Ch. 2 Second Order Linear Ordinary Differential Equations (2계 선형상미분방정식)

- 상미분방정식
  - 선형 상미분방정식 – 표준화된 방법 존재
  - 비선형 상미분방정식 – 해결하기 어려움
- 2계 선형 상미분방정식

  : 기계공학이나 전기공학에서의 응용 때문에 가장 중요한 방정식

2계 제차 선형상미분방정식

- 2계 선형상미분방정식 : $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$
- 표준형(Standard Form) : y''을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - 제차 (Homogeneous) : $r(x)=0$
  - 비제차 (Nonhomogeneous) : $r(x)\neq 0$

- Ex. 비제차 선형상미분방정식 : $y''+25y=e^{-x}\cos x$

  제차 선형상미분방정식 : $xy''+y'+xy=0$이고 표준형은 ( )

  비선형상미분방정식 : $y''y+(y')^2=0$

2계 제차 선형상미분방정식

제차 선형상미분방정식에 대한 기본 정리

제차 선형미분방정식에 대해, 어떤 열린 구간 I에서 두 개의 해의 일차결합은 다시 구간 I에서 다시 제차 선형미분방정식의 해가 된다. 특히, 그러한 방정식에 대해서 해들의 합과 상수곱도 다시 해가 된다.

❖ 단, 이 정리는 비제차 선형방정식 또는 비선형 방정식에서는 성립하지 않는다.

- Ex.2 비제차 선형상미분방정식 $y''+y=1$의 해에 대하여 생각하자.

  함수 $y=1+\cos x$ 와 $y=1+\sin x$ 는 위의 방정식의 해이지만, 이들의 합은 해가 아니다.

  예를 들어 $2(1+\cos x)$ 나 $5(1+\sin x)$도 해가 아니다.

- Ex.3 비선형상미분방정식 $y''y-xy'=0$의 해에 대하여 생각하자.

  함수 $y=x^2$와 $y=1$는 위의 방정식의 해이지만, 이들의 합은 해가 아니다.

  예를 들어 $-x^2$도 해가 아니다.

2계 제차 선형상미분방정식

초기값 문제

- **초기 조건**(Initial Conditions) : $y(x_0)=K_0, \quad y'(x_0)=K_1$
- **초기값 문제**(Initial Value Problems)

  : 제차 선형상미분방정식과 두 개의 초기조건으로 구성

- Ex.4 다음 방정식의 초기값 문제를 풀어라.

$$y''+y=0, \quad y(0)=3.0, \quad y'(0)=-0.5$$

Step 1 일반해를 구함(Ex.1에 의하여)

일반해 : $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0)=c_1=3.0, \quad y'(0)=c_2=-0.5 \quad (\because\ y'=-c_1\sin x+c_2\cos x)$

( )

2계 제차 선형상미분방정식

- **일반해**(General Solution) : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

  구간 I에서 비례하지 않는 제차방정식의 해 y_1, y_2 와 임의의 상수 c_1, c_2 을 갖는 해이다.

- **특수해**(Particular Solution) : 일반해의 기본형태에서 c_1, c_2 에 특정한 값을 지정하면,

  구간 I 에서 제차방정식의 특수해(particular solution)가 얻어진다.

- **기저**(Basis of Solution) : y_1, y_2 를 구간 I에서의 제차방정식의 기저(Basis) 또는

  기본계(Fundamental System)이라고 함.

- **일차독립**(Linearly Independent) : 구간 I 에서 $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$일 때, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$이

  되면 이 두 함수를 구간 I 에서 일차 독립(Linearly Independent)이라고 한다.

- **일차종속**(Linearly Dependent) : 적어도 하나가 0이 아닌 상수 k_1, k_2에 대하여 식

  $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$ 이 성립한다면, 이 함수들을 일차 종속(Linearly Dependent)이라고

  부른다

2계 제차 선형상미분방정식

- **차수 축소법** (Method of Reduction of Order)

: 한 개의 해를 알고 있을 때 1계의 미분방정식으로부터 y_2 를 구할 수 있다.

제차 선형상미분방정식 : $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$$y=y_2=uy_1 \quad \Rightarrow \quad y'=y_2'=u'y_1+uy_1' \quad \Rightarrow \quad y''=y_2''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$$

$$\Rightarrow \quad (u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+p(u'y_1+uy_1')+quy_1=0$$ (주어진 미분방정식에 대입)

$\Rightarrow$ (   )

$$U=u', \quad U'=u'' \quad \Rightarrow \quad U'+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)U=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{U}=-\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|U|=-2\ln|y_1|-\int p\,dx$$ (변수분리형)

$\Rightarrow$ (   )

2계 제차 선형상미분방정식

- Ex. 7 다음 상미분방정식의 해의 기저를 구하라.

$$\left(x^2 - x\right)y'' - xy' + y = 0$$

첫 번째 해 : $y_1 = x$

차수축소법 적용

$$p = -\frac{x}{x^2 - x} = -\frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int p dx} = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x-1} dx} = \frac{1}{x^2} e^{\ln|x-1|} = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = y_1 \int U dx = x \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} dx = x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) = x\ln|x| + 1$$

( )

상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식

- 상수계수를 갖는 2계 제차 선형상미분방정식 : $y''+ay'+by=0$
- 특성방정식 (Characteristic Equation) : $\lambda^2+a\lambda+b=0$
- 일반해

특성방정식 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 에서

- 경우 1 $a^2-4b>0$ 이면 서로 다른 두 실근 $\lambda_1,\ \lambda_2 \Rightarrow$ 일반해 : $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$
- 경우 2 $a^2-4b=0$ 이면 ( )
- 경우 3 $a^2-4b<0$ 이면 공액복소근 $\lambda = -a/2 \pm i\omega$

( )

상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식

- Ex. 2 다음의 초기값 문제 $y''+y'-2y=0,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-5$를 풀어라.

Step 1 일반해

$$\lambda^2+\lambda-2=0\ (\text{특성방정식}) \Rightarrow \lambda=1 \text{ or } -2 \Rightarrow \therefore\ y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$$

Step 2 특수해

$$y'=c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}$$

( )

- Ex. 4 다음의 초기값 문제 $y''+y'+0.25y=0,\quad y(0)=3.0,\quad y'(0)=-3.5$를 풀어라

Step 1 일반해

( )

Step 2 특수해

$$y'=c_2e^{-0.5x}-0.5(c_1+c_2x)e^{-0.5x}$$

$$\Rightarrow\quad y(0)=c_1=3.0,\quad y'(0)=c_2-0.5c_1=-3.5 \quad\Rightarrow\quad c_1=3,\quad c_2=-2$$

( )

상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식

- Ex. 5 다음의 초기값 문제를 풀어라.

$$y''+0.4y'+9.04y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3$$

Step 1 일반해

$$(\qquad\qquad)$$

Step 2 특수해

$$y'=-0.2e^{-0.2x}\left(A\cos 3x+B\sin 3x\right)+e^{-0.2x}\left(-3A\sin 3x+3B\cos 3x\right)$$

$$\Rightarrow\quad y(0)=A=0,\quad y'(0)=-0.2A+3B=3\quad\Rightarrow\quad A=0,\quad B=1$$

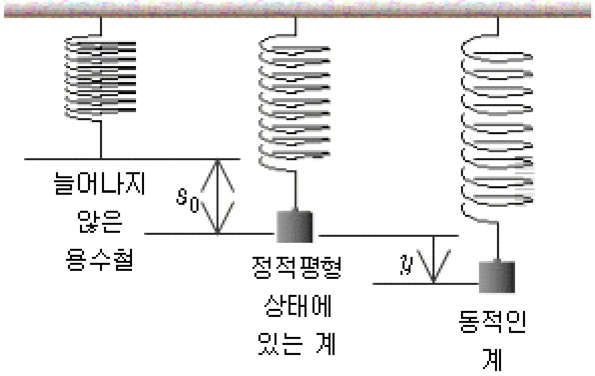
$$(\qquad\qquad)$$

❖ Euler 공식 : $e^{it}=\cos t+i\sin t$

모델화 : 자유진동(질량–용수철 시스템)

- 기초적인 역학계인 용수철에 매달린 질량의 운동에 대해 논의한다.
- 계의 모형화(수식화) 및 해를 구하고 운동의 유형에 대해 논의한다.

● 비감쇠 시스템



역학적 질량 – 용수철 시스템

● 물리적 법칙

- Newton의 제 2법칙 : 질량 ×가속도 = 힘
- Hook의 법칙 : 용수철에 작용하는 힘은 용수철의 길이의 변화에 비례한다

모델화 : 자유진동(질량–용수철 시스템)

- 모델화
- 정적 평형 상태에 있는 시스템

$F_0 = -ks_0$ $(k:$ 용수철 상수$)$

물체의 무게 : $W = mg$

$$F_0 + W = -ks_0 + mg = 0$$

- 동적인 시스템

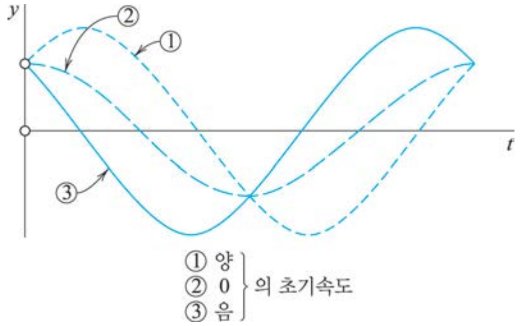
복원력 : $F_1 = -ky$ (Hook의 법칙)

$my'' = F_1$ (Newton의 제 2법칙)

$$my'' + ky = 0$$

조화진동 :

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta), \quad \omega_0^{\ 2} = \frac{k}{m}$$



Euler-Cauchy Equations (오일러－코시 방정식)

- **오일러－코시 방정식**(Euler-Cauchy Equations) : $x^2 y'' + axy' + by = 0$
- 보조방정식 : $m^2 + (a-1)m + b = 0$
- 일반해

  보조방정식 $m^2 + (a-1)m + b = 0$ 에서

- **경우 1** 서로 다른 두 실근 $m_1, \ m_2 \ \Rightarrow$ 일반해 : $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$
- **경우 2** 이중근 $m = (1-a)/2 \ \Rightarrow$ 일반해 : $y = (c_1 + c_2 \ln x) x^m, \quad m = \frac{1}{2}(1-a)$
- **경우 3** (   )

오일러-코시 방정식

- Ex. 1 오일러-코시 방정식 $x^2y''+1.5xy'-0.5y=0$을 풀어라

$$m^2+0.5m-0.5=0\text{(보조방정식)} \Rightarrow m=0.5 \text{ or } -1 \Rightarrow \therefore\ y=c_1x^{0.5}+c_2x^{-1}$$

- Ex. 2 오일러-코시 방정식 $x^2y''-5xy'+9y=0$을 풀어라

$$m^2-6m+9=0\text{(보조방정식)} \Rightarrow m=3 \Rightarrow \therefore\ y=\left(c_1+c_2\ln x\right)x^3$$

- Ex. 3 오일러-코시 방정식 $x^2y''+0.6xy'+16.04y=0$을 풀어라

(   )

비제차 상미분방정식

- **비제차 선형상미분방정식** : $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad r(x) \neq 0$
- 제차방정식과 비제차방정식의 해 사이의 관계
  - 어떤 열린구간 I 에서 비제차방정식의 두 해의 차는 구간 I 에서 제차방정식의 해이다.
  - 구간 I 에서의 비제차방정식의 해와 구간 I 에서의 제차방정식의 해의 합은 구간 I 에서 비제차방정식의 해이다.
- **일반해** : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

여기서 $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ 는 구간 I 에서의 제차 상미분방정식의 일반해이고 y_p는 구간 I 에서의 임의의 상수를 포함하지 않는 비제차방정식의 어떤 해이다.

비제차 상미분방정식

- 미정계수법 (Method of Undetermined Coefficients)
- 표 2.1 미정계수방법

$r(x)$ 의 항	y_p 에 대한 선택
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x$ $k\sin\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$ke^{\alpha x}\cos\omega x$ $ke^{\alpha x}\sin\omega x$	$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$

비제차 상미분방정식

● 미정계수법에 대한 선택규칙

- 기본규칙(Basic Rule) : 만약 비제차방정식에서 $r(x)$ 가 미정계수법의 열에 있는 함수 중의 하나라면, 대응하는 함수 y_p 를 선택하고, y_p 와 그 도함수를 비제차 방정식에 도입하므로써 결정한다.
- 변형규칙(Modification Rule) : 만약 y_p 로 선택된 항이 비제차방정식에 대응하는 제차방정식의 해가 된다면, 선택된 y_p 에 x(또는 만약 이해가 제차 방정식의 특성방정식의 이중근에 해당한다면 x^2)를 곱한다.
- 합규칙(Sum Rule) : 만약 $r(x)$ 가 첫 번째 열에 있는 함수들의 합이라면, 두 번째 열의 대응하는 줄에 있는 함수들의 합으로 y_p 를 선택한다.

비제차 상미분방정식

- Ex. 1 다음의 초기값 문제를 풀어라.

$$y''+y = 0.001x^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.5$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해 : $y = A\cos x + B\sin x$

Step 2 비제차 상미분방정식의 특수해

$$r(x) = 0.001x^2 \quad \Rightarrow \quad y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 0.001, \quad K_1 = 0, \quad K_0 = -0.002$$

( )

Step 3 초기조건 적용

( )

비제차 상미분방정식

- Ex. 2 다음의 초기값 문제를 풀어라.

$$y'' + 3y' + 2.25y = -10e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해 : $y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-1.5x}$

Step 2 비제차 상미분방정식의 특수해

$$r(x) = -10e^{-1.5x} \quad \Rightarrow \quad y_p = Cx^2 e^{-1.5x} \quad \Rightarrow \quad C = -5$$

( )

Step 3 초기조건 적용

$$y(0) = c_1 = 1, \quad y'(0) = c_2 - 1.5c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore y = (1 + 1.5x)e^{-1.5x} - 5x^2 e^{-1.5x}$$

비제차 상미분방정식

- Ex. 3 다음의 초기값 문제를 풀어라.

$$y''+2y'+0.75y=2\cos x-0.25\sin x+0.09x,\quad y(0)=2.78,\quad y'(0)=-0.43$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해 : $y_h=c_1e^{-x/2}+c_2e^{-3x/2}$

Step 2 비제차 상미분방정식의 특수해

$$r_1(x)=2\cos x-0.25\sin x \quad\Rightarrow\quad y_{p1}=K\cos x+M\sin x \quad\Rightarrow\quad K=0,\quad M=1$$

$$r_2(x)=0.09x \quad\Rightarrow\quad y_{p2}=K_1x+K_0 \quad\Rightarrow\quad K_1=0.12,\quad K_0=-0.32$$

$$\Rightarrow\quad y_{p1}=\sin x,\quad y_{p2}=0.12x-0.32$$

( )

Step 3 초기조건 적용

$$y(0)=c_1+c_2-0.32=2.78,\quad y'(0)=-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}c_2+1+0.12=-0.4$$

( )