Series Solutions of Linear ODEs, Special Functions

- 변수계수를 갖는 선형미분 방정식을 풀이하는 표준적인 방법인 멱급수 해법(power series method)을 소개한다
- 멱급수 해법으로 얻을 수 있는 유명한 특수함수 : 베셀 함수(Bessel function), 르장드르 함수(Legendre function)

Power Series Method

- **거듭제곱급수 해법의 개념**

상미분방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$에 적용

- $p(x)$와 $q(x)$ 를 x의 거듭제곱급수로 표현
- 해를 미지의 계수를 갖는 거듭제곱급수 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ 로 가정
  - y와 y 를 항별미분하여 얻은 급수

$$y'=\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$y''=\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-1} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots$$

를 상미분방정식에 대입

- 미지계수 a_m 을 계산

Power Series Method

- **수렴구간**(Convergence Interval), **수렴반지름**(Radius of Convergence)
  - **수렴구간** : 급수가 수렴하는 값들의 구간($|x-x_0|<R$ 의 형태로 나타남)
  - **수렴반지름**(R) : 급수는 $|x-x_0|<R$ 인 모든 x에 대하여 수렴하고,

    $|x-x_0|>R$ 인 모든 x에 대하여 발산할 때

$$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}} \quad \text{또는} \quad R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\left|a_{m+1}/a_m\right|}$$

Legendre’s Equation.
Legendre Polynomials Pn(x)

- Legendre의 방정식 : $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m,\ \ y'=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1},\ \ y''=\sum_{m=2}^{\infty}m\left(m-1\right)a_m x^{m-2}$$ 를 대입

$$\Rightarrow\ \left(1-x^2\right)\sum_{m=2}^{\infty}m\left(m-1\right)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}+n\left(n+1\right)\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0$$

$$\Rightarrow\ \sum_{m=2}^{\infty}m\left(m-1\right)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty}m\left(m-1\right)a_m x^m-\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}n\left(n+1\right)a_m x^m=0$$

첫 번째 급수는 $m-2=s$라 놓고,

나머지 세 개의 급수들은 단순히 m 대신에 s로 치환

$$\Rightarrow\ \sum_{s=0}^{\infty}\left(s+2\right)\left(s+1\right)a_{s+2}x^s-\sum_{s=2}^{\infty}s\left(s-1\right)a_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty}sa_s x^s+\sum_{s=0}^{\infty}n\left(n+1\right)a_s x^s=0$$

Legendre’ s Equation. Legendre Polynomials Pn(x)

x^0 의 계수 : $2\cdot 1a_2 + n(n+1)a_0 = 0$

x^1 의 계수 : $3\cdot 2a_3 + [-2+n(n+1)]a_1 = 0$

일반적으로 $(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1)-2s+n(n+1)]a_s = 0$

$$\therefore \quad a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_2 \qquad (s = 0,1,\cdots)$$

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 \qquad a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

일반해 $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots$$

Extended Power Series Method: Frobenius Method

- Frobenius 해법 (Frobenius Method)

함수 $b(x)$와 $c(x)$가 x=0에서 해석적일 경우 상미분 방정식 $y''+\frac{b(x)}{x}y'+\frac{c(x)}{x^2}y=0$ 은

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m = x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right) \qquad \left(a_0\neq 0\right)$$

같은 형태의 해를 적어도 하나 갖는다.

Extended Power Series Method: Frobenius Method

- 해의 형태를 나타내는 결정방정식 (Indicial Equation)

$$y''+\frac{b(x)}{x}y'+\frac{c(x)}{x^2}y=0 \xrightarrow{x^2\text{을 곱한다.}} x^2y''+xb(x)y'+c(x)y=0$$

- $b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots,\quad c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$로 표현

- $y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$을 항별미분하면

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r-1}=x^{r-1}\left[ra_0+(r+1)a_1x+(r+2)a_2x^2+\cdots\right]$$

$$y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r-2}=x^{r-2}\left[r(r-1)a_0+(r+1)ra_1x+\cdots\right]\text{을 대입}$$

$$\Rightarrow\quad x^r\left[r(r-1)a_0+\cdots\right]+\left(b_0+b_1x+\cdots\right)x^r\left[ra_0+\cdots\right]+\left(c_0+c_1x+\cdots\right)x^r\left(a_0+a_1x+\cdots\right)=0$$

x^r의 계수 : $\left[r(r-1)+b_0r+c_0\right]a_0=0$

$a_0\neq 0 \quad\Rightarrow\quad r(r-1)+b_0r+c_0=0$ ( )

Extended Power Series Method: Frobenius Method

- Forbenius 해법, 해의 기저. 3가지 경우
- 경우 1. 두 근의 차가 정수가 아닌 서로 다른 근들

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right), \quad y_2(x) = x^{r_2}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots\right)$$

- 경우 2. 이중근

$$y_1(x) = x^{r}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right), \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r}\left(A_1x + A_2x^2 + \cdots\right)$$

- 경우 3. 두 근의 차가 정수인 서로 다른 근들

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right), \quad y_2(x) = ky_1(x)\ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots\right)$$

$$r_1 - r_2 > 0$$

Bessel’s Equation. Bessel Functions Jv(x)

- Bessel 방정식 : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$

Frobenius 해법 적용 : $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}$ 과 그 도함수를 대입

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r+2}-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

$s=0$일 때, $r(r-1)a_0+ra_0-\nu^2a_0=0$

$s=1$일 때, $(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\nu^2a_1=0$

$s=2,\ 3,\ \cdots$일 때, $(s+r)(s+r-1)a_s+(s+r)a_s+a_{s-2}-\nu^2a_s=0$

$\therefore$ 결정방정식 : (   )

Bessel’s Equation. Bessel Functions Jv(x)

- 정수 ν = n에 대한 Bessel 함수 $J_n(x)$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} a_0, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots$$

$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ 으로 선택하면 ∴ (　　　　　　　　　　)

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots$$: n차 제 1종 Bessel 함수

- 임의의 ν ≥0에 대한 Bessel 함수 $J_\nu(x)(\nu > 0)$. 감마함수

감마함수(Gamma Function) : $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt \quad (\nu > 0)$

감마함수의 성질 : $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, \cdots)$

$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ 으로 선택하면 $a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)}, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots$

$$\therefore\ J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)}$$: ν 차 제 1종 Bessel 함수

Bessel Functions Yv(x). General Solution

- **0차 제 2종 Bessel 함수 또는 0차 Neumann 함수**

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]$$

- **ν차 제 2종 Bessel 함수 또는 ν차 Neumann 함수**

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\right]$$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m}-\frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}$$

- **Bessel 방정식의 일반해**

모든 ν값 (그리고 $x>0$) 대한 Bessel 방정식의 일반해 : ( )