Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
—
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Информационная безопасность компьютерных систем»

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1

по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил
студент гр. 23508/4 Е.Г. Проценко

Проверил
профессор С.М. Устинов

Санкт-Петербург
2016

1 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ (ВАРИАНТ 29)

Для функции $f(x) = \frac{1}{1 + 25 * x^2}$ по узлам $x_k = -1 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 20)$ построить полином Лагранжа $L(x)$ 20-й степени и сплайн-функцию S(x). Вычислить значения всех трех функций в точках $y_k = -0.95 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 19)$. Результаты отобразить графически.

Используя программу QUANC8, вычислить два интеграла:

$\int_0^{2.14} (abs(1 - x^2))^m \, dx$, для $m = -1$ и для $m = -0.5$.

2 РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1) Получены точные значения для функции $f(x) = \frac{1}{1 + 25 * x^2}$ по узлам $x_k = -1 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 20)$

```
x[1]:  -1.0   f(x): 0.03846153846
x[2]:  -0.9   f(x): 0.04705882353
x[3]:  -0.8   f(x): 0.05882352941
x[4]:  -0.7   f(x): 0.07547169811
x[5]:  -0.6   f(x): 0.10000000000
x[6]:  -0.5   f(x): 0.13793103448
x[7]:  -0.4   f(x): 0.20000000000
x[8]:  -0.3   f(x): 0.30769230769
x[9]:  -0.2   f(x): 0.50000000000
x[10]:  -0.1   f(x): 0.80000000000
x[11]:  0.0   f(x): 1.00000000000
x[12]:  0.1   f(x): 0.80000000000
x[13]:  0.2   f(x): 0.50000000000
x[14]:  0.3   f(x): 0.30769230769
x[15]:  0.4   f(x): 0.20000000000
x[16]:  0.5   f(x): 0.13793103448
x[17]:  0.6   f(x): 0.10000000000
x[18]:  0.7   f(x): 0.07547169811
x[19]:  0.8   f(x): 0.05882352941
x[20]:  0.9   f(x): 0.04705882353
x[21]:  1.0   f(x): 0.03846153846
```

2) Полином Лагранжа 20-й степени. Вычислены значения функции в точках $y_k = -0.95 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 19)$.

```
Lagr
y[1]:  -0.95   f(y): -39.95244902700
y[2]:  -0.85   f(y): 3.45495779970
y[3]:  -0.75   f(y): -0.44705196054
y[4]:  -0.65   f(y): 0.20242261567
y[5]:  -0.55   f(y): 0.08065999344
y[6]:  -0.45   f(y): 0.17976262990
y[7]:  -0.35   f(y): 0.23844593374
y[8]:  -0.25   f(y): 0.39509305369
y[9]:  -0.15   f(y): 0.63675533592
y[10]:  -0.05   f(y): 0.94249037975
y[11]:  0.05   f(y): 0.94249037975
y[12]:  0.15   f(y): 0.63675533592
y[13]:  0.25   f(y): 0.39509305368
y[14]:  0.35   f(y): 0.23844593374
y[15]:  0.45   f(y): 0.17976262990
y[16]:  0.55   f(y): 0.08065999343
y[17]:  0.65   f(y): 0.20242261567
y[18]:  0.75   f(y): -0.44705196059
y[19]:  0.85   f(y): 3.45495779920
y[20]:  0.95   f(y): -39.95244902600
```

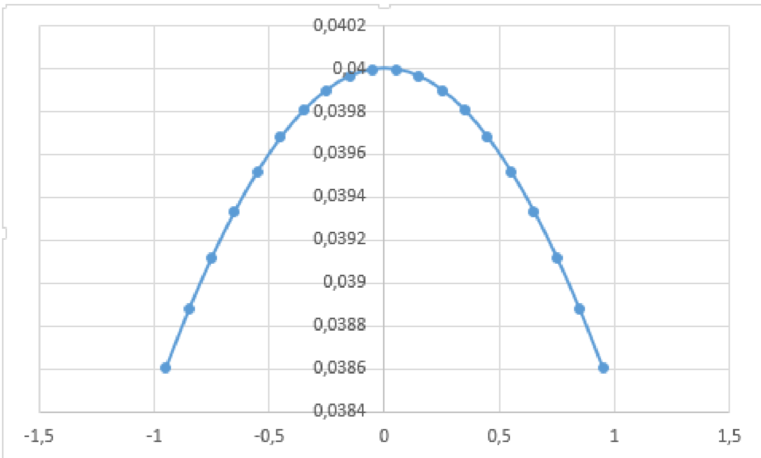
3) Коэффициенты для Spline и построена сплайн-функция. Вычислены значения функции в точках $y_k = -0.95 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 19)$ для нее.

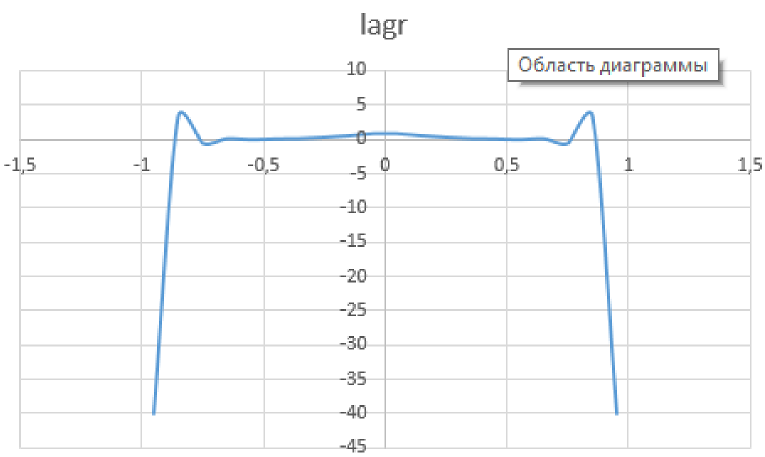
```
Spline
[1]:   B: 0.07562276813   C: 0.07490012541   D: 0.28600700076
[2]:   B: 0.09918300323   C: 0.16070222564   D: 0.23938330249
[3]:   B: 0.13850494744   C: 0.23251721639   D: 0.47250179380
[4]:   B: 0.19918344453   C: 0.37426775453   D: 0.86727988857
[5]:   B: 0.30005539209   C: 0.63445172110   D: 1.58097806240
[6]:   B: 0.47437507819   C: 1.10874513980   D: 3.54400630100
[7]:   B: 0.80244429518   C: 2.17194703010   D: 5.72840787420
[8]:   B: 1.40868593740   C: 3.89046939240   D: 12.53440464200
[9]:   B: 2.56281195520   C: 7.65079078500   D: -32.78910336600
[10]:   B: 3.10929701120   C: -2.18594022470   D: -89.07029887700
[11]:   B: -0.00000000005   C: -28.90702988800   D: 89.07029888000
[12]:   B: -3.10929701120   C: -2.18594022390   D: 32.78910336300
[13]:   B: -2.56281195510   C: 7.65079078480   D: -12.53440464100
[14]:   B: -1.40868593740   C: 3.89046939250   D: -5.72840787480
[15]:   B: -0.80244429517   C: 2.17194703000   D: -3.54400630060
[16]:   B: -0.47437507818   C: 1.10874513980   D: -1.58097806240
[17]:   B: -0.30005539209   C: 0.63445172111   D: -0.86727988871
[18]:   B: -0.19918344453   C: 0.37426775450   D: -0.47250179364
[19]:   B: -0.13850494744   C: 0.23251721640   D: -0.23938330256
[20]:   B: -0.09918300323   C: 0.16070222563   D: -0.28600700077
[21]:   B: -0.07562276813   C: 0.07490012540   D: -0.28600700077

Seval
y[1]:  -0.95   f(y): 0.04246567806
y[2]:  -0.85   f(y): 0.05244965217
y[3]:  -0.75   f(y): 0.06638913255
y[4]:  -0.65   f(y): 0.08647494971
y[5]:  -0.55   f(y): 0.11678652117
y[6]:  -0.45   f(y): 0.16486465203
y[7]:  -0.35   f(y): 0.24626813332
y[8]:  -0.25   f(y): 0.38941957863
y[9]:  -0.15   f(y): 0.64316893680
y[10]:  -0.05   f(y): 0.93886621264
y[11]:  0.05   f(y): 0.93886621264
y[12]:  0.15   f(y): 0.64316893680
y[13]:  0.25   f(y): 0.38941957862
y[14]:  0.35   f(y): 0.24626813332
y[15]:  0.45   f(y): 0.16486465203
y[16]:  0.55   f(y): 0.11678652116
y[17]:  0.65   f(y): 0.08647494971
y[18]:  0.75   f(y): 0.06638913255
y[19]:  0.85   f(y): 0.05244965217
y[20]:  0.95   f(y): 0.04246567806
```

4) Настоящие значения функции в точках $y_k = -0.95 + 0.1k$ $(k = 0, 1, \dots, 19)$.

```
REAL
x[1]:  -0.95   f(x): 0.04244031830
x[2]:  -0.85   f(x): 0.05245901639
x[3]:  -0.75   f(x): 0.06639004149
x[4]:  -0.65   f(x): 0.08648648649
x[5]:  -0.55   f(x): 0.11678832117
x[6]:  -0.45   f(x): 0.16494845361
x[7]:  -0.35   f(x): 0.24615384616
x[8]:  -0.25   f(x): 0.39024390244
x[9]:  -0.15   f(x): 0.64000000000
x[10]:  -0.05   f(x): 0.94117647059
x[11]:  0.05   f(x): 0.94117647058
x[12]:  0.15   f(x): 0.64000000000
x[13]:  0.25   f(x): 0.39024390244
x[14]:  0.35   f(x): 0.24615384615
x[15]:  0.45   f(x): 0.16494845361
x[16]:  0.55   f(x): 0.11678832117
x[17]:  0.65   f(x): 0.08648648649
x[18]:  0.75   f(x): 0.06639004149
x[19]:  0.85   f(x): 0.05245901639
x[20]:  0.95   f(x): 0.04244031830
```

5) Графики исходной функции и сплайн-функции похожи, а график функции Лагранжа сильно отличается на краях отрезка.



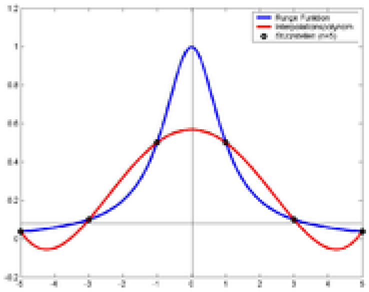


6) По графикам было бы невозможно определить какая функция строит исходную функцию точнее, поэтому для каждой точки бы вычитан модуль отклонения

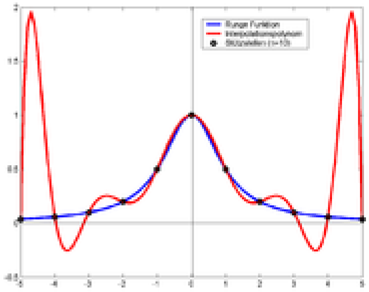
```
abs(REAL[i] - LAGR[i])
x[1]:  -0.95   diff(x): 39.99488934600
x[2]:  -0.85   diff(x): 3.40249878330
x[3]:  -0.75   diff(x): 0.51344200203
x[4]:  -0.65   diff(x): 0.11593612918
x[5]:  -0.55   diff(x): 0.03612832773
x[6]:  -0.45   diff(x): 0.01481417629
x[7]:  -0.35   diff(x): 0.00770791242
x[8]:  -0.25   diff(x): 0.00484915125
x[9]:  -0.15   diff(x): 0.00324466408
x[10]:  -0.05   diff(x): 0.00131390916
x[11]:  0.05   diff(x): 0.00131390916
x[12]:  0.15   diff(x): 0.00324466408
x[13]:  0.25   diff(x): 0.00484915125
x[14]:  0.35   diff(x): 0.00770791241
x[15]:  0.45   diff(x): 0.01481417629
x[16]:  0.55   diff(x): 0.03612832774
x[17]:  0.65   diff(x): 0.11593612918
x[18]:  0.75   diff(x): 0.51344200208
x[19]:  0.85   diff(x): 3.40249878280
x[20]:  0.95   diff(x): 39.99488934400

abs(REAL[i] - SPLINE[i])
x[1]:  -0.95   diff(x): 0.00002535975
x[2]:  -0.85   diff(x): 0.00000936423
x[3]:  -0.75   diff(x): 0.00000090894
x[4]:  -0.65   diff(x): 0.00001153677
x[5]:  -0.55   diff(x): 0.00000180000
x[6]:  -0.45   diff(x): 0.00008380158
x[7]:  -0.35   diff(x): 0.00011428716
x[8]:  -0.25   diff(x): 0.00082432381
x[9]:  -0.15   diff(x): 0.00316893680
x[10]:  -0.05   diff(x): 0.00231025795
x[11]:  0.05   diff(x): 0.00231025795
x[12]:  0.15   diff(x): 0.00316893680
x[13]:  0.25   diff(x): 0.00082432381
x[14]:  0.35   diff(x): 0.00011428716
x[15]:  0.45   diff(x): 0.00008380158
x[16]:  0.55   diff(x): 0.00000180000
x[17]:  0.65   diff(x): 0.00001153677
x[18]:  0.75   diff(x): 0.00000090894
x[19]:  0.85   diff(x): 0.00000936423
x[20]:  0.95   diff(x): 0.00002535975
```

Видно, что интерполирование по Лагранжу точнее в середине отрезка, зато имеет огромную погрешность на его концах, сплайн-интерполирование дает лучший результат там.

Это связано с так называемым Феноменом Рунге. С возрастание степени полинома погрешность интерполяции стремится к бесконечности



Функция Рунге (плотность вероятности распределения Коши) и интерполяционный полином 5-й степени



Функция типа Рунге $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ и интерполяционный полином 10-й степени

7) Результаты работы QUANC8

```
QUANC8
Result: 20.71007856300
Result: 3.67883719850
```

3 ВЫВОД

Я познакомился на практике с построением интерполяционного полинома Лагранжа, с работой сплайн-функции, quanc8.

Интерполирование по Лагранжу оказалось очень неточным, особенно на концах отрезка. Это связано со спецификой функции. Для подобных функций интерполяционный полином Лагранжа будет иметь все большее отклонение, чем дальше мы от начала координат. В таком случае, конечно, интерполирование по Лагранжу не подходит, тогда в дело вступает сплайн интерполирование.

4 ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг написанной программы:

```
uses CRT, FMM, MATH;
Var
	i: integer;
	j: float;
	x_vector, f_vector, y_vector, f_vector_lagr, f_vector_s, f_vector_r: floatvector;

	B, C, D: floatvector;
	xk, yk: float;
	abserr, relerr: float;
	nofun: longint;
	flag: float;
	result: float;
	errest: float;

{$F+}

function FUN(x: float) : float;
begin
	FUN := 1/(1 + 25 * x * x);
end;

function FUN_QUAN(x: float) : float;
begin
	FUN_QUAN := power(abs(1 - x * x), -1);
end;

function FUN_QUANUAN(x: float) : float;
begin
	FUN_QUANUAN := power(abs(1 - x * x), -0.5);
end;

function LAGR(x_vect, f_vect: floatvector; N: integer; x: float) : float;
Var
	i, j: integer;
	total, result: float;
begin
	total := 0;
	result := 1;
	for i:=1 to N + 1  do begin
		for j:=1 to N + 1 do begin
			if i <> j then begin
				result := result * (x - x_vect[j])/(x_vect[i] - x_vect[j]);
			end;
		end;
		total := total + result * f_vect[i];
		result := 1;
	end;
	LAGR := total;
end;

{$F-}

begin

	clrscr;

	{PART I}

	i := 1;
	xk := -1;
	while i <= 21 do begin
```

```
            x_vector[i] := xk;
            f_vector[i] := FUN(xk);

            writeln('x[', i, ']:  ', xk:2:1, '   f(x): ',f_vector[i]:13:12);

            i := i + 1;
            xk := xk + 0.1;
        end;
        readln;

        {LAGR}

        writeln;
        writeln('Lagr');
        i := 1;
        yk := -0.95;
        while i <= 20 do begin
            y_vector[i] := yk;
            f_vector_lagr[i] := LAGR(x_vector, f_vector, 20, yk);

            writeln('y[', i, ']:  ', yk:3:2, '   f(y): ',f_vector_lagr[i]:13:12);
            {writeln('y[', i, ']:  ', yk, '   f(y): ',f_vector_lagr[i]);}

            i := i + 1;
            yk := yk + 0.1;
        end;
        readln;

        {SPLINE}

        spline(21, x_vector, f_vector, B, C, D);
        writeln;
      writeln('Spline');
      for i := 1 to 21 do begin
          writeln('[', i, ']:   B: ' , B[i]:13:12, '   C: ', C[i]:13:12, '   D: ',
D[i]:13:12);
      end;
        readln;

        {SEVAL}

        writeln('Seval');

        i := 1;
        {yk := -0.95;}
        while i <= 20 do begin
            f_vector_s[i] := seval(21, y_vector[i], x_vector, f_vector, B, C, D);

            writeln('y[', i, ']:  ', y_vector[i]:3:2, '   f(y): ',f_vector_s[i]:13:12);
            {writeln('y[', i, ']:  ', y_vector[i], '   f(y): ',f_vector_s[i]);}

            i := i + 1;
            {yk := yk + 0.1;}
        end;
        readln;

        {REAL}

        writeln('REAL');

        i := 1;
        while i <= 20 do begin
            f_vector_r[i] := FUN(y_vector[i]);

            writeln('x[', i, ']:  ', y_vector[i]:2:1, '   f(x): ',f_vector_r[i]:13:12);
```

```
            i := i + 1;
        end;
        readln;

        {REAL - Lagr}

        writeln('abs(REAL[i] - LAGR[i])');

        i := 1;
        while i <= 20 do begin
            writeln('x[', i, ']:  ', y_vector[i]:2:1, '   diff(x): ', abs(f_vector_r[i]
- f_vector_lagr[i]):13:12);
            i := i + 1;
        end;
        readln;

        {REAL - SPLINE}

        writeln('abs(REAL[i] - SPLINE[i])');

        i := 1;
        while i <= 20 do begin
            writeln('x[', i, ']:  ', y_vector[i]:2:1, '   diff(x): ', abs(f_vector_r[i]
- f_vector_s[i]):13:12);
            i := i + 1;
        end;
        readln;

        {Quanc}

        writeln('QUANC8');

        abserr := 0.1;
        relerr := 0.1;

        quanc8(@FUN_QUAN, 0, 2.14, abserr, relerr, result, errest, nofun, flag);
        writeln('Result: ', result:13:12);

        quanc8(@FUN_QUANUAN, 0, 2.14, abserr, relerr, result, errest, nofun, flag);
        writeln('Result: ', result:13:12);

        readln;
end.
```