Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Problemas Resueltos

Automatas

Integrantes:
Yonathan Berith Jaramillo Ramírez. 419004640

Profesor: Lourdes del Carmen González Huesca
Ayudantes: María Fernanda Mendoza Castillo

9 Diciembre, 2021

Tarea 1

1. Sea Σ = {a, b}, da las definiciones formales de los siguientes lenguajes:

a) Todas las cadenas de longitud mayor a 2 que empiecen y terminen con el mismo símbolo.

b) Todas las cadenas de longitud par.

Respuestas:

a) $L = \{w \mid w = ava, a, v \in \Sigma, w \in \Sigma^*\}$

b) $M = \{w \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$

Tarea 2

1. Da la definición completa (no recursiva) del lenguaje que contenga las siguientes cadenas:
   - "1"
   - "01"
   - "11101"
   - "0101111"

> **Solution:**
> $\Sigma = \{"01", "1"\}$
> $\{w \mid w = a^n, n \in \mathbb{N} \wedge a \in \Sigma\}$

2. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, definimos los lenguajes L_1, L_2, L_3 como sigue:
   $L_1 = \{\epsilon, "aa", "baaaa", "bb"\}$
   $L_2 = \{"ababa", "bb", "aabaabaa", "abba", "aababbaa"\}$
   $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = n, \text{ n es par } \}$
   Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

> **Solution:**
>
> a) $L_1 \cup L_2 = \{\epsilon, "aa", "baaaa", "ababa", "bb", "aabaabaa", "abba", "aababbaa"\}$
>
> b) $L_2 \cap L_3 = \{"abba", "aababbaa"\}$
>
> c) $L_1 - L_3 = \{\epsilon, "bb"\}$
>
> d) $\overline{L_3} = L = \{w = \Sigma^* \mid \#_a(w) = n, \text{ n es impar}\}$

Examen 1

1. A partir del siguiente autómata M_1, mostrado como tabla de transiciones:

Tabla de transiciones				
	Q	0	1	2
i	q_0	q_0	q_1	q_2
	q_1	q_3	q_1	q_2
f	q_2	q_3	q_3	q_2
	q_3	q_3	q_3	q_3

a) Describe el lenguaje L_1 que corresponde a $\mathrm{L}(M_1)$ y da la definición completa de la tupla que define al autómata.

Solution: $L_1 = \{w \in \Sigma^* | w = 0^a 1^a 2^b\}$ donde $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}^+\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{0, 1, 2\}$
$q_0 \in Q$ Es el estado inicial
$F \subseteq Q$
$F = q_2$
Funcíones de transición:
$\delta(q_0, 0) = q_0$
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_0, 2) = q_2$
$\delta(q_1, 0) = q_3$
$\delta(q_1, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 2) = q_2$
$\delta(q_2, 0) = q_3$
$\delta(q_2, 1) = q_3$
$\delta(q_2, 2) = q_2$
$\delta(q_3, 0) = q_3$
$\delta(q_3, 1) = q_3$
$\delta(q_3, 2) = q_3$

b) Describe de forma informal la expresión regular que es equivalente al lenguaje de la máquina.

Solution: $(0^* 1^* 2^+)$

c) Evalúa $\delta^*(q_0, 11122012)$

Solution: Evaluación:
$\delta(q_0, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 1) = q_1$
$\delta(q_1, 2) = q_2$
$\delta(q_2, 2) = q_2$
$\delta(q_2, 0) = q_3$
$\delta(q_3, 1) = q_3$
$\delta(q_3, 2) = q_3$
La cadena es aceptada

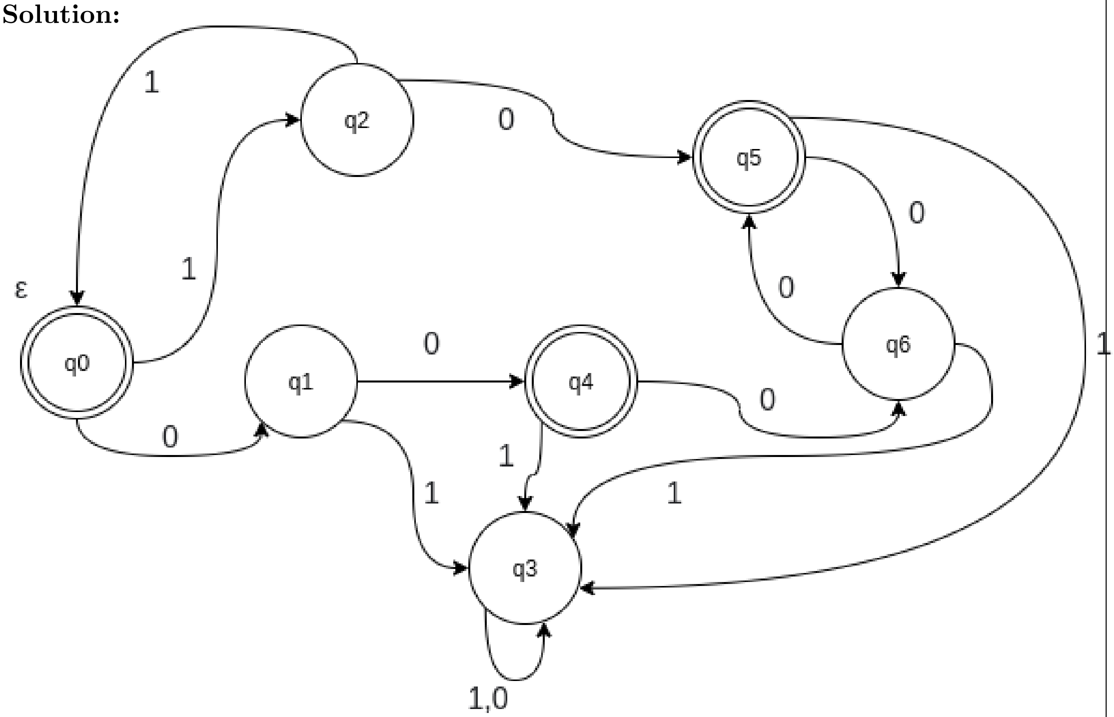
2. Tomando el lenguaje $L_2 = \{1^n 0^m |$ n + m es un numero par $\}$ Sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

   a) Escribe la expresión regular que genera al lenguaje, indica el método usado.

   Solution: $((11)^*(00)^*)$

   b) Diseña un AFD (gráfica) que reconoce este lenguaje, indica el método usado.

   Solution:

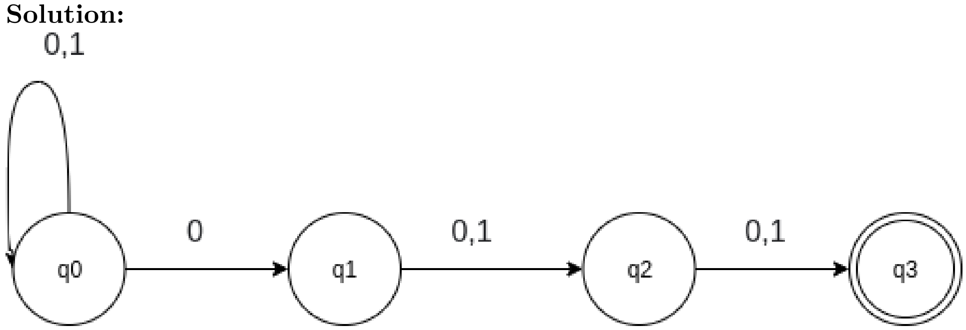


   Metodo usado: Me enfoque en las dos condiciones mas importantes que ví, la primera que el numero de unos y ceros sean pares lo cual lo cubrí con los estados q0 y q2 para los unos y con q5 y q6 para los ceros. Para asegurarme que despues de un 0 no se puedan agregar unos utilice los estados q1, q4 y q3 donde q3 es un estado de error para que de ahi ya no pase nada.

3. Sea $L_3 = \{w = a_0 a_1 ... a_k | a_{k-3} = 0, k \geq 3\}$ sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

   a) Diseña un AFN (sin transiciones épsilon) que acepta el lenguaje.

   Solution:

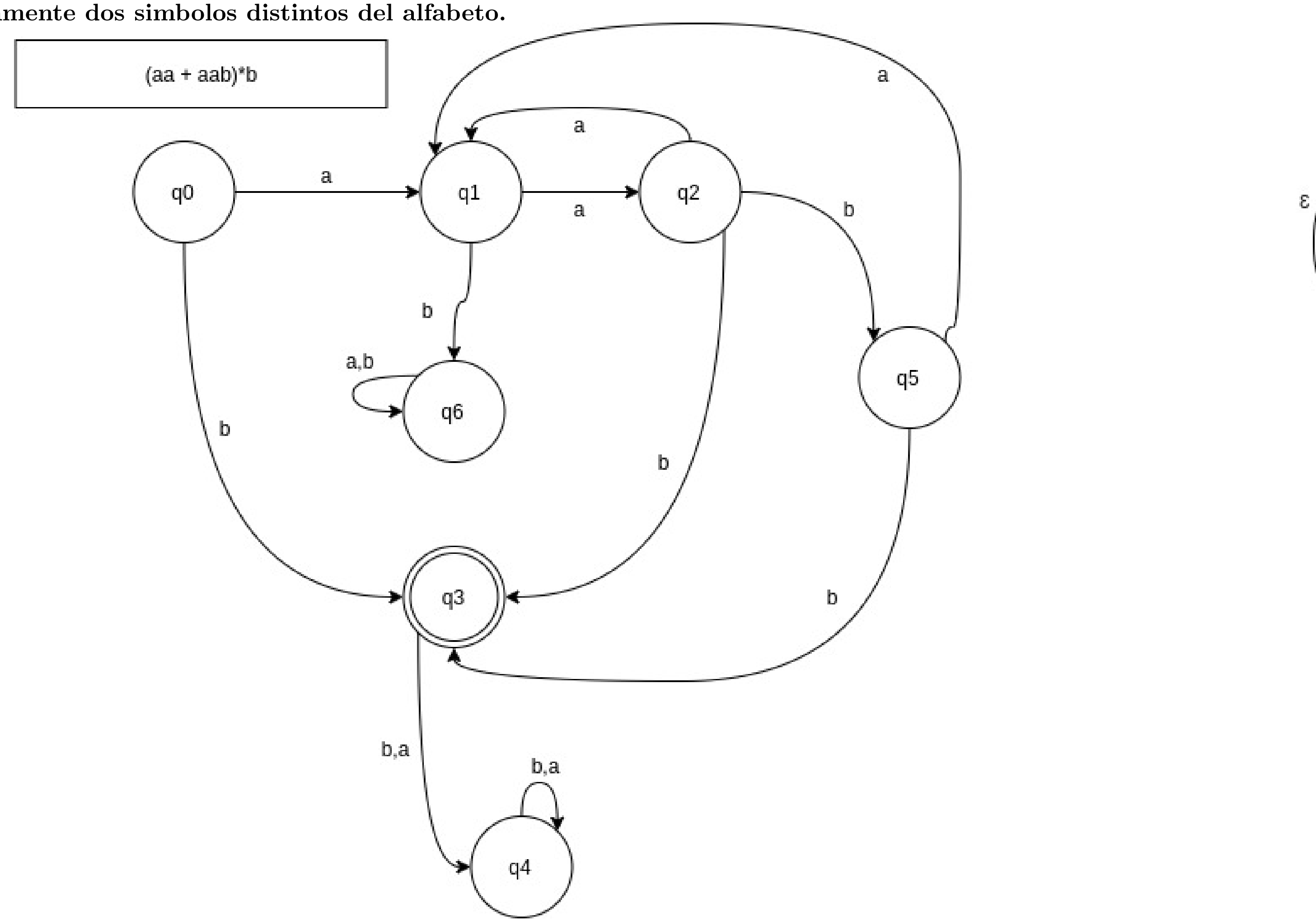


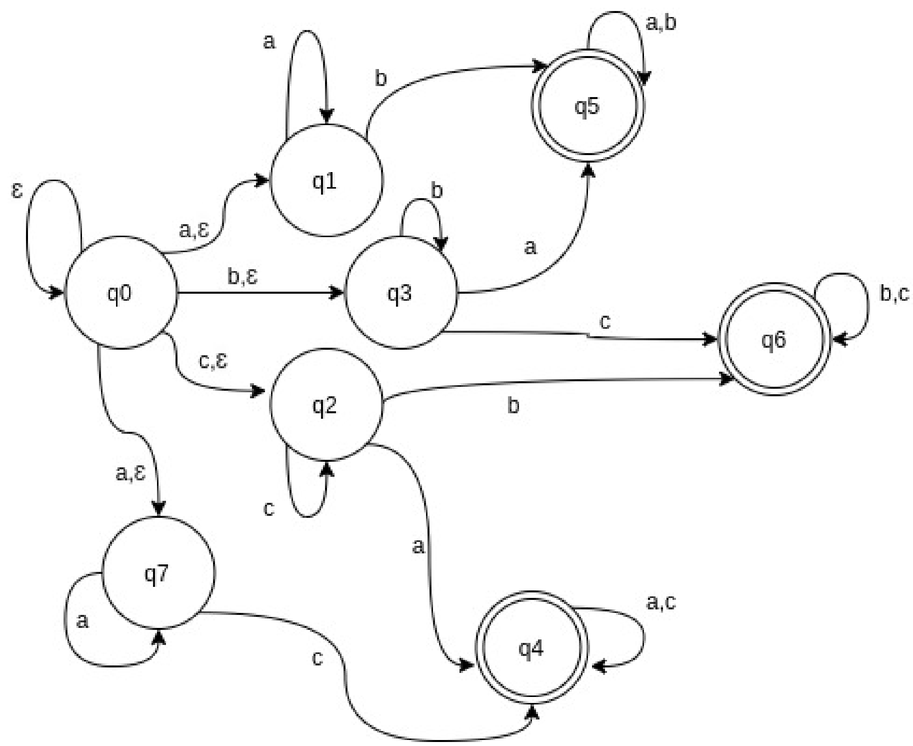
   b) Transforma el AFN anterior a un AFD e incluye la gráfica.

Semanal 5

1. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, disena un AFN que reconozca el mismo lenguaje que contiene combinaciones de subcadenas 'aa' o 'aab' y todas terminan en b.

1. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, disena un AFN-ϵ que acepte todas las cadenas que contengan exactamente dos simbolos distintos del alfabeto.





q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
ε
a,ε
b,ε
c,ε
a,ε
a
b
a,b
b
a
c
b,c
b
c
a
a,c
a
c

!TEX root = main.tex

Semanal 7

1. Tomando el siguiente AFN-ϵ, elimina las transiciones epsilon para convertirlo en un AFN.

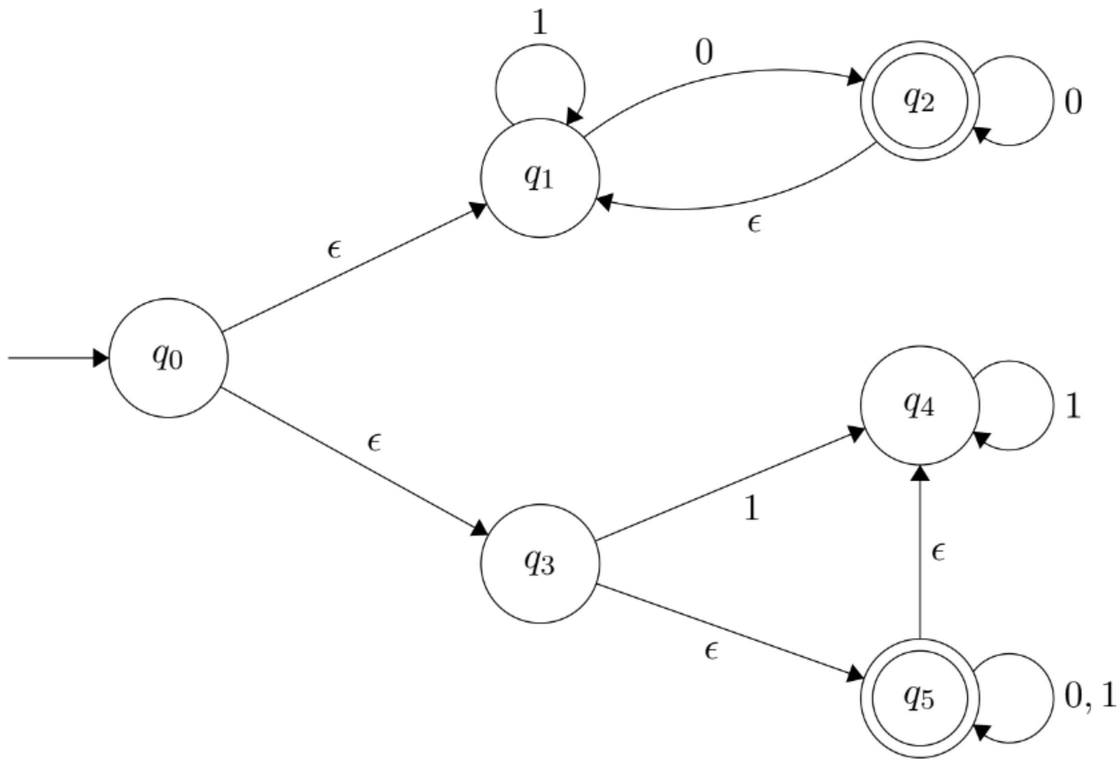
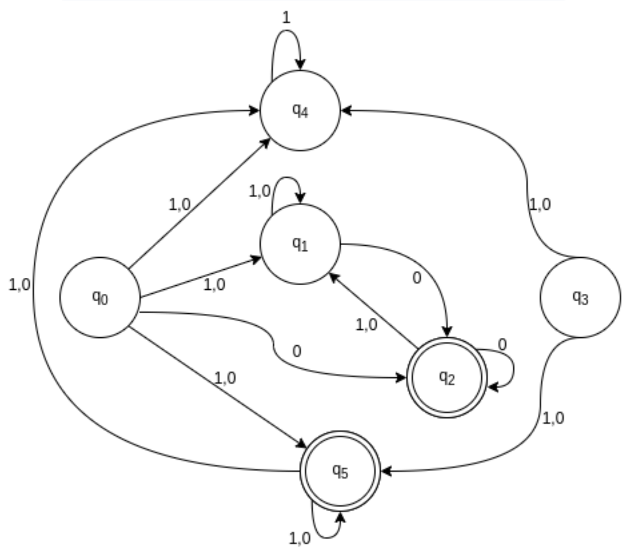


Tabla de tranciciones AFN-ε				
	ε	Clε	1	0
q_0 (inicial)	{q1,q3}	{q0,q1,q3, q4, q5}	∅	∅
q1	∅	{q1}	{q1}	{q2}
q_2 (final)	{q1}	{q1, q2}	∅	{q2}
q_3	{q5}	{q3, q4, q5}	{q4}	∅
q_4	∅	{q4}	{q4}	∅
q_5 (final)	{q4}	{q4, q5}	{q5}	{q5}

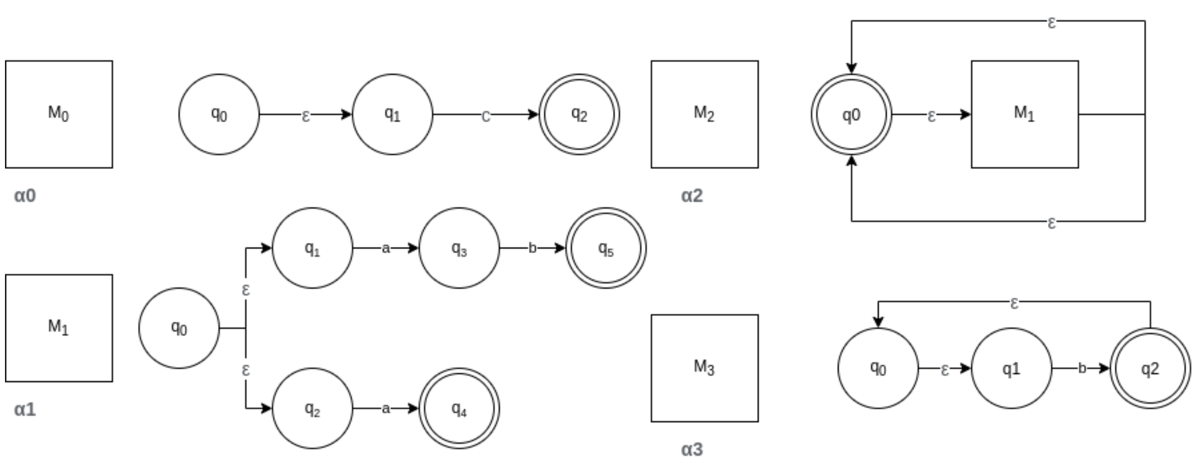
Tabla de tranciciones AFN		
	1	0
$q_{0(\text{inicial})}$	{q1,q4,q5}	{q1,q2, q4, q5}
q1	{q1}	{q1,q2}
q_2(final)	{q1}	{q1,q2}
q_3	{q4,q5}	{q4,q5}
q_4	{q4}	∅
q_5(final)	{q4,q5}	{q4, q5}

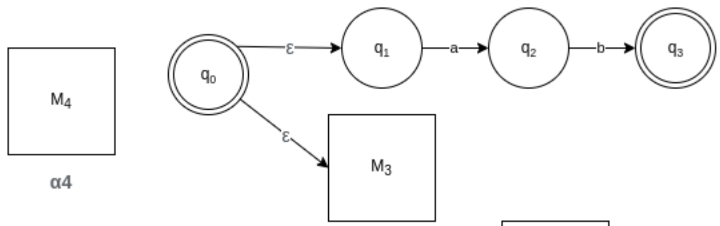


2. Crea un AFN-ϵ a partir de la siguiente expresión regular:

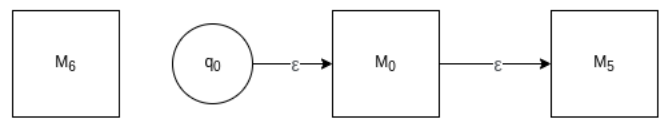
$$c((ab+a)^*+(ab+b^*))^*$$

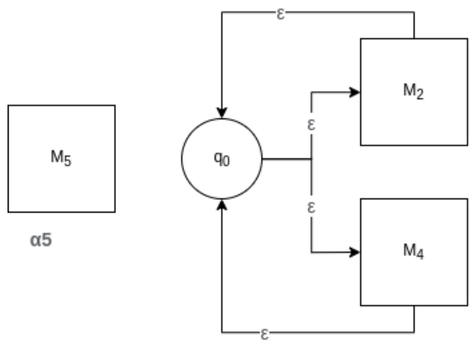
$$\underbrace{c}_{\alpha_0}\overbrace{(\overbrace{(\underbrace{ab+a}_{\alpha_1})^*}^{\alpha_2}+(\underbrace{ab+\overbrace{b^*}^{\alpha_3}}_{\alpha_4}))^*}^{\alpha_5} \tag{1}$$



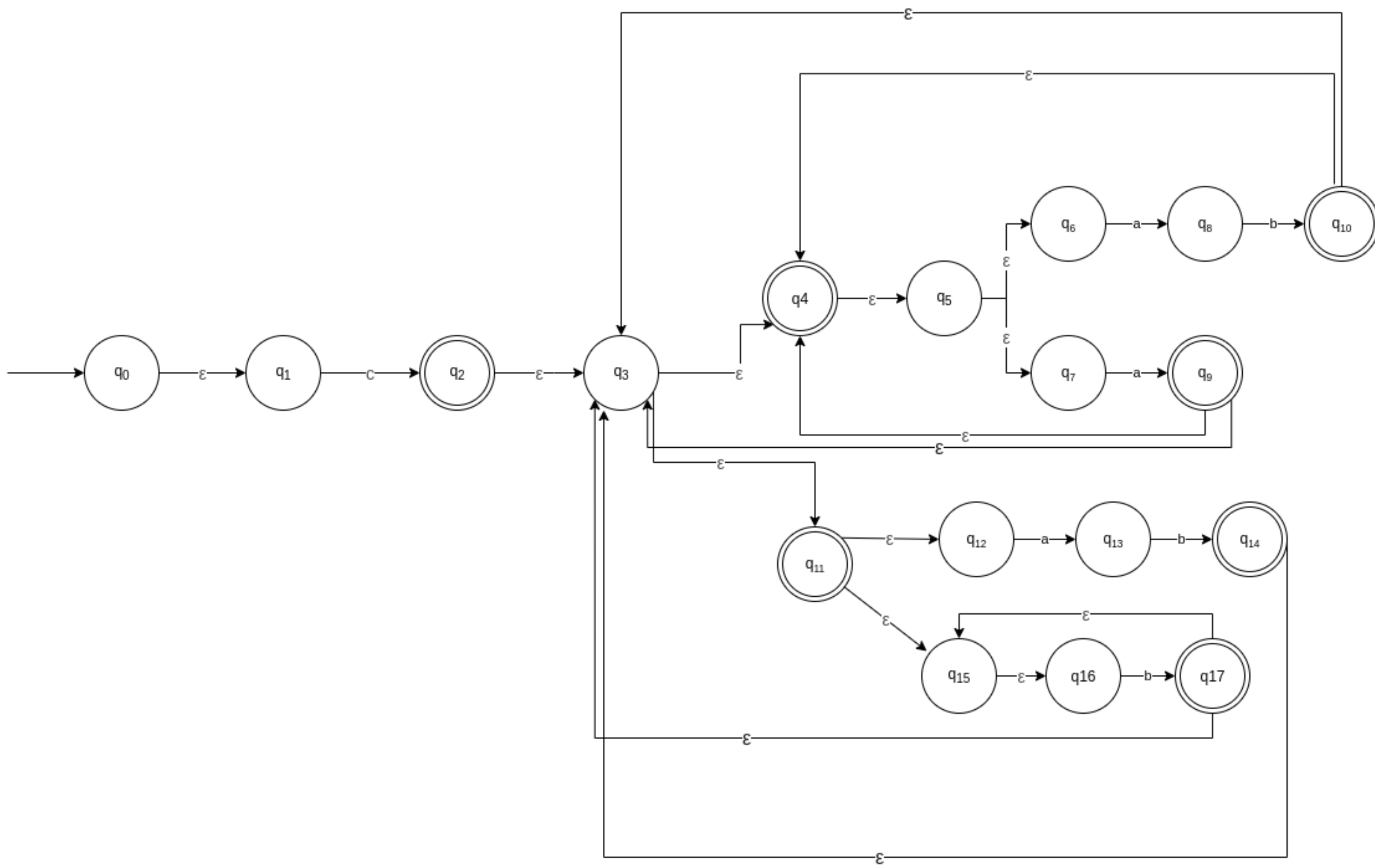

M4
q0
ε
q1
a
q2
b
q3
ε
M3

α4


M6
q0
ε
M0
ε
M5


M5
q0
ε
M2
ε
ε
M4
ε

α5


q0
ε
q1
c
q2
ε
q3
ε
q4
ε
q5
ε
ε
q6
a
q8
b
q10
q7
a
q9
ε
ε
ε
ε
ε
q11
ε
q12
a
q13
b
q14
ε
q15
ε
q16
b
q17
ε
ε
ε

!TEX root = main.tex

Examen 1

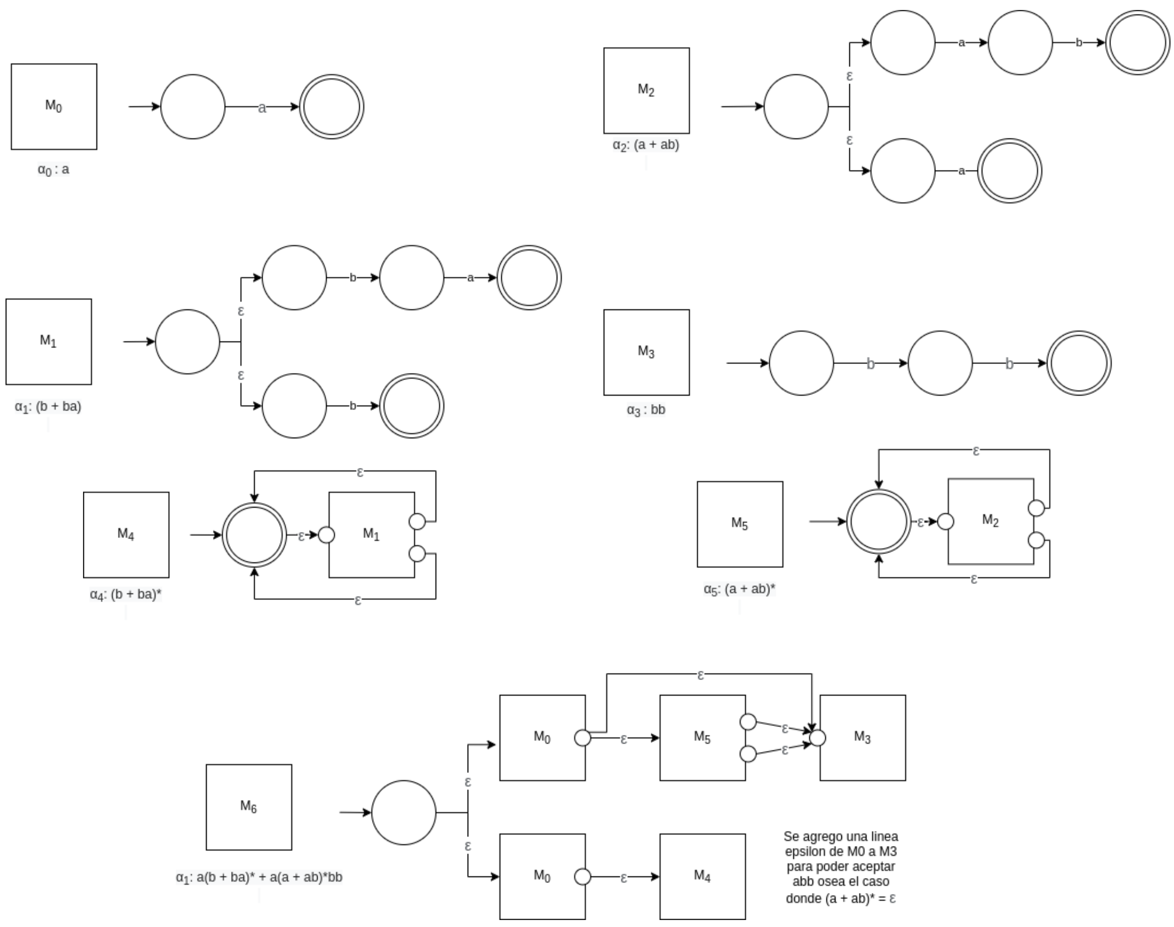
1. **1.5pts. c/u** Considera la siguiente expresión regular:

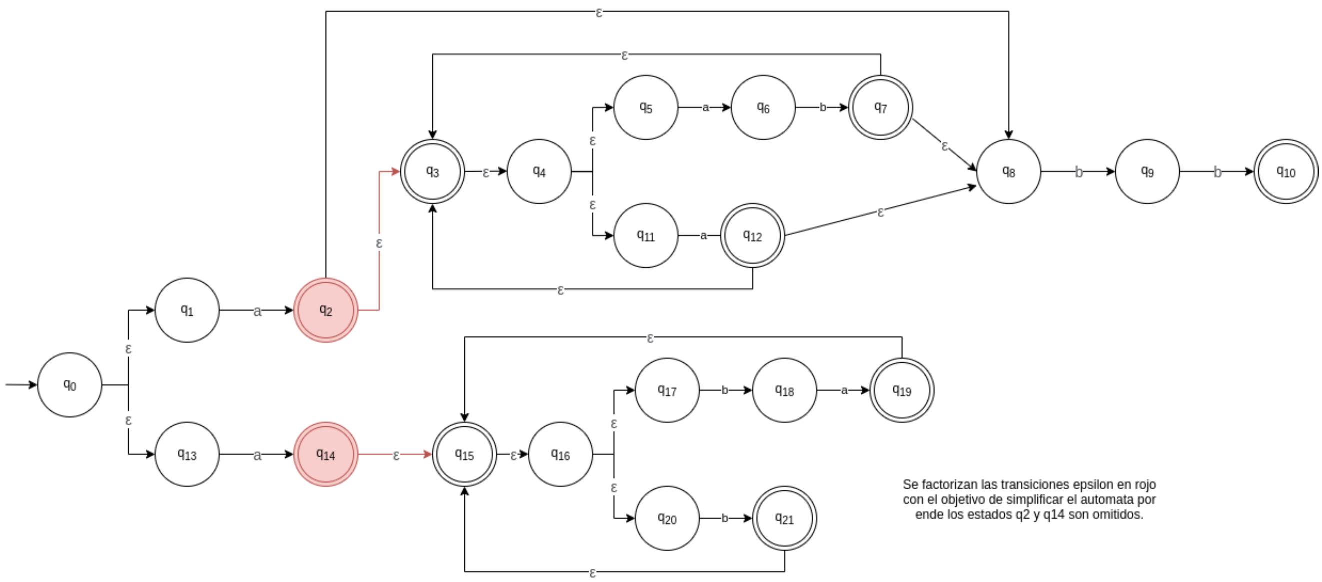
$$a(b+ba)^* + a(a+ab)^*bb \tag{2}$$

$$\underbrace{\underbrace{a}_{\alpha_0}\overbrace{(\underbrace{b+ba}_{\alpha_1})^*}^{\alpha_4} + \underbrace{a}_{\alpha_0}\overbrace{(\underbrace{a+ab}_{\alpha_2})^*}^{\alpha_5}\underbrace{bb}_{\alpha_3}}_{\alpha_6} \tag{3}$$

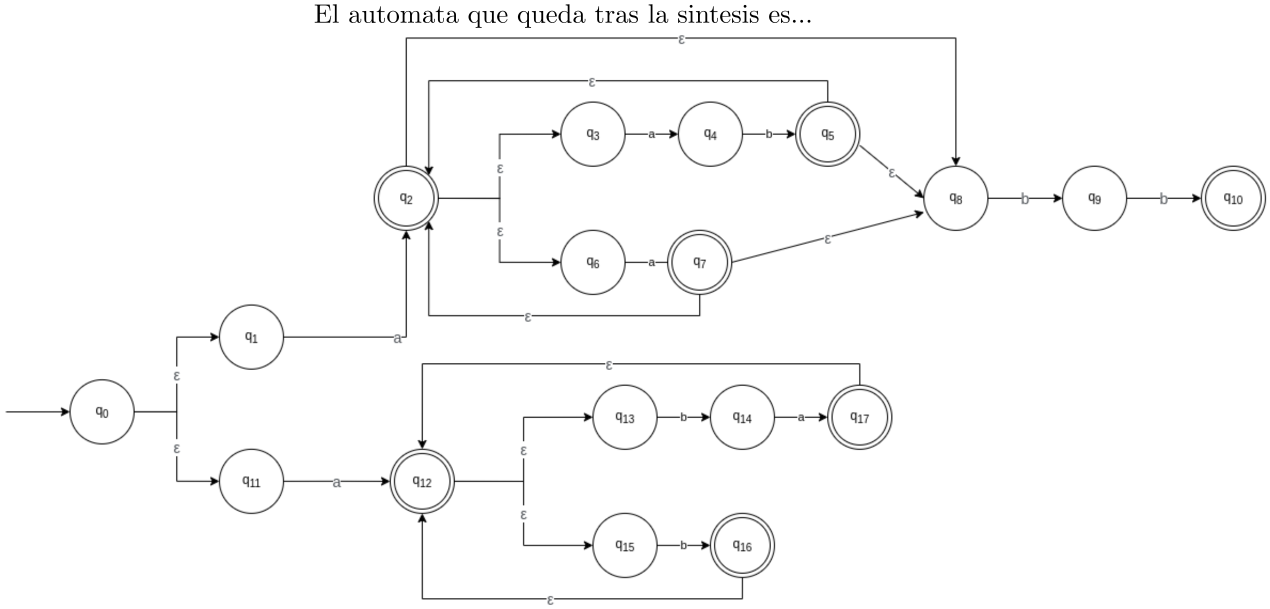
Versión 1

a) Diseñar un AFN-ϵ, M considerando el mismo lenguaje de α mediante el método de síntesis de Kleene (se pueden omitir algunas transiciones ϵ).





El automata que queda tras la sintesis es...



b) Calcular el conjunto Cl_ϵ(q) para cada estado q de la máquina.

AFN-ε	
Q	Clε
q_0 (inicial)	{q0,q1,q11}
q1	{q1}
q_2 (final)	{q2, q3,q6, q8}
q_3	{q3}
q_4	{q4}
q_5 (final)	{q2, q3, q5, q6, q8}
q_6	{q6}
q_7 (final)	{q2, q3, q6, q8}
q_8	{q8}
q_9	{q9}
q_{10} (final)	{q10}
q_{11}	{q11}
q_{12} (final)	{q12, q13,q15}
q_{13}	{q13}
q_{14}	{q14}
q_{15}	{q15}
q_{16} (final)	{q12, q13, q15, q16}
q_{17} (final)	{q12, q13, q15, q17}

c) Encontrar el AFN equivalente a M.

AFN		
Q	a	b
q_0 (inicial)	{q2, q3, q6, q8, q12, q13, 15}	∅
q_1	{q2, q3, q6, q8}	∅
q_2 (final)	{q2, q3, q4, q6, q7, q8}	{q3, q6, q8, q9}
q_3	{q4}	∅
q_4	∅	{q2, q3, q5, q6, q8}
q_5 (final)	{q2, q3, q4, q6, q7, q8}	{q2, q3, q6, q8, q9}
q_6	{q2, q3, q6, q7, q8}	∅
q_7 (final)	{q2, q3, q4, q6, q7, q8}	{q2, q3, q6, q8, q9}
q_8	∅	{q9}
q_9	∅	{q10}
q_{10} (final)	∅	∅
q_{11}	{q12, q13, q15}	∅
q_{12} (final)	{q13,q15}	{q12, q13, q14, q15, q16}
q_{13}	∅	{q14}
q_{14}	{q12, q13, q15, q17}	∅
q_{15}	∅	{q12, q13, q15, q16}
q_{16} (final)	{q12, q13, q15}	{q12, q13, q14, q15, q16}
q_{17} (final)	{q12, q13, q15}	{q12, q13, q14, q15, q16}

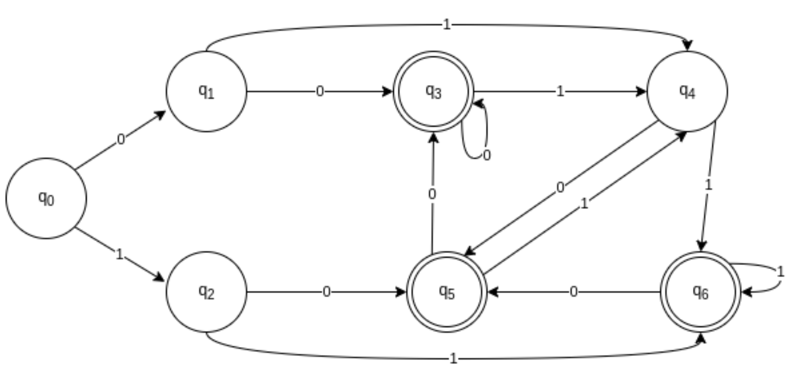
d) Transformar a un AFD equivalente.

e) Encontrar el AFD mínimo equivalente.

2. **2.5pts.** Encuentra una expresión regular α tal que L(M) = L(α) para el siguiente autómata M:

$M:$	δ	0	1
$inicial$	q_0	q_1	q_2
	q_1	q_3	q_4
	q_2	q_5	q_6
$final$	q_3	q_3	q_4
	q_4	q_5	q_6
$final$	q_5	q_3	q_4
$final$	q_6	q_5	q_6

Para clarificar el automata lo transformare a un AFD



Ejemplos de cadenas:

Aceptadas:

11

1111111111111

00

0010

0010000010

0011
00000000
No aceptadas:
0**01**
01
010**01**
11**01**

Ya que es claro que las no aceptadas terminan con **01** agregaremos la condición de que las cadenas tienen que terminar en (11 + 0) para no aceptar ese caso.
Tambien notaremos que la longitud de las cadenas no parece importar por ende para llenar el cuerpo escribiremos (a + b)*, por último el automata denota que al inicio tiene que haber al menos un 1 o un 0 por ende agregaremos al inicio la condicion (1 + 0).Tambien agregué un + para tambien poder aceptar la cadena 11
La expresion regular que describe el automata es:

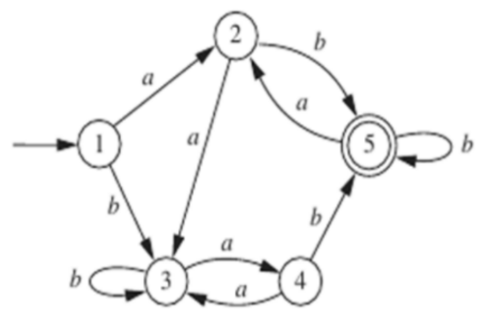
$$\alpha = (1+0)^*(11+0) \tag{4}$$

3. **Hasta 1pt extra.** Minimiza el autómata del ejercicio2.

!TEX root = main.tex

Examen 1

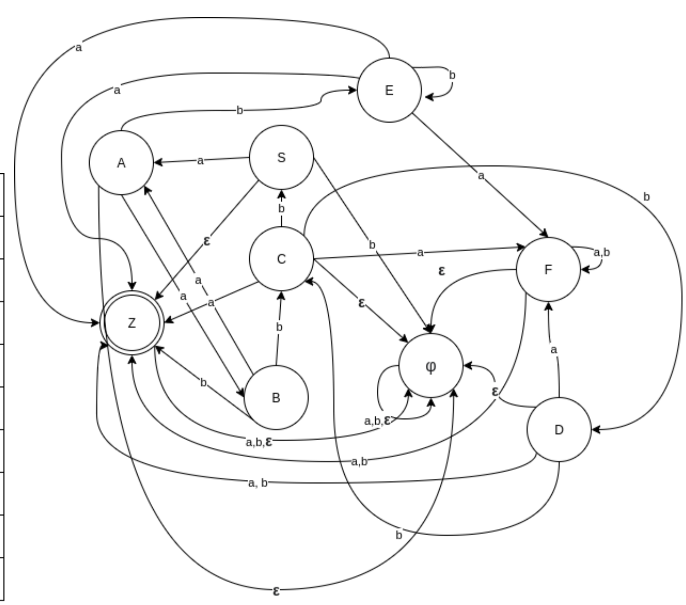
1. **1.5pts.** Obtener una gramática regular que genere el mismo lenguaje que el aceptado por el siguiente autómata (muestra el proceso):



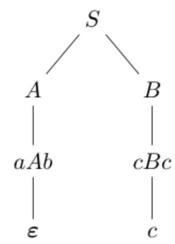
El lenguaje que genera las cadenas es:
$L = (a+b)^{+}(a+b)^{*}b^{+}$
La gramatica regular que genera las cadenas es:
$G =< V, T, S, P >$
$V = \{D\}$
$T = \{S, A, B, C\}$
Reglas de produccion P:
$S \rightarrow \{aA|bB\}$
$A \rightarrow \{aB|bD\}$
$B \rightarrow \{aC|bB\}$
$C \rightarrow \{aB|bD\}$
$D \rightarrow \{aA|bD|\epsilon\}$

2. **1.5 pts.** Genera un autómata finito cuyo lenguaje de aceptación es el mismo que el generado por la siguiente gramática:
$S \rightarrow \{aA|\epsilon\}$ $D \rightarrow \{bC|b|aF|a\}$
$A \rightarrow \{aB|bE\}$ $E \rightarrow \{bE|aF|a|\epsilon\}$
$B \rightarrow \{aA|bC|b\}$ $F \rightarrow \{aF|a|bF|b\}$
$C \rightarrow \{bD|aF|a|bS\}$

	Q	a	b	ε
i	S	{A}	φ	{Z}
	A	{B}	{E}	φ
	B	{A}	{C,Z}	φ
	C	{F,Z}	{D,S}	φ
	D	{F,Z}	{C,Z}	φ
	E	{F,Z}	{E}	{Z}
	F	{F,Z}	{F,Z}	φ
f	Z	φ	φ	φ
	φ	φ	φ	φ



3. La gramática G permite construir el siguiente árbol de derivación para la cadena abccc



a) (1 pt.) Dar la definición formal de G, asumiendo que las variables, terminales y producciones de G son únicamente las involucradas en el árbol anterior.

Solution: $< V, T, S, P >$ V = {S,A,B} T = {a,b,c}
S es el símbolo inicial.
P Son las reglas de producción:
$S \rightarrow A|B$
$A \rightarrow aAb|\epsilon$
$B \rightarrow cBc|c$

b) (1 pt.) Construya dos derivaciones para abccc cuyo árbol de derivación sea el anterior y de manera que una sea por la izquierda y la otra arbitraria.

Solution: Por la izquierda: 1. $S \rightarrow AB \rightarrow aAbB \rightarrow a\epsilon bB \rightarrow abB \rightarrow abcBc \rightarrow abccc$
Arbitraria: 2. $S \rightarrow AB \rightarrow AcBc \rightarrow Accc \rightarrow aAbccc \rightarrow a\epsilon bccc \rightarrow abccc$

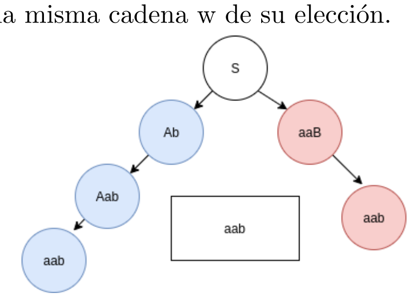
c) (1.5 pts.)¿Quién es L(G)? justifique su respuesta.

Solution: $L(G) = \{a^n b^n c^m | n \geq 0, m \geq 3|$m es impar$\}$
n es mayor o igual que cero para denotar que ab pueden estar o no, y m igual a 3 ya que tiene que haber minimo

4. Considere la siguietne gramática G:

$$S \rightarrow Ab|aaB$$
$$A \rightarrow a|Aa$$
$$B \rightarrow a|b|c$$

a) (1 pts.) Demuestre que G es ambigua mostrando dos árboles distintos de derivacíon único aárbol de derivación para una misma cadena w de su elección.

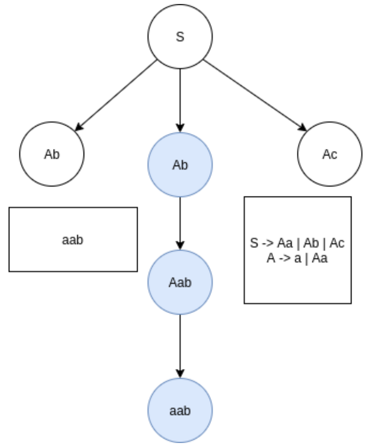


Como se puede ver marque un camino con rojo y otro con azul para que se vea que son arboles diferentes.

b) (1.5 pts.) Defina una gramática G' no ambigua equivalente a G.

$$S \rightarrow Aa|Ab|Ac$$
$$A \rightarrow a|Aa$$

c) (1 pts.) Muestre el único aárbol de derivación para la cadena w empleada ene l inciso a).


S
Ab
Ab
Ac
aab
Aab
S -> Aa | Ab | Ac
A -> a | Aa
aab