벡터 적분법. 적분정리

(Vector Integral Calculus. Integral Theorems)

- 적분을 곡선(선적분), 면(면적분), 입체에 대한 적분으로 확장
  : 고체역학, 유체흐름, 열역학에서 공학적 기본 응용으로 활용
- 적분의 변환은 계산을 간단히 하거나, 유용한 일반적인 공식을 얻기 위해 수행
  예. 퍼텐셜 이론(Potential Theory)
- 적분변환 공식
  : Green의 공식, Gauss 공식, Stokes 공식

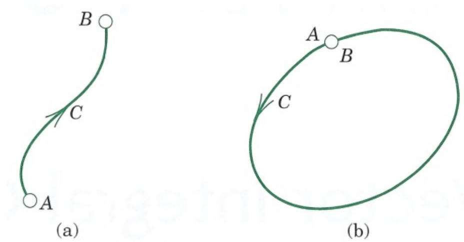
선적분

- **선적분의 개념**: 미적분학에서 공부한 정적분의 간단한 일반화
- **선적분(Line Integral) 또는 곡선적분(Curve Integral)**

  : 피적분함수(Integrand)를 공간(혹은 평면)내의 곡선을 따라 적분.

- **적분경로(Path of Integration)** : 곡선

$$C : \mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \le t \le b)$$



❖ **일반적인 가정**

  : 선적분의 모든 적분경로를 구분적으로 매끄럽다(Piecewise Smooth)

- 선적분의 정의와 계산

  곡선 $C : \mathbf{r}(t)$에서 벡터함수 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$의 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt$ $\qquad \mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')\, dt$$

선적분의 경로 무관성

경로 무관성

- 공간의 영역 D에서 F_1, F_2, F_3가 연속인 선적분은 만약 $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$가 어떤 함수 f의 기울기이면 영역에서 경로에 무관하다.

$$\mathbf{F} = \text{grad } f \quad \left(F_1 = \frac{\partial f}{\partial x},\ F_2 = \frac{\partial f}{\partial y},\ F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \left(F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \right) = f(B) - f(A)$$

- 영역 D의 모든 닫힌 곡선에서 선적분의 적분값이 0이면, 적분은 영역 D에서 경로 무관하다.
- 미분형식 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ 가 영역 D에서 연속적인 계수함수 F_1, F_2, F_3 를 가지고 완전하면, 선적분은 영역 D에서 경로 무관하다.

완전(Exact)

영역 D의 모든 곳에서 미분 가능한 함수 f가 존재하여 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = df$ 의 관계가 성립

평면에서의 Green의 정리

- **평면에서 Green의 정리(이중적분과 선적분 간의 변화)**

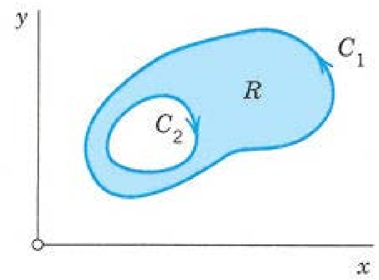
R : xy평면에서의 닫힌 유계영역

C : 유한개의 매끄러운 곡선으로 영역 R의 경계

$F_1(x,y),\ F_2(x,y)$: R을 포함하는 어떤 영역의 모든 점에서 연속이고

연속인 편도함수 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y},\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$를 갖는 함수

$$\Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$



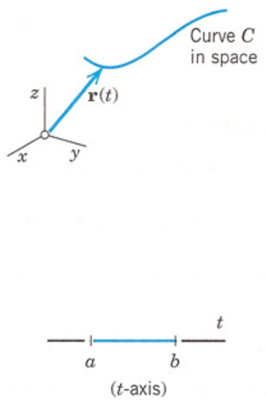
적분의 방향 : C를 따라 진행할 때 R이 좌측에 있는 방향

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2] = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}\, dxdy = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

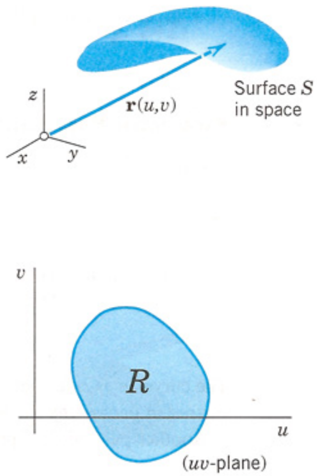
면적분에서의 곡면

- 곡면의 표현식 : $z = f(x, y)$ 또는 $g(x, y, z) = 0$
- 곡면 S의 매개변수 표현식

$$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$
$$= x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$
$$(u,v) \in R$$



< Parametric representation of a curve >



< Parametric representation of a surface >

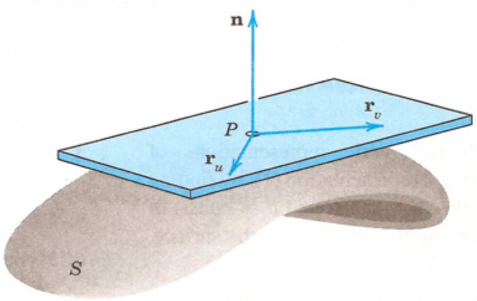
면적분에서의 곡면

● 접평면과 곡면법선

• 접평면 (Tangent Place)

: 곡면의 한 점을 통과하는 모든 곡선의 접선벡터들이 형성하는 곡면

• 법선벡터 (Normal Vector) : 접평면에 수직인 벡터



< Tangent plane and normal vector >

$*$ 곡면 S : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$

$*$ S 상의 곡선 $C : \tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$

$*$ S 상에서 C의 접선벡터 : $\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \dfrac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{r}}{du}u' + \dfrac{d\mathbf{r}}{dv}v'$

P에서 편도함수 $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$는 P에서 S에 접하게 됨

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$는 P에서 S에 접평면 생성 $\Rightarrow$ P 에서 S 에 법선벡터 : $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$

$*$ 법선벡터의 단위벡터 : $\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = \dfrac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$

$*$ S : $g(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \dfrac{1}{|\operatorname{grad} g|}\operatorname{grad} g$

삼중적분. Gauss의 발산정리

- Gauss의 발산정리(삼중적분과 면적분 간의 변환)

T : 닫혀있고 유한한 입체

S : 경계가 구분적으로 매끄러우며 방향을 가지는 곡면으로 T의 표면

F : 연속이며 T를 포함하는 영역에서 연속인 1차 편도함수를 가지는 벡터함수

$$\Rightarrow \quad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dA$$

$\mathbf{F} = [F_1, \ F_2, \ F_3]$이고 S의 외향 법선벡터 $\mathbf{n} = [\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma]$이면

$$\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S \left(F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma \right) dA = \iint_S \left(F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy \right)$$

삼중적분. Gauss의 발산정리

- Ex.1 **발산정리에 의한 면적분의 계산**

다음 적분을 계산하라.

$$I = \iint_S \left(x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy \right)$$

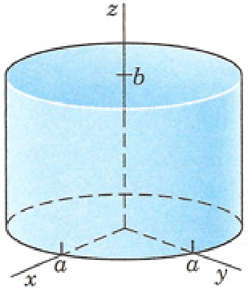
S : 원기둥 $x^2 + y^2 = a^2 \left(0 \le z \le b\right)$와 원판 $z = 0$과 $z = b\left(x^2 + y^2 \le a^2\right)$으로 이루어진 닫힌 표면

$$F_1 = x^3,\ F_2 = x^2 y,\ F_3 = x^2 z \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$$

극좌표$\left(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\right)$ 적용 $\quad \Rightarrow \quad dxdydz = rdrd\theta dz$

$$I = \iiint_T 5x^2 dxdydz = \int_{z=0}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \left(5r^2 \cos^2\theta\right) rdrd\theta dz$$

$$= 5 \int_{z=0}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a^4}{4} \cos^2\theta d\theta dz = 5 \int_{z=0}^{b} \frac{a^4 \pi}{4} dz = \frac{5\pi}{4} a^4 b$$



< Surface *S* in Example 1 >

Stokes의 정리

- **Stokes의 정리(면적분과 선적분 간의 변환)**

S : 공간에서 구분적으로 매끄럽고 방향을 갖는 곡면

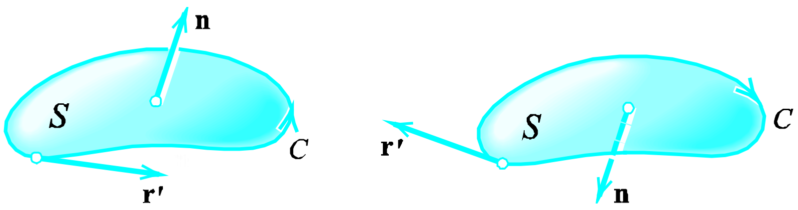
C : S의 경계로 구분적으로 매끄럽고 단순히 닫힌 곡선

$\mathbf{F}$: S를 포함하는 영역에서 연속인 편도함수를 가지는 연속인 벡터함수

$$\Rightarrow \quad \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}'(s)\, ds$$

성분으로 표시하면

$$\Rightarrow \quad \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) N_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) N_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) N_3 \right] du\,dv = \oint_{\bar{C}} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$



Stokes의 정리

- Ex.1 **Stokes의 정리 검증**

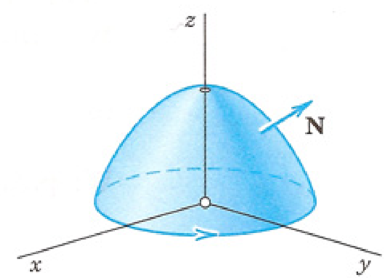
$F=[y,z,x]$와 포물면 $S\ :\ z=f(x,y)=1-\left(x^2+y^2\right),\ z\geq 0$에 대해 검증하다.

Case 1 선적분

$$C\ :\ \mathbf{r}(s)=[\cos s,\ \ \sin s,\ \ 0]\ \ \Rightarrow\ \ \text{단위 접선벡터}:\ \mathbf{r}'(s)=[-\sin s,\ \ \cos s,\ \ 0]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))=[\sin s,\ \ 0,\ \ \cos s]$$

$$\therefore\ \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\bullet\mathbf{r}'(s)ds=\int_0^{2\pi}\left[(\sin s)(-\sin s+0+0)\right]ds=-\pi$$



< Surface S in Example 1 >

Case 2 면적분

$$F_1=y,\ F_2=z,\ F_3=x\ \ \Rightarrow\ \ \operatorname{curl}\mathbf{F}=\operatorname{curl}[F_1,\ \ F_2,\ \ F_3]=\operatorname{curl}[y,\ \ z,\ \ x]=[-1,\ \ -1,\ \ -1]$$

S의 법선벡터 $:\ \mathbf{N}=\operatorname{grad}(z-f(x,y))=[2x,\ \ 2y,\ \ 1]$

$$\Rightarrow\ \ (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}=-2x-2y-1$$

$$\therefore\ \iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}dA=\iint_R(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}dxdy=\iint_R(-2x-2y-1)dxdy$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(-2r(\cos\theta+\sin\theta)-1\right)rdrd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{1}{2}\right)d\theta=0+0-\frac{1}{2}(2\pi)=-\pi$$