Universidad

Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 2

Integrantes:
Yonathan Berith Jaramillo Ramírez. 419004640
Dalia Viridiana Martinez Retiz. 309213293
Alejandro Sánchez Campos. 310131786

Profesor: Ruth Selene Fuentes García
Ayudante: Carlos Alberto Arriaga Solórzano

15 Octubre, 2023

Se pueden encontrar las respuestas resueltas en el repo:
https://github.com/Yony6041/statistics

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. con

$$f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}^{(x)}$$

donde $\theta > 0$. Encuentre el estimador de momentos y el estimador máximo verosímil para θ.

Respuesta:

Conceptos

(a) **Función de Densidad de Probabilidad (PDF)**
La función de densidad de probabilidad $f_X(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}^{(x)}$ está definida para x en el intervalo $(0,1)$ y $\theta > 0$. Aquí, $I_{(0,1)}^{(x)}$ es la función indicadora, que es igual a 1 si x está en el intervalo $(0,1)$ y 0 en caso contrario. Esta función describe cómo se distribuyen los datos en función de θ.

(b) **Método de los Momentos**
El método de los momentos es una técnica de estimación de parámetros. La idea básica es igualar los momentos muestrales a los momentos teóricos de la distribución y resolver para el parámetro desconocido. En términos matemáticos, el k-ésimo momento alrededor del origen está dado por:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x;\theta)dx$$

Este es un concepto fundamental en estadística para entender cómo se distribuyen los datos.

Resolución del ejercicio 1

Calcular el Primer Momento Teórico

Para calcular el primer momento teórico $E[X]$, necesitamos evaluar la siguiente integral:

$$E[X] = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx$$

Primero, simplificamos la expresión dentro de la integral:

$$\theta x^{\theta-1} \times x = \theta x^{\theta}$$

Ahora, la integral se convierte en:

$$E[X] = \theta \int_0^1 x^{\theta} dx$$

Para resolver esta integral, utilizamos la fórmula de la integral de potencias de x, que es:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Aplicando esta fórmula, obtenemos:

$$\theta \left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \right]_0^1$$

Evaluamos la integral definida en los límites 0 y 1:

$$\begin{aligned} &= \theta \left(\frac{1^{\theta+1}}{\theta+1} - \frac{0^{\theta+1}}{\theta+1} \right) \\ &= \theta \left(\frac{1}{\theta+1} - 0 \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+1} \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Igualar el Momento Teórico al Momento Muestral

El primer momento muestral es simplemente la media aritmética de la muestra. Si tienes una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la media muestral $\bar{X}$ se calcula como:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Este es un estadístico que se calcula directamente a partir de los datos de la muestra y sirve como una estimación del primer momento teórico $E[X]$.

Ahora, igualamos este primer momento muestral al primer momento teórico que calculamos previamente:

$$\bar{X} = \frac{\theta}{\theta + 1}$$

Resolvemos para θ:

$$\begin{gathered}
\bar{X}(\theta + 1) = \theta \\
\bar{X}\theta + \bar{X} = \theta \\
\bar{X}\theta = \theta - \bar{X} \\
\theta(\bar{X} - 1) = -\bar{X} \\
\theta = -\frac{\bar{X}}{\bar{X} - 1}
\end{gathered}$$

Conclusión

El estimador de momentos para θ es $-\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ $\therefore$.

Estimador máximo verosímil para θ

Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x; \theta) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}^{(x)},$$

donde $\theta > 0$, se busca encontrar el estimador de máxima verosimilitud (EMV) para θ.

Solución

(a) **Función de Verosimilitud**

La función de verosimilitud $L(\theta)$ está dada por el producto de las funciones de densidad individuales para cada observación X_i:

Separando términos, aplicando la propiedad distributiva y simplificando los terminos obtenemos:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\theta x_i^{\theta-1}\right) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}.$$

(b) **Log-Verosimilitud**

Es más fácil trabajar con la log-verosimilitud, $\ell(\theta)$, que es el logaritmo natural de $L(\theta)$:

$$\ell(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln\left(\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}\right) = n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

(c) **Derivadas**

Para encontrar el EMV, derivamos la log-verosimilitud con respecto a θ y resolvemos para θ cuando la derivada es igual a cero:

$$\frac{d\ell}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0.$$

1. Multiplicamos todos los términos por θ para eliminar el denominador en el primer término:

$$n + \theta\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

2. Ahora, queremos aislar θ, así que movemos el término n al otro lado de la ecuación:

$$\theta\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = -n$$

3. Finalmente, dividimos ambos lados de la ecuación por $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ (asumiendo que la suma de los logaritmos no es cero) para despejar θ:

$$\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

(d) **Segunda Derivada**

Para confirmar que es un máximo, la segunda derivada de la log-verosimilitud debe ser negativa:

$$\frac{d^2\ell}{d\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

Dado que $\theta > 0$ y $n > 0$, la segunda derivada es siempre negativa, lo que confirma que el valor encontrado es un máximo.

(e) **Estimador de Máxima Verosimilitud**

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud (EMV) para θ es:

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}.$$

2. Consideren el siguiente ejemplo: para un experimento se toma una muestra aleatoria de tamaño 15, observando los siguientes resultados: (3,5,2,1,1,1,1, 8,0,2,2,0,3,5,2). Asumiendo que la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_{15}$ viene de una población Poisson(λ).

Respuesta:

Estimador Máximo Verosímil para λ

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud (MLE) para λ, primero definimos la función de verosimilitud para una distribución de Poisson:

$$L(\lambda|X_1, \ldots, X_{15}) = \prod_{i=1}^{15} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

Donde x_i son los datos observados.

En este caso, $x = (3, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 8, 0, 2, 2, 0, 3, 5, 2)$.

Utilizando las leyes de logaritmos:

- $\log(a^b) = b \log(a)$ (Ley de exponentes)
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ (Propiedad de división)
- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$ (Propiedad de multiplicación)
- $\log(e^x) = x$ (Ley de Euler para logaritmos)

La función de log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned}\log L(\lambda|X_1,\ldots,X_{15}) &= \sum_{i=1}^{15}\left(\log\left(\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{15}\left(\log(\lambda^{x_i})+\log(e^{-\lambda})-\log(x_i!)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{15}(x_i\log(\lambda)-\lambda-\log(x_i!))\end{aligned}$$

Derivando con respecto a λ e igualando a cero:

Reglas para las derivadas:

- $\frac{d}{dx}\log(x)=\frac{1}{x}$ (Derivada del logaritmo natural)
- $\frac{d}{dx}x=1$ (Derivada de una variable respecto a sí misma)
- $\frac{d}{dx}c=0$ (Derivada de una constante)
- $\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)]=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ (Regla del producto)

Primero, partimos de la función de log-verosimilitud, que es:

$$\log L(\lambda|X_1,\ldots,X_{15}) = \sum_{i=1}^{15}(x_i\log(\lambda)-\lambda-\log(x_i!))$$

Para maximizar esta función con respecto a λ, derivamos $\log L(\lambda|X_1,\ldots,X_{15})$ respecto a λ e igualamos a cero. Utilizando la regla de la suma para derivadas, tenemos:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{i=1}^{15}(x_i\log(\lambda)-\lambda-\log(x_i!))\right)=\sum_{i=1}^{15}\frac{d}{d\lambda}(x_i\log(\lambda)-\lambda-\log(x_i!))$$

Para derivar $x_i\log(\lambda)$, utilizamos la regla del producto:

$$\frac{d}{d\lambda}(x_i\log(\lambda))=x_i\frac{1}{\lambda}+0=\frac{x_i}{\lambda}$$

El término $-\lambda$ tiene una derivada de -1, y el término $\log(x_i!)$ es una constante respecto a λ, por lo que su derivada es cero.

Al sumar todos estos términos, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{15} \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right)$$

Simplificamos y agrupamos los términos:

$$= \left(\sum_{i=1}^{15} \frac{x_i}{\lambda} \right) + \left(\sum_{i=1}^{15} -1 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{15} \frac{x_i}{\lambda} \right) - 15$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right) - 15$$

$$\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right) - 15 = 0$$

Despejando λ_{MLE}, llegamos a:

Para despejar λ, el primer paso es llevar el término -15 al otro lado de la ecuación:

$$\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right) = 15$$

El siguiente paso es multiplicar ambos lados de la ecuación por λ:

$$\lambda \times \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right) = 15 \times \lambda$$

Simplificamos, y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 15\lambda$$

Finalmente, dividimos ambos lados entre 15 para despejar λ:

$$\lambda_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}$$

Este valor de λ_{MLE} es el estimador de máxima verosimilitud para λ.

Estimador Máximo Verosímil para $\tau(\lambda) = P(X = 1)$

Contexto de la Distribución de Poisson

Una distribución de Poisson es utilizada para modelar el número de eventos que ocurren en un intervalo fijo de tiempo o espacio, bajo la suposición de que estos eventos ocurren con una tasa constante y de forma independiente. La función de probabilidad (PMF) para una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ está dada por:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Aquí, λ es la tasa promedio de ocurrencia de eventos, k es el número específico de eventos, y e es la base del logaritmo natural (2.71828).

Evaluación para $X = 1$

Cuando estamos interesados en la probabilidad de que exactamente un evento ocurra ($X = 1$), sustituimos $k = 1$ en la PMF de Poisson:

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!}$$

Observe que $\lambda^1 = \lambda$ y $1! = 1$, simplificando la expresión a:

$$P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

Interpretación

La expresión $\lambda e^{-\lambda}$ nos da la probabilidad de que exactamente un evento ocurra en el intervalo observado, dado que la tasa promedio de eventos es λ. λ actúa como una especie de "peso" para un solo evento, mientras que $e^{-\lambda}$ es un factor que decae exponencialmente con el aumento de λ, limitando la probabilidad a un valor entre 0 y 1.

Para $\tau(\lambda) = P(X = 1)$, sabemos que para una distribución de Poisson:

$$P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda}$$

Sustituimos λ_{MLE} en esta ecuación para encontrar $\tau(\lambda_{MLE})$:

(a) **¿Qué es λ_{MLE}?**
La notación λ_{MLE} se refiere al Estimador de Máxima Verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés) del parámetro λ de una distribución de Poisson. En este contexto, λ representa la tasa promedio de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo o espacio determinado.

(b) **Cálculo de λ_{MLE}**
El cálculo del λ_{MLE} en una distribución de Poisson se da mediante la fórmula:

$$\lambda_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}$$

Donde $\sum_{i=1}^{15} x_i$ es la suma de 15 observaciones de datos. Asumimos que la suma de estas observaciones es 36, es decir, $\sum_{i=1}^{15} x_i = 36$.

(c) **Sustitución en la fórmula del λ_{MLE}**
Al reemplazar la suma en la fórmula, obtenemos:

$$\lambda_{MLE} = \frac{36}{15}$$

Este es el valor que se utilizará en la ecuación $\tau(\lambda_{MLE})$.

(d) **Cálculo de $\tau(\lambda_{MLE})$**
Finalmente, $\tau(\lambda)$ en una distribución de Poisson se define como $P(X = 1)$, que es igual a $\lambda e^{-\lambda}$. Sustituimos λ_{MLE} en esta ecuación para encontrar $\tau(\lambda_{MLE})$:

$$\tau(\lambda_{MLE}) = \frac{36}{15} \times e^{-\frac{36}{15}} \approx 0.22$$

Estimador puntual para λ

Si asumimos que nuestro conocimiento o experiencia previa sobre λ puede expresarse a través de una distribución $\pi(\lambda) = gamma(4, 2)$ encuentra la distribución posterior para lambda de acuerdo al enfoque Bayesiano de estimación. ¿Cuál sería un estimador puntual para λ?

Nota: recuerda que la distribución final

$$\pi(\lambda | X_1, \ldots, X_{15}) = \frac{L(\lambda | X_1, \ldots, X_{15})\pi(\lambda)}{\int_0^{\infty} L(\lambda | X_1, \ldots, X_{15})\pi(\lambda) d\lambda}$$

Estimación Bayesiana de λ

Introducción

Para resolver este problema, necesitamos definir algunos conceptos clave en el enfoque Bayesiano:

- Distribución a priori ($\pi(\lambda)$): Es la distribución que representa nuestro conocimiento previo sobre el parámetro λ. En este caso, se nos da que $\pi(\lambda) = \text{gamma}(4, 2)$.
- Distribución de la muestra ($p(x|\lambda)$): Esta es la distribución de los datos observados dado un valor del parámetro λ. Asumiremos que no se proporciona esta información, pero en un problema típico relacionado con tasas o conteos, uno podría considerar una distribución Poisson para la muestra.
- Distribución posterior ($\pi(\lambda|x)$): Es la distribución de λ después de observar los datos. Según la teoría Bayesiana, se calcula como:

$$\pi(\lambda|x) \propto p(x|\lambda)\pi(\lambda)$$

Desarrollo

Empezaremos asumiendo una distribución de la muestra. Dado que estamos hablando de λ, es común que se utilice la distribución de Poisson para modelar el número de eventos que ocurren en un intervalo fijo de tiempo o espacio. En una distribución de Poisson, la función de probabilidad está dada por:

$$p(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

La distribución gamma a priori está dada por:

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)} = \text{gamma}(\alpha, \beta)$$

Donde $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

Ahora, aplicamos el teorema de Bayes para encontrar la distribución posterior $\pi(\lambda|x)$:

$$\pi(\lambda|x) \propto p(x|\lambda)\pi(\lambda)$$

$$\pi(\lambda|x) \propto \left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\right)\left(\frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\right)$$
$$\pi(\lambda|x) \propto \lambda^{x+\alpha-1} e^{-(\lambda+\beta)}$$

Este es otro ejemplo de una distribución gamma, específicamente gamma$(x+\alpha, \lambda+\beta)$.

Estimador Puntual

Para encontrar un estimador puntual de λ, podemos utilizar el valor esperado de la distribución posterior, que para una distribución gamma gamma(α, β) es $\frac{\alpha}{\beta}$.

En este caso, el estimador puntual sería $\frac{x+\alpha}{\lambda+\beta}$.

3. Considere dos estimadores, basados en una m.a. de n observaciones, $t_1(X)$ y $t_2(X)$ del parámetro σ^2 en la distribución normal con media μ conocida.

$$f(x) = \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$t_1(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$t_2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Demuestre que $t_1(X)$ y $t_2(X)$ son estimadores insesgados del parámetro σ^2.

Demostración de Estimadores Insesgados

Para demostrar que $t_1(X)$ y $t_2(X)$ son estimadores insesgados de σ^2, necesitamos mostrar que $E[t_i(X)] = \sigma^2$ para $i = 1, 2$.

Demostración para $t_1(X)$

Primero, calculemos la esperanza de $t_1(X)$:

$$
\begin{aligned}
E[t_1(X)] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(x_i-\mu)^2] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{n}\cdot n\cdot\sigma^2 \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Demostración para $t_2(X)$

Ahora, calculemos la esperanza de $t_2(X)$:

$$
\begin{aligned}
E[t_2(X)] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E[x_i^2]-2E[x_i\bar{x}]+E[\bar{x}^2]\right].
\end{aligned}
$$

También sabemos que $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.
Dado que x_i es normalmente distribuido con varianza σ^2, $E[x_i^2]=\sigma^2+\mu^2$.
Se puede demostrar que $E[\bar{x}^2]=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$ y $E[x_i\bar{x}]=\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}$.
Substituyendo estos en nuestra fórmula, llegamos a:

$$E[t_2(X)]=\sigma^2.$$

Por lo tanto, ambos $t_1(X)$ y $t_2(X)$ son estimadores insesgados de σ^2.

4. Suponga que $E[\hat{\theta}_1]=E[\hat{\theta}_2]$ y que $Var[\hat{\theta}_1]=\sigma_1$, $Var[\hat{\theta}_2]=\sigma_2$, con $\hat{\theta}_1$ independiente de $\hat{\theta}_2$. Se define el siguiente estimador:

$$\hat{\theta}_3=a\hat{\theta}_1+(1-a)\hat{\theta}_2.$$

(a) ¿Es $\hat{\theta}_3$ un estimador insesgado para θ?

(b) ¿Para qué valor de la constante a se minimiza la varianza de $\hat{\theta}_3$?

(c) ¿Para qué valor de la constante a se minimiza la varianza de $\hat{\theta}_3$ si ahora $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ no son independientes pero son tales que $Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = c \neq 0$?

Estimador Compuesto $\hat{\theta}_3$

(a) **¿Es $\hat{\theta}_3$ un estimador insesgado para θ?**
Para determinar si $\hat{\theta}_3$ es un estimador insesgado, necesitamos calcular su valor esperado $E[\hat{\theta}_3]$ y verificar si es igual a θ:

$$\begin{aligned}
E[\hat{\theta}_3] &= E[a\hat{\theta}_1 + (1-a)\hat{\theta}_2] \\
&= aE[\hat{\theta}_1] + (1-a)E[\hat{\theta}_2] \\
&= a\theta + (1-a)\theta \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

Dado que $E[\hat{\theta}_3] = \theta$, $\hat{\theta}_3$ es un estimador insesgado para θ.

(b) **¿Para qué valor de la constante a se minimiza la varianza de $\hat{\theta}_3$?**
Para minimizar la varianza de $\hat{\theta}_3$, primero necesitamos encontrar $Var[\hat{\theta}_3]$:

$$\begin{aligned}
Var[\hat{\theta}_3] &= Var[a\hat{\theta}_1 + (1-a)\hat{\theta}_2] \\
&= a^2\sigma_1 + (1-a)^2\sigma_2.
\end{aligned}$$

Tomamos la derivada con respecto a a e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}(Var[\hat{\theta}_3]) &= 2a\sigma_1 - 2(1-a)\sigma_2 \\
&= 0 \\
a &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.
\end{aligned}$$

(c) **¿Para qué valor de la constante a se minimiza la varianza de $\hat{\theta}_3$ si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ no son independientes pero $Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = c \neq 0$?**
Ahora, la varianza de $\hat{\theta}_3$ sería:

$$Var[\hat{\theta}_3] = a^2\sigma_1 + (1-a)^2\sigma_2 + 2a(1-a)c.$$

Derivando con respecto a a y resolviendo para a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}(Var[\hat{\theta}_3]) &= 2a\sigma_1 - 2(1-a)\sigma_2 + 2c - 4ac \\
&= 0 \\
a &= \frac{\sigma_2 - c}{\sigma_1 + \sigma_2 - 2c}.
\end{aligned}$$

5. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una secuencia de v.a.i.i con distribución $Binomial(m, p)$. Considere a $\hat{p} = \frac{x_i}{n}$ como un estimador del parámetro p.
   (a) ¿Es $\hat{p}$ un estimador insesgado de p?
   (b) Encuentre la CICR para $V(\hat{p})$.
   (c) ¿Es $\hat{p}$ un estimador de varianza mínima?

Estimador $\hat{p}$ para la Distribución Binomial

1. **¿Es $\hat{p}$ un estimador insesgado de p?**

$$\begin{aligned}
E[\hat{p}] &= E\left[\frac{x_i}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}E[x_i] \\
&= \frac{1}{n}(m \cdot p) \\
&= p.
\end{aligned}$$

   Dado que $E[\hat{p}] = p$, $\hat{p}$ es un estimador insesgado para p.

2. **Encuentre la CICR para $V(\hat{p})$.**

$$\begin{aligned}
V(\hat{p}) &= V\left(\frac{x_i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}V(x_i) \\
&= \frac{1}{n^2}(m \cdot p \cdot (1-p)) \\
&= \frac{m \cdot p \cdot (1-p)}{n}.
\end{aligned}$$

3. **¿Es $\hat{p}$ un estimador de varianza mínima?**

Verificación de la cota de Cramér-Rao para $\hat{p}$

Para verificar si $\hat{p}$ cumple con la cota de Cramér-Rao, primero calculamos la información de Fisher. Dada una muestra de n observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con distribución $Binomial(m, p)$, la función de masa de probabilidad (f.m.p.) para cada x_i es:

$$f(x_i; p) = \binom{m}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{(m-x_i)}.$$

La log-verosimilitud l es:

$$\begin{aligned} l &= \log L \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\log \binom{m}{x_i} + x_i \log p + (m - x_i) \log(1-p) \right). \end{aligned}$$

La primera derivada respecto de p es:

$$\frac{dl}{dp} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{p} - \frac{(m - x_i)}{(1-p)} \right).$$

La segunda derivada respecto de p es:

$$\frac{d^2 l}{dp^2} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{p^2} + \frac{(m - x_i)}{(1-p)^2} \right).$$

La información de Fisher $I(p)$ se obtiene como:

$$\begin{aligned} I(p) &= -E\left[\frac{d^2 l}{dp^2} \right] \\ &= n \left(\frac{m}{p^2} + \frac{m}{(1-p)^2} \right) \\ &= \frac{m \cdot n}{p^2 (1-p)^2}. \end{aligned}$$

La cota de Cramér-Rao (CRLB) es $1/I(p)$:

$$\text{CRLB} = \frac{p^2(1-p)^2}{m \cdot n}.$$

Ahora, la varianza de $\hat{p}$ es $V(\hat{p}) = \frac{m \cdot p \cdot (1-p)}{n}$. Comparando $V(\hat{p})$ con CRLB, tenemos:

$$V(\hat{p}) = \frac{m \cdot p \cdot (1-p)}{n},$$
$$\text{CRLB} = \frac{p^2(1-p)^2}{m \cdot n}.$$

Si $V(\hat{p}) = \text{CRLB}$, entonces $\hat{p}$ sería un estimador de varianza mínima. Sin embargo, al comparar las dos cantidades, tenemos que:

$$V(\hat{p}) \neq \text{CRLB}.$$

Por lo tanto, $\hat{p}$ no es un estimador de varianza mínima de acuerdo con la cota de Cramér-Rao.