# 【组合配置系列】一文看懂均方差优化的改进方法

B—L 模型是在均值—方差模型、Sharp 的 CAPM 理论以及贝叶斯分析方法的深入研究基础上提出来的基于均值—方差模型的改进模型。由于 B—L 模型是在均值—方差模型的基础上发展而来的，因此在介绍 B—L 模型之前，本文首先简要介绍均值—方差模型。

## 一、均值—方差模型

均值—方差模型被誉为“华尔街的第一次革命”，使金融投资理论发生了质的飞跃。该模型创造性地提出了用收益率的均值来计算投资收益，用收益率的方差来计算投资风险。该模型假定投资者属于风险厌恶型，投资者的目标是在给定的风险水平下追求收益最大化，或者在给定的收益率水平下追求风险最小化。

**该模型可以用如下数学公式表示：**

$$\min W^T \sum W$$

$$\begin{cases} s.t. W^T \overline{R} = \overline{R_P} \\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \end{cases}$$

或者是其对偶命题：

$$\max W^T \overline{R}$$

$$\begin{cases} s.t. W^T \sum W = \sigma_p^2 \\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \end{cases}$$

其中：

W：是组合权重列变量

$\Sigma$: 是收益率的协方差矩阵

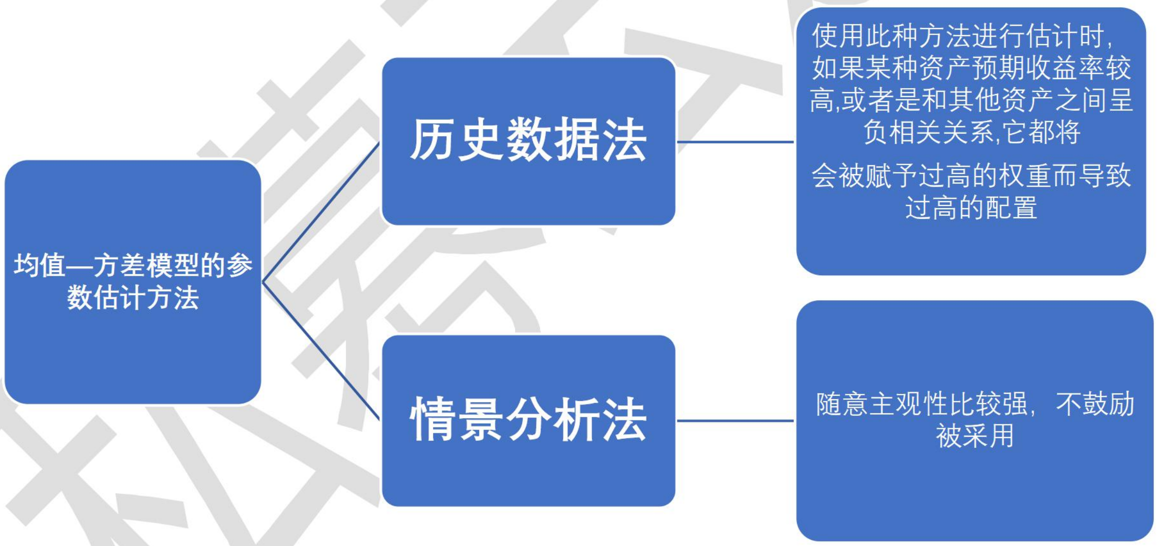
$\bar{R}$: 是预期收益率向量

$\overline{R_p}$: 是组合的预期收益率

$\sigma_p^2$是组合的方差

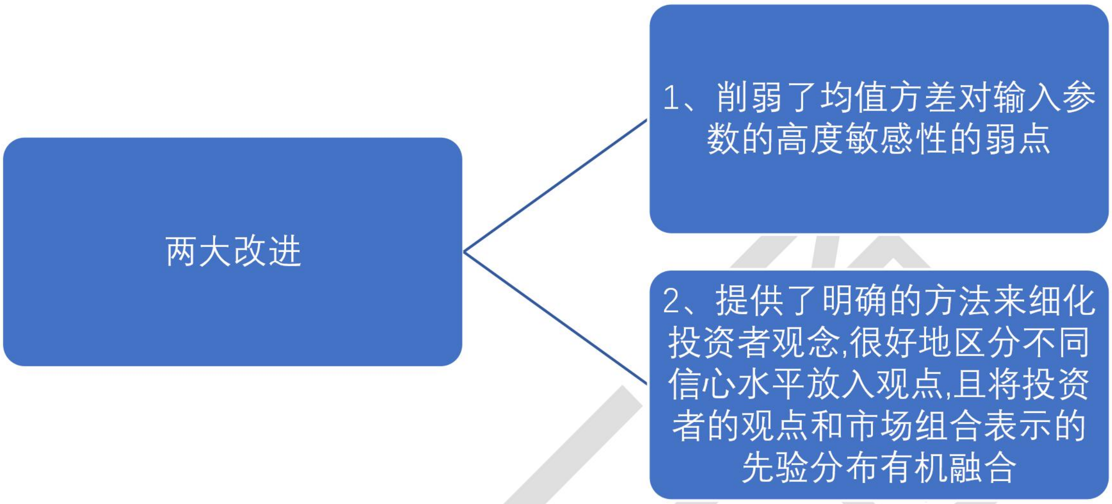
模型的第一部分为“目标函数”，表示模型的目的是为了追求收益最大化或风险最小化。第二部分为“约束条件”，表示在通过改变投资组合权重实现收益率最大化或者风险最小化目标时必须保持预期收益率一定或者组合方差一定，同时保证投资组合的权重之和为 1。

**该模型进行参数估计的方法如图所示：**




通过上图可以看出两种方法都存在不同程度上的缺陷。此外，均值—方差模型中资产配置对期望收益率的变化非常敏感,即使是收益率的微小变化,都会导致资产配置权重发生很大改变。因此，通常在均值—方差模型下得到的资产组合通常与直觉经验并不吻合，使得越来越多的市场参与者放弃了单纯的均值—方差模型，开始探索更接近市场的构建投资组合的方法。B—L 模型在此背景下应运而生。

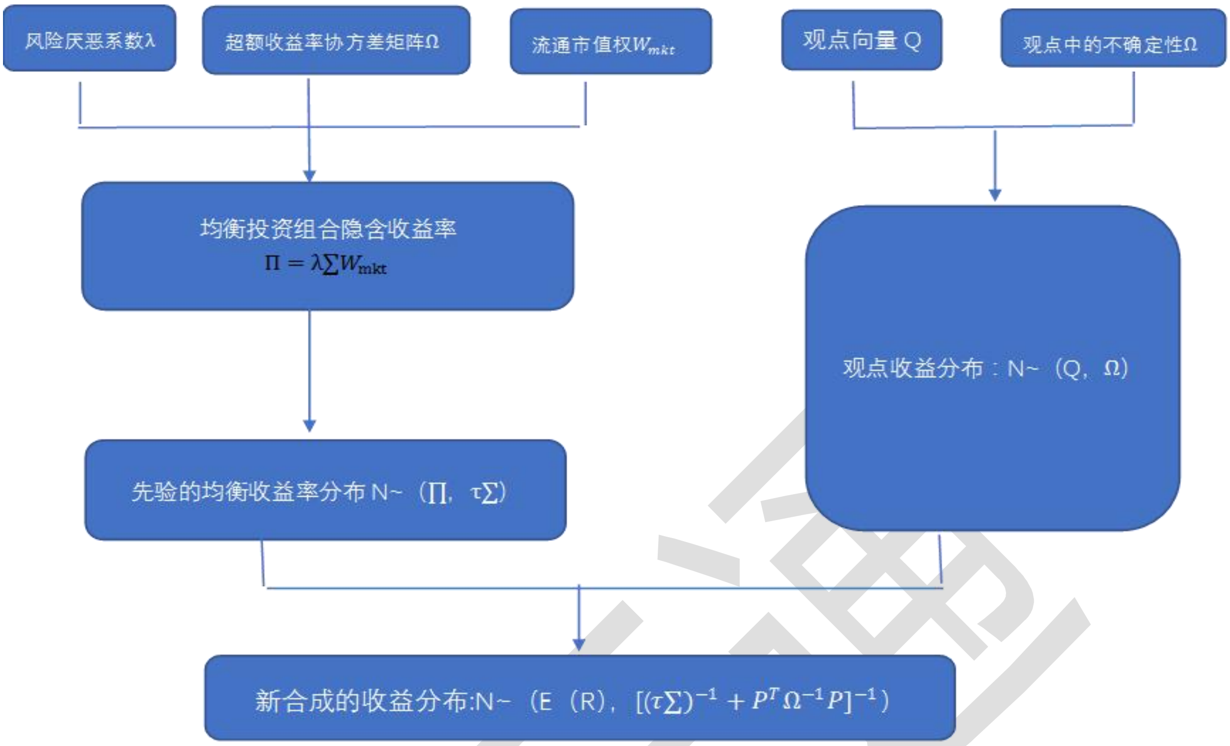
**相对于传统的均值—方差模型，B—L 模型在资产配置中有两个方面的改进。如下图所示：**




## 二、B—L 模型

B—L 模型以 CAPM 的均衡市场组合出发,加入投资者的主观观点来估计资产的预期收益,并在此基础上使用反向最优化,从而产生一个从 CAPM 的市场组合收益出发显著改善投资者回报的估计过程,而均值—方差模型不仅不能提供这样一个直观的投资者主观观点和市场的连接,而且估计出来的组合权重对预期收益的变动异常敏感。

**B—L 模型的理论构建：**




B—L 模型旨在解决均值—方差模型的非直觉性、过度集中以及参数的敏感性等缺陷的模型。相比均值—方差模型，B—L 模型允许投资者对未来的资产收益率有自己的主观判断，并且可以对每种观点赋予不同的信心水平。

## 该模型的数学形式可以表示为：

$$\mathrm{E(R)} = [(\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\sum)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

其中：

$\mathrm{E}(R)$：是 N×1 的新合成的收益率向量；

τ：是一个介于 0 到 1 之间的标量；

K：是观点的个数；

N：是资产的种类；

∑：是 N×N 的组合方差协方差矩阵：

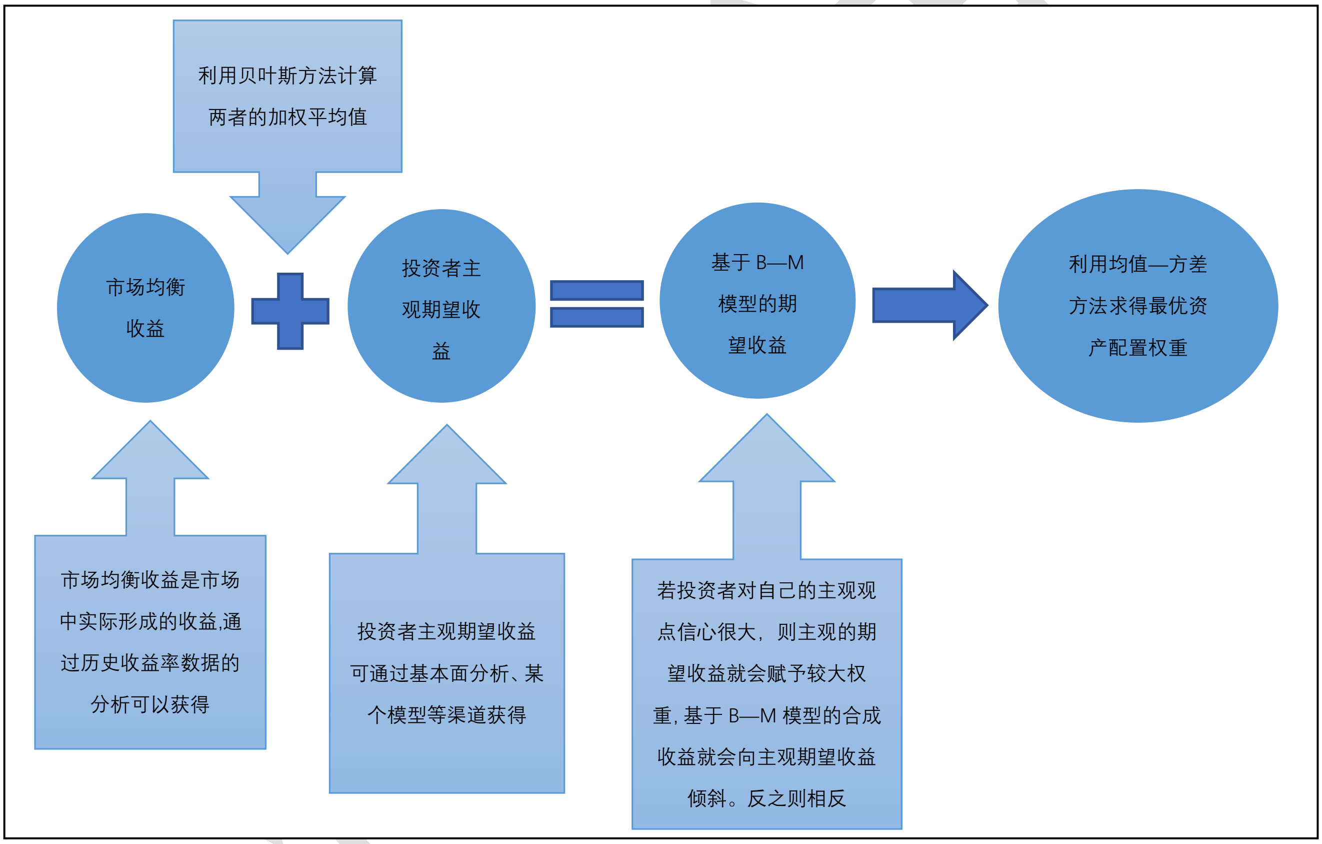
P: 是 K×N 的资产选择矩阵；

Ω：是 K×K 的观点误差的方差对角阵。代表了每个观点中的不确定性；

Π：是 N×1 的超额隐含均衡收益率向量；

Q：是 K×1 的观点收益向量。

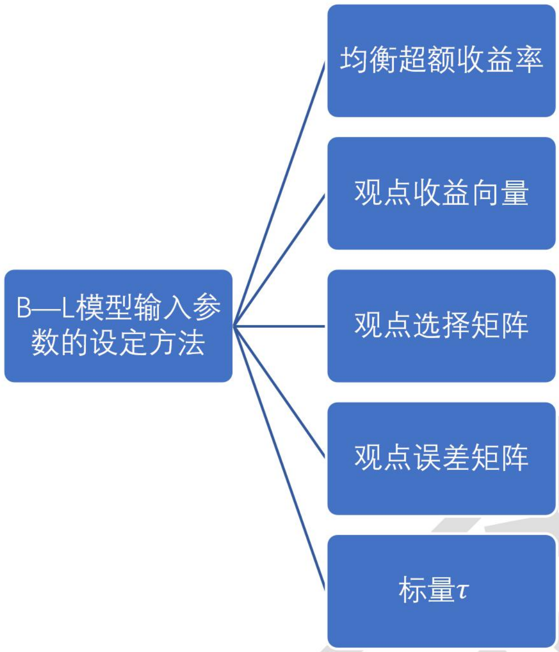
B—L 模型假设预期超额收益的两个信息来源为投资者的看法与市场均衡，两种信息的来源都是不确定的,以概率分布的形式表示出来,它将先验信息与历史信息结合起来,是一种典型的贝叶斯分析方法，从而可以引入贝叶斯原理来求解最优组合。




## 该模型的计算思路如下：

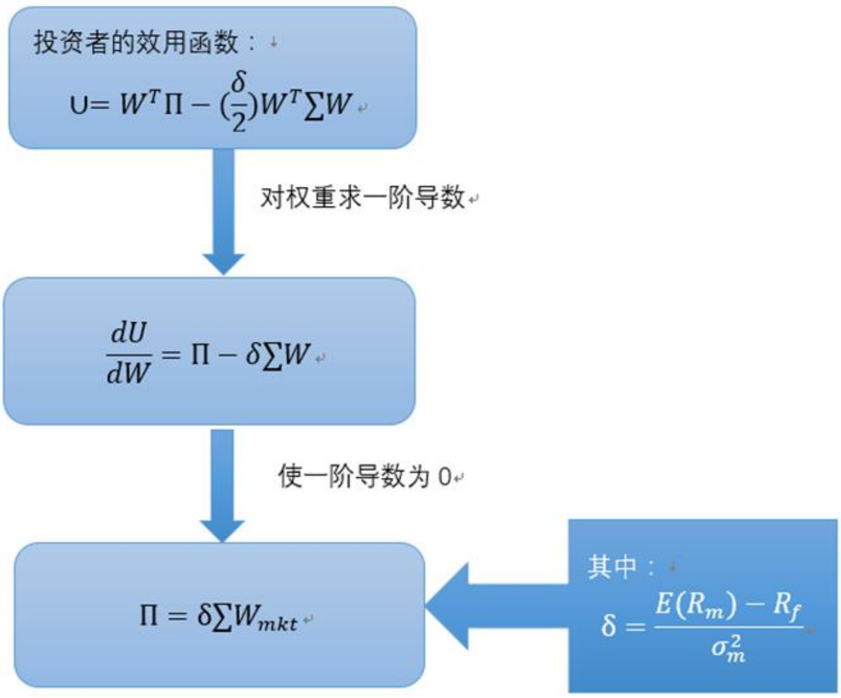
从上图可以直观看到：基于 B—M 模型的期望收益等于市场均衡收益与投资者主观期望收益的加权平均。该模型中的期望收益实际上反映了投资者的主观期望以及该预期的强烈程度。

## B—L 模型输入参数的设定方法：




## （一） 均衡超额收益率

均衡超额收益率就是市场出清时候的收益率与无风险收益率之差,均衡收益是从市场中性为出发点来估计的超额收益。




其中；U为效用函数;

W 为投资组合中各资产的权重向量;

$\Pi$为各资产的均衡超额收益率向量;

$\delta$为风险厌恶系数。

$\sum$为超额收益率的方差协方差矩阵;

$W_{mkt}$是市场组合的权重向量;

$\delta$为风险厌恶系数,它表示单位风险的超额收益,是投资者减少的风险与放弃的预期收益率的比率，是用来描述预期风险和收益之间的权衡关系的变量;

$E(R_m)$是指市场组合的期望收益率;

$R_f$是指无风险收益率,$\sigma_m^2$是指市场组合的方差。

## (二)观点收益向量

B—L 模型中，投资者的观点收益率向量可以是绝对收益率形式,也可以是相对收益率形式。由于主观观点收益率不可能完全与真实的收益率相同,当投资者的观点收益率出现误差时,也应该反映在模型的预期超额收益率上,因而产生了一个随机误差向量,其均值为 0,方差矩阵为$\Omega$,因此观点收益向量就有如下形式:

$$Q+\varepsilon=\begin{bmatrix}Q_1\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_k\end{bmatrix}$$

其中$\varepsilon_i \sim N(0,W_i)$。但是误差向量$\varepsilon_i$并不直接进入模型,而是其方差$W_i$进入模型。同时,该模型还允许投资者在表达自己的观点时可以具有不同的信心水平,而且投资者对于观点的自信心水平越高,根据 B 一 L 模型合成的新的预期超额收益向量越接近于观点。反之,则相反。投资者对资产收益的观点是 B 一 L 模型在实际应用中的一个关键点,这一输入参数质量的高低是决定投资实践活动成败的关键性因素。

## （三）观点选择矩阵

假设有 n 种资产,k 个观点,且投资者拥有的观点个数 k 小于资产个数 n,则资

产选择矩阵 P 具有如下形式:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P_{11}} & \cdots & \boldsymbol{P_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{P_{k1}} & \cdots & \boldsymbol{P_{kn}}\end{bmatrix}$$

P 的每一行代表一种观点选择,每一列代表一种特定资产的比重，$\boldsymbol{P_{ij}}$表示资产 j 在观点选择 i 中的比重。

为了更好地理解观点选择矩阵，我们举以下示例:

投资者的观点可以分为绝对观点和相对观点，假设有三种资产 x、y、z，例如下面的两个观点:

View1：对 x 的预期收益为 0.08，信心水平为 80%

View2：x、y 的平均收益比 z 的收益多 0.02，信心水平为 90%

其中观点 1 为绝对观点，观点 2 为相对观点。

此时 P 为一个 2×3 矩阵，即:

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

当投资者的观点为相对观点时，Litterman 采用的方法是用单个资产占总资产的比例来确定 P 矩阵中各元素的值。

## （四）观点误差矩阵

在 B—L 的原始文献中并没有给出一个如何设定Ω的明确方法,只是直观地指出当投资者的信心水平较高,其观点收益率的误差就小。反之则相反。设投资者对于各个资产的观点相互独立,则观点误差矩阵Ω具有如下形式:

$$\Omega=\begin{bmatrix}W_1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & W_k\end{bmatrix}$$

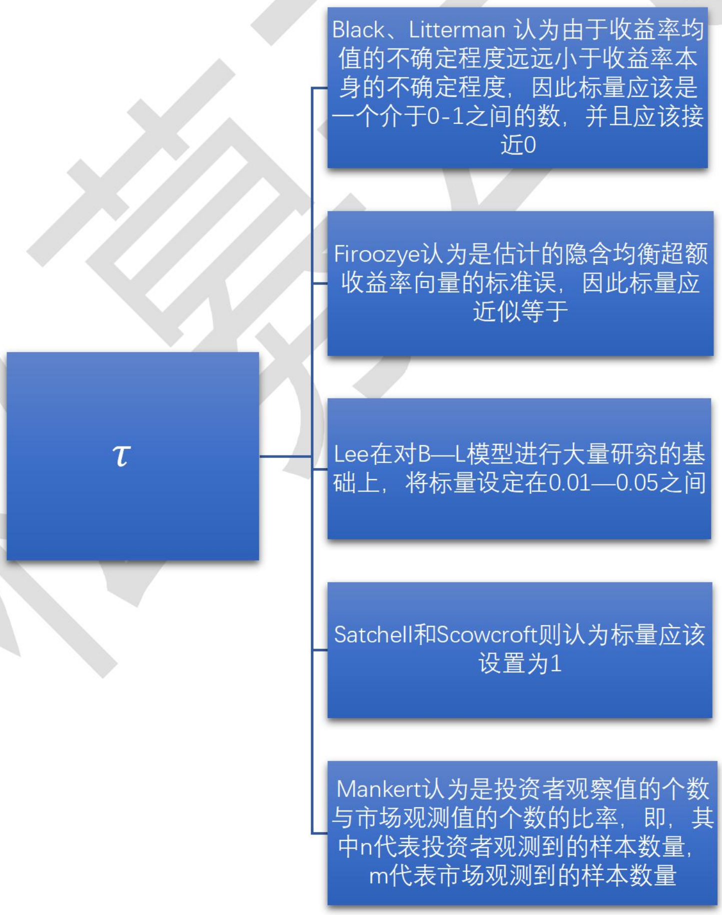
观点误差对角矩阵Ω反映了投资者的自信心水平，$W_i$与相对应观点的信心水

平成反比。当投资者的观点矩阵一旦确定，则单个主观观点下资产收益率的方差就可以表示为$W_k = P_k \Sigma P_k^T$，其中，$P_k$为上文提到的资产选择矩阵 P 中的第 k 个观点的资产选择向量,∑为超额收益率的方差协方差矩阵。此时误差的方差矩阵可以表示为:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \tau(P_1 \Sigma P_1^T) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tau(P_k \Sigma P_k^T) \end{bmatrix}$$

## （五）标量τ

对于标量τ应该是一个介于 0-1 之间的数，然而具体怎样计算，不同学者有不同的观点:




投资者对于所有观点的信心水平越大，则τ的值就越大，反之则相反。

以上就是 B—L 模型的简要介绍。经过近 20 年的发展，B—L 模型在国际资

产配置中已经得到了广泛的应用。深入了解该模型，有利于帮助投资者做出恰当的资产配置决策，进而提高投资组合的超额收益率。