

제 4 장 반복이 있는 이원배치 분산분석

예제 4-1. 어느 공장에서 4대의 기계(A)와 3명의 작업자(B)에 따라서 제품의 생산량에 차이가 있는지 파악하기 위하여 총 3번의 반복실험을 한 결과 아래와 같다. 기계와 작업자에 따라서 제품의 생산량에 차이가 있는지를 검정하여라.

작업자 \ 기계	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	32 35 34	30 32 36	37 33 34	31 32 39
B_2	36 35 35	40 39 39	35 37 38	35 40 31
B_3	29 30 35	36 30 26	38 32 39	33 30 27

(1) 제곱합

$$(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}) = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

$$\begin{bmatrix} -2.17 & -4.17 & 2.83 & -3.17 \\ 0.83 & -2.17 & -1.17 & -2.17 \\ -0.17 & 1.83 & -0.17 & 4.83 \\ 1.83 & 5.83 & 0.83 & 0.83 \\ 0.83 & 4.83 & 2.83 & 5.83 \\ 0.83 & 4.83 & 3.83 & -3.17 \\ -5.17 & 1.83 & 3.83 & -1.17 \\ -4.17 & -4.17 & -2.17 & -4.17 \\ 0.83 & -8.17 & 4.83 & -7.17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \\ -0.72 & 0.06 & 1.72 & -1.06 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.42 & -0.42 & -0.42 & -0.42 \\ -0.42 & -0.42 & -0.42 & -0.42 \\ -0.42 & -0.42 & -0.42 & -0.42 \\ 2.50 & 2.50 & 2.50 & 2.50 \\ 2.50 & 2.50 & 2.50 & 2.50 \\ 2.50 & 2.50 & 2.50 & 2.50 \\ -2.08 & -2.08 & -2.08 & -2.08 \\ -2.08 & -2.08 & -2.08 & -2.08 \\ -2.08 & -2.08 & -2.08 & -2.08 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.64 & -1.14 & -0.81 & 1.31 \\ 0.64 & -1.14 & -0.81 & 1.31 \\ 0.64 & -1.14 & -0.81 & 1.31 \\ -0.61 & 2.61 & -1.72 & -0.28 \\ -0.61 & 2.61 & -1.72 & -0.28 \\ -0.61 & 2.61 & -1.72 & -0.28 \\ -0.03 & -1.47 & 2.53 & -1.03 \\ -0.03 & -1.47 & 2.53 & -1.03 \\ -0.03 & -1.47 & 2.53 & -1.03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.67 & -2.67 & 2.33 & -3.00 \\ 1.33 & -0.67 & -1.67 & -2.00 \\ 0.33 & 3.33 & -0.67 & 5.00 \\ 0.67 & 0.67 & -1.67 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 0.33 & 4.67 \\ -0.33 & -0.33 & 1.33 & -4.33 \\ -2.33 & 5.33 & 1.67 & 3.00 \\ -1.33 & -0.67 & -4.33 & 0.00 \\ 3.67 & -4.67 & 2.67 & -3.00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 \\ \therefore SS_T &= SS_A + SS_B + SS_{A \times B} + SS_E \end{aligned}$$

$$SS_T = (-2.17)^2 + 0.83^2 + \dots + (-7.17)^2 = 477$$

$$SS_A = (-0.72)^2 + 0.06^2 + \dots + (-1.06)^2 = 41.44$$

$$SS_B = (-0.42)^2 + (-0.42)^2 + \dots + (-2.08)^2 = 129.17$$

$$SS_{A \times B} = 0.64^2 + (-1.14)^2 + \dots + (-1.03)^2 = 71.72$$

$$SS_E = (-1.67)^2 + (-2.67)^2 + \dots + (-3.00)^2 = 234.67$$

(2) 간단식

작업자 \ 기계	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	32 35 34	30 32 36	37 33 34	31 32 39
B_2	36 35 35	40 39 39	35 37 38	35 40 31
B_3	29 30 35	36 30 26	38 32 39	33 30 27

작업자 \ 기계	A_1	A_2	A_3	A_4	합 계
B_1	101	98	104	102	405
B_2	106	118	110	106	440
B_3	94	92	109	90	385
합 계	301	308	323	298	1230

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} + \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r ((\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\dots}) - (\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\dots}) - (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\dots}))^2 \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{i\cdot\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 &\therefore SS_{A \times B} = SS_{AB} - SS_A - SS_B
 \end{aligned}$$

$$CT = \frac{T^2}{lmn} =$$

$$\begin{aligned}
 SS_T &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r Y_{ijk}^2 - CT \\
 &= 32^2 + 35^2 + \dots + 27^2 - 42025 \\
 &= 42502 - 42025 \\
 &= 477
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SS_A &= \sum_{i=1}^l \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{mr} - CT \\
 &= \sum_{i=1}^4 \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{3 \times 3} - CT \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_B &= \sum_{j=1}^m \frac{Y_{\cdot j}^2}{lr} - CT \\
&= \sum_{j=1}^3 \frac{Y_{\cdot j}^2}{4 \times 3} - CT \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{AB} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{Y_{ij}^2}{r} - CT \\
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \frac{Y_{ij}^2}{3} - CT \\
&=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{A \times B} &= SS_{AB} - SS_A - SS_B \\
&=
\end{aligned}$$

(2) 자유도

$$A \text{ 자유도} = l - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$B \text{ 자유도} = m - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$A \times B \text{의 자유도} = (l - 1)(m - 1) = (4 - 1)(3 - 1) = 6$$

$$\text{오차 자유도} = lm(r - 1) = 4 \times 3 \times (3 - 1) = 24$$

$$\text{총 자유도} = lmr - 1 = 4 \times 3 \times 3 - 1 = 35$$

(3) 분산분석표

source	SS	df	MS	F
요인(A)	SS_A	$l - 1$	MS_A	MS_A / MS_E
요인(B)	SS_B	$m - 1$	MS_B	MS_B / MS_E
교호작용(A × B)	$SS_{A \times B}$	$(l - 1)(m - 1)$	$MS_{A \times B}$	$MS_{A \times B} / MS_E$
오차(E)	SS_E	$lm(r - 1)$	MS_E	
합계(Total)	SS_T	$lmr - 1$		

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
요인(<i>A</i>)				
요인(<i>B</i>)				
교호작용(<i>A</i> × <i>B</i>)				
오차(<i>E</i>)				
합계(Total)				

(4) 기각역

$$F_0 \geq F(3, 24; 0.05)$$

$$F_0 \geq F(2, 24; 0.05)$$

$$F_0 \geq F(6, 24; 0.05)$$

(5) 분산분석 후의 추정

① 기계(*A*)의 모평균의 추정

$$\bar{Y}_{i\cdot} \pm t_{lm(r-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{MS_E}{mr}}$$

② 작업자(*B*)의 모평균의 추정

$$\bar{Y}_{\cdot j} \pm t_{lm(r-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{MS_E}{lr}}$$

③ 교호작용에 대한 모평균의 추정(교호작용이 있는 경우)

$$\bar{Y}_{ij} \pm t_{lm(r-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{MS_E}{r}}$$

$$A_1B_1 : 33.667 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (29.941, 37.939)$$

$$A_1B_2 : 35.333 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (31.607, 39.059)$$

$$A_1B_3 : 31.333 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (27.607, 35.059)$$

$$A_2B_1 : 32.667 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (28.941, 36.393)$$

$$A_2B_2 :$$

$$A_2B_3 : 30.667 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (26.941, 34.393)$$

$$A_3B_1 : 34.667 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (30.941, 38.393)$$

$$A_3B_2 : 36.667 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (32.941, 40.393)$$

$$A_3B_3 : 36.333 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (32.607, 40.059)$$

$$A_4B_1 : 34.000 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (30.274, 37.726)$$

$$A_4B_2 : 35.333 \pm 2.064 \times \sqrt{\frac{9.778}{3}} = (31.607, 39.059)$$

$$A_4B_3 :$$

④ 교호작용에 대한 모평균의 추정(교호작용이 없는 경우)

$$\bar{Y}_{i\cdot} + \bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} \pm t_{lm(r-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{MS_E}{n_e}}, \quad n_e = \frac{lmr}{l+m-1}$$

$$n_e =$$

$$A_2B_2 :$$

$$A_4B_3 :$$

⑤ 기계(A)간의 모평균 추정

$$\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{i\cdot}^* \pm t_{(l-1)(m-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{2MS_E}{mr}}$$

⑥ 작업자(B)간의 모평균 추정

$$\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot j}^* \pm t_{(l-1)(m-1), \alpha/2} \times \sqrt{\frac{2MS_E}{lr}}$$

(6) SPSS 분석결과

① 분산분석

기술통계량

종속 변수:생산량

기계	작업자	평균	표준편차	N
기계1	작업자1	33.67	1.528	3
	작업자2	35.33	.577	3
	작업자3	31.33	3.215	3
	합계	33.44	2.506	9
기계2	작업자1	32.67	3.055	3
	작업자2	39.33	.577	3
	작업자3	30.67	5.033	3
	합계	34.22	4.919	9
기계3	작업자1	34.67	2.082	3
	작업자2	36.67	1.528	3
	작업자3	36.33	3.786	3
	합계	35.89	2.472	9
기계4	작업자1	34.00	4.359	3
	작업자2	35.33	4.509	3
	작업자3	30.00	3.000	3
	합계	33.11	4.226	9
합계	작업자1	33.75	2.633	12
	작업자2	36.67	2.674	12
	작업자3	32.08	4.188	12
	합계	34.17	3.692	36

오차 분산의 동일성에 대한 Levene의 검정^a

종속 변수:생산량

F	df1	df2	유의확률
1.757	11	24	.120

여러 집단에서 종속변수의 오차 분산이 동일한
영가설을 검정합니다.

a. Design: 절편 + 기계 + 작업자 + 기계 *
작업자

개체-간 효과 검정

종속 변수:생산량

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	242.333 ^a	11	22.030	2.253	.047
절편	42025.000	1	42025.000	4298.011	.000
기계	41.444	3	13.815	1.413	.263
작업자	129.167	2	64.583	6.605	.005
기계 * 작업자	71.722	6	11.954	1.223	.329
오차	234.667	24	9.778		
합계	42502.000	36			
수정 합계	477.000	35			

a. R 제곱 = .508 (수정된 R 제곱 = .283)

추정된 주변평균

1. 기계

종속 변수:생산량

기계	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
기계1	33.444	1.042	31.293	35.596
기계2	34.222	1.042	32.071	36.373
기계3	35.889	1.042	33.738	38.040
기계4	33.111	1.042	30.960	35.262

2. 작업자

종속 변수:생산량

작업자	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
작업자1	33.750	.903	31.887	35.613
작업자2	36.667	.903	34.804	38.530
작업자3	32.083	.903	30.220	33.946

3. 기계 * 작업자

종속 변수:생산량

기계	작업자	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
				하한값	상한값
기계1	작업자1	33.667	1.805	29.941	37.393
	작업자2	35.333	1.805	31.607	39.059
	작업자3	31.333	1.805	27.607	35.059
기계2	작업자1	32.667	1.805	28.941	36.393
	작업자2	39.333	1.805	35.607	43.059
	작업자3	30.667	1.805	26.941	34.393
기계3	작업자1	34.667	1.805	30.941	38.393
	작업자2	36.667	1.805	32.941	40.393
	작업자3	36.333	1.805	32.607	40.059
기계4	작업자1	34.000	1.805	30.274	37.726
	작업자2	35.333	1.805	31.607	39.059
	작업자3	30.000	1.805	26.274	33.726

② 기계 다중비교

다중 비교

종속 변수: 생산량

(i) 기계	(j) 기계	평균차(i-j)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간		
					하한값	상한값	
Tukey HSD	기계1	기계2	-.78	1.474	.952	-4.84	3.29
		기계3	-2.44	1.474	.367	-6.51	1.62
		기계4	.33	1.474	.996	-3.73	4.40
	기계2	기계1	.78	1.474	.952	-3.29	4.84
		기계3	-1.67	1.474	.675	-5.73	2.40
		기계4	1.11	1.474	.874	-2.96	5.18
	기계3	기계1	2.44	1.474	.367	-1.62	6.51
		기계2	1.67	1.474	.675	-2.40	5.73
		기계4	2.78	1.474	.261	-1.29	6.84
	기계4	기계1	-.33	1.474	.996	-4.40	3.73
		기계2	-1.11	1.474	.874	-5.18	2.96
		기계3	-2.78	1.474	.261	-6.84	1.29
Scheffe	기계1	기계2	-.78	1.474	.963	-5.21	3.65
		기계3	-2.44	1.474	.448	-6.87	1.98
		기계4	.33	1.474	.997	-4.10	4.76
	기계2	기계1	.78	1.474	.963	-3.65	5.21
		기계3	-1.67	1.474	.736	-6.10	2.76
		기계4	1.11	1.474	.903	-3.32	5.54
	기계3	기계1	2.44	1.474	.448	-1.98	6.87
		기계2	1.67	1.474	.736	-2.76	6.10
		기계4	2.78	1.474	.337	-1.65	7.21
	기계4	기계1	-.33	1.474	.997	-4.76	4.10
		기계2	-1.11	1.474	.903	-5.54	3.32
		기계3	-2.78	1.474	.337	-7.21	1.65
LSD	기계1	기계2	-.78	1.474	.603	-3.82	2.26
		기계3	-2.44	1.474	.110	-5.49	.60
		기계4	.33	1.474	.823	-2.71	3.38
	기계2	기계1	.78	1.474	.603	-2.26	3.82
		기계3	-1.67	1.474	.269	-4.71	1.38
		기계4	1.11	1.474	.458	-1.93	4.15
	기계3	기계1	2.44	1.474	.110	-.60	5.49
		기계2	1.67	1.474	.269	-1.38	4.71
		기계4	2.78	1.474	.072	-.26	5.82
	기계4	기계1	-.33	1.474	.823	-3.38	2.71
		기계2	-1.11	1.474	.458	-4.15	1.93
		기계3	-2.78	1.474	.072	-5.82	.26

동일집단군

생산량

기계	N	집단군
		1
Tukey HSD ^{a, b}	기계4	9 33.11
	기계1	9 33.44
	기계2	9 34.22
	기계3	9 35.89
	유의확률	.261
Scheffe ^{a, b}	기계4	9 33.11
	기계1	9 33.44
	기계2	9 34.22
	기계3	9 35.89
	유의확률	.337

③ 작업자 다중비교

다중 비교

종속 변수: 생산량

(I) 작업자	(J) 작업자	평균차(I-J)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간		
					하한값	상한값	
Tukey HSD	작업자1	작업자2	-2.92	1.277	.077	-6.10	.27
		작업자3	1.67	1.277	.406	-1.52	4.85
	작업자2	작업자1	2.92	1.277	.077	-.27	6.10
		작업자3	4.58*	1.277	.004	1.40	7.77
	작업자3	작업자1	-1.67	1.277	.406	-4.85	1.52
		작업자2	-4.58*	1.277	.004	-7.77	-1.40
Scheffe	작업자1	작업자2	-2.92	1.277	.094	-6.25	.41
		작업자3	1.67	1.277	.439	-1.66	5.00
	작업자2	작업자1	2.92	1.277	.094	-.41	6.25
		작업자3	4.58*	1.277	.006	1.25	7.91
	작업자3	작업자1	-1.67	1.277	.439	-5.00	1.66
		작업자2	-4.58*	1.277	.006	-7.91	-1.25
LSD	작업자1	작업자2	-2.92*	1.277	.031	-5.55	-.28
		작업자3	1.67	1.277	.204	-.97	4.30
	작업자2	작업자1	2.92*	1.277	.031	.28	5.55
		작업자3	4.58*	1.277	.001	1.95	7.22
	작업자3	작업자1	-1.67	1.277	.204	-4.30	.97
		작업자2	-4.58*	1.277	.001	-7.22	-1.95

생산량

작업자	N	집단군	
		1	2
Tukey HSD ^{a, b}	작업자3	32.08	
	작업자1	33.75	33.75
	작업자2		36.67
	유의확률	.406	.077
Scheffe ^{a, b}	작업자3	32.08	
	작업자1	33.75	33.75
	작업자2		36.67
	유의확률	.439	.094

(7) 오차항의 풀링

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
요인 (<i>A</i>)	41.44	3	13.813	1.413
요인 (<i>B</i>)	129.17	2	64.585	6.605*
교호작용 ($A \times B$)	71.72	6	11.953	1.223
오차 (<i>E</i>)	234.67	24	9.778	
합계 (Total)	477	35		

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
요인 (<i>A</i>)				
요인 (<i>B</i>)				
오차 (<i>E</i>)				
합계 (Total)				

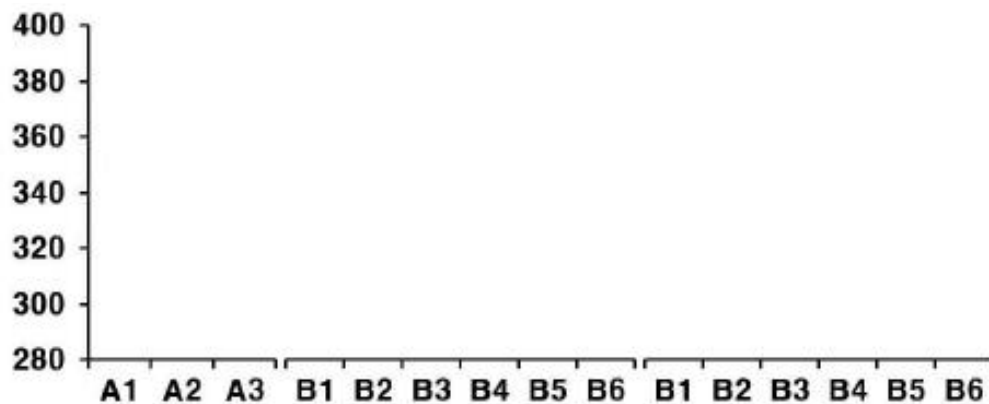
예제 4-2. 1979년 모 시멘트공장에서는 시멘트 분쇄공정에서 시멘트 강도에 영향을 주는 여러 가지 인자 중 석고의 종류(A)와 석고첨가량으로 사용되는 SO_3 의 함량(B)이 어떤 영향을 주고, 각 인자의 어떤 수준조합에서 높은 강도를 주는가를 실험한 결과는 아래와 같다.

SO_3 \ 석고	화학석고(A_1)	분말석고(A_2)	혼합석고(A_3)
B_1 (1.6%)	305, 302	322, 325	320, 322
B_2 (2.0%)	335, 337	350, 348	342, 344
B_3 (2.4%)	336, 364	326, 324	338, 336
B_4 (2.8%)	372, 374	330, 330	348, 348
B_5 (3.2%)	376, 373	327, 330	350, 350
B_6 (3.6%)	348, 350	310, 308	330, 328

(1) 데이터의 집계

SO_3 \ 석고	화학석고(A_1)		분말석고(A_2)		혼합석고(A_3)	
B_1 (1.6%)	607	303.5	647	323.5	642	321
B_2 (2.0%)	672	336	698	349	686	343
B_3 (2.4%)	730	365	650	325	674	337
B_4 (2.8%)	746	373	660	330	696	348
B_5 (3.2%)	749	374.5	657	328.5	700	350
B_6 (3.6%)	698	349	618	309	658	329

(2) 원데이터의 그래프화



(3) 간단식

$$N = lmr = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

$$CT = \frac{T^2}{lmn} = \frac{12888^2}{36} = 4126315.1$$

$$\begin{aligned} SS_T &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r Y_{ijk}^2 - CT \\ &= 13502.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_A &= \sum_{i=1}^l \frac{Y_{i\cdot}^2}{mr} - CT \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_B &= \sum_{j=1}^m \frac{Y_{\cdot j}^2}{lr} - CT \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_{AB} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{Y_{ij\cdot}^2}{r} - CT \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_{A \times B} &= SS_{AB} - SS_A - SS_B \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_E &= SS_T - SS_{AB} \\ &= \end{aligned}$$

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>F</i> (0.05)
요인 (<i>A</i>)					
요인 (<i>B</i>)					
교호작용 (<i>A</i> × <i>B</i>)					
)					
오차 (<i>E</i>)					
합계 (Total)					

(4) 분산분석 후의 추정

- 실험의 결과 교호작용이 유의미하므로 요인 A , B 의 조합에 의해 특별한 효과가 있다.

따라서, A , B 각 요인에 대하여 모평균을 추정하는 것 보다는 A , B 의 수준 조합 $A_i B_j$ 에서 모평균을 추정하는 것이 의미가 있다.

- $A_1 B_5$:

예제 4-3. 4종류의 살충제가 3가지 품종의 오렌지 나무의 생산량에 미치는 영향을 알기 위하여 실험을 한다. 한 오렌지 농장에서 각 품종별로 8그루씩의 나무를 랜덤으로 선택하고, 각 살충제마다 2그루씩 랜덤으로 배정하였다. 규정된 사용법에 따라 살충제를 살포한 후 일정기간 후에 나무에 달린 오렌지의 개수를 헤아려서 다음과 같은 데이터를 얻었다. 적당한 가설을 세우고 검정하여라.

품종 \ 살충제	A	B	C	D
1	49 39	50 55	43 38	53 48
2	55 41	67 58	53 42	85 73
3	66 68	85 92	69 62	85 99

(1) 분산분석

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
요인(A)	4447.792			
요인(B)	248.583			
교호작용($A \times B$)				
오차(E)	507.500			
합계(Total)	7187.958			

(2) 사후검정

오렌지개수

Student-Newman-Keuls^{a, b}

오렌지나무	N	집단군
		1
1	8	57.62
2	8	61.25
2	8	65.50
유의확률		.077

오렌지개수

Student-Newman-Keuls^{a, b}

살충제	N	집단군		
		1	2	3
A	6	45.67		
B	6	53.67		
C	6		64.50	
D	6			82.00
유의확률		.054	1.000	1.000

(3) 분산분석 후의 추정

기술통계

오랜지개수

	N	평균	표준편차	표준오차	평균에 대한 95% 신뢰구간		최소값	최대값
					하한값	상한값		
(A, 1)	2	44.00	7.071	5.000	-19.53	107.53	39	49
(A, 2)	2	52.50	3.536	2.500	20.73	84.27	50	55
(A, 3)	2	40.50	3.536	2.500	8.73	72.27	38	43
(B, 1)	2	50.50	3.536	2.500	18.73	82.27	48	53
(B, 2)	2	48.00	9.899	7.000	-40.94	136.94	41	55
(B, 3)	2	62.50	6.364	4.500	5.32	119.68	58	67
(C, 1)	2	47.50	7.778	5.500	-22.38	117.38	42	53
(C, 2)	2	79.00	8.485	6.000	2.76	155.24	73	85
(C, 3)	2	67.00	1.414	1.000	54.29	79.71	66	68
(D, 1)	2	88.50	4.950	3.500	44.03	132.97	85	92
(D, 2)	2	65.50	4.950	3.500	21.03	109.97	62	69
(D, 3)	2	92.00	9.899	7.000	3.06	180.94	85	99
합계	24	61.46	17.678	3.609	53.99	68.92	38	99

분산분석

오랜지개수

	제곱합	df	평균 제곱	거짓	유의확률
집단-간	6680.458	11	607.314	14.360	.000
집단-내	507.500	12	42.292		
합계	7187.958	23			

오랜지개수

Student-Newman-Keuls^a

집단	N	유의수준 = 0.05에 대한 부집단			
		1	2	3	4
(A, 3)	2	40.50			
(A, 1)	2	44.00	44.00		
(C, 1)	2	47.50	47.50		
(B, 2)	2	48.00	48.00		
(B, 1)	2	50.50	50.50		
(A, 2)	2	52.50	52.50		
(B, 3)	2	62.50	62.50	62.50	
(D, 2)	2		65.50	65.50	
(C, 3)	2		67.00	67.00	
(C, 2)	2			79.00	79.00
(D, 1)	2				88.50
(D, 3)	2				92.00
유의확률		.061	.057	.104	.155

예제 4-4. 화학 처리 속도에 대한 연구 결과 가장 중요한 변수 두 개는 압력과 온도였다. 각 요인에서 두 번 반복하여 다음의 데이터를 얻었다. 적당한 가설을 세우고 검정하여라.

온도 \ 압력	A_1 (200psig)	A_2 (215psig)	A_3 (230psig)
B_1 (150°C)	90.4 90.2	90.7 90.6	90.2 90.4
B_2 (160°C)	90.1 90.3	90.5 90.6	89.9 90.1
B_3 (170°C)	90.5 90.7	90.8 90.9	90.4 90.1

(1) 분산분석

개체-간 효과 검정

종속 변수: 처리 속도

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	1.138 ^a	8	.142	8.000	.003
절편	147135.042	1	147135.042	8276346.125	.000
압력	.768	2	.384	21.594	.000
온도	.301	2	.151	8.469	.009
압력 * 온도	.069	4	.017	.969	.470
오차	.160	9	.018		
합계	147136.340	18			
수정 합계	1.298	17			

a. R 제곱 = .877 (수정된 R 제곱 = .767)

(2) 사후검정

처리속도

Student-Newman-Keuls^{a,b}

압력	N	집단군		
		1	2	3
230psig	6	90.183		
200psig	6		90.367	
215psig	6			90.683
유의확률		1.000	1.000	1.000

처리속도

Student-Newman-Keuls^{a,b}

온도	N	집단군	
		1	2
160℃	6	90.250	
150℃	6	90.417	90.417
170℃	6		90.567
유의확률		.059	.083

예제 4-5. 다음의 자료는 세 종류의 석탄에 각각 세 농도(0.404N, 0.626N, 0.786N)의 에탄올성 수산화소듐을 사용하여, 석탄의 산도를 각각의 9개 처리조합에서 두 번 측정한 것이다.

농도 \ 석탄	1	2	3
0.404N	8.27 8.17	8.66 8.61	8.14 7.96
0.626N	8.03 8.21	8.42 8.58	8.02 7.89
0.786N	8.60 8.20	8.61 8.76	8.13 8.07

(1) 분산분석

개체-간 효과 검정

종속 변수: 석탄산도

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	1.141 ^a	8	.143	8.394	.002
절편	1238.858	1	1238.858	72897.839	.000
석탄종류	1.002	2	.501	29.492	.000
수산화소듐	.124	2	.062	3.657	.069
석탄종류 * 수산화소듐	.015	4	.004	.214	.924
오차	.153	9	.017		
합계	1240.153	18			
수정 합계	1.294	17			

a. R 제곱 = .882 (수정된 R 제곱 = .777)

(2) 사후검정

석탄산도

Student-Newman-Keuls^{a, b}

석탄종류	N	집단군		
		1	2	3
3	6	8.0350		
1	6		8.2467	
2	6			8.6067
유의확률		1.000	1.000	1.000

동일 집단군에 있는 집단에 대한 평균이 표시됩니다.

석탄산도

Student-Newman-Keuls^{a, b}

수산화소들	N	집단군
		1
0.626N	6	8.1917
0.404N	6	8.3017
0.786N	6	8.3950
유의확률		.058

동일 집단군에 있는 집단에 대한

예제 4-6. 구리로 만든 접시의 비틀린 정도를 비교하기 위해 구리 함유량 40%, 60%, 80% 별로 랜덤하게 선택된 세 실험실에서 실험이 행해졌다. 그 결과는 다음과 같다. 적당한 가설을 세우고 검정하여라.

실험실 \ 구리	40%	60%	80%
1	15 17	18, 18	22, 24
2	16 16	19, 21	25, 26
3	15, 16	17, 18	23, 22

(1) 혼합모형 : 1요인(A)은 고정, 1요인(B)은 랜덤

- $H_0 : \sigma_B^2 = 0$ 의 가설이 채택되면 모뎀단인 모든 실험실들의 효과에 대한 변이가 적어서 실험실 간의 유의적인 차이는 인정되지 않는다.

- 평균제곱

$$E(MS_A) = \sigma_E^2 + r\sigma_{A \times B}^2 + mr \sum_{i=1}^l (a_i - \bar{a})^2 / (l-1)$$

$$E(MS_B) = \sigma_E^2 + lr\sigma_B^2 + r\sigma_{A \times B}^2$$

$$E(MS_{A \times B}) = \sigma_E^2 + r\sigma_{A \times B}^2$$

$$E(MS_E) = \sigma_E^2$$

- 귀무가설

$$H_0 : a_1 = a_2 = \cdots = a_l$$

$$H_0 : \sigma_B^2 = 0$$

$$H_0 : \sigma_{A \times B}^2 = 0$$

- 주어진 귀무가설이 사실 일 때, F -통계량의 분자와 분모가 동일하도록 만들어서 검정을 시행한다.

(2) 분산분석

source	SS	df	MS	F
요인(A)	SS_A	$l-1$	MS_A	$MS_A / MS_{A \times B}$
요인(B)	SS_B	$m-1$	MS_B	$MS_B / MS_{A \times B}$
교호작용($A \times B$)	$SS_{A \times B}$	$(l-1)(m-1)$	$MS_{A \times B}$	$MS_{A \times B} / MS_E$
오차(E)	SS_E	$lm(r-1)$	MS_E	
합계(Total)	SS_T	$lmr-1$		

개체-간 효과 검정

종속 변수:비틀림

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F
절편	6728.000	1	6728.000	1035.077
오차	13.000	2	6.500 ^a	
구리합유량	190.333	2	95.167	81.571
오차	4.667	4	1.167 ^b	
실험실	13.000	2	6.500	5.571
오차	4.667	4	1.167 ^b	
구리합유량 * 실험실	4.667	4	1.167	1.313
오차	8.000	9	.889 ^c	

a. MS(실험실)

b. MS(구리합유량 * 실험실)

c. MS(오차)

$$H_0 : a_1 = a_2 = a_3, F = \frac{95.167}{1.167} = 81.571$$

$$H_0 : \sigma_B^2 = 0, F = \frac{6.500}{1.167} = 5.571$$

$$H_0 : \sigma_{A \times B}^2 = 0, F = \frac{1.167}{0.889} = 1.312$$

(3) 고정모형

개체-간 효과 검정

종속 변수:비틀림

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	208.000 ^a	8	26.000	29.250	.000
절편	6728.000	1	6728.000	7569.000	.000
구리합유량	190.333	2	95.167	107.062	.000
실험실	13.000	2	6.500	7.313	.013
구리합유량 * 실험실	4.667	4	1.167	1.313	.336
오차	8.000	9	.889		
합계	6944.000	18			
수정 합계	216.000	17			

a. R 제곱 = .963 (수정된 R 제곱 = .930)

예제 4-7. 이소니트로아세틸아민 유도체에 산을 가하고 가열하여 이사틴 유도체를 제조하는 공정에 있어서, 제조공정이 다른 3사의 중간원료에 관하여 반응온도(3수준)의 영향을 조사하였다. 반복을 2회로 하여 랜덤하게 실험하여 이사틴 생성률을 측정하였다. 분산분석표를 완성하고 검정하여라.

반응온도 납품회사	$A_1(60^{\circ}\text{C})$		$A_2(70^{\circ}\text{C})$		$A_3(80^{\circ}\text{C})$	
B_1	61.0	60.2	64.1	63.2	65.2	66.1
B_2	63.3	62.7	66.2	65.4	66.6	67.2
B_3	61.3	61.9	63.2	64.2	66.0	66.4

(1) 분산분석

아래 SPSS 결과(고정모형)를 보고 분산분석표를 완성하고 검정하여라.

개체-간 효과 검정

종속 변수: 생성률

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	75.221 ^a	8	9.403	32.928	.000
절편	74009.869	1	74009.869	259178.529	.000
반응온도	61.814	2	30.907	108.235	.000
납품회사	11.964	2	5.982	20.949	.000
반응온도 * 납품회사	1.442	4	.361	1.263	.353
오차	2.570	9	.286		
합계	74087.660	18			
수정 합계	77.791	17			

a. R 제곱 = .967 (수정된 R 제곱 = .938)

source	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
--------	-----------	-----------	-----------	----------

요인(A)

요인(B)

교호작용($A \times B$)
)

오차(E)

합계(Total)

(2) 분산분석

개체-간 효과 검정

종속 변수: 생성물

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
절편	74009.869	1	74009.869	12371.635	.000
온도	11.964	2	5.982 ^a		
반응온도	61.814	2	30.907	85.721	.001
	1.442	4	.361 ^b		
납품회사	11.964	2	5.982	16.592	.012
	1.442	4	.361 ^b		
반응온도 * 납품회사	1.442	4	.361	1.263	.353
	2.570	9	.286 ^c		

a. MS(납품회사)

b. MS(반응온도 * 납품회사)

c. MS(온도)

(3) 사후검정

생성물

Student-Newman-Keuls^{a, b}

반응온도	N	집단군		
		1	2	3
60℃	6	61.733		
70℃	6		64.383	
80℃	6			66.250
유의확률		1.000	1.000	1.000

예제 4-8. 윤활유의 탈색에 쓰이는 활성백토는, 천연적으로 산출되는 산성백토를 원료로 하여 여기에 유산처리를 행하고 수세한 후에 건조시켜서 분쇄하여 분말의 형태로 만들어진 다. 이렇게 하여 만들어지는 활성백토는 윤활유 탈색도를 측정하여 제품의 품질을 판정한다. 탈색성에 미치는 인자로서 원료 1톤당 유산사용량($A_1 = 400\text{kg}$, $A_2 = 500\text{kg}$, $A_3 = 600\text{kg}$),

수세횟수($B_1 = 4\text{회}$, $B_2 = 5\text{회}$) 및 건조시간($C_1 = 10\text{시간}$, $C_2 = 12\text{시간}$, $C_3 = 14\text{시간}$)을 취하여 $3 \times 2 \times 3 = 18\text{회}$ 의 삼원배치실험을 행하여, 탈색도에 대한 여러 가지 요인의 영향을 조사하였다. 다음의 데이터는 탈색 후의 윤활유 색의 짙은 정도를 표준색깔과 비교했을 때 비색계를 읽어서 적은 값이며, 값이 큰 쪽이 탈색력이 크다.

수세횟수	건조시간	유산사용량		
		$A_1(400\text{kg})$	$A_2(500\text{kg})$	$A_3(600\text{kg})$
$B_1(4\text{회})$	$C_1(10\text{시간})$	95	102	86
	$C_2(12\text{시간})$	98	111	86
	$C_3(14\text{시간})$	99	111	89
$B_2(5\text{회})$	$C_1(10\text{시간})$	90	99	85
	$C_2(12\text{시간})$	96	109	81
	$C_3(14\text{시간})$	97	112	94

(1) 분산분석을 하여라.

① 제곱합

$$\begin{aligned}
 Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} &= (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}) \\
 &+ (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...}) \\
 &+ (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{.jk.} + \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} -1.67 & 5.33 & -10.67 \\ 1.33 & 14.33 & -10.67 \\ 2.33 & 14.33 & -7.67 \\ -6.67 & 2.33 & -11.67 \\ -0.67 & 12.33 & -15.67 \\ 0.33 & 15.33 & -2.67 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.83 & 10.67 & -9.83 \\ -0.83 & 10.67 & -9.83 \\ -0.83 & 10.67 & -9.83 \\ -0.83 & 10.67 & -9.83 \\ -0.83 & 10.67 & -9.83 \\ -0.83 & 10.67 & -9.83 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.78 & 0.78 & 0.78 \\ 0.78 & 0.78 & 0.78 \\ 0.78 & 0.78 & 0.78 \\ -0.78 & -0.78 & -0.78 \\ -0.78 & -0.78 & -0.78 \\ -0.78 & -0.78 & -0.78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3.83 & -3.83 & -3.83 \\ 0.17 & 0.17 & 0.17 \\ 3.67 & 3.67 & 3.67 \\ -3.83 & -3.83 & -3.83 \\ 0.17 & 0.17 & 0.17 \\ 3.67 & 3.67 & 3.67 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0.72 & -0.11 & -0.61 \\ 0.72 & -0.11 & -0.61 \\ 0.72 & -0.11 & -0.61 \\ -0.72 & 0.11 & 0.61 \\ -0.72 & 0.11 & 0.61 \\ -0.72 & 0.11 & 0.61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.72 & 0.72 & 0.72 \\ 0.72 & 0.72 & 0.72 \\ -1.44 & -1.44 & -1.44 \\ -0.72 & -0.72 & -0.72 \\ -0.72 & -0.72 & -0.72 \\ 1.44 & 1.44 & 1.44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.50 & -3.00 & 2.50 \\ 1.00 & 2.50 & -3.50 \\ -1.50 & 0.50 & 1.00 \\ 0.50 & -3.00 & 2.50 \\ 1.00 & 2.50 & -3.50 \\ -1.50 & 0.50 & 1.00 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0.28 & 0.11 & -0.39 \\ -1.22 & -0.39 & 1.61 \\ 0.94 & 0.28 & -1.22 \\ -0.28 & -0.11 & 0.39 \\ 1.22 & 0.39 & -1.61 \\ -0.94 & -0.28 & 1.22 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 \\
& = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2 \\
& + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2 \\
& + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...})^2 \\
& + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...})^2 \\
& + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{.jk.} + \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2
\end{aligned}$$

$$\therefore SS_T = SS_A + SS_B + SS_C + SS_{A \times B} + SS_{B \times C} + SS_{C \times A} + SS_E$$

$$SS_T = (-1.67)^2 + 5.33^2 + \dots + (-2.67)^2 = 1562$$

$$SS_A = (-0.83)^2 + 10.67^2 + \dots + (-9.83)^2 = 1267$$

$$SS_B = 0.78^2 + 0.78^2 + \dots + (-0.78)^2 = 10.89$$

$$SS_C = (-3.83)^2 + (-3.83)^2 + \dots + (3.67)^2 = 169$$

$$SS_{A \times B} = 0.72^2 + (-0.11)^2 + \dots + 0.61^2 = 5.44$$

$$SS_{B \times C} = 0.72^2 + 0.72^2 + \dots + 1.44^2 = 18.78$$

$$SS_{C \times A} = 0.50^2 + (-3.00)^2 + \dots + 1.00^2 = 77$$

$$SS_E = 0.28^2 + 0.11^2 + \dots + 1.22^2 = 13.89$$

② 간단식

$T_{ij\cdot}$	A_1	A_2	A_3	$T_{\cdot j\cdot}$
B_1	292	324	261	877
B_2	283	320	260	863

$T_{\cdot jk}$	B_1	B_2	$T_{\cdot\cdot k}$
C_1	283	274	557
C_2	295	286	581
C_3	299	303	602

$T_{i\cdot k}$	C_1	C_2	C_3	$T_{i\cdot\cdot}$
A_1	185	194	196	575
A_2	201	201	223	644
A_3	171	171	183	521

$\bar{Y}_{ij\cdot}$	A_1	A_2	A_3	$\bar{Y}_{\cdot j\cdot}$
B_1	97.3	108.0	87.0	97.4
B_2	94.3	106.7	86.7	95.9

$\bar{Y}_{\cdot jk}$	B_1	B_2	$\bar{Y}_{\cdot\cdot k}$
C_1	94.3	91.3	92.8
C_2	98.3	95.3	96.8
C_3	99.7	101.0	100.3

$\bar{Y}_{i\cdot k}$	C_1	C_2	C_3	$\bar{Y}_{i\cdot\cdot}$
A_1	92.5	97.0	98.0	95.8
A_2	100.5	110.0	111.5	107.3
A_3	85.5	83.5	91.5	86.8

$$CT = \frac{T^2}{lmn} = \frac{1740^2}{18} = 168200$$

$$\begin{aligned}
 SS_T &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n Y_{ijk}^2 - CT \\
 &= 95^2 + 102^2 + \dots + 94^2 - 168200 \\
 &= 1562
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_A &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 \\
&= \sum_{i=1}^l \frac{T_{i..}^2}{mn} - CT \\
&= \frac{1}{6}(575^2 + 644^2 + 521^2) - 168200 \\
&= 1267 \\
SS_B &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{T_{.j.}^2}{ln} - CT \\
&= \frac{1}{9}(877^2 + 863^2) - 168200 \\
&= 10.9 \\
SS_C &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{T_{..k}^2}{lm} - CT \\
&= \frac{1}{6}(557^2 + 581^2 + 602^2) - 168200 \\
&= 169 \\
SS_{AB} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...})^2 \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{T_{ij.}^2}{n} - CT \\
&= \frac{1}{3}(292^2 + 324^2 + \dots + 260^2) - 168200 \\
&= 1283.3 \\
SS_{A \times B} &= S_{AB} - S_A - S_B \\
&= 1283.3 - 1267 - 10.9 \\
&= 5.4 \\
SS_{AC} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{...})^2 \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n \frac{T_{i.k}^2}{m} - CT \\
&= \frac{1}{2}(185^2 + 201^2 + \dots + 183^2) - 168200 \\
&= 1513
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{A \times C} &= S_{AC} - S_A - S_C \\
&= 1513 - 1267 - 169 \\
&= 77
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{BC} &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{\cdot jk} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{T_{\cdot jk}^2}{l} - CT \\
&= \frac{1}{2}(283^2 + 274^2 + \dots + 303^2) - 168200 \\
&= 198.7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{B \times C} &= S_{BC} - S_B - S_C \\
&= 198.7 - 10.9 - 169 \\
&= 18.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_E &= 1562 - (1267 - 10.9 - 169 - 5.4 - 77 - 18.8) \\
&= 13.9
\end{aligned}$$

③ 자유도

$$A \text{의 자유도} = l - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$B \text{의 자유도} = m - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$C \text{의 자유도} = n - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$A \times B \text{의 자유도} = (l - 1)(m - 1) = 2$$

$$B \times C \text{의 자유도} = (m - 1)(n - 1) = 2$$

$$A \times C \text{의 자유도} = (l - 1)(n - 1) = 4$$

$$E \text{의 자유도} = (l - 1)(m - 1)(n - 1) = 4$$

③ 분산분석표

source	SS	df	MS	F
요인 (A)	SS_A	$l-1$	MS_A	MS_A/MS_E
요인 (B)	SS_B	$m-1$	MS_B	MS_B/MS_E
요인 (C)	SS_C	$n-1$	MS_C	MS_C/MS_E
교호작용 ($A \times B$))	$SS_{A \times B}$	$(l-1)(m-1)$	$MS_{A \times B}$	$MS_{A \times B}/MS_E$
교호작용 ($B \times C$))	$SS_{B \times C}$	$(m-1)(n-1)$	$MS_{B \times C}$	$MS_{B \times C}/MS_E$
교호작용 ($C \times A$))	$SS_{C \times A}$	$(l-1)(n-1)$	$MS_{C \times A}$	$MS_{C \times A}/MS_E$
오차 (E)	SS_E	$(l-1)(m-1)(n-1)$	MS_E	
합계 (Total)	SS_T	$lmn-1$		

source	SS	df	MS	F
요인 (A)	1267	2	633.5	182.448
요인 (B)	10.89	1	10.89	3.316
요인 (C)	169	2	84.5	24.336
교호작용 ($A \times B$))	5.44	2	2.72	0.784
교호작용 ($B \times C$))	18.78	2	9.39	2.704
교호작용 ($C \times A$))	77	4	19.25	5.544
오차 (E)	13.89	4	3.47	
합계 (Total)	1562	17		

④ 기각역

$F_0 \geq F(2, 4; 0.05)$, $182.448 \geq 6.94$, H_0 reject

$F_0 \geq F(1, 4; 0.05)$, $3.316 \leq 7.71$, H_0 not reject

$F_0 \geq F(2, 4; 0.05)$, $24.336 \geq 6.94$, H_0 reject

$F_0 \geq F(2, 4; 0.05)$, $0.87 \leq 6.94$, H_0 not reject

$F_0 \geq F(2, 4; 0.05)$, $9.39 \geq 6.94$, H_0 reject

$F_0 \geq F(4, 4; 0.05)$, $5.544 \leq 6.39$, H_0 not reject

⑤ SPSS 분석결과

(i) 분산분석

개체-간 효과 검정

종속 변수: 탈색력

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	1548.111 ^a	13	119.085	34.297	.002
절편	168200.000	1	168200.000	48441.600	.000
A유산사용량	1267.000	2	633.500	182.448	.000
B수세횟수	10.889	1	10.889	3.136	.151
C건조시간	169.000	2	84.500	24.336	.006
A유산사용량 * B수세횟수	5.444	2	2.722	.784	.516
B수세횟수 * C건조시간	18.778	2	9.389	2.704	.181
A유산사용량 * C건조시간	77.000	4	19.250	5.544	.063
오차	13.889	4	3.472		
합계	169762.000	18			
수정 합계	1562.000	17			

a. R 제곱 = .991 (수정된 R 제곱 = .962)

추정된 주변평균

1. 유산사용량

종속 변수: 탈색력

유산사용량	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
400kg	95.833	.761	93.721	97.945
500kg	107.333	.761	105.221	109.445
600kg	86.833	.761	84.721	88.945

2. 수세횟수

종속 변수: 탈색력

수세횟수	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
4회	97.444	.621	95.720	99.169
5회	95.889	.621	94.164	97.613

3. 건조시간

종속 변수: 탈색력

건조시간	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
10시간	92.833	.761	90.721	94.945
12시간	96.833	.761	94.721	98.945
14시간	100.333	.761	98.221	102.445

(ii) 유산사용량 다중비교

다중 비교

종속 변수 탈색력

(I) 유산사용량		(J) 유산사용량		평균차(I-J)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간	
							하한값	상한값
Scheffe	400kg	500kg		-11.50 ^a	1.076	.001	-15.51	-7.49
		600kg		9.00 ^a	1.076	.003	4.99	13.01
	500kg	400kg		11.50 ^a	1.076	.001	7.49	15.51
		600kg		20.50 ^a	1.076	.000	16.49	24.51
	600kg	400kg		-9.00 ^a	1.076	.003	-13.01	-4.99
		500kg		-20.50 ^a	1.076	.000	-24.51	-16.49
LSD	400kg	500kg		-11.50 ^a	1.076	.000	-14.49	-8.51
		600kg		9.00 ^a	1.076	.001	6.01	11.99
	500kg	400kg		11.50 ^a	1.076	.000	8.51	14.49
		600kg		20.50 ^a	1.076	.000	17.51	23.49
	600kg	400kg		-9.00 ^a	1.076	.001	-11.99	-6.01
		500kg		-20.50 ^a	1.076	.000	-23.49	-17.51

관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 3.472입니다.
*. 평균차는 .05 수준에서 유의합니다.

동일집단군

탈색력

유산사용량		N	집단군		
			1	2	3
Scheffe ^{a, b}	600kg	6	86.83		
	400kg	6		95.83	
	500kg	6			107.33
	유의확률		1.000	1.000	1.000

동일 집단군에 있는 집단에 대한 평균이 표시됩니다.
관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 3.472입니다.
a. 조화평균 표본 크기 6.000을(를) 사용합니다.
b. 유의수준 = .05.

(iii) 건조시간 다중비교

다중 비교

종속 변수: 탈색력

	(i) 건조시간	(j) 건조시간	평균차(i-j)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간	
						하한값	상한값
Scheffe	10시간	12시간	-4.00	1.076	.050	-8.01	.01
		14시간	-7.50 ^a	1.076	.006	-11.51	-3.49
	12시간	10시간	4.00	1.076	.050	-.01	8.01
		14시간	-3.50	1.076	.075	-7.51	.51
	14시간	10시간	7.50 ^a	1.076	.006	3.49	11.51
		12시간	3.50	1.076	.075	-.51	7.51
LSD	10시간	12시간	-4.00 ^a	1.076	.021	-6.99	-1.01
		14시간	-7.50 ^a	1.076	.002	-10.49	-4.51
	12시간	10시간	4.00 ^a	1.076	.021	1.01	6.99
		14시간	-3.50 ^a	1.076	.031	-6.49	-.51
	14시간	10시간	7.50 ^a	1.076	.002	4.51	10.49
		12시간	3.50 ^a	1.076	.031	.51	6.49

관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 3.472입니다.

*. 평균차는 .05 수준에서 유의합니다.

동일집단군

탈색력

건조시간	N	집단군	
		1	2
Scheffe ^{a, b}	10시간	6	92.83
	12시간	6	96.83
	14시간	6	100.33
	유의확률	.050	.075

동일 집단군에 있는 집단에 대한 평균이 표시됩니다.
관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 3.472입니다.

a. 조화평균 표본 크기 6.000(를) 사용합니다.

b. 유의수준 = .05.

(2) 유의수준 10%에서 유의하지 않은 교호작용을 오차항에 풀링시켜 다시 분산분석을 하여라.

① 분산분석표

source	SS	df	MS	F
요인(A)	1267	2	633.5	132.98
요인(B)	10.89	1	10.89	2.29
요인(C)	169	2	84.5	17.74
교호작용(C×A)	77	4	19.25	4.04
오차(E)	38.11	8	4.76	
합계(Total)	1562	17		

② 기각역

$$F_0 \geq F(2, 8; 0.05), 132.98 \geq 4.46, H_0 \text{ reject}$$

$$F_0 \geq F(1, 8; 0.05), 2.29 \leq 5.32, H_0 \text{ not reject}$$

$$F_0 \geq F(2, 8; 0.05), 17.74 \geq 4.46, H_0 \text{ reject}$$

$$F_0 \geq F(4, 8; 0.05), 4.76 \geq 3.84, H_0 \text{ reject}$$

③ SPSS 분석결과

(i) 분산분석

개체-간 효과 검정

종속 변수:탈색력

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	1523.889 ^a	9	169.321	35.543	.000
절편	168200.000	1	168200.000	35307.289	.000
유산사용량	1267.000	2	633.500	132.980	.000
수세횟수	10.889	1	10.889	2.286	.169
건조시간	169.000	2	84.500	17.738	.001
유산사용량 * 건조시간	77.000	4	19.250	4.041	.044
오차	38.111	8	4.764		
합계	169762.000	18			
수정 합계	1562.000	17			

a. R 제곱 = .976 (수정된 R 제곱 = .948)

추정된 주변평균

1. 유산사용량

종속 변수:탈색력

유산사용량	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
400kg	95.833	.891	93.779	97.888
500kg	107.333	.891	105.279	109.388
600kg	86.833	.891	84.779	88.888

2. 수세횟수

종속 변수:탈색력

수세횟수	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
4회	97.444	.728	95.767	99.122
5회	95.889	.728	94.211	97.567

3. 건조시간

종속 변수:탈색력

건조시간	평균	표준오차	95% 신뢰구간	
			하한값	상한값
10시간	92.833	.891	90.779	94.888
12시간	96.833	.891	94.779	98.888
14시간	100.333	.891	98.279	102.388

(ii) 유산사용량 다중비교

다중 비교

종속 변수: 탈색력

(i) 유산사용량	(j) 유산사용량	평균차(i-j)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간		
					하한값	상한값	
Scheffe	400kg	500kg	-11.50 [*]	1.260	.000	-15.26	-7.74
		600kg	9.00 [*]	1.260	.000	5.24	12.76
	500kg	400kg	11.50 [*]	1.260	.000	7.74	15.26
		600kg	20.50 [*]	1.260	.000	16.74	24.26
	600kg	400kg	-9.00 [*]	1.260	.000	-12.76	-5.24
		500kg	-20.50 [*]	1.260	.000	-24.26	-16.74
LSD	400kg	500kg	-11.50 [*]	1.260	.000	-14.41	-8.59
		600kg	9.00 [*]	1.260	.000	6.09	11.91
	500kg	400kg	11.50 [*]	1.260	.000	8.59	14.41
		600kg	20.50 [*]	1.260	.000	17.59	23.41
	600kg	400kg	-9.00 [*]	1.260	.000	-11.91	-6.09
		500kg	-20.50 [*]	1.260	.000	-23.41	-17.59

관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 4.764입니다.
* 평균차는 .05 수준에서 유의합니다.

동일집단군

탈색력

유산사용량	N	집단군		
		1	2	3
Scheffe ^{a, b}	600kg	6	86.83	
	400kg	6	95.83	
	500kg	6		107.33
	유의확률	1.000	1.000	1.000

동일 집단군에 있는 집단에 대한 평균이 표시됩니다.
관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 4.764입니다.
a. 조화평균 표본 크기 6.000을(를) 사용합니다.
b. 유의수준 = .05.

(iii) 건조시간 다중비교

건조시간

다중 비교

종속 변수: 탈색력

(i) 건조시간	(j) 건조시간	평균차(i-j)	표준오차	유의확률	95% 신뢰구간		
					하한값	상한값	
Scheffe	10시간	12시간	-4.00 [*]	1.260	.038	-7.76	-2.24
		14시간	-7.50 [*]	1.260	.001	-11.26	-3.74
	12시간	10시간	4.00 [*]	1.260	.038	.24	7.76
		14시간	-3.50	1.260	.067	-7.26	.26
	14시간	10시간	7.50 [*]	1.260	.001	3.74	11.26
		12시간	3.50	1.260	.067	-.26	7.26
	10시간	12시간	-4.00 [*]	1.260	.013	-6.91	-1.09
		14시간	-7.50 [*]	1.260	.000	-10.41	-4.59
LSD	12시간	10시간	4.00 [*]	1.260	.013	1.09	6.91
		14시간	-3.50 [*]	1.260	.024	-6.41	-.59
	14시간	10시간	7.50 [*]	1.260	.000	4.59	10.41
		12시간	3.50 [*]	1.260	.024	.59	6.41

관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 4.764입니다.
* 평균차는 .05 수준에서 유의합니다.

동일집단군

탈색력

건조시간	N	집단군	
		1	2
Scheffe ^{a, b}	10시간	6	92.83
	12시간	6	96.83
	14시간	6	100.33
	유의확률	1.000	.067

동일 집단군에 있는 집단에 대한 평균이 표시됩니다.
관측평균을 기준으로 합니다.
오류 조건은 평균 제곱(오류) = 4.764입니다.
a. 조화평균 표본 크기 6.000을(를) 사용합니다.
b. 유의수준 = .05.

예제 4-9. 케이크를 만드는 한 회사에서 케이크의 질을 높일 수 있는 요인들의 효과를 알기 위하여 시험을 하려고 한다. 신 맛을 내는 산(A), 글리세롤(B), 달걀분말의 함유 정도(C)가 고려되어 실험이 이루어 졌다. 각 요인은 함유량이 적고(수준 0), 많고(수준 1)로 구분하여 각 처리조합별로 3회씩 실험하였다. 각 케이크의 질을 100점 기준으로 평가한 결과는 아래와 같다. SPSS 결과를 보고 해석하여라.

산소(A) 분말(C)	글리세롤(B)	
	적음(0)	많음(1)
적음(0)	적음(0)	84 89 85
	많음(1)	78 79 83
많음(1)	적음(0)	75 75 72
	많음(1)	75 80 73

개체-간 효과 검정

종속 변수: 케이크질

소스	제 III 유형 제곱합	자유도	평균 제곱	F	유의확률
수정 모형	514.667 ^a	7	73.524	9.287	.000
절편	141066.667	1	141066.667	17818.947	.000
산소	192.667	1	192.667	24.337	.000
글리세롤	130.667	1	130.667	16.505	.001
분말	42.667	1	42.667	5.389	.034
산소 * 글리세롤	32.667	1	32.667	4.126	.059
산소 * 분말	112.667	1	112.667	14.232	.002
글리세롤 * 분말	2.667	1	2.667	.337	.570
산소 * 글리세롤 * 분말	.667	1	.667	.084	.775
오차	126.667	16	7.917		
합계	141708.000	24			
수정 합계	641.333	23			

a. R 제곱 = .802 (수정된 R 제곱 = .716)