A_∞ 圏のなす圏はモデル構造を持たない

よの

2023 年 8 月 13 日

概要

A_∞ 圏のなす A_∞ 圏がモデル構造をもたないことを示す.

目次

1 A_∞ 圏のなす圏はモデル構造を持たない

定義 1.1. 次数付き代数 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}&\mathcal{A} := \mathbb{K}[a_0, a_1],\ \mathcal{A}' := \mathbb{K}[a]\\&a_0^2 = a_1^2 = a_0 a_1 = a_1 a_0 = a^2 = 0\\&|a_0| = |a_1| = 0,\ |a| = -1\end{aligned}$$

次数付き代数 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を微分が自明な dg 代数とみなし, 1 対象の高次のホモトピーが自明な A_∞ 圏とみなす.
dg 関手 $\mathcal{F}_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ を次のように定義する.

$$\mathcal{F}_0^1(a_0) = \mathcal{F}_0^1(a_1) := 0$$

dg 関手 $\mathcal{F}_0$ を高次のホモトピーが自明な A_∞ 関手とみなす.
A_∞ 関手 $\mathcal{F}_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ を $\mathcal{F}_1^1 = \mathcal{F}_0^1$,

$$\mathcal{F}_1^2(a_i, a_j) := \begin{cases} a & (i = 0, j = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で, 任意の $d \geq 3$ に対して $\mathcal{F}_1^d := 0$ として定義する.

補題 1.2. 定義 1.1 の記号を用いる. $A_\infty\mathcal{C}at$ において, $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ の equalizer は存在しない. $A_\infty\mathcal{C}at^c$ においても同様に成立する.

Proof. $A_\infty\mathcal{C}at$ における場合を考える. $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ の equalizer が存在すると仮定する. $\mathcal{B}$ を A_∞ 圏として, equalizer(A_∞ 関手) を $\mathcal{G}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ と表す.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{F}_1"'] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

任意の $B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}$ に対して, A_∞ 関手

$$\mathcal{H}_B:\mathbb{K}\to\mathcal{B}:*\mapsto B$$

が存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\mathcal{H}_B"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{F}_1"'] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

次に, $\mathcal{B}$ が 1 対象であることを示す. 任意の $B_0,B_1\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{H}_{B_0},\mathcal{H}_{B_1}$ を上で定義した A_∞ 関手とする. $\mathbb{K}$ と $\mathcal{A}$ は次数 0 に集中しているので, $i=0,1$ に対して, A_∞ 関手

$$\mathcal{G}\circ\mathcal{H}_{B_i}:\mathbb{K}\to\mathcal{A}$$

は恒等射を保ち, $H(\mathcal{G}\circ\mathcal{H}_{B_i})$ は $(\mathcal{G}\circ\mathcal{H}_{B_i})^1$ と同一視できる. $\mathbb{K}$ と $\mathcal{A}$ は 1 対象なので

$$\mathcal{G}\circ\mathcal{H}_{B_1}=\mathcal{G}\circ\mathcal{H}_{B_1}$$

である. $\mathcal{G}$ は $A_\infty\mathcal{C}at$ における mono 射なので

$$\mathcal{H}_{B_1}=\mathcal{H}_{B_1}$$

である. つまり $B_1=B_2$ である. $\mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ は A_∞ 代数なので, $\mathcal{G}$ は A_∞ 代数の射である. よって, $\mathcal{F}_0$ と $\mathcal{F}_1$ の equalizer は A_∞ 代数のなす圏における equalizer である. ここで, 代数 $\mathcal{B}'$ を次のように定義する.

$$\mathcal{B}':=\mathbb{K}[b],\ b^2=0,\ |b|=0$$

代数 $\mathcal{B}'$ を次数 0 に集中した微分が自明な dg 代数とみなし, 高次のホモトピーが自明な A_∞ 代数とみなす. $i=0,1$ に対して, A_∞ 代数の射

$$\mathcal{I}_i:\mathcal{B}'\to\mathcal{A}:b\mapsto a_i$$

が存在して

$$\mathcal{F}_0\circ\mathcal{I}_i=\mathcal{F}_1\circ\mathcal{I}_i$$

を満たす. equalizer の普遍性より, 次の図式を可換にする A_∞ 代数の射 $\mathcal{J}:\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\mathcal{H}_B"] & \mathcal{B} \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{F}_1"'] & \mathcal{A}' \\ & \mathcal{B}' \arrow[u, dashed, "\mathcal{J}"] \arrow[ur, "\mathcal{I}_i"'] & & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}^1$ は全射であるが

$$(\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G})^2 \neq (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G})^2$$

なので, $(\mathcal{F}_0 \circ \mathcal{G}) = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G})$ となることはない. $\square$

定理 1.3. $A_\infty \mathcal{C}at$ と $A_\infty \mathcal{C}at^c$ はモデル構造を持たない.