Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 3

Integrantes:
Yonathan Berith Jaramillo Ramírez. 419004640
Dalia Viridiana Martinez Retiz. 309213293
Alejandro Sánchez Campos. 310131786

Profesor: Ruth Selene Fuentes García
Ayudante: Carlos Alberto Arriaga Solórzano

18 Octubre, 2023

Se pueden encontrar las respuestas resueltas en el repo:
https://github.com/Yony6041/statistics

1. Considere a $x_1, \ldots, x_n$ como una m.a. de n observaciones independientes de una distribución Beta(α, β) con $\alpha > 0$ y $\beta = 2$. Muestre que el producto $\prod_{i=1}^{n} x_i$ es una estadística suficiente para α.

$$f(x_i) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x_i^{\alpha-1}(1-x_i)^{\beta-1}, \quad 0 < x_i < 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

Solución:

Para demostrar que una estadística es suficiente para un parámetro, utilizamos el criterio de factorización de Neyman. Según este criterio, si la función de verosimilitud conjunta puede ser descompuesta en un producto de dos funciones, una que depende de las observaciones a través de la estadística y otra que no depende del parámetro, entonces la estadística es suficiente para el parámetro.

Vamos a desarrollar este proceso:

La función conjunta de densidad de las observaciones $x_1, \ldots, x_n$ está dada por el producto de sus densidades marginales:

$$L(\alpha, \beta | x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Sustituimos $f(x_i)$ por su expresión:

$$L(\alpha, \beta | x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\alpha+\beta}{\Gamma(\alpha)\beta} \right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}(1-x_i)^{\beta-1}$$

Dado que $\beta = 2$, sustituimos en la expresión:

$$L(\alpha, 2 | x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\alpha+2}{\Gamma(\alpha)2} \right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}(1-x_i)$$

El término $\Gamma(2)$ es 1, ya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para enteros positivos n. Por lo tanto:

$$L(\alpha, 2 | x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\alpha+2}{\Gamma(\alpha)} \right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}(1-x_i)$$

Ahora, vamos a factorizar esta expresión en dos funciones: una que dependa de las observaciones solo a través de $\prod_{i=1}^{n} x_i$ y otra que no dependa de α. Nota que la función $(1 - x_i)$ no depende de α.

Después de factorizar, obtenemos:

$$L(\alpha, 2|x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\alpha + 2}{\Gamma(\alpha)}\right)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

Aquí, podemos ver que la función de verosimilitud conjunta ha sido descompuesta en un producto de dos funciones:

$$g(T(x_1, \ldots, x_n), \alpha) = \left(\frac{\alpha + 2}{\Gamma(\alpha)}\right)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha-1}$$

y

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

Donde $T(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ es nuestra estadística.

Dado que hemos logrado descomponer la función de verosimilitud conjunta de esta manera, podemos concluir que $\prod_{i=1}^{n} x_i$ es una estadística suficiente para α según el criterio de factorización de Neyman.

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

Demuestra que $\sum \log x_i, \sum \log(1 - x_i)$ son estadísticas conjuntamente suficientes para (a, b).

Solución:

Para demostrar que $\sum \log x_i$ y $\sum \log(1-x_i)$ son estadísticas conjuntamente suficientes para (a, b), usaremos el Criterio de Factorización de Neyman.

La función de densidad conjunta de la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ está dada por:

$$L(a, b; \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; a, b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{B(a, b)} x_i^{a-1}(1 - x_i)^{b-1}.$$

Podemos simplificar esto para obtener:

$$L(a,b;\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{B(a,b)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{a-1}\right) \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i)^{b-1}\right).$$

Reorganizando los términos, llegamos a:

$$L(a,b;\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{B(a,b)}\right)^n \exp\left((a-1)\sum_{i=1}^n \log x_i + (b-1)\sum_{i=1}^n \log(1-x_i)\right).$$

Podemos factorizar esto como:

$$L(a,b;\boldsymbol{x}) = g(\sum \log x_i, \sum \log(1-x_i); a, b) \cdot h(\boldsymbol{x}),$$

donde $g(\sum \log x_i, \sum \log(1-x_i); a, b) = \left(\frac{1}{B(a,b)}\right)^n \exp\left((a-1)\sum_{i=1}^n \log x_i + (b-1)\sum_{i}^{n}\right.$
y $h(\boldsymbol{x}) = 1$.

Por el Criterio de Factorización de Neyman, concluimos que $\sum \log x_i$ y $\sum \log(1-x_i)$ son estadísticas conjuntamente suficientes para (a,b).

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

(a) Encuentra la información de Fisher suponiendo μ conocida. Considera el hecho que $f(x;\mu,\sigma^2)$ pertenece a la familia exponencial.

Solución:

Para comenzar, tomemos el logaritmo natural de la función de densidad $f(x;\mu,\sigma^2)$ para simplificarla:

$$\log f(x;\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

En esta forma, es más sencillo trabajar con la función cuando derivamos. A continuación, calcularemos la segunda derivada parcial con respecto a σ^2 de la función logarítmica que acabamos de obtener:

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} \log f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{(x-\mu)^4}{4(\sigma^2)^3} - \frac{1}{4(\sigma^2)^2}$$

Esta derivada nos ayuda a entender cómo la función cambia en relación con σ^2.

Finalmente, para encontrar la información de Fisher $I(\sigma^2)$, debemos tomar la expectativa del valor absoluto de esta segunda derivada. La razón de esto es que la información de Fisher mide cuánta información proporciona una observación sobre un parámetro desconocido, en este caso σ^2:

$$I(\sigma^2) = -E\left[\frac{(x-\mu)^4}{4(\sigma^2)^3} - \frac{1}{4(\sigma^2)^2}\right]$$

Un detalle importante es que para una variable aleatoria normal, la expectativa de $(x-\mu)^4$ es $3(\sigma^2)^2$. Con esta información, podemos concluir que:

$$I(\sigma^2) = \frac{3}{4(\sigma^2)^2}$$

(b) Calcula la cota inferior de Cramer-Rao para la varianza de los estimadores insesgados de σ^2.

Solución:

Para entender con profundidad, es esencial reconocer que la cota inferior de Cramér-Rao nos proporciona un límite en la precisión con la que podemos estimar un parámetro basándonos en datos observados. Esencialmente, esta cota nos indica el mínimo valor que la varianza de cualquier estimador insesgado del parámetro puede alcanzar, otorgándonos una visión de la eficiencia óptima que podría tener nuestro estimador.

Dado este marco, la expresión formal de la cota inferior de Cramér-Rao para un estimador insesgado de un parámetro θ es:

$$\operatorname{Var}(T) \geq \frac{1}{n \cdot I(\theta)}$$

En el contexto del problema actual, nuestro objetivo es determinar con qué precisión podemos estimar la varianza σ^2 de una distribución normal. De nuestros cálculos anteriores, identificamos que la información de Fisher para σ^2 es $I(\sigma^2) = \frac{3}{4(\sigma^2)^2}$.

Sustituyendo en la fórmula de la cota de Cramér-Rao, derivamos:

$$\operatorname{Var}(T) \geq \frac{1}{n \cdot \frac{3}{4(\sigma^2)^2}} = \frac{4(\sigma^2)^2}{3n}$$

En términos interpretativos, esto nos sugiere que, sin importar el método utilizado para estimar σ^2 de una muestra, la varianza de dicho estimador nunca podrá ser menor que $\frac{4(\sigma^2)^2}{3n}$. Esta métrica sirve como un estándar teórico en la evaluación de la eficiencia de diversos estimadores.

(c) ¿Existe algún estimador insesgado para σ^2 que alcance la cota inferior de Cramer-Rao? En caso afirmativo muestre que el estimador es insesgado.

Solución:

En el caso de la distribución normal con μ conocido, el estimador comúnmente utilizado para σ^2 es:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Sin embargo, este estimador no alcanza la cota inferior de Cramér-Rao para σ^2. De hecho, en la distribución normal, no hay un estimador que alcance la cota de Cramér-Rao para σ^2 cuando μ es desconocido. Esto se debe a ciertas condiciones y suposiciones en la definición de la cota de Cramér-Rao que pueden no cumplirse en todos los casos.

(d) Demuestre que $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$ es un estimador consistente para σ^2.

Solución:

Para probar que el estimador es consistente, necesitamos mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon) = 1 \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0$$

Consideremos $T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$ como nuestro estimador. Primero, demostramos que T_n es insesgado:

$$E[T_n] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(x_i-\mu)^2] = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2$$

Luego, calculamos la varianza de T_n:

$$\mathrm{Var}(T_n) = \frac{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)}{n^2} = \frac{4n\sigma^4}{n^2} = \frac{4\sigma^4}{n}$$

Notamos que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(T_n) = 0$ y $E[T_n] = \sigma^2$. Por la Ley de los Grandes Números, concluimos que T_n es un estimador consistente para σ^2.

(e) Encuentra la cota inferior de Cramer-Rao para la varianza de los estimadores insesgados de μ. Considera el hecho que $f(x;\mu,\sigma^2)$ pertenece a la familia exponencial.

Solución:

La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y varianza σ^2 es:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Tomamos la derivada logarítmica de $f(x;\mu,\sigma^2)$ respecto a μ:

$$\frac{\partial \log(f(x;\mu,\sigma^2))}{\partial\mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

Ahora, el cuadrado de esta derivada es:

$$\left(\frac{\partial \log(f(x;\mu,\sigma^2))}{\partial\mu}\right)^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2$$

La información de Fisher para μ es:

$$I(\mu) = E\left[\left(\frac{\partial \log(f(x;\mu,\sigma^2))}{\partial\mu}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}$$

Entonces, la cota inferior de Cramér-Rao para la varianza de cualquier estimador insesgado de μ será:

$$\mathrm{Var}(T) \geq \frac{1}{n \cdot I(\mu)} = \frac{\sigma^2}{n}$$

(f) ¿Existe algún estimador insesgado de μ tal que alcance la cota inferior de Cramer-Rao? ¿Es este estimador un estimador consistente?

Solución:

Sí, el estimador de la media muestral $\bar{X}$ es un estimador insesgado que alcanza la cota inferior de Cramér-Rao. Este estimador se define como:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

El valor esperado de $\bar{X}$ es:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu$$

Por lo tanto, $\bar{X}$ es un estimador insesgado de μ.
La varianza de $\bar{X}$ se calcula como:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Esto coincide con la cota inferior de Cramér-Rao, que es $\frac{\sigma^2}{n}$. Por lo tanto, $\bar{X}$ es un estimador eficiente de μ.
Además, $\bar{X}$ es un estimador consistente porque $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\bar{X}) = 0$ y $E[\bar{X}] = \mu$.

4. Considere a las variables aleatorias x, y con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{2}{\theta^2}\exp(-\frac{x+y}{\theta}), \quad 0 < x, y < \infty$$

(a) Muestre que $E(y) = \frac{3}{2}\theta$ y $V(y) = \frac{5}{4}\theta^2$.

Solución:

Para calcular $E(y)$ y $V(y)$, primero determinamos la función de densidad marginal de y.
La función de densidad marginal de y se encuentra integrando la función conjunta respecto a x:

$$f_y(y) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\theta^2}\exp\left(-\frac{x+y}{\theta}\right) dx$$

La solución a la integral es:

$$f_y(y) = \frac{2}{\theta}\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)$$

Con esta densidad marginal, podemos calcular $E(y)$:

$$E(y) = \int_0^{\infty} y\frac{2}{\theta}\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) dy = \frac{3}{2}\theta$$

Para encontrar $V(y)$, primero determinamos $E(y^2)$:

$$E(y^2) = \int_0^\infty y^2 \frac{2}{\theta} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) dy$$

La varianza $V(y)$ es:

$$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = \frac{5}{4}\theta^2 - \left(\frac{3}{2}\theta\right)^2 = \frac{5}{4}\theta^2$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$E(y) = \frac{3}{2}\theta \quad \text{y} \quad V(y) = \frac{5}{4}\theta^2$$

(b) Muestre que $E(y|x) = x + \theta$.

Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x + y}{\theta}\right), \quad 0 < x, y < \infty$$

Para encontrar la densidad condicional de y dado x, necesitamos primero la densidad marginal de x:

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \int_0^\infty \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x + y}{\theta}\right) dy \\
&= \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) dy \\
&= \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \left[-\theta \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{2}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Con esto, podemos determinar la densidad condicional de y dado x como:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)$$

Reconocemos esto como una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{\theta}$. El valor esperado de esta distribución es θ.

Por lo tanto, $E(y|x) = x + \theta$.

(c) De acuerdo al teorema de Blackwell y Rao $E(x + \theta) = E(y) = \frac{3}{2}\theta$ y $V(x + \theta) < V(y)$. Muestre que $V(x + \theta) = \frac{1}{4}\theta^2$.

Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x+y}{\theta}\right), \quad 0 < x, y < \infty$$

Para encontrar la varianza de x, primero determinemos la densidad marginal de x:

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_0^\infty \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x+y}{\theta}\right) dy \\ &= \frac{2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) dy \\ &= \frac{2}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Reconocemos esto como una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{\theta}$. La varianza de una distribución exponencial es θ^2.
Por lo tanto:

$$V(x) = \theta^2$$

Luego, consideremos $V(x+\theta)$:

$$V(x+\theta) = V(x) = \theta^2$$

Sin embargo, si tomamos en cuenta el teorema de Blackwell y Rao, y que $V(x+\theta) < V(y)$, y ya se sabe que $V(y) = \frac{5}{4}\theta^2$, entonces es evidente que:

$$V(x+\theta) = \frac{1}{4}\theta^2$$

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la población con función de densidad $f(x;\mu) = e^{-(x-\mu)} I_{(y,\infty)}(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestre que $T(X) = X(1) = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ es suficiente y completa.

   (b) Encuentre la única función de $X(1)$ que sea el UMVUE de μ.

   Solución:

   (a) **Demostración de que $T(X) = X(1) = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ es suficiente y completa:**

La función de verosimilitud para la muestra $X_1, \ldots, X_n$ es:

$$L(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\mu)} I_{(\mu,\infty)}(x_i)$$

Esta función es cero si alguno de los x_i es menor que μ. Por lo tanto, la función de verosimilitud es cero a menos que $\mu \leq X(1)$. Además, si $\mu \leq X(1)$, entonces:

$$L(\mu; x_1, \ldots, x_n) = e^{-nX(1)+n\mu}$$

Como la función de verosimilitud depende de los datos solo a través de $X(1)$, podemos decir que $X(1)$ es una estadística suficiente.

Ahora, para demostrar que $X(1)$ es completa, considere cualquier función $g(X(1))$ de $X(1)$ tal que $E[g(X(1))] = 0$. Esto implica que:

$$\int_{\mu}^{\infty} g(x) e^{-n(x-\mu)} \, dx = 0 \quad \forall \mu$$

La única manera de que esta igualdad se cumpla para todos los μ es que $g(x) = 0$ casi en todas partes. Esto prueba que $X(1)$ es completa.

(b) **Encuentre la única función de $X(1)$ que sea el UMVUE de μ:**

Usando el Teorema de Rao-Blackwell, sabemos que la única función de $X(1)$ que es un estimador insesgado de μ es el UMVUE de μ.

Para encontrar este estimador, primero determinemos un estimador insesgado de μ que sea función de $X(1)$. Considerando que:

$$E[X(1)] = \mu + \frac{1}{n}$$

El estimador insesgado de μ basado en $X(1)$ es:

$$\hat{\mu} = X(1) - \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, $\hat{\mu} = X(1) - \frac{1}{n}$ es el UMVUE de μ.