \mu^3_{\Sigma\mathcal{A}}(\delta_X, \delta_X, \delta_X) + \cdots = 0$$

を満たす.

注意 2.6. $\mu_{\Sigma\mathcal{A}}$ の定義と δ_X がストリクト下三角行列であることより, A_∞-Maurer-Cartan 等式の左辺は有限個を除いて 0 である.

定義 2.7 (恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$). 恒等射を持たない A_∞ 圏 $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ を次のように定義する.

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A} := \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ に対して $\hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(X_0, X_1) := \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- 任意の $d \geq 1$ と $a_1 = (a^{j,i}_1) = (\phi^{j,i}_1 \otimes x^{j,i}_1), \cdots, a_d = (a^{j,i}_d) = (\phi^{j,i}_d \otimes x^{j,i}_d)$ に対して, 合成

$$\mu^d_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}} : \hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(X_0, X_1) \to \hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(X_0, X_d)[2-d]$$

[*4] 定義 2.5 の条件 (1) と (2) の両方を満たすとき, 片側ねじれ複体 (one-sided twisted complex) といい, 条件 (2) のみを満たすとき, ねじれ複体 (twisted complex) という定義が主である. ねじれ複体は十分大きい d において $\mu^d_{\Sigma\mathcal{A}} = 0$ でないとき, A_∞-Maurer-Cartan 等式は無限和を含むので定義することができない. 本稿では, この意味でのねじれ複体は出てこないので, 片側ねじれ複体を単にねじれ複体という. この記法は [SS08] に従った.

[*5] $\delta_X = (\delta^{ji}_X)$ において, $j \geq i$ のとき $\delta^{ji}_X = 0$ ということである.

は次のように定義される.

$$\mu^d_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(a_d,\cdots,a_1)$$
$$:=\sum_{i_0,\cdots,i_d\geq 0}\mu^{d+i_0+\cdots+i_d}_{\Sigma\mathcal{A}}(\underbrace{\delta_{X_d},\cdots,\delta_{X_d}}_{i_d},a_d,\underbrace{\delta_{X_{d-1}},\cdots,\delta_{X_{d-1}}}_{i_{d-1}},a_{d-1},\cdots,a_1,\underbrace{\delta_{X_0},\cdots,\delta_{X_0}}_{i_0})$$

注意 2.8. δ_X がストリクト下三角行列であることより, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ の A_∞ 構造 $\mu_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}$ の左辺は有限個を除いて 0 である.

注意 2.9. $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ における A_∞ 結合式は A_∞-Maurer-Cartan 方程式に一致する.

加法的拡大はねじれ複体のなす圏に埋め込むことができる.

補題 2.10. $\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする. 加法的拡大 $\Sigma\mathcal{A}$ はねじれ複体のなす圏 $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ に充満部分圏として埋め込むことができる.

Proof. $\Sigma\mathcal{A}$ は $\delta_X:=0$ であると考えればよい. □

3 加法的拡大と Tw の関手性

加法的拡大を与える対応は恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 3.1 (恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Sigma\mathcal{G}$). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\Sigma\mathcal{G}:\Sigma\mathcal{A}\to\Sigma\mathcal{B}$ を次のように定義する.

$(e=0)$ 任意の $X=\bigoplus_{i\in I}V^i\otimes X^i\in\mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ に対して

$$\Sigma\mathcal{G}(\bigoplus_{i\in I}V^i\otimes X^i):=\bigoplus_{i\in I}V^i\otimes\mathcal{G}(X^i)$$

$(d\geq 1)$ 任意の $a_1=(a_1^{j,i})=(\phi_1^{j,i}\otimes x_1^{j,i}),\cdots,a_d=(a_d^{j,i})=(\phi_d^{j,i}\otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$\Sigma\mathcal{G}^d(a_d,\cdots,a_0)^{i,i_0}:=\sum_{i_1,\cdots,i_{d-1}}(-1)^{\triangleleft}\phi_d^{i_d,i_{d-1}}\circ\cdots\circ\phi_1^{i_1,i_0}\otimes\mathcal{G}^d(x_d^{i_d,i_{d-1}},\cdots,x_1^{i_1,i_0})$$

定義 3.2 (前自然変換 Σ^1T). 前自然変換 $T:\mathcal{G}_0\to\mathcal{G}_1$ に対して, 前自然変換 $\Sigma^1T:\Sigma\mathcal{G}_0\to\Sigma\mathcal{G}_1$ を次のように定義する.

$(d\geq 1)$ 任意の $a_1=(a_1^{j,i})=(\phi_1^{j,i}\otimes x_1^{j,i}),\cdots,a_d=(a_d^{j,i})=(\phi_d^{j,i}\otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$\Sigma^1T^d(a_d,\cdots,a_0)^{i_d,i_0}:=\sum_{i_1,\cdots,i_{d-1}}(-1)^{\triangleleft}\phi_d^{i_d,i_{d-1}}\circ\cdots\circ\phi_1^{i_1,i_0}\otimes T^d(x_d^{i_d,i_{d-1}},\cdots,x_1^{i_1,i_0})$$

補題 3.3. 対応 $G\mapsto\Sigma\mathcal{G}$ と $T\mapsto\Sigma^1T$ は恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\Sigma:nu\text{-}fun(\mathcal{A},\mathcal{B})\to nu\text{-}fun(\Sigma\mathcal{A},\Sigma\mathcal{B})$$

を定める.

同様の議論で, ねじれ複体を与える対応も恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 3.4 (恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathrm{Tw}\mathcal{G}$). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathrm{Tw}\mathcal{G}:\mathrm{Tw}\mathcal{A}\to\mathrm{Tw}\mathcal{B}$ を次のように定義する.

$(d=0)$ 任意の $(X,\delta_X)\in\mathrm{ObTw}\mathcal{A}$ に対して

$$\mathrm{Tw}\mathcal{G}(X,\delta_X):=(\Sigma\mathcal{G}X,\sum_e\Sigma\mathcal{G}^e(\delta_X,\cdots,\delta_X))$$

$(d\geq 1)$ 任意の $a_1=(a_1^{j,i})=(\phi_1^{j,i}\otimes x_1^{j,i}),\cdots,a_d=(a_d^{j,i})=(\phi_d^{j,i}\otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tw}\mathcal{G}^d(a_d,\cdots,a_0)\\ &:=\sum_{i_1,\cdots,i_d\geq 0}\Sigma\mathcal{G}^{d+i_0+\cdots+i_d}(\underbrace{\delta_{X_d},\cdots,\delta_{X_d}}_{i_d},a_d,\underbrace{\delta_{X_{d-1}},\cdots,\delta_{X_{d-1}}}_{i_{d-1}},a_{d-1},\cdots,a_1,\underbrace{\delta_{X_0},\cdots,\delta_{X_0}}_{i_0})\end{aligned}$$

定義 3.5 (前自然変換 Tw^1T). 前自然変換 $T:\mathcal{G}_0\to\mathcal{G}_1$ に対して, 前自然変換 $\mathrm{Tw}^1T:\mathrm{Tw}\mathcal{G}_0\to\mathrm{Tw}\mathcal{G}_1$ を次のように定義する.

$(d\geq 1)$ 任意の $a_1=(a_1^{j,i})=(\phi_1^{j,i}\otimes x_1^{j,i}),\cdots,a_d=(a_d^{j,i})=(\phi_d^{j,i}\otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tw}^1T^d(a_d,\cdots,a_0)\\ &:=\sum_{i_1,\cdots,i_d\geq 0}\Sigma^1T^{d+i_0+\cdots+i_d}(\underbrace{\delta_{X_d},\cdots,\delta_{X_d}}_{i_d},a_d,\underbrace{\delta_{X_{d-1}},\cdots,\delta_{X_{d-1}}}_{i_{d-1}},a_{d-1},\cdots,a_1,\underbrace{\delta_{X_0},\cdots,\delta_{X_0}}_{i_0})\end{aligned}$$

補題 3.6. 対応 $G\mapsto\mathrm{Tw}\mathcal{G}$ と $T\mapsto\mathrm{Tw}^1T$ は恒等射を考えない A_∞ 関手

$$\mathrm{Tw}:nu\text{-}fun(\mathcal{A},\mathcal{B})\to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{A},\mathrm{Tw}\mathcal{B})$$

を定める.

Tw は A_∞ 合成関手と可換である.

補題 3.7. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対して

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Tw}\mathcal{G}}\circ\mathrm{Tw}=\mathrm{Tw}\circ\mathcal{L}_{\mathcal{G}}:nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})\to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C},\mathrm{Tw}\mathcal{B})$$
$$\mathcal{R}_{\mathrm{Tw}\mathcal{G}}\circ\mathrm{Tw}=\mathrm{Tw}\circ\mathcal{R}_{\mathcal{G}}:nu\text{-}fun(\mathcal{B},\mathcal{C})\to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{A},\mathrm{Tw}\mathcal{C})$$

Tw はコホモロジー圏上の忠実充満性を保つ.

補題 3.8. 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ がコホモロジー圏上で忠実充満であるとする. このとき, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathrm{Tw}\mathcal{G}:\mathrm{Tw}\mathcal{A}\to\mathrm{Tw}\mathcal{B}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である.

4 Tw に対する c-unital 性

補題 4.1. $\mathcal{A}$ が恒等射を持つとき, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は恒等射を持つ.

Proof. 任意の $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ に対して, e_X が $\mathcal{A}$ における単位元であるとする．このとき

$$E_X = (E_X^{j,i})$$
$$E_X^{j,i} := \begin{cases} \mathrm{id}_{V^i} \otimes e_{X^i} & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases}$$

は $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ における単位元である．[*6] □

補題 4.2. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が単位的であるとき, $\mathrm{Tw}\mathcal{G} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ は恒等射を持つ.

補題 4.3. $\mathcal{C}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする．$\mathcal{A}$ が恒等射を持つとき, $\mathrm{Tw} : nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C}, \mathrm{Tw}\mathcal{A})$ は恒等射を持つ.

以上の命題を c-unital である場合に拡張する.

定理 4.4. $\mathcal{A}$ が c-unital であるとき, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は c-unital である.

Proof. $\Phi^1 = \mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相を Φ, $\tilde{\mathcal{A}} := \Phi_* \mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_∞ 圏とする．$\Phi : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ はコホモロジー圏上で忠実充満なので, 補題 3.8 より $\mathrm{Tw}\Phi : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\tilde{\mathcal{A}}$ もコホモロジー圏上で忠実充満である．補題 4.1 より, $\mathrm{Tw}\tilde{\mathcal{A}}$ は恒等射を持つ．$\mathrm{Tw}\Phi$ はコホモロジー圏上で忠実充満なので, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は c-unital である. □

定理 4.5. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が c-unital であるとき, $\mathrm{Tw}\mathcal{G} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ は c-unital である.

Proof. □

定理 4.6. $\mathcal{C}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏とする．$\mathcal{A}$ が c-unital であるとき, $\mathrm{Tw} : nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C}, \mathrm{Tw}\mathcal{A})$ は c-unital である.

Proof. 定理 4.4 の証明で用いた記法を用いる．$\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ を単位元のない A_∞ 関手, $\tilde{\mathcal{G}} := \Phi \circ \mathcal{G}$ とする．補題 3.7 より, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\hom_{nu\text{-}fun(\mathcal{C},\mathcal{A})}(\mathcal{G},\mathcal{G}) \arrow[r, "\mathcal{L}^1_\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{Tw}^1"'] & \hom_{nu\text{-}fun(\mathcal{C},\tilde{\mathcal{A}})}(\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\mathcal{G}}) \arrow[d, "\mathrm{Tw}^1"] \\
\hom_{nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C},\mathrm{Tw}\mathcal{A})}(\mathrm{Tw}\mathcal{G},\mathrm{Tw}\mathcal{G}) & \hom_{nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C},\mathrm{Tw}\tilde{\mathcal{A}})}(\mathrm{Tw}\tilde{\mathcal{G}},\mathrm{Tw}\tilde{\mathcal{G}}) \arrow[l, "\mathcal{L}^1_{\mathrm{Tw}\Phi^{-1}}"]
\end{tikzcd}$$

??より, $\mathcal{L}_\Phi$ は c-unital である．よって, 図式の平行な矢印はコホモロジー圏上において c-unital な単位元を c-unital な単位元に移す．右側の垂直な矢印も同様に, c-unital な単位元を c-unital な単位元に移す．図式の可換性より, $\mathrm{Tw} : nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to nu\text{-}fun(\mathrm{Tw}\mathcal{C}, \mathrm{Tw}\mathcal{A})$ は c-unital である. □

A_∞ 擬同値が H^0 において逆関手をもつことと定理 4.5 より, 次の命題が従う．この命題は A_∞ 増強の話で重要である.

[*6] つまり, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ における単位元は「単位行列」である.

補題 4.7. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を c-unital な A_∞ 圏とする. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が A_∞ 擬同値であるとき, $\mathrm{Tw}\mathcal{G} : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{B}$ は A_∞ 擬同値である.

5 ねじれ複体の直和とテンソル積

$\mathcal{A}$ を恒等射を持たない A_∞ 圏, $\Sigma\mathcal{A}$ を加法的拡大, $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ をねじれ複体のなす A_∞ 圏とする.

定義 5.1 (加法的拡大とねじれ複体の直和). $\Sigma\mathcal{A}$ において Y_0 と Y_1 の形式的な直和として表していた $Y_0 \oplus Y_1$ を Y_0 と Y_1 の直和 (direct sum) という.

定義 5.2 (ねじれ複体の直和). $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ において (Y_0, δ_{Y_0}) と (Y_1, δ_{Y_1}) の形式的な直和として表していた $(Y_0 \oplus Y_1, \delta_{Y_0} \oplus \delta_{Y_1})$ を (Y_0, δ_{Y_0}) と (Y_1, δ_{Y_1}) の直和 (direct sum) という.

定義 5.3 (加法的拡大のテンソル積). $Y = \bigoplus_{i \in I} W^i \otimes Y^i \in \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ と次数付き有限次元ベクトル空間 Z に対して

$$Z \otimes Y := \bigoplus_{i \in I} (Z \otimes W^i) \otimes Y^i$$

を Y のテンソル積 (tensor product) という.

テンソル積をとる操作は $\Sigma\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない A_∞ 関手を定める.

定義 5.4 ($\Sigma\mathcal{A}$ 上のテンソル積関手). 恒等射を考えない A_∞ 関手 $Z \otimes - : \Sigma\mathcal{A} \to \Sigma\mathcal{A}$ を次のように定義する.

$(d = 0)$ 任意の $Y \in \mathrm{Ob}\Sigma\mathcal{A}$ に対して $(Z \otimes -)(Y) := Z \otimes Y$
$(d = 1)$ 任意の $a_1 = (a_1^{ji}) = (\phi_1^{j,i} \otimes y_1^{j,i}) \in \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して

$$\begin{aligned}(Z \otimes -)^1(a_1) &:= \mathrm{id}_Z \otimes a := \bigoplus_{i,j} (\mathrm{id}_Z \otimes \phi_1^{j,i}) \otimes y_1^{j,i} \\ &\in \bigoplus_{i,j} \hom_{\mathbb{K}}(Z \otimes W_0^i, Z \otimes W_1^j) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(Y_0^i, Y_1^j)\end{aligned}$$

$(d \geq 2)$ 任意の $a_1 = (a_1^{j,i}) = (\phi_1^{j,i} \otimes x_1^{j,i}), \cdots, a_d = (a_d^{j,i}) = (\phi_d^{j,i} \otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$(Z \otimes -)^d(a_d, \cdots, a_1) := 0$$

定義 5.5 (ねじれ複体のテンソル積). $(Y = \bigoplus_{i \in I} W^i \otimes Y^i, \delta_Y) \in \mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ と有限次元次数付きベクトル空間 Z に対して

$$Z \otimes Y := \bigoplus_{i \in I} (Z \otimes W^i) \otimes Y^i$$

$$\delta_{Z \otimes Y} := \mathrm{id}_Z \otimes \delta_Y = \left(\sum_k (\mathrm{id}_Z \otimes \phi^{jik}) \otimes y^{jik} \right)$$

[7] をねじれ複体のテンソル積 (tensor product of twisted complex) という．ここで

$$(\mathrm{id}_Z \otimes \phi^{jik})(z \otimes w) = (-1)^{|\phi^{jik}|\cdot|z|} \otimes \phi^{jik}(w)$$

である．

テンソル積をとる操作は $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ 上の恒等射を考えない A_∞ 関手を定める．

定義 5.6 ($\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ **上のテンソル積関手**)**.** 恒等射を考えない A_∞ 関手 $Z \otimes - : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}$ を次のように定める．

$(d = 0)$ 任意の $(Y, \delta_Y) \in \mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ に対して

$$(Z \otimes -)(Y, \delta_Y) := (Z \otimes Y, \delta_{Z \otimes Y})$$

$(d = 1)$ 任意の $a_1 = (a_1^{ji}) = (\phi_1^{j,i} \otimes y_1^{j,i}) \in \hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}((Y_0, \delta_{Y_0}), (Y_1, \delta_{Y_1}))$ に対して

$$\begin{aligned}(Z \otimes -)^1(a) := \mathrm{id}_Z \otimes a &:= \bigoplus_{i,j} (\mathrm{id}_Z \otimes \phi^{ji}) \otimes y^{ji} \\ &\in \bigoplus_{i,j} \hom_{\mathbb{K}}(Z \otimes W_0^i, Z \otimes W_1^j) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(Y_0^i, Y_1^j)\end{aligned}$$

$(d \geq 2)$ 任意の $a_1 = (a_1^{j,i}) = (\phi_1^{j,i} \otimes x_1^{j,i}), \cdots, a_d = (a_d^{j,i}) = (\phi_d^{j,i} \otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$(Z \otimes -)^d(a_d, \cdots, a_1) := 0$$

注意 5.7. A_∞-Yoneda 埋め込みによって，$\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ 上のテンソル積関手 $Z \otimes - : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は $mod(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ 上のテンソル積関手

$$\mathcal{Z} \otimes - : mod(\mathrm{Tw}\mathcal{A}) \to mod(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$$

を定める．

6 ねじれ複体のシフト

1 次元ベクトル空間 $\mathcal{K}$ を $-\sigma$ シフトさせた $\mathbb{K}[\sigma] = (\mathbb{K}[\sigma], d_{\mathbb{K}[\sigma]})$ を複体とみなす．

定義 6.1 (ねじれ複体のシフト). 複体 $\mathbb{K}[\sigma]$ と $(Y = \bigoplus_{i \in I} W^i \otimes Y^i, \delta_Y) \in \mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ のテンソル積をねじれ複体の σ 重シフト (σ-shift) といい，$S^\sigma Y$ と表す．

$$S^\sigma Y := \mathbb{K}[\sigma] \otimes Y = \bigoplus_{i \in I} W^i[\sigma] \otimes Y^i$$

$$\delta_{S^\sigma Y} := \mathrm{id}_{\mathbb{K}[\sigma]} \otimes Y = \left(\sum_k (-1)^{\sigma|\phi^{jik}|} \phi^{jik} \otimes y^{jik} \right)$$

1 重シフトを単にシフト (shift) といい，SY と表す．

[7] これは $\delta = (\delta^{ji})$ と同じ記法である．

定義 6.2 ($\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ **上のシフト関手**)**.** $\mathbb{K}[\sigma]$ のテンソル積関手をシフト関手 (shift functor) といい, $S^\sigma := \mathbb{K}[\sigma] \otimes - : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}$ と表す.

$(d=0)$ 任意の $(Y, \delta_Y) \in \mathrm{Ob}\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ に対して

$$S^\sigma(Y) := (S^\sigma Y, \delta_{S^\sigma Y})$$

$(d=1)$ 任意の $a_1 = (a_1^{ji}) = (\phi_1^{j,i} \otimes y_1^{j,i}) \in \hom_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}((Y_0, \delta_{Y_0}), (Y_1, \delta_{Y_1}))$ に対して

$$\begin{aligned}(S^\sigma)^1(a) &:= \left(\sum_k (-1)^{\sigma|\phi^{jik}|} \otimes y^{jik}\right) \\ &\in \hom_{\mathbb{K}}(W_0^i[\sigma], W_1^j[\sigma]) \otimes \hom_{\mathcal{A}}(Y_0^i, Y_1^j)\end{aligned}$$

$(d \geq 2)$ 任意の $a_1 = (a_1^{j,i}) = (\phi_1^{j,i} \otimes x_1^{j,i}), \cdots, a_d = (a_d^{j,i}) = (\phi_d^{j,i} \otimes x_d^{j,i})$ に対して

$$(S^\sigma)^d(a_d, \cdots, a_1) := 0$$

補題 6.3. $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ 上のシフト関手 $S^\sigma : \mathrm{Tw}\mathcal{A} \to \mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は A_∞ 同型である.

7 ねじれ複体における微分の取り換え

$\mathcal{A}$ は恒等射を持つ A_∞ 圏であるとする.

定義 7.1.

8 ねじれ複体の写像錐

定義 8.1 (ねじれ複体の写像錐). $\mu^1_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(c) = 0$ である $c \in \hom^0_{\mathrm{Tw}\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$ に対して

$$(\mathrm{Cone}(c), \delta_{\mathrm{Cone}(c)}) := \left(SY_0 \oplus Y_1, \begin{pmatrix} \delta_{SY_0} & 0 \\ -Sc & \delta_{Y_1} \end{pmatrix}\right)$$

を c の写像錐 $\mathrm{Cone}(c)$ という.

9 $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ における完全三角

$\mathcal{A}$ は恒等射を持つとする.

定理 9.1. $\mathrm{Tw}\mathcal{A}$ は三角 A_∞ 圏である.

定理 9.2. $H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ は三角圏である.

補題 9.3. $H(\mathrm{Tw}\mathcal{F}) : H(\mathrm{Tw}\mathcal{A}) \to H(\mathrm{Tw}\mathcal{B})$ は完全三角を完全三角をうつす. よって, $H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{F}) : H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{A}) \to H^0(\mathrm{Tw}\mathcal{B})$ は完全関手である.

10　Tw$\mathcal{A}$ への完全三角の埋め込み

補題 10.1. 次の 2 つは同値である.

1. $H(\mathcal{A})$ において三角図式

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[rr, "{[c_1]}"] & & Y_1 \arrow[dl, "{[c_2]}"] \arrow[dl, phantom, ""] \\
& Y_2 \arrow[ul, "{[c_3]}"] \arrow[u, phantom, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

   は完全である.
2. 埋め込み $H(\mathcal{A}) \to H(\mathrm{Tw}\mathcal{A})$ の像における三角図式は完全である.

Proof. □

11　$mod(\mathcal{A})$ が三角 A_∞ 圏であることについて

参考文献

[SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. https://books.google.co.jp/books?id=N0QxS9Tp50UC.