* Optimization of boundary *

- Primal optimization problem.

$$\min_{w,b} \frac{1}{2}\|w\|^2 \quad s.t \quad y_i(w^Tx_i+b) \ge 1, \quad i=1,\dots,n$$

- Step 1) generalized Lagrangian을 만들자

$$L(w,b,\alpha) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i[y_i(w^Tx_i+b)-1]$$

KKT condition 2 KKT condition 1

- Step 2) KKT condition을 활용하여 generalized Lagrangian을 정리하자.

$$\nabla_w L(w,b,\alpha) = w - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i = 0 \Leftrightarrow \boxed{w = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}L(w,b,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0$$

일단 이 두 가지 정보를 바탕으로 $L(w,b,\alpha)$를 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
L(w,b,\alpha) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i[y_i(w^Tx_i+b)-1] \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i w^Tx_i - b\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \\
&= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i w^Tx_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \\
&= -\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j y_i y_j \alpha_i\alpha_j \langle x_i, x_j\rangle = W(\alpha)
\end{aligned}$$

- Step 3) 이제 max min $W(\alpha)$를 구해주면 된다
  - $W(\alpha)$는 KKT condition을 내포하고 있는 Lagrangian 이므로, 이로부터 dual optimization solution을 구하면, 그것은 primal optimization solution이 된다.
  - $$\max_{\substack{\alpha \\ \alpha_i \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0}} \min_{w} W(\alpha) = \max_{\substack{\alpha \\ \alpha_i \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i = 0}} W(\alpha)$$

    KKT condition 5

  - $W(\alpha)$는 α에 대한 이차식이므로, closed form solution이 존재한다.

- Step 4) α를 구한 뒤에는 α를 $w = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i$에 대입하여 w를 구한다.

- Step 5) KKT condition 3, 4와 앞서 구한 w를 활용하여 b를 구한다.