Ejercicios del examen

Ejercicio 1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una densidad de probabilidad

$$f_X(x;\alpha) = \alpha x^{-2}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

con $\alpha \in \Theta = (0,\infty)$.

- Encuentra un estimador máximo verosímil para α.
- ¿Es $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}$ una estadística suficiente para α?

Solución:

1. Sea $\hat{\alpha}_{MV}$ el estimador de máxima verosimilitud para α. Sabemos que $\hat{\alpha}_{MV}$ es el parámetro que máximiza la función de verosimilitud, $L(\alpha)$. En otras palabras,

$$\hat{\alpha}_{MV} = \underset{\alpha\in\Theta}{\arg\,\text{máx}} L(\alpha)$$

Hay que encontrar en dónde (sobre su dominio) L alcanza su valor máximo. Primero calculamos la verosimilitud,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots x_n;\alpha) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\alpha) \\ &= \prod_{i=1}^n \alpha x_i^{-2}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= \alpha^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \end{aligned}$$

Si existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $x_j < \alpha$, entonces $\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_j) = 0$, y $L(\alpha) = 0$ para toda α. Entonces,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= \alpha^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \end{aligned}$$

Nótese que como $\alpha > 0$, entonces L es una función estríctamente creciente, por lo que esperamos que el máximo lo alcance hacia la derecha. Sea $\alpha^* = X_{(1)} = \text{mín}\{X_1,\ldots,X_n\}$.
Si $\alpha^{**} > \alpha^*$, entonces $\mathbf{1}_{[\alpha^{**},\infty)}(x_{(1)}) = 0$ y $L(\alpha^*) > L(\alpha^{**})$.
Si $\alpha^{**} < \alpha^*$, por ser L creciente, $L(\alpha^{**}) < L(\alpha^*)$.

Es decir,

$$\alpha^* = \underset{\alpha\in\Theta}{\arg\,\text{máx}} L(\alpha)$$

Entonces $\hat{\alpha}_{MV} = X_{(1)}$

2. Del inciso anterior,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \alpha^n\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-2} \\ &= g(S(\underline{x}),\alpha)h(\underline{x}) \end{aligned}$$

con $g(S(\underline{x}),\alpha) = \alpha^n\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})$ y $h(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{-2}$. Por el teorema de factorización, $S(\underline{X}) = X_{(1)}$ es una estadística suficiente.

Ejercicio 2. Sea $X_1, \ldots, X_5$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sean

$$
\begin{aligned}
T_1(\underline{X}) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i \\
T_2(\underline{X}) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} X_i
\end{aligned}
$$

dos estimadores para μ. ¿Qué estimador tiene menor error cuadrático medio?
Solución:
Sabemos que,

$$ECM_T(\mu) = \mathbb{V}ar(T) + \beta(\mu)^2$$

con $\beta(\mu) = \mathbb{E}(T) - \mu$.
Como $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$
\begin{aligned}
T_1(\underline{X}) &\sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right) \\
\frac{4}{5}T_2(\underline{X}) &\sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
ECM_{T_1}(\mu) &= \mathbb{V}ar(T_1) + \beta(\mu)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{5} + (\mu - \mu)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{5}
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
ECM_{T_2}(\mu) &= \mathbb{V}ar(T_2) + \beta(\mu)^2 \\
&= \mathbb{V}ar\left(\frac{5}{4}\frac{4}{5}T_2\right) + \left(\frac{5}{4}\mathbb{E}\left(\frac{4}{5}T_2\right) - \mu\right)^2 \\
&= \frac{25}{16}\frac{\sigma^2}{5} + \frac{1}{16}\mu^2 \\
&= \frac{5}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\mu^2
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1}{16}\mu^2 > 0$ y $\frac{5}{16}\sigma^2 > \frac{1}{5}\sigma^2$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\mu^2 &> \frac{1}{5}\sigma^2 \\
ECM_{T_2}(\mu) &> ECM_{T_1}(\mu)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, T_1 tiene menor error cuadrático medio (i.e es un mejor estimador que T_2).

Ejercicio 3. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m. a. de una distribución $Poisson(\lambda)$.

$$f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$$

Considere a $\widehat{\lambda} = \bar{X}$ como un estimador para λ.

1. Encuentre la CICR para $Var(\bar{\lambda})$.
2. El estimador $\widehat{\lambda}$, ¿es consistente?

Solución.

1. Obsérvese que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\lambda}) &= \mathbb{E}(\bar{X}) \\
&= \mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda \\
&= \frac{1}{n}(n\lambda) \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

De aquí, se sigue que el estimador $\widehat{\lambda}$ es insesgado.
Además, $\tau(\lambda) = \lambda$, por lo que $(\tau'(\lambda))^2 = 1$.
A continuación, se obtendrá la información esperada de Fisher.
Nótese que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}ln(f(x;\lambda)) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}ln(\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}(-\lambda + xln(\lambda) + ln(\frac{1}{x!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x))) \\
&= -1 + \frac{x}{\lambda} \\
&= \frac{x-\lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I_{\underline{X}}(\lambda) &= n\mathbb{E}((\frac{\partial}{\partial\lambda}ln(f(X;\lambda)))^2) \\
&= n\mathbb{E}((\frac{X-\lambda}{\lambda})^2) \\
&= n\mathbb{E}(\frac{(X-\lambda)^2}{\lambda^2}) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{E}((X-\lambda)^2) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\mathbb{V}ar(X) \\
&= \frac{n}{\lambda^2}\lambda \\
&= \frac{n}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Con lo obtenido hasta ahora, se sigue que,

$$\begin{aligned}CICR(\lambda) &= \frac{(\tau'(\lambda))^2}{I_{\underline{X}}(\lambda)}\\ &= \frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\\ &= \frac{\lambda}{n}.\end{aligned}$$

Al ser λ insesgado, se sigue que $\mathbb{V}ar(\widehat{\lambda}) \geq CICR(\lambda) = \frac{\lambda}{n}$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\widehat{\lambda_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Sea $n \in \mathbb{N}$.
   Se tiene que,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n}) &= \mathbb{V}ar(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}ar(X_i)\\ &= \frac{1}{n^2}(n\lambda)\\ &= \frac{\lambda}{n}.\end{aligned}$$

   Cada $\widehat{\lambda_n}$ es insesgado, así que, $ECM(\widehat{\lambda_n}) = \mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n}) = \frac{\lambda}{n}$.
   Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ECM(\widehat{\lambda_n}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar(\widehat{\lambda_n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Así, se tiene que, en efecto, $\widehat{\lambda}$ es un estimador consistente para λ.

Ejercicio 4. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una m.a. de una distribución con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y;\theta) = \theta(1-\theta)^y \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y),$$

donde $\theta \in (0,1)$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta}{1-\theta}$, y $\mathbb{V}ar(Y) = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$.

1. Encuentre el estimador por momentos para $\tau(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$.

2. ¿Su estimador es un UMVUE?

Solución.

1. Dado que la función de densidad de probabilidad de la muestra sólo depende de un parámetro, se sigue que el sistema de ecuaciones a resolver, es,
$$\mu_1 = M_1,$$
donde μ_1 es el primer momento poblacional, es decir $\mathbb{E}(Y_i)$, y M_1 es el primer momento muestral, es decir, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.
Por un lado, está dado que, $\mathbb{E}(Y) = \frac{\theta}{1-\theta} = \tau(\theta)$.
Así, $\mu_1 = \tau(\theta)$.
Luego, el sistema resulta,
$$\tau(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$
a resolver para $\tau(\theta)$.
Se sigue, entonces, que el estimador por momentos para $\tau(\theta)$, es $\widehat{\tau(\theta)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

2. Obsérvese lo siguiente:
$$\begin{aligned} f(y;\theta) &= \theta(1-\theta)^y \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y) \\ &= \theta \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y) e^{yln(1-\theta)} \end{aligned}$$
Haciendo $a(\theta) := \theta$, $b(y) := \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y)$, $c(\theta) := ln(1-\theta)$, $d(y) := y$, se deduce que la función de densidad de la muestra pertenece a la familia exponencial.
Sea $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i$.
Dado que la $d(y) = y$, se sigue que, el estimador $\sum_{i=1}^n d(Y_i) = \sum_{i=1}^n Y_i = S(\underline{Y})$, es suficiente y completo.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{n}x$.
Sea $T^* := f \circ S$. Esto refleja que T^* es función de S.
Adviértase que $T^*(\underline{Y}) = \widehat{\tau(\theta)}$.
Además,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T^*(\underline{Y})) &= \mathbb{E}(\bar{Y}) \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} \\ &= \tau(\theta) \end{aligned}$$
Por ende, $T^*(\underline{Y})$ es un estimador insesgado para $\tau(\theta)$.
Del Teorema de Lehmann-Scheffé, se puede concluir que $T^*(\underline{Y}) = \widehat{\tau(\theta)}$ es el UMVUE de $\tau(\theta)$.