Kan 複体について

よの

2023 年 9 月 2 日

概要

本稿は [Lur22] の Chapter3: Kan Complexes を和訳したものである.

行間は適宜補うようにするが, 和訳と特に見分けのつかないように書く. Variant は定義や注意などに表記を変えている.

Chapter3 以降の参照は kerodon の該当箇所へのリンクを貼る. [Lur22] の Chapter1 の和訳は https://yonoha.github.io/quasi_category/kerodon/kerodon.pdf を参照.

特に断らない限り, n を 0 より大きい整数とする.

目次

第 3 章

Kan 複体について

単体的集合 X が任意 $0 \leq i \leq n$ に対して, $\sigma_0 : \Lambda^n_i \to X$ が拡張 $\sigma : \Delta^n \to X$ を持つとき, X は Kan 複体と呼ばれていた.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Kan 複体は ∞ 圏論において, 次の 3 つの理由で重要である.

- 任意の Kan 複体は ∞ 圏である. (例 1.3.0.3) 逆に, 任意の ∞ 圏 $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ に含まれる最大の Kan 複体 $\mathcal{C}^{\simeq}$ を持つ. (構成 4.4.3.1) この $\mathcal{C}^{\simeq}$ は $\mathcal{C}$ の重要な不変量である. そして, Kan 複体のホモトピー圏を理解することは, ∞ 圏のホモトピー圏を理解することへの第一歩である.
- $\mathcal{C}$ を ∞ 圏とする. 任意の点 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, Kan 複体 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ を考えることができる. この $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は X から Y への射の空間と呼ばれる. (構成 4.6.1.1) この射空間は $\mathcal{C}$ の構造を理解するために不可欠である. ∞ 圏の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ がホモトピー逆射をもつことと, ホモトピー圏のレベルで本質的全射であって, 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$ がホモトピー同値であることは同値である. (定理 4.6.2.17)
- 執筆中

この章の目標は Kan 複体のホモトピー論を理解することである. 1 節では, 単体的ホモトピー論の基礎について学ぶ. 特に, Kan ファイブレーション (定義 3.1.1.1) と緩射 (定義 3.1.2.1), 単体的集合の (弱) ホモトピー同値 (定義 3.1.6.1 と 3.1.6.12) を定義し, 基本的な性質を見る.

3.1 Kan 複体のホモトピー論

3.1.1 Kan ファイブレーション

単体的集合 X が次の条件を満たすとき, X は Kan 複体と呼ばれていた.

- 任意 $0 \leq i \leq n$ に対して, $\sigma_0 : \Lambda_i^n \to X$ が拡張 $\sigma : \Delta^n \to X$ を持つ.

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

この Kan 複体の定義を単体的集合の射においても考えることは非常に有用である.

定義 3.1.1.1 (Kan ファイブレーション). $f : X \to S$ を単体的集合の射とする. 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, 次のリフト問題が解決 (図中のドットで描かれる矢印) をもつとき, f を Kan ファイブレーション (Kan fibration) という.

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] & S \end{tikzcd}$$

つまり, 任意の単体的集合の射 $\sigma_0 : \Lambda_i^n \to X$ と $\bar{\sigma} : \Delta^n \to S$ に対して, σ_0 を $f \circ \sigma = \bar{\sigma}$ を満たす n 単体 $\sigma : \Delta^n \to X$ に拡張できるときである.

例 3.1.1.2. X を単体的集合とする. 射影 $X \to \Delta^0$ が Kan ファイブレーションであることと, X が Kan 複体であることは同値である.

Proof. 射影 $X \to \Delta^0$ が Kan ファイブレーションであるとき, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] & \Delta^0 \end{tikzcd}$$

このとき, 左上の三角は Kan 複体の定義そのものである.
逆に, X が Kan 複体であるとき, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Δ^0 は $\mathbf{Set}_{\Delta}$ における終対象なので, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \Delta^0 \end{tikzcd}$$

□

Kan ファイブレーションは包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ に対して RLP を持つ射であるので, RLP に関する一般論からいくつかの命題 (例 3.1.1.3, 注意 3.1.1.5, 注意 3.1.1.6, 注意 3.1.1.8, 注意 3.1.1.10) を示すことができる. 詳細は [Lur22, Tag 006B] を参照.

例 3.1.1.3. 任意の単体的集合の同型射は Kan ファイブレーションである.

例 3.1.1.4. summand について

注意 3.1.1.5. Kan ファイブレーションの集まりはレトラクトで閉じる.

注意 3.1.1.6. Kan ファイブレーションの集まりは pullback で閉じる.

注意 3.1.1.6 の逆は次のような形で成立する.

注意 3.1.1.7. $f : X \to S$ を単体的集合の射とする. 任意の n 単体 $\Delta^n \to S$ に対して, 射影 $\Delta^n \times_S X \to \Delta^n$ は Kan ファイブレーションであるとする. このとき, f は Kan ファイブレーションである.

このことから, 次のことがいえる. 次の図式が pullback であり, g が epi 射で f' が Kan ファイブレーションであるとき, f も Kan ファイブレーションである.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Proof. 前半を示す. 射影 $\Delta^n \times_S X \to \Delta^n$ は Kan ファイブレーションなので, 次の図式が存在する.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & \Delta^n \times_S X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \Delta^n \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] & S \end{tikzcd}$$

ここで, 右側の四角は pullback である. pullback の普遍性より, $\sigma' := p_1 \circ \sigma : \Delta^n \to X$ は f のリフトである.

後半を示す. 前半の主張より, 射影 $\Delta^n \times'_S \to \Delta^n$ が Kan ファイブレーションであることを示せばよい.

□

注意 3.1.1.8. Kan ファイブレーションの集まりはフィルター付き余極限で閉じる

注意 3.1.1.9. $f : X \to S$ を Kan ファイブレーションとする．任意の点 $s \in S$ に対して，pullback $\{s\} \times_S X$ は Kan 複体である．

Proof. 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\{s\} \times_S X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\{s\} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

$\{s\} \cong \Delta^0$ であるので，例 3.1.1.2 と注意 3.1.1.6 (Kan ファイブレーションの集まりは pullback で閉じる) より従う． □

注意 3.1.1.10. Kan ファイブレーションの集まりは合成で閉じる．

注意 3.1.1.11. $f : X \to S$ を Kan ファイブレーションとする．Y が Kan 複体であるとき，X も Kan 複体である．

Proof. 例 3.1.1.2 より，Y が Kan 複体であるとき，$g : Y \to \Delta^0$ は Kan ファイブレーションである．注意 3.1.1.10 より，$fg : X \to \Delta^0$ も Kan ファイブレーションである．例 3.1.1.2 より，X は Kan 複体である． □

3.1.2 緩射

Kan ファイブレーションは包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ に対して RLP を持つ射であるが，より広い射のクラスに対して RLP を持つことが分かる．

定義 3.1.2.1 (緩射). T を次の条件を満たす $\mathbf{Set}_\Delta$ の最小の射の集まりとする．

- 任意の $0 \le i \le n$ に対して，包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は T に属する．
- T は弱飽和である．

T に属する単体的集合の射を緩射 (anodyne morphism) [*1] という．

注意 3.1.2.2. 緩射の集まりは [GZ67] により導入された．

注意 3.1.2.3. 任意の緩射は単体的集合の mono 射である．

Proof. 任意の $0 \le i \le n$ に対して，包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は単体的集合の mono 射である．命題 1.4.5.13 より，単体的集合の mono 射の集まりは弱飽和である．T の最小性より，任意の緩射は単体的集合の

[*1] anodyne morphism の和訳は執筆時点では定着していないように思える．例えば，[鈴 23] では「緩和射」と訳されている．

mono 射である. □

例 3.1.2.4. 任意の内緩射は緩射である. 逆は一般には成立しない.

Proof. 前半は内緩射の定義からすぐに分かる. 逆は, 包含 $\Lambda^n_0 \hookrightarrow \Delta^n$ と $\Lambda^n_n \hookrightarrow \Delta^n$ は緩射ではあるが, 内緩射ではないことから分かる. □

例 3.1.2.5.

注意 3.1.2.6. 緩射の定義より, 緩射の集まりは弱飽和である.

次の命題は, 単体的集合の射が Kan ファイブレーションであるか確かめるときに有用である. これは自明な Kan ファイブレーションであるか確かめる命題 1.4.5.4 の類似である.

注意 3.1.2.7. $f : X \to S$ を単体的集合の射とする. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. f は Kan ファイブレーションである.
2. 任意の緩射 $i : A \to B$ に対して, 次のリフト問題は解決 (図中のドットで描かれる矢印) を持つ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

Proof. (2) から (1) を示す. 包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は緩射なので, $i : \Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ とすると, Kan ファイブレーションの定義に一致する.

(1) から (2) を示す. 命題 1.4.4.16 より, f に対して LLP を持つ射の集まりは弱飽和である. T の最小性より, (2) は従う. □

次の命題は, 緩射の集まりに対する安定性を表している.

命題 3.1.2.8. $f : A \hookrightarrow B$ と $f : A' \hookrightarrow B'$ を単体的集合の mono 射とする. f か f' の一方が緩射であるとき, 誘導される射

$$(A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \hookrightarrow B \times B'$$

は緩射である.

この命題の証明は, この節の最後に与える.

補題 3.1.2.9. 任意の $0 < i \leq n$ に対して, 包含 $\Lambda^n_i \hookrightarrow \Delta^n$ は誘導される射

$$(\Delta^1 \times \Lambda^n_i) \coprod_{\{1\} \times \Lambda^n_i} (\{1\} \times \Delta^n) \hookrightarrow \Delta^1 \times \Delta^n$$

のレトラクトである.

Proof. ある射 f が存在して, 次の図式が可換になることを示せばよい. (らしい)

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \times \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & (\Delta^n \times \Lambda^n_i) \amalg (\{1\} \times \Delta^n) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & \Lambda^n_i \arrow[d, "f_0"] \\
\{0\} \times \Delta^n \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \Delta^1 \times \Delta^n \arrow[r, "r"] & \Delta^n
\end{tikzcd}$$

□

補題 3.1.2.10. n を 0 以上の整数とする. このとき, 次の条件を満たす単体的部分集合の鎖が存在する.

$$X(0) \subset X(1) \subset \cdots \subset X(n) \subset X(n+1) = \Delta^1 \times \Delta^n$$

1. $X(0)$ は $\Delta^1 \times \partial\Delta^n$ と $\{1\} \times \Delta^n$ の直和
2. 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, 包含 $X(i) \hookrightarrow X(i+1)$ は次の pushout で与えられる.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{n+1}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & X(i) \arrow[d] \\
\Delta^{n+1} \arrow[r] & X(i+1)
\end{tikzcd}$$

Proof. 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, $\sigma_i : \Delta^{n+1} \to \Delta^1 \times \Delta^n$ の点の対応を次のように定義する. 任意の $0 \leq j \leq n+1$ に対して,

$$\sigma_i(j) := \begin{cases} (0, j) & (j \leq i) \\ (1, j-1) & (j > i) \end{cases}$$

このとき, $\Delta^1 \times \Delta^n$ の単体的部分集合 $X(i)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} X(0) &:= \Delta^1 \times \partial\Delta^n \amalg \{1\} \times \Delta^n \\ X(i+1) &:= X(i) \amalg \mathrm{im}(\sigma_i) \end{aligned}$$

ここで, $\Delta^1 \times \Delta^n$ は $\{\mathrm{im}(\sigma_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ と同一視でき, $X(n+1)$ に等しいことが分かる.

□

Proof. of 命題 3.1.2.8

□

3.1.3 Kan ファイブレーションのべき乗

B と X を単体的集合とする. X が ∞ 圏であるとき, 単体的集合 $\mathbf{Fun}(B, X)$ は ∞ 圏である. (定理 1.4.3.7) X が Kan 複体であるとき, 単体的集合 $\mathbf{Fun}(B, X)$ は Kan 複体であることが言える. (系 3.1.3.4) これは次の命題の系である.

定理 3.1.3.1. $f : X \to S$ を Kan ファイブレーション, $i : A \hookrightarrow B$ を単体的集合の mono 射とする. このとき, 誘導される射

$$\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(B,S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A,X)$$

は Kan ファイブレーションである.

Proof. 注意 3.1.2.7 より, 任意の緩射 $i' : A' \hookrightarrow B'$ に対して, 次のリフト問題が解決を持つことを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "i'"'] & \mathbf{Fun}(B,X) \arrow[d] \\ B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{Fun}(B,S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A,X) \end{tikzcd}$$

これは次の図式のリフト問題の解決と同値である.

$$\begin{tikzcd} (A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ B \times B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

命題 3.1.2.8 より, $(A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \hookrightarrow B \times B'$ は緩射である. 注意 3.1.2.7 より, 求める射は Kan ファイブレーションである. □

系 3.1.3.2. $f : X \to S$ を Kan ファイブレーションとする. このとき, 任意の単体的集合 B に対して, f の誘導する射 $\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(B,S)$ は Kan ファイブレーションである.

Proof. 定理 3.1.3.1 において, $A = \emptyset$ とすればよい. □

系 3.1.3.3. $i : A \hookrightarrow B$ を単体的集合の mono 射, X を Kan 複体とする. このとき, 制限 $\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(A,X)$ は Kan ファイブレーションである.

Proof. 定理 3.1.3.1 において, $S = \Delta^0$ とすればよい. □

系 3.1.3.4. X を Kan 複体, B を単体的集合とする. このとき, $\mathbf{Fun}(B,X)$ は Kan 複体である.

Proof. 定理 3.1.3.1 において, $S = \Delta^0$ とすると, $\mathbf{Fun}(B,X) \to \Delta^0$ は Kan ファイブレーションである. 例 3.1.1.2 より, $\mathbf{Fun}(B,X)$ は Kan 複体である. □

自明な Kan ファイブレーションに対して定理 3.1.3.1 と同様の結果がある. 定理 3.1.3.1 では i は mono 射であったが, 定理 3.1.3.5 は緩射である.

定理 3.1.3.5. $f : X \to S$ を Kan ファイブレーション, $i : A \hookrightarrow B$ を緩射とする. このとき, 誘導される射

$$\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(B,S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A,X)$$

は自明な Kan ファイブレーションである.

Proof. 定理 3.1.3.1 と同様に証明できる．命題 1.4.5.4 より, 任意の mono 射 $i' : A' \hookrightarrow B'$ に対して, 次のリフト問題が解決を持つことを示せばよい.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "i'"'] & \mathbf{Fun}(B,X) \arrow[d] \\ B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{Fun}(B,S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A,X) \end{tikzcd}$$

これは次の図式のリフト問題の解決と同値である.

$$\begin{tikzcd} (A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ B \times B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

命題 3.1.2.8 より, $(A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \hookrightarrow B \times B'$ は緩射である．例 3.1.2.3 より, この射は mono 射である．命題 1.4.5.4 より, 求める射は Kan ファイブレーションである． □

系 3.1.3.6. $i : A \hookrightarrow B$ を緩射, X を Kan 複体とする．このとき, 制限 $\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(A,X)$ は自明な Kan ファイブレーションである.

Proof. 系 3.1.3.3 と同様 □

構成 3.1.3.7. B, X を単体的集合, $\mathbf{Fun}(B,X)$ を B から X への射の単体的集合とする．(定義 1.4.3.1)

- A を単体的集合, $i : A \to B, f : A \to X$ を単体的集合の射とする． このとき, 点 $f \in \mathbf{Fun}(A,X)$ 上の i の前合成 $\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(A,X)$ のファイバーを $\mathbf{Fun}_{A/}(B,X) \subset \mathbf{Fun}(B,X)$ と表す.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Fun}_{A/}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Fun}(B,X) \arrow[d, "- \circ i"] \\ \{f\} \arrow[r, hook] & \mathbf{Fun}(A,X) \end{tikzcd}$$

- S を単体的集合, $g : B \to S, q : X \to S$ を単体的集合の射とする．このとき, 点 $g \in \mathbf{Fun}(B,S)$ 上の q の後合成 $\mathbf{Fun}(B,X) \to \mathbf{Fun}(B,S)$ のファイバーを $\mathbf{Fun}_{/S}(B,X) \subset \mathbf{Fun}(B,X)$ と表す.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Fun}_{/S}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Fun}(B,X) \arrow[d, "q \circ -"] \\ \{q\} \arrow[r, hook] & \mathbf{Fun}(B,S) \end{tikzcd}$$

- 次の可換図式が存在するとき, 共通部分 $\mathbf{Fun}_{A/}(B,X) \cap \mathbf{Fun}_{/S}(B,X)$ を $\mathbf{Fun}_{A//S}(B,X)$ と

表す.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

注意 3.1.3.8. B, X を単体的集合とし, $\mathbf{Fun}(B, X)$ の点を単体的集合の射 $\bar{f} : B \to X$ と同一視する.

- A を単体的集合, $i : A \to B, f : A \to X$ を単体的集合の射とする. 単体的集合 $\mathbf{Fun}_{A/}(B, X)$ の点は射 $g = q \circ \bar{f}$ を満たす射 $\bar{f}$ と同一視できる.

3.1.4 被覆射

Kan ファイブレーションの定義において, リフトの解決が一意であるような射を被覆射という.

定義 3.1.4.1 (被覆射). $f : X \to S$ を単体的集合の射とする. 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して, 次のリフト問題が一意な解決 (図中のドットで描かれる矢印) をもつとき, f を被覆射 (covering map) という.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\bar{\sigma}"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & S \end{tikzcd}$$

つまり, 任意の単体的集合の射 $\sigma_0 : \Lambda^n_i \to X$ と $\bar{\sigma} : \Delta^n \to S$ に対して, σ_0 を $f \circ \sigma = \bar{\sigma}$ を満たす n 単体 $\sigma : \Delta^n \to X$ に一意に拡張できるときである.

注意 3.1.4.2. $f : X \to S$ を単体的集合の射とする. f が被覆射であることと, $f^{\mathrm{op}} : X^{\mathrm{op}} \to S^{\mathrm{op}}$ が被覆射であることは同値である.

注意 3.1.4.3. $f : X \to S$ を単体的集合の射, $\delta : X \to X \times_S X$ を f の relative diagonal とする. このとき, f が被覆射であることと, f と δ がともに Kan ファイブレーションであることは同値である. 特に, 任意の被覆射は Kan ファイブレーションである.

Proof. $\Rightarrow$ を示す. まず, f が被覆射のとき, Kan ファイブレーションであることは明らかである. 次の図式を考えると, pullback の一意性より, 左上の 2 つの三角は可換である.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\delta"] & \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X \times_S X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

よって, δ は Kan ファイブレーションである.

$\Leftarrow$ を示す．f は kan ファイブレーションなので, リフト問題は解決を持つ．よって, この解決が一意であることを示せばよいが, これは pullback の一意性から従う． $\square$

注意 3.1.4.4. 被覆射の集まりは pullback で閉じる．

注意 3.1.4.5. $f : X \to S$ を単体的集合の射, $g : Y \to Z$ を被覆射とする．このとき, g が被覆射であることと, gf が被覆射であることは同値である．特に, 被覆射の集まりは合成で閉じる．

注意 3.1.4.6. $f : X \to S$ を単体的集合の射とする．このとき, 次の 2 つは同値である．

1. f は被覆射である．
2. 任意の緩射 $i : A \to B$ に対して, 次のリフト問題は一意な解決 (図中のドットで描かれる矢印) を持つ．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

Proof. 注意 3.1.2.7 と注意 3.1.4.3 より従う． $\square$

命題 3.1.4.7. $f : X \to S$ を被覆射, $i : A \hookrightarrow B$ を単体的集合の mono 射とする．このとき, 誘導される射

$$\mathbf{Fun}(B, X) \to \mathbf{Fun}(B, S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A, X)$$

は被覆射である．

Proof. 注意 3.1.4.6 より, 任意の緩射 $i' : A' \hookrightarrow B'$ に対して, 次のリフト問題が一意な解決を持つことを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "i'"'] & \mathbf{Fun}(B, X) \arrow[d] \\ B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{Fun}(B, S) \times_{\mathbf{Fun}(A,S)} \mathbf{Fun}(A, X) \end{tikzcd}$$

これは次の図式のリフト問題の解決と同値である．

$$\begin{tikzcd} (A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ B \times B' \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

命題 3.1.2.8 より, $(A \times B') \coprod_{A \times A'} (B \times A') \hookrightarrow B \times B'$ は緩射である．注意 3.1.4.6 より, 求める射は被覆射である． $\square$

系 3.1.4.8. $f : X \to S$ を被覆射とする．このとき, 任意の単体的集合 B に対して, f の誘導する射 $\mathbf{Fun}(B, X) \to \mathbf{Fun}(B, S)$ は被覆射である．

Proof. 定理 3.1.3.2 と同様に, 命題 3.1.4.7 において, $A = \emptyset$ とすればよい. □

命題 3.1.4.9. $f : X \to S$ を位相空間の被覆とする. このとき, $\mathrm{Sing}(f) : \mathrm{Sing}(X) \to \mathrm{Sing}(S)$ は定義 3.1.4.1 の意味の被覆射である.

Proof. $\delta : X \to X \times_S X$ を f の relative diagonal とする.

□

3.1.5 Kan 複体のホモトピー圏

1.3.6 節では ∞ 圏におけるホモトピーを定義した. この節では, 一般の単体的集合におけるホモトピーを定義する.

定義 3.1.5.1 (ホモトピック). X, Y を単体的集合, 単体的集合の射 $f : X \to Y$ を単体的集合 $\mathbf{Fun}(X, Y)$ の点と同一視する. f と g が $\mathbf{Fun}(X, Y)$ において同じ連結成分に属しているとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるという.

定義 3.1.5.1 を具体的に書き下す.

定義 3.1.5.2 (ホモトピー). X, Y を単体的集合, $f_1, f_2 : X \to Y$ を単体的集合の射とする. $\mathbf{Fun}(X, Y)$ における射 $h : \Delta^1 \times X \to Y$ が $f_0 = h|_{\{0\} \times X}$ と $f_1 = h|_{\{1\} \times X}$ を満たすとき, h を f_0 から f_1 へのホモトピーという.

注意 3.1.5.3 (ホモトピー拡張リフト性質). $f : X \to S$ を Kan ファイブレーションとする.

参考文献

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[Lur22] Jacob Lurie. Kerodon. https://kerodon.net, 2022.

[鈴 23] 鈴木唯乃. 無限圏に対する基本的構成. https://nnn.ed.jp/about/club/kenkyubu/pdf/2022/kiyou_09.pdf, 2023.