Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Problemas Resueltos

Automatas

Integrantes:
Yonathan Berith Jaramillo Ramírez. 419004640

Profesor: Lourdes del Carmen González Huesca
Ayudantes: María Fernanda Mendoza Castillo

5 Octubre, 2021

Tarea 1

1. Sea $\Sigma = \{$a, b$\}$, da las definiciones formales de los siguientes lenguajes:

a) Todas las cadenas de longitud mayor a 2 que empiecen y terminen con el mismo símbolo.

b) Todas las cadenas de longitud par.

Respuestas:

a) $L = \{w \mid w = ava, a, v \in \Sigma, w \in \Sigma^*\}$

b) $M = \{w \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$

Tarea 2

1. Da la definición completa (no recursiva) del lenguaje que contenga las siguientes cadenas:
   - "1"
   - "01"
   - "11101"
   - "0101111"

   Solution:
   $\Sigma = \{"01", "1"\}$
   $\{w \mid w = a^n, n \in \mathbb{N} \wedge a \in \Sigma\}$

2. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, definimos los lenguajes L_1, L_2, L_3 como sigue:
   $L_1 = \{\epsilon, "aa", "baaaa", "bb"\}$
   $L_2 = \{"ababa", "bb", "aabaabaa", "abba", "aababbaa"\}$
   $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = n, \text{ n es par }\}$
   Escribe el resultado de las siguientes operaciones:

   Solution:

   a) $L_1 \cup L_2 = \{\epsilon, "aa", "baaaa", "ababa", "bb", "aabaabaa", "abba", "aababbaa"\}$

   b) $L_2 \cap L_3 = \{"abba", "aababbaa"\}$

   c) $L_1 - L_3 = \{\epsilon, "bb"\}$

   d) $\overline{L_3} = L = \{w = \Sigma^* \mid \#_a(w) = n, \text{ n es impar}\}$

Examen 1

1. Sean $L_1 = \{aaa\}^*$, $L_2 = \{wxyz \mid w, x, y, z \in \{a, b\}\}$ y $L_3 = L_2^*$.

   Describe con palabras (en español) las características de las cadenas en cada uno de estos lenguajes. Describe las cadenas que contienen los lenguajes $L_2 \cap L_3$ y $L_1 \cup L_3$.

   Solution:

   - $L_1 =$ Este lenguaje siempre va a ser de número impar, contendra cadenas concatenadas de 'aaa' multiples veces o no por ende puede la longitud de la cadena es multiple de 3 o bien 0 cuando la cadena es ϵ.
   - $L_2 =$ Las cadenas estan formadas por wxyz donde cada uno de esos simbolos contienen ya sea una a o una b por ende la cadea contiene a's, b's o bien a's y b's cabe recalcar que las cadenas pueden tener una longitud max de 4.
   - $L_3 =$ Las cadenas en este lenguaje son la concatención de las cadenas formadas por el lenguaje L_2 o bien $(wxyz)^n$ donde n esta en los números naturales y w,x,y,z toman el valor de a o b.
   - $L_2 \cap L_3 =$ Todas las cadenas tienen una longitud max de 4 y pueden contener a's, b's o bien ambos o bien nada ϵ.
   - $L_1 \cup L_3 = L_1$ esta contenida en L_3 por ende se pueden formar todas las cadenas que cumplan con las condiciones de L_3.

2. Sea $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ es impar y } \#_b(w) \text{ es par}\}$.

   Demuestra que L^* es el conjunto de cadenas donde el número de b's es par.

   Solution: Para solucionar el problema crearé dos lenguajes que cumplen con las reglas anteriores. Por ende:
   $\Sigma = \{\epsilon, a, b\}$

   $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \text{ es impar }\}$ $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) \text{ es par }\}$

   Por ende podriamos reescribir L como:
   $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \in (L_1 \cap L_2)\}$

   y a L^* como $L^* = \cup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 ... L^{\infty}$ o bien
   $L^* = \cup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L \cup LL \cup LLL ... L^{\infty}$

   En el caso base para el lenguaje L, w = ϵ en este caso el numero de b's es par ya que 0 es par, si procedemos a armar una cadena no vacia por definicion $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \in (L_1 \cap L_2)\}$ ya que w debe cumplir con las condiciones para L_2 el numero de b's será par tambien por ende no se pueden crear cadenas con L donde w tenga un numero de b's impar

   Ya que todo numero par sumado con otro par sigue siendo par y ya que la cantidad de a's no afecta a las propiedades de L_2 gracias a la intersección $\{w \in (L_1 \cap L_2)\}$, podemos asegurar que cualquier concatenacion de una cadena w consigo misma w^n seguirá teniendo un numero par de b's.
   $\therefore L^*$ siempre tendra un numero par de b's para cualquier concatenacion de L's.

3. Sean $\Sigma = \{a, b\}$ y L el lenguaje que contiene a todas las cadenas en cada uno de estos lenguajes tales que no terminan en b y no tienen a bb como subcadena.

   Define de forma **no** recursiva a un lenguaje S de modo que $L = S^*$ es decir usando lenguajes y operaciones entre ellos.

Solution:
Antes que nada escribire algunas definiciones. Definiciones:

- Decimos que v es una subcadena de u si existen cadenas $x, y \in \Sigma^*$ tales que u = xvy.
- Decimos que v es una subcadena propia de u si es subcadena de u y además $v \neq \epsilon, v \neq u$
- Un sufijo de u es una cadena v tal que u = wv para alguna cadena $w \in \Sigma$. Se dice que v es un sufijo propio si $v \neq u$. y además $v \neq \epsilon, v \neq u$.

Ya teniendo claro esto ...

$S = \{w \in \Sigma^* \mid w \in \{ba, a\}\}$

$\therefore L = S^*$

4. La siguiente notación $|L_1L_2| = |L_1||L_2|$ denota que el *número de cadenas en la concatención* L_1L_1 *es el mismo que el producto de dos números* $|L_1|$ y $|L_2|$.

   Si esta afirmación siempre es verdad para cualesquiera dos lenguajes, da argumentos formales para probarlo y si no, muestra dos lenguajes $|L_1|$ y $|L_2|$ tales que $|L_1L_2| \neq |L_1||L_2|$ (para el contraejemplo, puedes considerar que los lenguajes pertenecen a Σ^* donde $\Sigma = \{a, b\}$).

Solution: Antes que nada definamos la concatenacion de lenguajes.

$$A \cdot B = AB = \{wx \mid w \in A \wedge x \in B\} \tag{1}$$

Para el caso base imaginemos que $L_2 = \{\epsilon\}$ Por ende $L_1L_2 = L_1\{\epsilon\}$

$|L_1\{\epsilon\}| = |L_1|$

Si vemos la longitud de $\{\epsilon\} = 1$ Por ende
$|L_1\{\epsilon\}| = |L_1| \cdot 1 = L_1$

Ya habiendo cubierto el caso base ahora...

$(\{w\}L_1)L_2 = |w(L_1L_2)| = 1 \cdot |L_1L_2|$

$|L_1||L_2| = |(\{w\}L_1)| \cdot |L_2| = 1 \cdot |L_2| \cdot |L_2|$

$\therefore$ La hipotesis de inducción se cumple correctamente.