Week 2 손지우

1. 코드 실행 완료

2. Data가 binomial distribution일때, Likelihood를 Exponential Families 형태로 변환해 보기. 또한 왜 Beta distribution이 Conjugacy인지 생각해 보기.

1) 변환하기

let $X \sim Bin(n, \theta)$ for n: 자연수, $0 \le \theta \le 1$

($X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Ber(\theta)$
→ $X = X_1 + \cdots + X_n$ 으로 생각하면 편함)

$$f(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$\propto \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x (1-\theta)^n$$

$$= \exp\left(x \log\frac{\theta}{1-\theta}\right)(1-\theta)^n$$

$$= \exp(x\phi)\left(\frac{1}{1+\exp(\phi)}\right)^n$$

exponential family form: $f(y|\phi) = h(y)\,c(\phi)\exp(\phi\, k(y))$ 라고 한다면

$\phi = \log\frac{\theta}{1-\theta}$, $h(x) = 1$, $c(\phi) = \{1+\exp(\phi)\}^{-n}$, $k(x) = x$

2) Beta dist.이 왜 conjugacy?

Let $\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$ for $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \le \theta \le 1$

$$p(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

그렇다면 왜 Beta dist.이 conjugacy가 될 수 있을까?

우선 parameter space가 같고, $\theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta}$ format도 같기 때문이다. = exponential family form으로 변환가능

그래서 parameter 간의 의미공유도 가능해진다.

이때 $\theta \sim Beta(n_0 t_0, n_0(1-t_0))$

$\theta | X = x \sim Beta(n_0 t_0 + x, n_0(1-t_0) + n - x)$

$W \sim Beta(\alpha, \beta)$ 일때, $E(W) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 인데.

$\theta \sim Beta(n_0 t_0, n_0(1-t_0))$로 놓으면 $E(\theta) = \frac{n_0 t_0}{n_0} = t_0$로 prior guess로서의 역할 잘 해준다.

개인적으로 n_0와 prior guess($E(\theta)$)를 미리 선정해두고 이것과 분포형태에 맞춰서 '잘' t_0를 푸는게 가장 효율적일듯.