벡터 미분법(Vector Calculus)
기울기, 발산, 회전 (Gradient, Divergence, Curl)

- 벡터미분학은 고체역학, 유체의 흐름, 열전도, 정전기학 등에서 유용한 도구.
- 벡터함수와 벡터장이 항공기, 레이저 발생기, 열역학 시스템, 또는 로봇과 같은 시스템의 기본

외적 (Outer Product)

● 스칼라 삼중적

세 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3],\ \mathbf{c}=[c_1,\ c_2,\ c_3]$의 스칼라 삼중적(Scalar Triple Product)

$$:\quad (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

● 삼중적의 성질과 응용

- 내적연산과 외적연산을 서로 바꾸어도 불변이다.

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$$

- **기하학적 해석** (Geometric Interpretation)

  절대값 $|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|$는 벡터 $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ 에 의하여 결정되는 평행육면체의 체적이다.

- **일차독립성** (Linear Independence)

  R^3공간상의 세 벡터가 일차독립일 필요충분조건은 이 벡터들의 스칼라 삼중적이 영이 아닌 것이다.

벡터함수와 스칼라함수, 장.
벡터 연산 : 도함수

- 임의의 점 P에서의 벡터함수(Vector Function) : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)]$
- 임의의 점 P에서의 스칼라함수 (Scalar Function) : $f = f(P)$
- 함수의 정의역 ⇒ 공간내의 영역: 3차원 공간, 곡면, 곡선
- **벡터장**(Vector Field) ⇒ 주어진 영역에서의 벡터함수: 곡면, 곡선
- **스칼라장**(Scalar Field) ⇒ 주어진 영역에서의 스칼라함수: 온도장, 기압장
- 벡터함수와 스칼라함수의 기호 표기

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = [v_1(x,\ y,\ z),\ v_2(x,\ y,\ z),\ v_3(x,\ y,\ z)]$$

벡터함수와 스칼라함수, 장.
벡터 연산 : 도함수

● 벡터함수의 도함수

벡터함수 $\mathbf{v}(t)$가 t 에서미분가능(Differentiable) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ 가 수렴

$\mathbf{v}'(t)=[v_1'(t),\ v_2'(t),\ v_3'(t)]$: $\mathbf{v}(t)=[v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$의 도함수

● 벡터미분공식

1. $(c\mathbf{v})'=c\mathbf{v}'$ $\quad$ (c는 상수)
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})'=\mathbf{u}'+\mathbf{v}'$
3. $(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})'=\mathbf{u}'\bullet\mathbf{v}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}'$
4. $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'=\mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}'$
5. $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})'=(\mathbf{u}'\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})+(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}'\ \ \mathbf{w})+(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}')$

●

$$\mathbf{v}=[v_1,\ v_2,\ v_3]=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_l}=\frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i}+\frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j}+\frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k},\qquad \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t_l\partial t_m}=\frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l\partial t_m}\mathbf{k}$$

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

- **미분기하학**(Differential Geometry) : 공간곡선이나 곡면을 연구하는 학문

  상대성이론, 항공, 지리학, 측지학, 기존 공학설계 및 컴퓨터를 이용한 설계, 역학 등의 분야에서 중요한 역할을 한다.

- **매개변수표현법**(Parametric Representation)

  공간에서 움직이는 물체의 경로인 곡선을 표현

  $$: \mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

  $\mathbf{r}'(t)$: 공간곡선 상의임의의점에서의

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

곡선의 접선

- 곡선 C 위의 한 점 P에서의 접선(Tangent line)

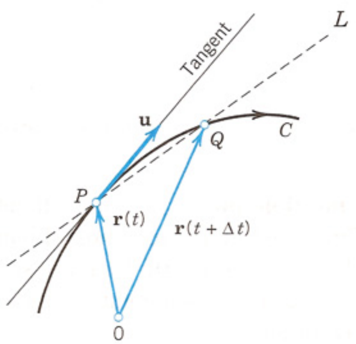
  : 점 P에 근접한 곡선 C 상의 점 Q에 대해 P, Q를 지나는 직선 L의 극한

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)\right]$$

- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t)$: 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터

  $\Rightarrow \quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'$: 곡선 C의 단위 접선 벡터

- 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터 방정식 : $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$



< Tangent to a curve >

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

- 곡선의 길이

$$C\text{의 길이}:\ l=\int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,dt \quad \left(\mathbf{r}'=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$

- 곡선에서의 호의 길이

$$\text{호의 길이}:\ s(t)=\int_a^t \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,d\tilde{t} \quad \left(\mathbf{r}'=\frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}}\right)$$

$$*\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left|\mathbf{r}'(t)\right|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad ds^2=d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r}=dx^2+dy^2+dz^2$$

* 매개변수로서의 호의 길이

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}' \xrightarrow[\text{변수 } t \text{ 대신 } s\text{를 사용}]{} \mathbf{u}(s)=\mathbf{r}'(s)\ :\ \text{단위벡터}$$

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

역학에서의 곡선. 속도와 가속도

- $\mathbf{r}(t)$: 움직이는 물체의 경로 C
- $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$: 곡선 C의 접선벡터인 속도벡터(Velocity vector)
- $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$: 속도의 도함수인 가속도벡터(Acceleration)

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

- 접선가속도와 법선가속도 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{tan}} + \mathbf{a}_{\text{norm}}$

- 접선가속도 벡터 (**Tangential Acceleration Vector**) : 경로와 접선방향 $\mathbf{a}_{\text{tan}}$
- 법선가속도 벡터 (**Normal Acceleration Vector**) : 경로와 수직방향 $\mathbf{a}_{\text{norm}}$

$$* \ \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}, \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{u}(s)\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$\frac{d\mathbf{u}}{ds}$는 $\mathbf{u}(s)$에 수직 $\Rightarrow$ $\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$: 법선가속도벡터, $\mathbf{u}(s)\frac{d^2 s}{dt^2}$: 접선가속도벡터

$$* \ \mathbf{a}_{\text{tan}} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}\mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_{\text{norm}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{tan}}$$

곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림

- $\mathbf{r}(s)$로 표현되는 곡선 C의 점 P에서의 곡률(Curvature) $\kappa(s)$

  : 점 P에서의 단위접선벡터 $\mathbf{u}(s)$의 변화율 $\kappa(s)=\left|\mathbf{u}'(s)\right|=\left|\mathbf{r}''(s)\right| \quad \left({}'= d/ds\right)$

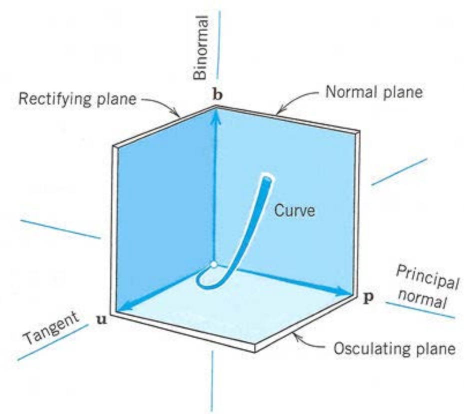
- C상의 점 P에서의 비틀림(Torsion) $\tau(s)$

  : 접촉평면(Osculating Plane) (벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{u}'$에 의해 구성된 평면)의 C 상의 점 P에서의 변화율. 즉, 점 P에서 곡선 C가 평면에서의 이탈정도.

$$\left|\tau(s)\right|=\left|\mathbf{b}'(s)\right|, \quad \tau(s)=-\mathbf{p}(s)\bullet\mathbf{b}'(s)$$

$\mathbf{p}=\left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'$: 단위주법선벡터(Unit Principal Normal Vector)

$\mathbf{b}=\mathbf{u}\times\left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'=\mathbf{u}\times\mathbf{p}\mathbf{b}'$: 단위종법선벡터(Unit Binormal Vector)



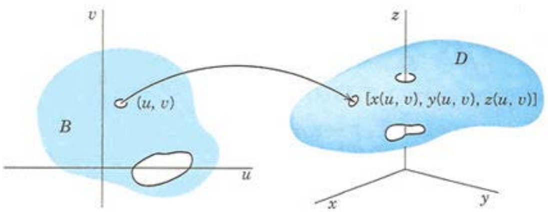
< Trihedron. Unit vectors u, p, b and places >

미적분학의 복습 : 다변수함수

- 연쇄법칙 (Chain Rule)

$$w = f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



< Notations in Theorem 1 >

미적분학의 복습 : 다변수함수

- **평균값의 정리(Mean Value Theorem)**

함수 $f\,(x, y, z)$가 xyz공간 내의 정의역 D에서 연속이고, 연속인 1차 편도함수를 갖는다.

두 점 $P_0:(x_0, y_0, z_0)$, $P:(x_0+h, y_0+k, z_0+l)$이 D에 속해 있고, 이 두 점을 연결한 선분

P_0P 또한 D에 속해 있다. 그러면 선분 P_0P상에 임의의 점에서 편미분 값들은

$$f\left(x_0+h, y_0+k, z_0+l\right)-f\left(x_0, y_0, z_0\right)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}$$

을 만족한다.

스칼라장의 기울기. 방향 도함수

- 기울기(Gradient)

: $f(x, y, z)$의 x, y, z 각 방향으로의 길이(거리)에 대한 변화율(기울기)의 벡터 합

$$\text{grad } f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

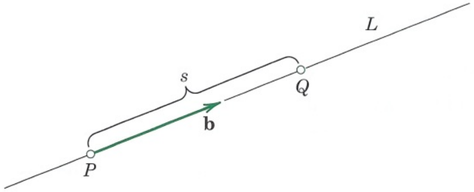
$$\nabla =$$

스칼라장의 기울기. 방향 도함수

- **방향 도함수** $D_{\mathbf{b}} f = \dfrac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \dfrac{f(Q) - f(P)}{s}$

  : 공간상의 점 P에서의 벡터 $\mathbf{b}$ 방향으로의 함수 $f(x, y, z)$의 방향 도함수

  s는 P와 Q 사이의 거리, Q는 $\mathbf{b}$ 방향으로의 직선 C의 경로



직선 L : $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{b} \quad (|\mathbf{b}| = 1,\ \mathbf{p}_0$는 P의 위치$)$

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \mathbf{b} \bullet \operatorname{grad} f$$

$$* \ D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \bullet \operatorname{grad} f$$

스칼라장의 기울기. 방향 도함수

- 기울기의 특성. 최대증가

$f(P) = f(x, y, z)$: 연속인 1계 편도함수를 갖는 스칼라함수

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f$가 존재. 크기와 방향은 공간에서 좌표계의 선택과는 무관

점 P에서 $\operatorname{grad} f \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f$가 점 P에서 f의 최대증가 방향

- 곡면의 법선 벡터로서의 기울기

$f(x, y, z) = c =$ 상수 $\Rightarrow$ 공간상에서 임의의 곡면 S를 표시

S 상의 점 P에서 $\operatorname{grad} f(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f$ 가 점 P에서의 S의 법선 벡터

스칼라장의 기울기. 방향 도함수

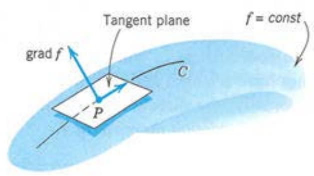
● 곡면의 법선 벡터로서의 기울기

- f 의 등위곡면(Level surface) : $f(x, y, z) = c =$ 상수로 표현된 곡면 S
- 점 P에서 S의 접평면(Tangent plane)

  : S 상의 임의의 점 P에서 P를 지나는 모든 곡선의 접선 벡터들
- P에서 S의 곡면법선(Surface normal) : P에서 S의 접평면에 수직인 직선
- 곡면의 **법선 벡터**(Surface Normal Vector) : 곡면법선과 평행한 벡터

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \text{grad } f \bullet \mathbf{r}' = 0$$

$\Rightarrow$ grad f 는 접평면상의 모든 벡터와 수직이며,
P에서 곡면 S의 법선벡터이다.



< Gradient as surface normal vector >

스칼라장의 기울기. 방향 도함수

● 스칼라장의 기울기인 벡터장(퍼텐셜)

$f(P)$를 $\mathbf{v}(P)$의 퍼텐셜 함수(Portential) : $\mathbf{v}(P) = \text{grad}\, f(P)$

$\mathbf{v}(P)$와 이에 해당되는 벡터장을 보전적(Conservative)이라 한다.

● 인력장. 라플라스 방정식

점 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$와 $P{:}(x,y,z)$에 위치한 두 입자 사이의 인력은(Newton의 만유인력법칙에 의하여)

$$\mathbf{p} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\left[\frac{x-x_0}{r^3}, \frac{y-y_0}{r^3}, \frac{z-z_0}{r^3}\right]$$

로 표현되며, 퍼텐셜은 $f(x, y, z)=c/r$이다. 여기서 $r(>0)$은 두 점 P_0와 P 사이의 거리이다.

따라서 $\mathbf{p} = \text{grad}\, f = \text{grad}\left(c/r\right)$이 성립되며, 여기서 퍼텐셜 f는 다음과 같은 라플라스 방정식을 만족한다. $\nabla^2 f =$

벡터장의 발산

- 발산(Divergence)

  $\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

  $\mathbf{v}$의 발산(Divergence) 또는 $\mathbf{v}$로 정의된 벡터장의 발산 : $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$

- **발산의 불변성**

  $\operatorname{div}\mathbf{v}$ 의 값은 좌표계의 선택에 상관없이 공간내의 $\mathbf{v}$ 상의 점에 따른다.

  x^*, y^*, z^* 에 대응하는 $\mathbf{v}$ 의 성분이 v_1^*, v_2^*, v_3^* 이면 $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \dfrac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$

- $f(x, y, z)$: 두 번 미분 가능한 스칼라 함수

  $$\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) =$$

벡터장의 회전

- **회전**(Curl)

$\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

$\mathbf{v}$의 회전(Curl) 즉, $\mathbf{v}$로 주어진 벡터장의 회전

$$: \operatorname{curl}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

- **회전체와 회전**

강체 회전에 대한 벡터장의 회전은 회전축 방향과 같은 방향을 가지며, 그 크기는 각속력의 두 배가 된다.

벡터장의 회전

- 기울기, 발산, 회전

• **기울기장**(Gradient Field)은 **비회전**(Irrotational)이다. 즉, $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$

• 벡터함수의 회전에 대한 발산도 영벡터가 된다. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$

- **회전의 불변성**

curl $\mathbf{v}$는 벡터이며 방향과 크기는 공간에서 직교 좌표계의 선택과 무관하다.