Ejercicios del examen

Ejercicio 1. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una densidad de probabilidad

$$f_X(x;\alpha) = \alpha x^{-2} \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

con $\alpha \in \Theta = (0,\infty)$.

- Encuentra un estimador máximo verosímil para α. $\alpha^* = X_{(1)}$
- ¿Es $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \dots, X_n\}$ una estadística suficiente para α?

Solución:

1. Sea $\hat{\alpha}_{MV}$ el estimador de máxima verosimilitud para α. Sabemos que $\hat{\alpha}_{MV}$ es el parámetro que máximiza la función de verosimilitud, $L(\alpha)$. En otras palabras,

$$\hat{\alpha}_{MV} = \arg\max_{\alpha\in\Theta} L(\alpha)$$

Hay que encontrar en dónde (sobre su dominio) L alcanza su valor máximo. Primero calculamos la verosimilitud,

$\alpha^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} = L(\alpha)$

α^n

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots x_n;\alpha) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\alpha) \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha x_i^{-2} \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \end{aligned}$$

$\prod_{i=1}^n x_i^y = x_1^y \cdots x_n^y = (x_1 \cdots x_n)^y = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^y$

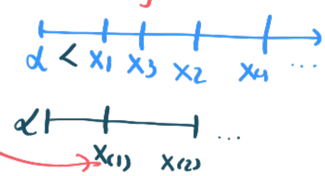
1

Si existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $x_j < \alpha$, entonces $\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_j) = 0$, y $L(\alpha) = 0$ para toda α. Entonces,

$x_j < \alpha$: $\mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_j) = 0$
$\Rightarrow L(\alpha, x) = 0$

Si sup. que no existe esa x_j

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \end{aligned}$$

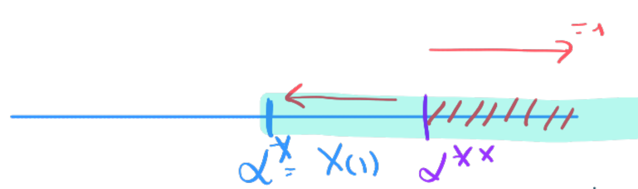


Nótese que como $\alpha > 0$, entonces L es una función estríctamente creciente, por lo que esperamos que el máximo lo alcance hacia la derecha. Sea $\alpha^* = X_{(1)} = \text{mín}\{X_1,\dots,X_n\}$.
Si $\alpha^{**} > \alpha^*$, entonces $\mathbf{1}_{[\alpha^{**},\infty)}(x_{(1)}) = 0$ y $L(\alpha^*) > L(\alpha^{**})$.
Si $\alpha^{**} < \alpha^*$, por ser L creciente, $L(\alpha^{**}) < L(\alpha^*)$.

$\alpha^* = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

Es decir,

$$\alpha^* = \arg\max_{\alpha\in\Theta} L(\alpha)$$



Entonces $\hat{\alpha}_{MV} = X_{(1)}$

2. Del inciso anterior,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \\ &= g(S(\underline{x}),\alpha) h(\underline{x}) \end{aligned}$$

$\mathbb{1}_{[\alpha^{**},\infty)}(X_{(1)}) = 0$
$\Rightarrow L(\alpha^*) > L(\alpha^{**}) = 0$
positi

con $g(S(\underline{x}),\alpha) = \alpha^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})$ y $h(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{-2}$. Por el teorema de factorización, $S(\underline{X}) = X_{(1)}$ es una estadística suficiente.

$x < y$
$\Rightarrow f(x) < f(y)$

$\alpha^{***} < \alpha^*$
$L(\alpha^{***}) < L(\alpha^*)$

Ejercicio 2. Sea $X_1, \ldots, X_5$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sean

$$T_1(\underline{X}) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i$$
$$T_2(\underline{X}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} X_i$$

dos estimadores para μ. ¿Qué estimador tiene menor error cuadrático medio?
Solución:
Sabemos que,

$$ECM_T(\mu) = \mathbb{V}ar(T) + \beta(\mu)^2$$

con $\beta(\mu) = \mathbb{E}(T) - \mu$.
Como $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$T_1(\underline{X}) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)$$
$$\frac{4}{5}T_2(\underline{X}) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} ECM_{T_1}(\mu) &= \mathbb{V}ar(T_1) + \beta(\mu)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{5} + (\mu - \mu)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{5} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} ECM_{T_2}(\mu) &= \mathbb{V}ar(T_2) + \beta(\mu)^2 \\ &= \mathbb{V}ar\left(\frac{5}{4}\frac{4}{5}T_2\right) + \left(\frac{5}{4}\mathbb{E}\left(\frac{4}{5}T_2\right) - \mu\right)^2 \\ &= \frac{25}{16}\frac{\sigma^2}{5} + \frac{1}{16}\mu^2 \\ &= \frac{5}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\mu^2 \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{16}\mu^2 > 0$ y $\frac{5}{16}\sigma^2 > \frac{1}{5}\sigma^2$, entonces

$$\frac{5}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\mu^2 > \frac{1}{5}\sigma^2$$
$$ECM_{T_2}(\mu) > ECM_{T_1}(\mu)$$

Por lo tanto, T_1 tiene menor error cuadrático medio (i.e es un mejor estimador que T_2).

Ejercicio 3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m. a. de una distribución $Poisson(\lambda)$.

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$$

Considere a $\widehat{\lambda} = \bar{X}$ como un estimador para λ.

1. Encuentre la CICR para $Var(\bar{\lambda})$.
2. El estimador $\widehat{\lambda}$, ¿es consistente?

Solución.

1. Obsérvese que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\lambda}) &= \mathbb{E}(\bar{X}) \\
&= \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda \\
&= \frac{1}{n}(n\lambda) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

De aquí, se sigue que el estimador $\widehat{\lambda}$ es insesgado.
Además, $\tau(\lambda) = \lambda$, por lo que $(\tau'(\lambda))^2 = 1$.
A continuación, se obtendrá la información esperada de Fisher.
Nótese que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda} ln(f(x;\lambda)) &= \frac{\partial}{\partial\lambda} ln(\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}(-\lambda + xln(\lambda) + ln(\frac{1}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x))) \\
&= -1 + \frac{x}{\lambda} \\
&= \frac{x-\lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I_{\underline{X}}(\lambda) &= n\mathbb{E}((\frac{\partial}{\partial\lambda} ln(f(X;\lambda)))^2) \\
&= n\mathbb{E}((\frac{X-\lambda}{\lambda})^2) \\
&= n\mathbb{E}(\frac{(X-\lambda)^2}{\lambda^2}) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{E}((X-\lambda)^2) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{V}ar(X) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\lambda \\
&= \frac{n}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Con lo obtenido hasta ahora, se sigue que,

$$\begin{aligned} CICR(\lambda) &= \frac{(\tau'(\lambda))^2}{I_{\underline{X}}(\lambda)} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{n}. \end{aligned}$$

Al ser λ insesgado, se sigue que $\mathbb{V}ar(\widehat{\lambda}) \geq CICR(\lambda) = \frac{\lambda}{n}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\widehat{\lambda_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Sea $n \in \mathbb{N}$.
   Se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n}) &= \mathbb{V}ar(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2}(n\lambda) \\ &= \frac{\lambda}{n}. \end{aligned}$$

   Cada $\widehat{\lambda_n}$ es insesgado, así que, $ECM(\widehat{\lambda_n}) = \mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n}) = \frac{\lambda}{n}$.
   Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ECM(\widehat{\lambda_n}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Así, se tiene que, en efecto, $\widehat{\lambda}$ es un estimador consistente para λ.

Ejercicio 4. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una m.a. de una distribución con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y;\theta) = \theta(1-\theta)^y \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y),$$

donde $\theta \in (0,1)$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta}{1-\theta}$, y $\mathbb{V}ar(Y) = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$.

1. Encuentre el estimador por momentos para $\tau(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$.

2. ¿Su estimador es un UMVUE?

Solución.

1. Dado que la función de densidad de probabilidad de la muestra sólo depende de un parámetro, se sigue que el sistema de ecuaciones a resolver, es,

$$\mu_1 = M_1,$$

   donde μ_1 es el primer momento poblacional, es decir $\mathbb{E}(Y_i)$, y M_1 es el primer momento muestral, es decir, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.
   Por un lado, está dado que, $\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta}{1-\theta} = \tau(\theta)$.
   Así, $\mu_1 = \tau(\theta)$.
   Luego, el sistema resulta,

$$\tau(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

   a resolver para $\tau(\theta)$.
   Se sigue, entonces, que el estimador por momentos para $\tau(\theta)$, es $\widehat{\tau(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

2. Obsérvese lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(y;\theta) &= \theta(1-\theta)^y \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y) \\ &= \theta \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y) e^{y ln(1-\theta)} \end{aligned}$$

   Haciendo $a(\theta) := \theta$, $b(y) := \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y)$, $c(\theta) := ln(1-\theta)$, $d(y) := y$, se deduce que la función de densidad de la muestra pertenece a la familia exponencial.
   Sea $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i$.
   Dado que la $d(y) = y$, se sigue que, el estimador $\sum_{i=1}^n d(Y_i) = \sum_{i=1}^n Y_i = S(\underline{Y})$, es suficiente y completo.
   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{n}x$.
   Sea $T^* := f \circ S$. Esto refleja que T^* es función de S.
   Adviértase que $T^*(\underline{Y}) = \widehat{\tau(\theta)}$.
   Además,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^*(\underline{Y})) &= \mathbb{E}(\bar{Y}) \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} \\ &= \tau(\theta) \end{aligned}$$

   Por ende, $T^*(\underline{Y})$ es un estimador insesgado para $\tau(\theta)$.
   Del Teorema de Lehmann-Scheffé, se puede concluir que $T^*(\underline{Y}) = \widehat{\tau(\theta)}$ es el UMVUE de $\tau(\theta)$.