

恒等射を持つ A_∞ 圏

よの

2023 年 11 月 4 日

概要

恒等射を持つ A_∞ 圏と、その間の恒等射を保つ A_∞ 関手を定義する. A_∞ 圏が「恒等射を持つ」ということには 2 種類の意味が考えられる. そのあとに、恒等射を持つことが、関手圏に遺伝することなどを確かめる.

また、 A_∞ 圏上の A_∞ 加群を定義し、任意の A_∞ 圏は A_∞ 加群に埋め込まれることをみる. このことから、任意の A_∞ 圏がある dg 圏と A_∞ 擬同値であることが分かる. (A_∞ -Yoneda の補題)

目次

1	恒等射を持つ A_∞ 圏と恒等射を保つ A_∞ 関手	1
2	A_∞ 関手圏と A_∞ 合成関手に対する c-unital 性	3
3	Morita 不変量	7
4	A_∞ 擬同値	7
5	恒等射を保つ A_∞ 加群	10
6	A_∞ プルバック関手に対する c-unital 性	10
7	A_∞ -Yoneda の補題	10

1 恒等射を持つ A_∞ 圏と恒等射を保つ A_∞ 関手

「恒等射を持つ」 A_∞ 圏には複数の定義がある.

「任意の $a_1 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \dots, a_d \in \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d)$ に対して」を以降では省略する.

定義 1.1 (恒等射を持つ A_∞ 圏). \mathcal{A} を恒等射を持たない A_∞ 圏とする. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対してある $e_X \in \text{hom}_{\mathcal{A}}^0(X, X)$ が一意に存在して、次の条件を満たすとき、 \mathcal{A} は恒等射を持つ A_∞ 圏 (strictly unital A_∞ -category) であるという. このとき、 e_X を X の恒等射 (strict unit) という.

$$(d = 1) \mu_{\mathcal{A}}^1(e_X) = 0$$

$$(d = 2) (-1)^{|a_1|} \mu_{\mathcal{A}}^2(e_{X_1}, a_1) = a_1 = \mu_{\mathcal{A}}^2(a_1, e_{X_0})$$

$$(d \geq 3) \text{ 任意の } 0 \leq n < d \text{ に対して } \mu_{\mathcal{A}}^d(a_{d-1}, \dots, a_{n+1}, e_{X_n}, a_n, \dots, a_1) = 0$$

定義 1.2 (コホモロジー圏上で恒等射を持つ A_∞ 圏). 恒等射を持たない A_∞ 圏 \mathcal{A} のコホモロジー圏 $H(\mathcal{A})$ が通常の意味で恒等射を持つとき, \mathcal{A} はコホモロジー圏上で恒等射を持つ A_∞ 圏 (cohomologically unital A_∞ -category) であるという. 以降では, c-unital な A_∞ 圏という. 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{A}$ に対して $[e_X]$ が $H(\mathcal{A})$ における恒等射であるとき, e_X を X の c-unit という.

定義 1.3 (ホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏). ホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏 (homotopy unital A_∞ -category) $(\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{A}}^{-, (i)})$ は次のデータから構成される.

- 対象の集まり $\text{Ob} \mathcal{A}$
- 任意の $X_0, X_1 \in \text{Ob} \mathcal{A}$ に対して, 次数付きベクトル空間 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$
- 任意の $d + i_0 \cdots + i_d \geq 0$ に対して

$$\mu_{\mathcal{A}}^{d, (i_d, \dots, i_0)} : \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_d) [2 - d - 2 \sum_k i_k]$$

が与えられていて, 一般化 A_∞ 結合式 (generalized A_∞ -associativity equation) を満たす. ([Fuk02] Section 5)

3 つの「恒等射を持つ」 A_∞ 圏には次のような関係がある.

補題 1.4. 次の 2 つが成立する.

1. 任意の恒等射を持つ A_∞ 圏はホモトピー恒等射を持つ.
2. 任意のホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏は c-unital である.

Proof. それぞれ次のように示すことができる.

1. \mathcal{A} を恒等射を持つ A_∞ 圏とする. 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{A}$ の恒等射を e_X とする. $\mu_{\mathcal{A}}^{0, (1)} := e_X$ として, 任意の $i_0 + \cdots + i_d > 0$ に対して $\mu_{\mathcal{A}}^{d, (i_d, \dots, i_0)} := 0$ とすると, \mathcal{A} はホモトピー恒等射を持つ.
2. 一般化 A_∞ 結合式より従う.

□

「恒等射を持つ」 A_∞ 圏の間の「恒等射を保つ」 A_∞ 関手が定義される.

定義 1.5 (恒等射を保つ A_∞ 関手). 恒等射を持つ A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して, 恒等射を考えない A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が次の条件を満たすとき, \mathcal{F} は恒等射を保つ A_∞ 関手 (strictly unital A_∞ -functor) であるという.

$$(d = 1) \text{ 任意の } X \in \text{Ob} \mathcal{A} \text{ に対して } \mathcal{F}^1(e_X) = e_{\mathcal{F}X}$$

$$(d \geq 2) \text{ 任意の } 0 \leq n < d \text{ に対して } \mathcal{F}^d(a_{d-1}, \dots, a_{n+1}, e_{X_n}, a_n, \dots, a_1) = 0$$

定義 1.6 (コホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 関手). c -unital な A_∞ 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} に対して, コホモロジー圏上の関手 $H(\mathcal{F}) : H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B})$ が通常の間手であるとき, \mathcal{F} はコホモロジー圏上で恒等射を保つ A_∞ 関手 (cohomologically unital A_∞ -functor) であるという. 以降では, c -unit を保つ A_∞ 関手という.

定義 1.7 (ホモトピー恒等射を保つ A_∞ 関手). [Fuk02] Section 5 を参照.

「恒等射を保つ」 A_∞ 恒等関手や「恒等射を保つ」 A_∞ 関手の合成がそれぞれに対して定義される. 3 つの「恒等射を持つ」 A_∞ 圏の間にはさらに次のような関係がある.

補題 1.8. 任意のホモトピー恒等射を持つ A_∞ 圏は恒等射を持つ A_∞ 圏と A_∞ 擬同型である.

Proof. [Fuk02] を参照. □

次の命題は非常に重要である.

補題 1.9. \mathcal{A} を c -unital な A_∞ 圏とする. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して, $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$ は 0 か非自明なコホモロジーをもつとする. このとき, $\Phi^1 = \text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相 Φ が存在して, $\Phi_* \mathcal{A}$ は恒等射を持つ.

Proof. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して, $e_X \in \text{hom}_{\mathcal{A}}^0(X, X)$ は $\mu_{\mathcal{A}}^1$ で閉じている $H(\mathcal{A})$ における c -unit とする. (途中) □

注意 1.10 ([Sei]). [SS08] の命題の主張には誤りがある. 元の主張は

- 任意の c -unital な A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して, $\Phi^1 = \text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相 Φ が存在して, $\Phi_* \mathcal{A}$ は恒等射を持つ.

であるが, 次のような反例がある. (執筆中)

2 A_∞ 関手圏と A_∞ 合成関手に対する c -unital 性

恒等射を持つ A_∞ 圏に対して成立する命題を c -unital な A_∞ 圏に対して拡張することが本節の目標である.

例えば, 恒等射を持つ A_∞ 圏への A_∞ 関手のなす A_∞ 関手圏は恒等射を持つ.

補題 2.1. \mathcal{A} を恒等射を持つ A_∞ 圏とする. 任意の A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して, $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ は恒等射を持つ.

Proof. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ と $\mathcal{F} \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ に対して, $E_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を次のように定義する.

$$(e = 0) \ E_{\mathcal{F}}^0 := e_{\mathcal{F}X} \in \text{hom}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{F}X, \mathcal{F}X)$$

$$(e \geq 1) \ E_{\mathcal{F}}^e := 0$$

このとき、任意の $t_1 \in \text{hom}_Q(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1), \dots, t_{e-1} \in \text{hom}_Q(\mathcal{F}_{e-2}, \mathcal{F}_{e-1})$ に対して

$$(e = 1) \quad \mu_Q^1(E_{\mathcal{F}}) = 0$$

$$(e = 2) \quad (-1)^{|t_1|} \mu_Q^2(E_{\mathcal{F}_1}, t_1) = t_1 = \mu_Q^2(t_1, E_{\mathcal{F}_0})$$

$$(e \geq 3) \quad \mu_Q^e(t_{e-1}, \dots, t_{n+1}, E_{\mathcal{F}_n}, t_n, \dots, t_1) = 0$$

を示せばよいが、これらは計算すればわかる。 □

この命題を c-unital な場合に拡張する。次の命題はこの拡張において非常に重要である。

補題 2.2. $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を A_∞ 擬同型とする。このとき、 \mathcal{A} が c-unital であることと \mathcal{B} が c-unital であることは同値である。

Proof. $d = 2$ における多項等式より

$$\begin{aligned} & \mu_B^1(\mathcal{F}^2(a_2, a_1)) + \mu_B^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1)) \\ &= \mathcal{F}^2(a_2, \mu_A^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mathcal{F}^2(\mu_A^1(a_2), a_1) + \mathcal{F}^1(\mu_A^2(a_2, a_1)) \end{aligned}$$

である。 a_1, a_2 が μ_A^1 で閉じている射のとき、 $H(\mathcal{B})$ において

$$[\mu_B^2(\mathcal{F}^1(a_2), \mathcal{F}^1(a_1))] = [\mathcal{F}^1(\mu_A^2(a_2, a_1))]$$

となる。

(\mathcal{A} が c-unital) 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ に対して、 e_X が $H(\mathcal{A})$ における c-unit であるとする。 \mathcal{F} は A_∞ 擬同型なので、任意の $Y \in \text{Ob } \mathcal{B}$ に対して、ある $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ が存在して $\mathcal{F}X = Y$ となる。この Y に対して、 $e_Y : Y \rightarrow Y$ を $e_Y = e_{\mathcal{F}X} := \mathcal{F}^1(e_X)$ と定義する。この e_Y が $H(\mathcal{B})$ における c-unit であることを示す。 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は A_∞ 擬同型なので、 μ_B^1 で閉じている任意の射 \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 に対して、 μ_A^1 で閉じているある射 a_1, a_2 が存在して

$$[\mathcal{F}^1(a_1)] = [\tilde{a}_1], \quad [\mathcal{F}^1(a_2)] = [\tilde{a}_2]$$

となる。 $H(\mathcal{B})$ における多項等式において $a_1 = e_X$ または $a_2 = e_X$ とすると、 \mathcal{B} が c-unital であることが分かる。

(\mathcal{B} が c-unital) 任意の $Y \in \text{Ob } \mathcal{B}$ に対して、 e_Y が $H(\mathcal{B})$ における c-unit であるとする。 \mathcal{F} は A_∞ 擬同型なので、 $\mathcal{F}X = Y$ となる $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ と μ_A^1 で閉じている射 $e_X : X \rightarrow X$ が存在して、 $[\mathcal{F}^1(e_X)] = [e_Y]$ となる。この e_X が $H(\mathcal{A})$ における c-unit であることを示す。 $H(\mathcal{B})$ における多項等式において $a_1 = e_X$ または $a_2 = e_X$ とすると、 \mathcal{A} が c-unital であることが分かる。 □

定理 2.3. 任意の c-unital な A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して、次の 2 つが成立する。

1. 任意の A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して、 $\mathcal{Q} := \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ は c-unital である。

2. $E_{\mathcal{F}} \in \text{hom}_{\mathcal{Q}}^0(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ が $H(\mathcal{Q})$ における c-unit であるとき, 任意の $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ に対して, $E_{\mathcal{F}}^0 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{F}X, \mathcal{F}X)$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である.

Proof. 補題 1.9 を用いて, $\Phi^1 = \text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ である形式的微分同相を Φ , $\tilde{\mathcal{A}} := \Phi_*\mathcal{A}$ を恒等射を持つ A_{∞} 圏とする. それぞれ次のように示すことができる.

1. 補題 2.1 より $\tilde{\mathcal{Q}} := \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{A}})$ は恒等射を持つ. $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ は A_{∞} 擬同型なので, $\mathcal{L}_{\Phi} : \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ は A_{∞} 擬同型である. 補題 2.2 より, \mathcal{Q} は c-unital である.
2. $\mathcal{F} \in \text{Ob}\mathcal{Q}$ の Φ による左合成を $\tilde{\mathcal{F}}$ とあらわす. 自然変換性より, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{H(\mathcal{Q})}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{H(\mathcal{L}_{\Phi}^1) \cong} & \text{hom}_{H(\tilde{\mathcal{Q}})}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}_{\text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{A}))}(H(\mathcal{F}), H(\mathcal{F})) & \xrightarrow{=} & \text{hom}_{\text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\tilde{\mathcal{A}}))}(H(\tilde{\mathcal{F}}), H(\tilde{\mathcal{F}})) \end{array}$$

$\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ は A_{∞} (擬) 同型なので, $\mathcal{L}_{\Phi} : \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ は A_{∞} 擬同型である. よって, $H(\mathcal{L}_{\Phi}^1)$ はコホモロジー圏における複体の同型射である. また, $\Phi^1 = \text{id}_{\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)}$ なので $H(\mathcal{A}) = H(\tilde{\mathcal{A}})$ である. よって

$$\text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{A})) = \text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\tilde{\mathcal{A}}))$$

である. $H(\tilde{\mathcal{Q}})$ における c-unit である \mathcal{Q} における射を $E_{\mathcal{F}}$ とあらわす. つまり, $E_{\mathcal{F}}$ は

$$\mathcal{L}_{\Phi}^1 : \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{hom}_{\tilde{\mathcal{Q}}}(\mathcal{L}_{\Phi}\mathcal{F}, \mathcal{L}_{\Phi}\mathcal{F}) : E_{\mathcal{F}} \mapsto E_{\tilde{\mathcal{F}}}$$

によって, $H(\tilde{\mathcal{Q}})$ において

$$[E_{\tilde{\mathcal{F}}}] = H(\mathcal{L}_{\Phi}^1)([E_{\mathcal{F}}])$$

となる \mathcal{Q} における射である. $H(\mathcal{L}_{\Phi})$ は関手なので, $[E_{\mathcal{F}}]$ は $H(\mathcal{Q})$ における恒等射である. 上の図式の diagram chasing

$$\begin{array}{ccc} [E_{\mathcal{F}}] & \xrightarrow{H(\mathcal{L}_{\Phi})} & [E_{\tilde{\mathcal{F}}}] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H(E_{\mathcal{F}}) & \end{array}$$

より, $H(E_{\mathcal{F}})$ は $\text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{A})) (= \text{Nu-fun}(H(\mathcal{C}), H(\tilde{\mathcal{A}})))$ における恒等射である. よって, $[E_{\mathcal{F}}^0] : \mathcal{F}X \rightarrow \mathcal{F}X$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である.

□

恒等射を保つ A_{∞} 関手の A_{∞} 合成関手は恒等射を保つ.

補題 2.4. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を保つ A_{∞} 関手とする. 任意の A_{∞} 圏 \mathcal{A} に対して, 左合成関手 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ は恒等射を保つ.

Proof. 補題 2.1 より, $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ と $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ は恒等射を持つ. 任意の $\mathcal{F} \in \text{Ob} nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ における恒等射を $E_{\mathcal{F}}$ と表すとき, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}})$ が $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ における恒等射であることを示せばよい.

□

この命題を c-unital な場合に拡張する. A_{∞} 左合成関手と A_{∞} 右合成関手でわずかに主張が異なる.

定理 2.5. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を c-unit を保つ A_{∞} 関手とする. 任意の A_{∞} 圏 \mathcal{A} に対して, 左合成関手 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} : nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ は c-unit を保つ.

Proof. 定理 2.3 より $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ と $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ は c-unital である. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ を c-unit を保つ A_{∞} 関手とする. $E_{\mathcal{F}} \in \text{hom}_{nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A})}^0(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ を $H(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ における c-unit とする. このとき

$$[\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}})] \in \text{hom}_{H(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B}))}^0(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \mathcal{G} \circ \mathcal{F})$$

である. 定理 2.3 より, 任意の $X \in \text{Ob} \mathcal{C}$ に対して $E_{\mathcal{F}}^0 \in \text{hom}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{F}X, \mathcal{F}X)$ は $H(\mathcal{A})$ における c-unit である. よって

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}}))^0 = \mathcal{G}^1(E_{\mathcal{F}}^0) \in \text{hom}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{G}(\mathcal{F}X), \mathcal{G}(\mathcal{F}X))$$

は $H(\mathcal{B})$ における c-unit である. フィルトレーションの章の A_{∞} 合成関手の性質と $nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ が c-unital であることより, $[\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}})]$ は同型射である. $E_{\mathcal{F}}$ は冪等で $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は関手なので, $[\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}})]$ は冪等である. 冪等な同型射は恒等射なので, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^1(E_{\mathcal{F}})$ は $H(nu\text{-}fun(\mathcal{C}, \mathcal{B}))$ における c-unit である. よって, $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ は c-unit を保つ.

□

定理 2.6. \mathcal{A}, \mathcal{B} を恒等射を持たない A_{∞} 圏, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を恒等射を考えない A_{∞} 関手とする. 任意の c-unital な A_{∞} 圏 \mathcal{C} に対して, 右合成関手 $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : nu\text{-}fun(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は c-unit を保つ.

Proof. 定理 2.5 と同様.

□

定義 2.7 (修正前自然変換). \mathcal{C} を恒等射を持たない A_{∞} 圏, \mathcal{A} を恒等射を持つ A_{∞} 圏, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_{∞} 関手とする. $T^0 = 0$ である次数 0 の前自然変換 $T : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1$ に対して, 前自然変換 $S : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1$ を次のように定義する.

$$(e = 0) \quad S^0 := e_{\mathcal{F}_0 X}$$

$$(e \geq 1) \quad S^e := T^e$$

S を修正前自然変換 (modified pre-natural transformation) という.

補題 2.8. 定義 2.7 の記号を用いる. このとき, 次の 2 つは同値である.

1. T は \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 へのホモトピーである.

2. S は \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 への自然変換である.

恒等射を持つ A_∞ 圏へのホモトピックな A_∞ 関手は A_∞ 関手圏の 0 次コホモロジー圏において同型である.

補題 2.9. \mathcal{C} を恒等射を持たない A_∞ 圏, \mathcal{A} を恒等射を持つ A_∞ 圏, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 がホモトピックであるとき, $H^0(\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 は同型である.

Proof. 補題 2.8 より, 修正前自然変換 S は \mathcal{F}_0 から \mathcal{F}_1 への自然変換である. $S^0 := e_{\mathcal{F}_0 X}$ よりフィルトレーションの章の A_∞ 合成関手の性質を用いると, $H^0(\mathcal{Q})$ において $[S]$ の右合成は同型

$$\text{hom}_{H^0(\mathcal{Q})}(\mathcal{F}_0, -) \cong \text{hom}_{H^0(\mathcal{Q})}(\mathcal{F}_1, -)$$

を定める. $H^0(\mathcal{Q})$ における Yoneda の補題より, $H^0(\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 は同型である. \square

この命題を c-unital な場合に拡張する.

定理 2.10. \mathcal{C} を恒等射を持たない A_∞ 圏, \mathcal{A} を c-unital な A_∞ 圏, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ を恒等射を考えない A_∞ 関手とする. \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 がホモトピックであるとき, \mathcal{F}_0 と \mathcal{F}_1 は $H^0(\text{nu-fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}))$ において同型である.

Proof. 定理 2.3 の記号を用いる. ?? より, 左合成関手はホモトピーを保つ. よって, $\tilde{\mathcal{F}}_1 := \Phi \circ \mathcal{F}_1$ と $\tilde{\mathcal{F}}_2 := \Phi \circ \mathcal{F}_2$ は $\tilde{\mathcal{Q}}$ においてホモトピックである. 補題 2.9 より, $\tilde{\mathcal{F}}_1$ と $\tilde{\mathcal{F}}_2$ は $H^0(\tilde{\mathcal{Q}})$ において同型である. ?? より \mathcal{L}_Φ は A_∞ 擬同型なので, \mathcal{F}_1 と \mathcal{F}_2 は $H^0(\mathcal{Q})$ において同型である. \square

3 Morita 不変量

A, B を恒等射を持つ次数付き線形圏, $F_0, F_1 : A \rightarrow B$ を恒等射を保つ次数付き線形関手とする. A への包含関手が圏同値であるような A の部分圏を $\tilde{A} \subset A$ と表す.

補題 3.1. F_0, F_1 の \tilde{A} への制限は Hochschild コホモロジー上の同型

$$HH(A, B) \cong HH(\tilde{A}, B)$$

を定める.

4 A_∞ 擬同値

定義 4.1 (c-unit を保つ A_∞ 関手圏). c-unit を保つ A_∞ 関手のなす A_∞ 関手圏を c-unit を保つ A_∞ 関手圏 (c-unital A_∞ -functor category) といい, $\text{fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表す.

注意 4.2. $fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は $nu-fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の充満部分圏である.

定義 4.3 (A_∞ 擬同値). $c\text{-unit}$ を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, $H(\mathcal{F})$ がコホモロジー圏の圏同値

$$H(\mathcal{A}) \simeq H(\mathcal{B})$$

を定めるとき, \mathcal{F} は A_∞ 擬同値 ($A_\infty\text{-quasi-equivalence}$) であるという.

例 4.4. A_∞ 擬同型は A_∞ 擬同値である. また, A_∞ 擬同値はコホモロジー圏上で忠実充満である.

$c\text{-unit}$ を保つ A_∞ 関手の制限は A_∞ 関手圏の間の A_∞ 擬同値を定める.

補題 4.5. $c\text{-unital}$ な A_∞ 圏 \mathcal{A} に対して, \mathcal{A} への包含関手が A_∞ 擬同値であるような \mathcal{A} の A_∞ 充満部分圏を $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ と表す. 任意の $c\text{-unital}$ な A_∞ 圏 \mathcal{B} に対して, $c\text{-unit}$ を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ と前自然変換の $\tilde{\mathcal{A}}$ への制限は A_∞ 擬同値

$$H(fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \simeq H(fun(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B}))$$

を定める.

Proof.

□

注意 4.6. 補題 4.5 の証明より, ある $c\text{-unit}$ を保つ A_∞ 関手 $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ が存在して

$$\mathcal{P}|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$$

を満たす. 包含関手を $\mathcal{K} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ と表すと

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{K} = \text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}}$$

である. ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K} \circ \mathcal{P}) &= \mathcal{P} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{P} = \text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\text{Id}_{\mathcal{A}}) &= \mathcal{P} \circ \text{Id}_{\mathcal{A}} = \mathcal{P} \end{aligned}$$

なので

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{K} \circ \mathcal{P}) = \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\text{Id}_{\mathcal{A}})$$

である. 定義より, \mathcal{K} は A_∞ 擬同値なので, \mathcal{P} も A_∞ 擬同値である. 特に, \mathcal{P} はコホモロジー圏上で忠実充満である. A_∞ 左合成関手はコホモロジー圏上で忠実充満なので, $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である. よって, $\mathcal{K} \circ \mathcal{P}$ と $\text{Id}_{\mathcal{A}}$ は $H^0(fun(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$ において同型である.

A_∞ 擬同値は 0 次コホモロジー圏においてホモトピー逆関手をもつ.

定理 4.7. A_∞ 擬同値 $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, ある A_∞ 擬同値 $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ が存在して次を満たす.

- $H^0(\text{fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$ において $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong \text{Id}_{\mathcal{A}}$
- $H^0(\text{fun}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))$ において $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong \text{Id}_{\mathcal{B}}$

Proof. 次の条件を満たす A_∞ 充満部分圏 $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}, \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ がそれぞれ存在する.

- 包含関手 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ と $\mathcal{K}_{\mathcal{B}} : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ は A_∞ 擬同値である.
- $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ のそれぞれへの制限 $\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ は A_∞ 擬同型である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{B} \\ \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \uparrow & & \uparrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}} \\ \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow[\text{\scriptsize $A_\infty\text{-}qis$}]{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{\mathcal{B}} \end{array}$$

この図式において, $\tilde{\mathcal{F}}$ 以外は A_∞ 擬同値である. 注意 4.6 より, A_∞ 擬同値 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ と $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ が存在する. ??より, A_∞ 擬同型 $\tilde{\mathcal{G}} : \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ が存在する. ここで

$$\mathcal{G} := \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

と定義する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{B} \\ \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \downarrow & & \uparrow \mathcal{K}_{\mathcal{B}} \\ \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{\mathcal{B}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xleftarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{B} \\ \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \uparrow & & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \\ \tilde{\mathcal{A}} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{G}}} & \tilde{\mathcal{B}} \end{array}$$

注意 4.6 より, $H^0(\text{fun}(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$ において

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \circ \mathcal{F} &\cong (\mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{B}}) \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}}) \\ &= \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{G}} \circ \text{Id}_{\tilde{\mathcal{B}}} \circ \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \\ &\cong \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \circ \text{Id}_{\tilde{\mathcal{A}}} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \\ &= \text{Id}_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

$H^0(\text{fun}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))$ において $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong \text{Id}_{\mathcal{B}}$ となることも同様に示せる. □

A_∞ 擬同値を合成する A_∞ 合成関手は A_∞ 擬同値である.

補題 4.8. $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を A_∞ 擬同値とする. 任意の A_∞ 圏 \mathcal{C} に対して, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}} : \text{fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ は A_∞ 擬同値である. 左合成に対しても同様に成立する.

Proof. 定理 2.5 より, $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ はコホモロジー圏上で忠実充満である. あとはコホモロジー圏上で本質的全射であることを示せばよい. *1 つまり, 任意の $\mathcal{H} \in \text{Ob fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ に対して, ある $- \in \text{fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$

*1 例えば, \mathcal{G} が A_∞ 擬同型であるときは??より従う. \mathcal{G} が充満部分圏からの包含関手であるときは補題 4.5 より従う. (これは A_∞ 擬同値であることまで言っている.)

が存在して $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(-) \cong \mathcal{H}$ を満たすことを言えばよい. 定理 4.7 より, ある $\mathcal{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ が存在して, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong \text{Id}_{\mathcal{A}}$ を満たす. よって, $H^0(\text{fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))$ において

$$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H} \circ \mathcal{F}) = \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\text{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$$

□

5 恒等射を保つ A_{∞} 加群

補題 5.1. c-unital な A_{∞} 圏 \mathcal{A} に対して, $\text{nu-mod}(\mathcal{A})$ は恒等射を持つ.

Proof. Ch は恒等射を持つので, 定理 2.3 より $\text{nu-mod}(\mathcal{A}) = \text{nu-fun}(\mathcal{A}^{\text{op}}, Ch)$ は恒等射を持つ. □

注意 5.2. $\text{nu-mod}(\mathcal{A})$ における恒等射 $e_{\mathcal{M}}$ は次のように表される. 任意の $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ と $b \in \mathcal{M}(X)$ に対して

$$(e = 1) \quad e_{\mathcal{M}}^1(b) = (-1)^{|b|}b$$

$$(e \geq 2) \quad e_{\mathcal{M}}^e = 0$$

定義 5.3 (コホモロジー圏上で恒等射を保つ A_{∞} 加群). A_{∞} 加群 \mathcal{M} が A_{∞} 関手として c-unit を保つとき, \mathcal{M} はコホモロジー圏上で恒等射を保つ A_{∞} 加群 (cohomologically unital A_{∞} -module) であるという. 以降では, c-unit を保つ A_{∞} 加群という.

注意 5.4.

定義 5.5 (c-unit を保つ A_{∞} 加群のなす圏). c-unit を保つ A_{∞} 加群のなす A_{∞} 関手圏を c-unit を保つ A_{∞} 加群圏 (category of c-unital A_{∞} -modules) といい, $\text{mod}(\mathcal{A})$ と表す.

6 A_{∞} プルバック関手に対する c-unital 性

7 A_{∞} -Yoneda の補題

補題 7.1. A_{∞} -Yoneda 埋め込みは c-unit を保つ.

Proof. A_{∞} -Yoneda 埋め込みの定義より従う. □

補題 7.2 (A_{∞} -Yoneda の補題). \mathcal{A} を c-unital な A_{∞} 圏とする. 任意の $Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ と c-unit を保つ A_{∞} 加群 \mathcal{M} に対して, 「恒等射を持たない A_{∞} 圏」で定義された

$$\lambda_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}, \mathcal{M})$$

$$(\lambda_{\mathcal{M}}(c))^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \mu_{\mathcal{M}}^{d+1}(c, b, a_{d-1}, \dots, a_1)$$

は擬同型である.

Proof. $\lambda_{\mathcal{M}}$ の写像錐を -1 だけシフトした複体を考える.

$$\left(\mathcal{M}(Y) \oplus \mathrm{hom}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}, \mathcal{M})[-1], \begin{pmatrix} \mu_{\mathcal{M}}^1 & \lambda_{\mathcal{M}} \\ 0 & -\mu_{\mathcal{Q}}^1 \end{pmatrix} \right)$$

□

補題 7.2 において c-unit を保つ A_{∞} 加群として Yoneda 埋め込み \mathcal{Y} をとると, $\lambda_{\mathcal{M}}$ は $l_{\mathcal{A}}$ に一致して次の系が得られる.

系 7.3. \mathcal{A} を c-unital な A_{∞} 圏とする. $l_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathrm{mod}(\mathcal{A})$ はコホモロジー圏上で忠実充満である.

$l_{\mathcal{A}}$ の像を考えると次の命題が従う.

系 7.4. 任意の c-unital な A_{∞} 圏は恒等射を持つ dg 圏と A_{∞} 擬同型である.

Proof. $\mathrm{mod}(\mathcal{A})$ が恒等射を持つ dg 圏であることより従う.

□

参考文献

- [Fuk02] Kenji Fukaya. Floer homology and mirror symmetry ii. preprint, 2002.
- [Sei] Paul Seidel. Fukaya categories and picard-lefschetz theory errata. <https://math.mit.edu/~seidel/errata/>.
- [SS08] P. Seidel and European Mathematical Society. Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory. Zurich lectures in advanced mathematics. European Mathematical Society, 2008. <https://books.google.co.jp/books?id=NOQxS9Tp50UC>.