Linear Algebra : Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

- Linear system (선형연립방정식)은 전기회로, 기계 구조물, 경계모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남

- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, ( ) 이용

  - **Ex.1**

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 6x_1 \qquad - 2x_3 &= 20 \\ 5x_1 - 8x_2 \quad + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Coefficient matrix : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 0 & -2 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

Augmented matrix : $\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & 20 \\ 5 & -8 & 1 & 10 \end{array}\right]$

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

- **Matrix(행렬)** : 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - Entry(**원소**) 또는 Element(**요소**): matrix에 배열되는 수(혹은 함수)
  - Row(**행**) : 수평선
  - Column(**열**) : 수직선

$$
\mathbf{A} = \left[a_{jk} \right] = \begin{array}{c} \text{row} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \text{column} \end{array} : m \times n \text{ matrix}
$$

- 일반적인 표기법과 개념
  - Matrix는 굵은 대문자로 표기
  - 첫 번째 아래 첨자 j는 Row
  - 두 번째 아래 첨자 k는 Column
  - a_{jk} : j 행, k 열의 Element

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

- **Square Matrix (정방행렬)**
  - $m=n$ 이라면 **A**는 정사각형 모양이다
  - Square Matrix에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 matrix **A** 의 Principal Diagonal(주대각선)이라고 한다
  - (   ) $\mathrm{Trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Principal diagonal

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Vector** : 한 개의 row나 column으로 구성된 행렬
  - Row Vector (**행벡터**) : 하나의 행으로 구성
  - Column Vector (**열벡터**) : 하나의 열로 구성
  - Vector는 굵은 소문자로 표기

$$\mathbf{a} = [a_1, \quad a_2, \quad \cdots \quad a_n]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

7.2 Matrix Multiplication

- **Matrix Multiplication (행렬과 행렬의 곱)**

: $m \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 열수 n과 $r \times p$ matrix $\mathbf{B} = [b_{jk}]$의 행수 r가 서로 같아야 정의되며 $c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$ matrix로 정의된다.

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ [m \times n] & [r \times p] & = & [m \times p] \\ & n = r & & \end{array}$$

❖ **AB**는 정의되지만 **BA**는 정의되지 않을 수 있다

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rp} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{r1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{r2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{rp} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{r1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{r2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots + a_{2n}b_{rp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{r1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mn}b_{r2} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{rp} \end{bmatrix}$$

7.2 Matrix Multiplication

- **Matrix Multiplication은 Not Commutative (비가환적)이다.** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

  - **Ex.4:** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 100 & 100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1) \\ 100\cdot(-1)+100\cdot 1 & 100\cdot 1+100\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 100 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1+1\cdot 100 & (-1)\cdot 1+1\cdot 100 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 100 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & 99 \\ -99 & -99 \end{bmatrix}$$

- ( )

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad (\text{결합법칙}\,(\text{Associative Low}))$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \qquad (\text{분배법칙}\,(\text{Distrivutive Low}))$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB} \qquad (\text{분배법칙}\,(\text{Distrivutive Low}))$$

7.2 Matrix Multiplication

- ( )

: 열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 matrix 혹은 vector.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk} \right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[a_{kj} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ Square Matrix에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치된 원소들을 서로 바꾼 것이다.

- **Ex.7: Transposition of Matrices and Vectors**

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & 5 \\ 1 & -9 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

7.2 Matrix Multiplication

- Diagonal Matrix (**대각행렬**)

  : 주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 square matrix

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  - Scalar Matrix (**스칼라 행렬**) : 주대각선 원소들이 모두 같은 diagonal matrix
  - Unit 또는 Identity Matrix (**단위행렬**) : 주대각선 원소들이 모두 1인 diagonal matrix

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

- **Row-Equivalent (행 동치)**

  : 선형시스템 S_1이 선형시스템 S_2에 유한번의 Elementary Row Operation (기본 행연산)을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1을 S_2의 **Row-Equivalent (행 동치)**라 한다.

  ❖ Column Operation 아님!

- **Row-Equivalent Systems (행 동치 연립방정식)**

  : 행동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다.

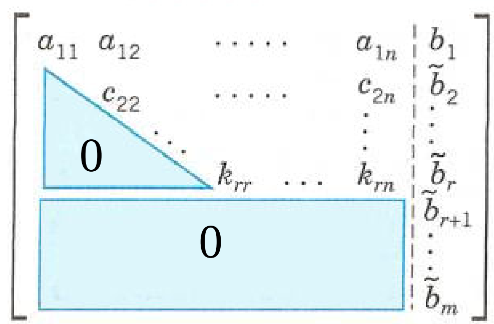
- **Gauss 소거법** : 연립방정식의 세가지 경우

  - 무한히 많은 해가 존재하는 경우(미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
  - 유일한 해가 존재하는 경우
  - 해가 존재하지 않는 경우(연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

- **Row Echelon Form (행사다리꼴)과 행 사다리꼴로부터의 정보**
  - (   )

    : Gauss 소거법의 마지막 단계에서 보는 계수행렬과 첨가행렬의 형태와 이에 대응하는 연립방정식



  - 3가지 가능한 경우:
    - 정확하게 하나의 해가 존재한다. : $r = n$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$이 모두 0이다. (Ex.2)
    - 무한히 많은 해가 존재한다. : $r < m$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ 이 모두 0이다. (Ex.3)
    - 해가 없다. : $r < m$ 이고 $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$중 하나라도 0이이 아니다. (Ex.4)

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

Linear Independence and Dependence of Vector (벡터의 일차 독립과 종속성)

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라},\ \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- Linearly Independent (**일차 독립**) : 모든 $c_j = 0$ 일 때만 위 식이 만족
- Linearly Dependent (**일차 종속**) : 어떤 $c_j \neq 0$ 에서 위 식이 만족

Ex.1: linear Independence and Dependence

$$\mathbf{a}_{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{a}_{(2)} = \begin{bmatrix} -6 & 42 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{a}_{(3)} = \begin{bmatrix} 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$6\mathbf{a}_{(1)} - \frac{1}{2}\mathbf{a}_{(2)} - \mathbf{a}_{(3)} = \mathbf{0}$$

$\therefore$ Linearly dependent

$\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{a}_{(2)}$ 는 linearly independent

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

- **Rank (행렬의 계수) :** 행렬에서 일차독립인 Row Vector의 최대수이며 Rank(A)라 표시

  - **Row-Equivalent (행동치)인 행렬**

    행동치인 행렬들은 같은 Rank를 갖는다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  - **일차종속성과 일차독립성**

    각각 n개의 성분을 갖는 m개의 벡터들은 이 벡터들을 Row Vector 로 취하여 구성된 행렬의 Rank가 m이면 일차독립이고, 그 Rank가 m보다 작으면 일차종속이다.

  - **Column Vector에 의한 Rank**

    행렬의 Rank는 행렬의 일차독립인 Column Vector의 최대수와 같다.

    $\Rightarrow$ 행렬과 행렬의 Transposition (전치)은 같은 Rank를 갖는다. $\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rank}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$

  - **벡터의 일차종속**

    $n(< m)$ 개의 성분을 갖는 m개의 벡터들은 항상 일차종속이다.

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

- **Vector Space (벡터공간)**

  : 공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 벡터에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \qquad c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \qquad (c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \qquad c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

- **Dimension (차원)**: 벡터공간내의 일차독립인 ( )

- **Basis (기저)**

  : 벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며 기저가 되는 벡터의 수는 Dimension(차원)과 같다.

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

- **$\mathbf{R}^n$ Vector Space**

  n개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간 $\mathbf{R}^n$의 Dimension (차원)은 n이다.

  - **Row Space (행공간)** : matrix의 행벡터들의 Span (생성공간)
  - **Column Space (열공간)** : matrix의 열벡터들의 Span (생성공간)

- **행공간과 열공간**

  - 행렬의 행공간과 열공간은 Dimension이 같고, 행렬의 Rank와도 동일하다.
  - Null Space (**영공간**) : $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$의 solution vector로 구성된 vector space
  - Nullity (**퇴화차수**) : Null Space (영공간)의 Dimension (차원)

( )

Nullity= 일차종속인 열벡터의 수

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(1)} & \mathbf{a}_{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라}, \ \mathbf{a}: \text{열벡터})$$

7.6 For Reference : Second- and Third-Order Determinants

- **Determinant: 미지수의 개수와 연립방정식의 개수가 같을 때 해를 구하는 방법에 사용됨.**

- **Determinant of Second Order (2차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Linear Systems of Two Equations (선형연립방정식)**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned}$$

❖ 해가 없는 연립방정식의 경우: D=0 (7.3절 Ex.4)

7.6 For Reference : Second- and Third-Order Determinants

Determinant of Third Order (3차 행렬식)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Linear Systems of Three Equations (선형연립방정식)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

7.7 Determinants. Cramer's Rule

추가적인 n차 행렬식의 성질

- 두 열을 바꾸는 것은 determinant의 값에 -1을 곱하는 것이다.
- 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 determinant의 값에 변화를 주지 않는다.
- 한 열에 상수를 곱하는 것은 determinant의 값에 상수를 곱하는 것이다.
- Transposition (전치)은 determinant의 값에 변화를 주지 않는다.
- **0**행 또는 **0**열은 determinant의 값을 0으로 만든다.
- 같은 비율의 행 또는 열은 determinant의 값을 0으로 만든다.

7.7 Determinants. Cramer's Rule

- **Rank in terms of Determinants (행렬식에 의한 계수)**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$가 Rank $r(\geq 1)$을 갖기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{A}$의 $r \times r$ 부분행렬의 Determinant는 0이 되지 않는 반면, $\mathbf{A}$의 $(r+1)\times(r+1)$또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 Determinant는 0 이 되는 것이다. 특히, $\mathbf{A}$가 정방행렬 $n \times n$일 때, Rank가 n일 필요충분조건은 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ 이다.

- **Cramer의 정리 (행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots,\quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

7.8 Inverse of a Matrix.

( )

Inverse Matrix (역행렬)

$\mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} = [a_{jk}]$의 역행렬 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

- Nonsingular Matrix (**정칙행렬**) : 역행렬을 갖는 경우
- Singular Matrix (**특이행렬**) : 역행렬을 갖지 않는 경우
- 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일하다.

역행렬의 존재성

$\mathbf{A}$가 $n \times n$행렬일 때, 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 Nonsingular Matrix

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 Singular Matrix

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

- **Determinant를 이용하는 역행렬 계산법**

$$n \times n \text{ 행렬 } \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[C_{jk}]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

C_{jk}는 $\det \mathbf{A}$에서 a_{jk}의 여인수 (Page. 41)

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}, \quad M_{jk} : n-1\text{차의 행렬식}$$

(Determinant of the submatrix of **A** obtained from **A** by omitting the *j*th row and *k*th column)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{21}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{21}} + a_{31}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{M_{31}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{의 역행렬은}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations

- **Inner Product (내적) :** $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$

- **Real Inner Product Space (실내적공간) :** 다음을 만족하는 Real Vector Space

  1. 선형성 $(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a},\mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b},\mathbf{c})$
  2. 대칭성 $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$
  3. 양의정치성 $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \ge 0,$
     $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$일 필요충분조건은 $\mathbf{a} = 0$

- Orthogonal (직교) : 내적이 영인 두 벡터
- 벡터의 길이 또는 Norm : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$
- Unit Vector (단위벡터) : 길이가 1인 벡터

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations

- 기본부등식
  - Cauchy-Schwarz 부등식 : $|(\mathbf{a},\mathbf{b})| \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$
  - 삼각부등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
  - 평행사변형 등식 : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2\right)$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$$

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations

- ( )

• **X**에서 **Y**로의 mapping(사상) 또는 transformation(변환), operator(연산자)

: 공간 **X**의 벡터 ***x***에 대하여 공간 **Y**의 유일한 벡터 ***y***를 대응

• *F* : linear aping (선형사상) 또는 linear transformation (일차변환)

: **X** 의 임의의 벡터 ***v***, ***x*** 와 임의의 스칼라 *c*에 대하여 다음의 식을 만족

$$* \quad F(\mathbf{v}+\mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x})$$
$$* \quad F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$$

- **$\mathbf{R}^n$ 공간에서 $\mathbf{R}^m$ 공간으로의 Linear Transformation : y=Ax A=[a_{jk}]** *m* x *n* matrix

  • Linear transformation은 선형이다. : **A(u+x)=Au+Ax, A(*c*x)= *c*Ax**

  • Linear transformation *F* 는 $m \times n$ 행렬 **A**에 의해 주어진다.