完備 Segal 空間について

よの

2024 年 3 月 21 日

概要

新しい $(\infty, 1)$ 圏のモデルとして, Rezk [Rez00] は完備 Segal 空間を定義した．本稿は [Rez00] の lecture note である [Ras18] をまとめたものである．単体的集合の基本的なことは前提知識として仮定する．

目次

1 単体的空間

単体的集合には, 圏の脈体と Kan 複体という 2 つの特別なクラスがある．高次圏論は, 圏論とホモトピー論を同時に一般化した枠組みで考えるものであった．Joyal はこれらの拡張条件に着目することで．共通の一般化として擬圏を定義した．一方, Rezk は単体的空間の枠組みで 2 つの単体的集合のクラスを 1 つにまとめることを考えた．

定義 1.1 (単体的集合). 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ を単体的集合 (simplicial set) という．[*1] 単体的集合のなす圏を $s\mathcal{S}\mathrm{et}$ と表す．

*1 [Rez00] では, 単体的集合を空間 (space) と呼んでいるが, 本稿ではこの表記を用いない．

定義 1.2 (単体的空間). 関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ を単体的空間 (simplicial space) という．単体的空間のなす圏を $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ と表す．

注意 1.3. 単体的空間 $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et} : [n] \mapsto X_n$ を固定する．Δ における射 $d^i : [n-1] \to [n]$ と $s^i : [n+1] \to [n]$ から定まる単体的集合の射をそれぞれ $d_i : X_n \to X_{n-1}$ と $s_i : X_n \to X_{n+1}$ と表す．

注意 1.4. 積-Hom 随伴より，圏同値 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace} \cong \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et})$ が成立する．このことから，単体的空間は両単体的集合 (bisimplicial set) とも呼ばれる．

注意 1.5. 単体的空間 X は次のように表せる．ここで，X_n は単体的集合であり，$X_{n,k}$ は集合である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] & X_0 \arrow[r, "s_0" description] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[l, shift right=2, "d_0"'] \arrow[l, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift right=3] \\
 & X_{0,0} \arrow[r] \arrow[d, "s_0" description] & X_{1,0} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & X_{2,0} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift right=3] \\
 & X_{0,1} \arrow[u, shift left=2, "d_1"'] \arrow[u, shift right=2, "d_0"] \arrow[r] & X_{1,1} \arrow[u, shift left=2] \arrow[u, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X_{2,1} \arrow[u, shift left=2] \arrow[u, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[l, shift right=3] \\
 & \vdots \arrow[u, shift left=2] \arrow[u, shift right=2] \arrow[u, shift left=1] \arrow[u, shift right=1] \arrow[u] & \vdots \arrow[u, shift left=2] \arrow[u, shift right=2] \arrow[u, shift left=1] \arrow[u, shift right=1] \arrow[u] & \vdots \arrow[u, shift left=2] \arrow[u, shift right=2] \arrow[u, shift left=1] \arrow[u, shift right=1] \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}$$

定義 1.6 (離散単体的空間). X を単体的空間とする．任意の $n \geq 0$ に対して $X_n = X_0$ であるとき，X は離散的 (discrete) であるという．

離散単体的空間によって，$\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ は $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ に埋め込むことができる．

定義 1.7 (垂直埋め込み). 第 1 成分への射影

$$i_F : \Delta \times \Delta \to \Delta : ([n], [m]) \mapsto [n]$$

は埋め込み

$$i_F^* : \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace} : i_F^*(X)_{k,l} := X_k$$

を定める．この関手を垂直埋め込み (vertical embedding functor) という．

標準的単体 $\Delta[n]$ の一般化として，($\Delta[n]$ を離散単体的集合とみなした) 単体的空間 $F(n)$ を定義する．

定義 1.8 (n 次単体的集合関手). 集合 $\mathrm{Hom}_\Delta([-],[n])$ を離散単体的集合とみなすことで定まる単体的空間 $F(n)$ を n 次単体的集合関手 (n-th simplicial set functor) という．つまり，$F(n)$ の k 単体は次のように表せる．

$$F(n)_k = \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et} : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$$

垂直埋め込みを用いると, $F(n) = i_F^*(\Delta[n])$ と表せる.

注意 1.9. Yoneda の補題より, 単体的集合の同型 $\mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(n), X) \cong X_n$ が成立する.

同様に, n 次単体的集合関手の境界が定義できる.

定義 1.10 (n 次単体的集合関手の境界). 任意の $i < j$ に対して $d^j d^i = d^i d^{j-1}$ から定まる次のコイコライザ $\partial F[n]$ を n 次単体的集合関手の境界 (boundary of n-th simplicial set functor) という.

$$\coprod_{0\le i\le j\le n} F(n-2) \rightrightarrows \coprod_{0\le i\le n} F(n-1) \longrightarrow \partial F[n]$$

垂直埋め込みを用いると, $\partial F(n) = i_F^*(\partial\Delta[n])$ と表せる.

対角関手によって, 単体的空間から単体的集合が定まる.

定義 1.11 (対角関手). $\mathrm{diag} : \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ を単体的空間 X に対して, $\mathrm{diag}X$ の n 単体を $\mathrm{diag}X_n := X_{n,n}$ で定義し, 対角関手 (diagonal functor) という.

2 Reedy ファイブラント空間

単体的空間の定義の動機づけにあるように, $(\infty, 1)$ 圏のモデルは空間の性質を持つ必要がある. $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ 上の Kan-Quillen モデル構造において, Kan 複体はファイブラント対象であった. Reedy モデル圏の一般論から, $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}$ 上に Reedy モデル構造が誘導される. この Reedy モデル構造におけるファイブラント条件を用いて, 空間の性質を特徴づける. 実際, Reedy ファイブラント空間 X に対して, X_n は Kan 複体となる (補題 2.6).

定義 2.1 (Reedy ファイブラント). 任意の $n, l \ge 0$ と $0 \le i \le n$ に対して, 次の単体的集合の射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{pace}}(\partial F(n), X)$$

が Kan ファイブレーションのとき, X を Reedy ファイブラント (Reedy fibrant) [*2] という.

例 2.2. 任意の $n \ge 0$ に対して, $F(n)$ は Reedy ファイブラントである.

例 2.3. 任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して, 脈体 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ は Reedy ファイブラントである.

注意 2.4. X を単体的空間とする. 任意の $0 \le i \le n$ に対して, Δ の射

$$i : [0] \to [n] : 0 \mapsto i$$

は単体的集合の射 $i^* : X_n \to X_0$ を定める. よって, i は次の単体的集合の射

$$(0^*, \cdots, n^*) : X_n \to X_0 \times \cdots \times X_0 \cong (X_0)^{n+1}$$

[*2] $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ 上の Kan-Quillen モデル構造から定まる Reedy モデル構造におけるファイブラント対象であるが, ここでは Reedy モデル構造について立ち入らない.

を定める.

補題 2.5. X を Reedy ファイブラントとする. 任意の $n \geq 0$ に対して, 単体的集合の射 $X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである.

補題 2.6. X を Reedy ファイブラントとする. 任意の $n \geq 0$ に対して, X_n は Kan 複体である.

Proof. X は Reedy ファイブラントなので, 次の単体的集合の射

$$\mathrm{Map}_{s\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(n), X) \to \mathrm{Map}_{s\mathcal{S}\mathrm{pace}}(\partial F(n), X)$$

は Kan ファイブレーションである. $n = 0$ を考えると,

$$\mathrm{Map}_{s\mathcal{S}\mathrm{pace}}(F(0), X) \cong X_0, \quad \mathrm{Map}_{s\mathcal{S}\mathrm{pace}}(\partial F(0), X) \cong \Delta^0$$

なので, $X_0 \to \Delta^0$ は Kan ファイブレーションである. よって, X_0 は Kan 複体である. Kan 複体は直積で保たれるので, $(X_0)^{n+1}$ も Kan 複体である. 補題 2.5 より, $X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである. Kan ファイブレーションのクラスは合成で閉じるので, X_n は Kan 複体である. □

3 Segal 空間

単体的空間の Reedy ファイブラント条件は単体的空間の n 単体が空間のようにふるまうことを表していた (補題 2.6). この節では, それらが更に圏のようにもふるまうクラスとして Segal 空間を定義する. 単体的空間の Segal 空間は単体的集合の Segal 条件の一般化である.

定義 3.1 (Segal 空間). X を Reedy ファイブラントとする. 任意の $n \geq 2$ に対して, 単体的集合の射

$$\varphi_n : X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

が Kan 弱同値のとき, X を Segal 空間 (Segal space) という.

注意 3.2. X が Reedy ファイブラントのとき, φ_n は Kan ファイブレーションである. よって, Segal 空間の定義において「φ_n が自明な Kan ファイブレーションのとき」としてもよい.

単体的集合 $X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ は $F(n)$ の単体的部分空間として表すことができる.

定義 3.3 (椎). $F(n)$ の単体的部分空間

$$G(n) := F(1) \coprod_{F(0)} \cdots \coprod_{F(0)} F(1)$$

を $F(n)$ の椎 (spine) という.

注意 3.4. 椎の定義より, 次の同型が成立する.

$$\mathrm{Map}_{s\mathcal{S}\mathrm{pace}}(G(n), X) \cong X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

単体的空間の Segal 条件は圏の脈体の Segal 条件と非常に似ている. 実際, 圏の脈体は (離散単体的集合としてみなすと)Segal 空間となる.

例 3.5. 任意の圏 $\mathcal{C}$ に対して, 脈体 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ は Segal 空間である.

4 Segal 空間における射の合成

Segal 空間とは, Reedy ファイブラント条件と Segal 条件を満たすような単体的空間であった. Segal 空間 X に対して, $X_0, X_1, X_2, \cdots$ は Kan 複体である. 圏の脈体と同様に, X_0 は対象の空間, X_1 は射の空間, X_2 は合成を表す空間のように思える. この節では, X を Segal 空間とする.

定義 4.1 (対象). X_0 の点を X の対象 (object) という.

定義 4.2 (合成空間). X の対象 $x_0, \cdots, x_n$ に対して, 単体的集合 $\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n)$ を次の pullback で定義し, 合成空間 (space of composition) という.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_n \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r, "(x_0, \cdots, x_n)"'] & (X_0)^{n+1}
\end{tikzcd}$$

注意 4.3. 補題 2.5 より, $X_n \to (X_0)^{n+1}$ は Kan ファイブレーションである. Kan ファイブレーションのクラスはプルバックで閉じるので, $\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n) \to \Delta^0$ は Kan ファイブレーションである. つまり, $\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n)$ は Kan 複体である.

定義 4.4 (射). $n = 1$ の合成空間 $\mathrm{map}_X(x_0, x_1)$ を射空間 (mapping space) という. $\mathrm{map}_X(x_0, x_1)$ の点を X の射 (morphism) といい, $f : x_0 \to x_1$ と表す.

定義 4.5 (恒等射). X の対象 x に対して, $s_0 : X_0 \to X_1$ による x の像 $s_0(x)$ を x の恒等射 (identity map) といい, id_x と表す.

補題 4.6. X の任意の対象 $x_0, \cdots, x_n$ に対して, 次の単体的集合の射

$$\mathrm{map}_X(x_0, \cdots, x_n) \to \mathrm{map}_X(x_0, x_1) \times \cdots \times \mathrm{map}_X(x_{n-1}, x_n)$$

は自明な Kan ファイブレーションである.

Proof. Segal 空間 X に対して, $X_n \to X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ は自明な Kan ファイブレーションであ

る. 次の図式において, 下と全体の四角は pullback である.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner"] & & X_n \arrow[d, "\sim"] \\
\mathrm{map}_X(x_0,x_1)\times\cdots\times\mathrm{map}_X(x_{n-1},x_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_1\times_{X_0}\cdots\times_{X_0}X_1 \arrow[d] \\
\Delta^0 \arrow[r] & (X_0)^{n+1}
\end{tikzcd}$$

よって, 上の四角も pullback である. 自明な Kan ファイブレーションのクラスはプルバックで閉じるので, 単体的集合の射

$$\mathrm{map}_X(x_0,\cdots,x_n)\to\mathrm{map}_X(x_0,x_1)\times\cdots\times\mathrm{map}_X(x_{n-1},x_n)$$

は自明な Kan ファイブレーションである. □

Segal 空間において, 射の合成は可縮な空間の違いを除いて一意に定まる.

注意 4.7. X の対象 x,y,z に対して, 合成空間の定義から次の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}_X(x,y,z) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{map}_X(x,z) \\
\mathrm{map}_X(x,y)\times\mathrm{map}_X(y,z)
\end{tikzcd}$$

X の射 $f:x\to y, g:y\to z$ に対して, 単体的集合 $\mathrm{Comp}(f,g)$ を次のプルバックで定義する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}(f,g) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{map}_X(x,y,z) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{map}_X(x,z) \\
\Delta^0 \arrow[r, "{(f,g)}"'] & \mathrm{map}_X(x,y)\times\mathrm{map}_X(y,z)
\end{tikzcd}$$

つまり, $\mathrm{Comp}(f,g)$ は次のように表せる.

$$\mathrm{Comp}(f,g)=\{\sigma\in X_2 \mid d_0\sigma=g,\quad d_2\sigma=f\}$$

自明な Kan ファイブレーションのクラスはプルバックで閉じるので, $\mathrm{Comp}(f,g)\to\Delta^0$ は自明な Kan ファイブレーションである. よって, $\mathrm{Comp}(f,g)$ は可縮な Kan 複体である. この意味で, 射の合成は可縮な空間の違いを除いて一意に定まる.

例 4.8. 圏 $\mathcal{C}$ の脈体 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ の任意の射 $f:x\to y, g:y\to z$ に対して, $\mathrm{Comp}(f,g)\cong\Delta^0$ である.

Proof. 次の図式において, 同型射のクラスがプルバックで閉じることから従う.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}(f,g) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_2 \arrow[d, "\cong"] \\
\Delta^0 \arrow[r] & \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_1\times_{\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0}\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_1
\end{tikzcd}$$

□

5 Segal 空間のホモトピー圏

第 4 章では, 単体的空間が圏のようにふるまうために Segal 条件を定義した. この節では, Segal 空間がもつホモトピー論的な性質に着目する. X を Segal 空間とする.

定義 5.1 (ホモトピック). $f, g : x \to y$ を X の射とする. 単体的集合の射 $f, g : \Delta^0 \to \mathrm{map}_X(x, y)$ が単体的集合のホモトピックのとき, f と g はホモトピック (homotopic) であるといい, $f \sim g$ と表す.

射の合成はホモトピーの違いを除いて結合的かつ単位的である.

定理 5.2. X の射 $f : w \to x, g : x \to y, h : y \to z$ に対して, $h(gf) \sim (hg)f$ かつ $f\mathrm{id}_x \sim \mathrm{id}_y f \sim f$ が成立する.

定理 5.2 より, Segal 空間に対して通常の圏が定まる.

定義 5.3 (ホモトピー圏). 通常の圏 $\mathrm{Ho}(X)$ を次のように定義し, X のホモトピー圏 (homotopy category) という.

- $\mathrm{Ho}(X)$ の対象は X の対象と同じ
- $\mathrm{Ho}(X)$ の任意の対象 x, y に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(X)}(x, y)$ は射空間のホモトピー類 $\pi_0(\mathrm{map}_X(x, y))$
- $\mathrm{Ho}(X)$ 任意の対象 x, y, z に対して, 合成は $\mathrm{map}_X(x, y) \times \mathrm{map}_X(y, z) \to \mathrm{map}_X(x, z)$ から定まる対応

定理 5.4. 任意の圏 $\mathcal{C}$ は $\mathrm{Ho}(\mathrm{nerve}(\mathcal{C}))$ と圏同型である.

Proof. 対象に関して,

$$\mathrm{Ob}\mathrm{Ho}(\mathrm{nerve}(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}\mathrm{nerve}(\mathcal{C}) = \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{Ob}\mathcal{C}$$

$\mathrm{Ho}(N\mathcal{C})$ の任意の対象 x, y に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{nerve}(\mathcal{C}))}(x, y) = \pi_0(\mathrm{Map}_{\mathrm{nerve}(\mathcal{C})}(x, y)) = \pi_0(\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_1 \times_{\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \times \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0} \Delta^0)$$

$\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_1$ と $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \times \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0$ は離散単体的集合なので,

$$\pi_0(\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_1 \times_{\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \times \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0} \Delta^0) \cong N\mathcal{C}_1 \times_{\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \times \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0} \Delta^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

□

定義 5.5 (ホモトピー同値). X の射 $f \in \mathrm{map}_X(x, y)$ に対して, ある射 $g \in \mathrm{map}_X(y, x)$ が存在して, $gf \sim \mathrm{id}_x$ かつ $fg \sim \mathrm{id}_y$ を満たすとき, f をホモトピー同値 (homotopy equivalence) という. このとき, g を f のホモトピー逆射 (homotopy inverse) という.

注意 5.6. ホモトピー逆射はホモトピーの違いを除いて一意である.

例 5.7. X の任意の対象 x に対して, 恒等射 id_x はホモトピー逆射である.

補題 5.8. $f, g \in X_1$ を X の射とする. ある $\gamma : \Delta^1 \to X_1$ が存在して, $\gamma(0) = f, \gamma(1) = g$ を満たすとする. g がホモトピー同値のとき, f もホモトピー同値である.

定義 5.9 (ホモトピー同値空間). X のホモトピー同値のなす X_1 の単体的部分集合を X_{hoequiv} と表し, X のホモトピー同値空間 (space of homotopy equivalences) という.

注意 5.10. 例 5.7 より, 恒等射はホモトピー同値である. よって, s_0 は X_{hoequiv} によって分解される.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "s_0"] \arrow[dr] & & X_1 \\ & X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

定義 5.11 (x と y の間のホモトピー同値空間). x, y を X の対象とする. 単体的集合 $\mathrm{hoequiv}_X(x,y)$ を次のホモトピープルバックで定義し, x と y の間のホモトピー同値空間 (space of homotopy equivalences between two objects x and y) という.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{hoequiv}_X(x,y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_{\mathrm{hoequiv}} \arrow[d, "(d_0, d_1)"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "(x,y)"'] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

例 5.12. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする. $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ の射がホモトピー同値であることと, $\mathcal{C}$ の同型射であることは同値である.

6 完備 Segal 空間

第 2 章と第 3 章で Segal 空間が圏論とホモトピー論の性質を持つことを見た. しかし, 一般の Segal 空間において圏論とホモトピー論の間には整合性がない.

記法 6.1. $I(1)$ を 2 つの対象 x, y とその間の可逆な射からなる圏とする.

$$I(1) := \{x \leftrightarrow y\}$$

$I(1)$ の脈体 $\mathrm{nerve}(I(1))$ を $E(1)$ と表す. $E(1)$ は離散単体的空間なので, $E(1)_n$ は集合 $\{0, \cdots, n\}$ から $\{x, y\}$ への射の集まりとみなせる. よって, $E(1)_n$ は 2^{n+1} 個の元を持つ.

注意 6.2. $I(1)$ と $[0]$ は圏同値である. しかし, $E(1)$ は各次元で可縮ではない一方で $F(1)$ は各次元で可縮である. よって, $E(1)$ と $F(1)$ は同型ではない.

このように, 通常の圏論では見れない亜群におけるホモトピーの情報を Segal 空間では見ることができる.

注意 6.3. 離散 Segal 空間 $E(1)$ には, 可逆な射 $x \to y, y \to x$ が存在する. この射の間にホモトピー同値が存在するとき, x と y は同値である. しかし, Kan 複体 $E(1)_0$ における 2 つの対象の間には射が存在しないので同値ではない.

Segal 空間 X において 2 つの対象がホモトピー同値のとき, Kan 複体 X_0 においても同値である条件が必要である. このような圏論とホモトピー論の間に整合性を持たせる条件が完備性である.

定義 6.4 (完備 Segal 空間). 単体的集合の射 $s_0 : X_0 \to X_{\mathrm{hoequiv}}$ が Kan 弱同値のとき, X は完備 (complete) であるという.

例 6.5. Segal 空間 $E(1)$ は完備でない.

Proof. $E(1)$ の定義より,

$$\begin{aligned} E(1)_0 &= \{x, y\} \\ E(1)_1 &= E(1)_{\mathrm{hoequiv}} = \{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, x \to y, y \to x\} \end{aligned}$$

であるが,

$$E(1)_0 \to E(1)_{\mathrm{hoequiv}} : \{x, y\} \to \{\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_y, x \to y, y \to x\}$$

は Kan 弱同値ではない. □

注意 6.6. Segal 空間 X の射 $x \to y$ から包含 $i : F(1) \hookrightarrow E(1)$ が定まる. この包含は単体的集合の射 $\mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(E(1), X) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(F(1), X)$ が定まる.

定理 6.7. X を Segal 空間とする. 単体的集合の射 $\mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(E(1), X) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(F(1), X)$ は X_{hoequiv} によって分解し, $\mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(E(1), X) \to X_{\mathrm{hoequiv}}$ は Kan ファイブレーションである.

定理 6.8. Segal 空間 X に対して, 次は全て同値である.

1. X は完備である.
2. 単体的集合の射 $\mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(E(1), X) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{s\mathcal{S}pace}}(F(0), X)$ は Kan 弱同値である.
3. 次の図式はホモトピープルバックである.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_3 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 \end{tikzcd}$$

4. X の任意の対象に対して, $\mathrm{hoequiv}_X(x, y)$ は $\mathrm{map}_X(x, y)$ と Kan 弱同値である.

定理 6.9. $\mathcal{C}$ を通常の圏とする. 脈体 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ が完備であることと, $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持たないことは同値である.

Proof. $(\Rightarrow)$: $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ が完備 Segal 空間であるとする. このとき, 単体的集合の射 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \to \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_{\mathrm{hoequiv}}$ は Kan 弱同値である. $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0$ と $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_{\mathrm{hoequiv}}$ は離散的単体的集合なので,

この射は集合の全単射である．よって, 恒等射以外のホモトピー同値は存在しない．例 5.12 より, $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ におけるホモトピー同値は $\mathcal{C}$ における同型射である．よって, $\mathcal{C}$ は恒等射以外の同型射を持たない．

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{C}$ が恒等射以外の同型射を持たないとき, $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_{\mathrm{hoequiv}} = \mathrm{iso}(\mathcal{C})$ である． よって, $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})_0 \to \mathrm{nerve}(\mathcal{C})_{\mathrm{hoequiv}}$ は集合の全単射である．つまり, 単体的集合の射として Kan 弱同値である．従って, 脈体 $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ である． □

7 圏の分類図式

定理 6.9 より, $\mathcal{C}$ が非自明な同型射を持つとき, 通常の脈体はうまくいかない．圏のホモトピー論を考慮するような脈体として, 圏の分類図式を定義する．分類図式は圏の可逆な射の情報を持っているような脈体である．

記法 7.1. 圏 $\mathcal{C}$ に対して, 圏 $\mathcal{C}$ に含まれる最大の部分亜群を $\mathrm{iso}(\mathcal{C})$ と表す.

定義 7.2 (分類図式). 圏 $\mathcal{C}$ に対して, 単体的空間 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ を次のように定義し, $\mathcal{C}$ の分類図式 (classifying diagram) という．

$$\mathcal{N}(\mathcal{C})_n := \mathrm{nerve}(\mathrm{iso}(\mathcal{C}^{[n]}))$$

注意 7.3. $n = 0$ のとき, $\mathcal{N}(\mathcal{C})_0 = \mathrm{nerve}(\mathrm{iso}(\mathcal{C}))$ より, $\mathcal{N}(\mathcal{C})_0$ は $\mathcal{C}$ の最大の部分亜群の脈体である．

圏の分類図式が完備 Segal 空間であることを示す．

補題 7.4. 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ は Reedy ファイブラントである．

補題 7.5. 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ は Segal 空間である．

Proof. プルバックは最大の部分亜群をとる操作と脈体をとる操作で保たれる．例 3.5 より, $\mathrm{nerve}(\mathcal{C})$ は Segal 空間である．よって, 圏の分類図式 $\mathcal{N}\mathcal{C}$ は Segal 空間である． □

定理 7.6. 圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ は完備 Segal 空間である．

参考文献

[Ras18] Nima Rasekh. Introduction to complete segal spaces, 2018.

[Rez00] Charles Rezk. A model for the homotopy theory of homotopy theory, 2000.