Higher Order Linear ODEs

- 2계 선형상미분방정식에 대한 개념과 방법을 고계 선형 상미분방정식으로 확장

Homogeneous Linear ODEs)

- n계 상미분방정식 : $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$
- n계 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$
- 표준형(Standard Form) : $y^{(n)}$을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - 제차(Homogeneous) : $r(x) = 0$
  - 비제차(Nonhomogeneous) : $r(x) \neq 0$

Homogeneous Linear ODEs

- General Solution : $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$
- Basis of Solution : $y_1(x), \cdots, y_n(x)$
- Particular Solution : n개의 상수 $c_1, \cdots, c_n$ 에 특정한 값을 부여하면,

  구간 I에서 제차방정식의 특수해(particular solution)를 얻는다.

- IVP : n initial conditions

x_0

Homogeneous Linear ODEs

● Linearly Independent

: $k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$ 일 때 , n개의 함수 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 에 대해 이들 함수가 정의된 어떤 구간에서 방정식이 모두 $k_1 = \cdots = k_n = 0$ 이 됨을 의미

● Linearly Dependent

: 방정식 $k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$ 이 구간에서 적어도 하나의 0이 아닌 상수 $k_1, \cdots, k_n$ 에 대하여도 성립함

● Wronskian 또는 Wronski 행렬식

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Homogeneous Linear ODEs

- 일차독립 (Linearly Independent)

: $k_1y_1(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$ 일 때 , n개의 함수 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 에 대해 이들

(   )

- 일차종속 (Linearly Dependent)

: 방정식 $k_1y_1(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$ 이 구간에서 적어도 하나의 0이 아닌

(   )

Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients

- 상수계수를 갖는 n계 제차 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$
- 특성방정식 : $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ (characteristic equation)
- 일반해
  - 특성방정식이 서로 다른 실근 : $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 이 서로 다른 것 $\Rightarrow$ $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; \cdots, \; y_n = e^{\lambda_n x}$
  - 특성방정식이 단순 복소근

    : 공액쌍($\lambda = \gamma \pm i\omega$)으로 나타남. $\Rightarrow$ $y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x, \; y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$
  - 특성방정식이 다중 실근을 가질 때

    : λ 가 m차 실근이면, $\Rightarrow$ $e^{\lambda x}, \; xe^{\lambda x}, \; x^2 e^{\lambda x}, \cdots, \; x^{m-1}e^{\lambda x}$
  - 특성방정식이 다중 복소근 : $\lambda = \gamma \pm i\omega$ 이 복소이중근이면,

    ( )

Nonhomogeneous Linear ODEs

- n계 비제차 선형 상미분방정식 : $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \quad r(x) \neq 0$
- 일반해 : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

여기서 $y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$는 구간 I 에서의 제차 상미분방정식의 일반해이고 y_p는

( )

- 특수해 결정
  - 미정계수법
  - 매개변수변환법

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)dx + \cdots + y_n(x)\int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x)dx$$

( )

Nonhomogeneous Linear ODEs

- Ex. 2 다음 비제차 오일러−코시 방정식을 풀어라.

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해

보조방정식 : $m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1,2,3$

일반해 : $y_h = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

Step 2 매개변수변환법에 적용되는 행렬식

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

Step 3 ( )

( )

( )