

B-L 模型简介及其在大类资产配置上的运用

背景介绍:

在进行资产配置时,最经典也最广泛运用的当属马科维茨的均方差优化理论(下称 MVO),但是均方差优化有个关键的输入变量——预期收益率,而优化的组合权重对预期收益率又特别的敏感,导致 MVO 存在一定的缺陷。

Black-Litterman 模型算是对 MVO 的一个扩展,其主要的贡献是提供了一个理论框架,能够将市场均衡收益和个人观点整合到一块,用以重新估计更可靠的预期收益率,然后将预期收益率带入 MVO,得出最优资产配置。

Black-Litterman 模型核心思想:

B-L 模型使用贝叶斯方法,将投资者对于一个或多个资产的预期收益的主观观点与先验分布下预期收益的市场均衡向量相结合,形成关于预期收益的新的估计。这个基于后验分布的新的收益向量,可以看成是投资者观点和市场均衡收益的加权平均。

马克维兹优化会出现不合情理的配置:无限制条件下,会出现对某些资产的强烈卖空,当有卖空限制时,某些资产的配置为零,同时在某些小市值资产配有较大的权重。问题的原因有:

- (1) 期望收益非常难以估计,一个标准的优化模型,需要对所有资产都有收益估计,因此投资者就会基于他们常用的历史收益和一系列假设条件进行估计,导致不正确估计的产生;
- (2) 组合权重对收益估计的变动非常敏感;
- (3) 传统模型无法区分不同可信度的观点,观点不能很好被模型所表达。

B-L 模型在均衡收益基础上通过投资者观点修正了期望收益,使得马克维兹组合优化中的期望收益更为合理,而且还将投资者观点融入进了模型,在一定程度上是对马克维兹组合理论的改进。下面简单介绍用投资者观点修正期望收益的步骤。

STEP1.求预测收益率的先验分布:

假设预期收益服从正态分布: $N(\Pi, \tau\Sigma)$

其中:

n : 资产数量

τ : 标量

Σ : n 个资产收益的协方差矩阵($n \times n$ 矩阵)

Π : 隐含均衡收益向量 ($n \times 1$ 列向量)

STEP2.构建观点正态分布:

观点正态分布: $N(Q, \Omega)$

其中:

k : 投资者观点数量 ($k \leq n$)

P : 投资者观点矩阵($k \times n$ 矩阵,当只有一个观点时,则为 $1 \times n$ 行向量)

Q : 观点收益向量($k \times 1$ 列向量)

Ω : 观点误差的协方差矩阵,为对角阵,表示每个观点的信心水平($k \times k$ 矩阵)

STEP3.调整的预期收益分布:

将观点引入之前的预期收益分布,得到调整的预期收益分布:

$$N(E[R], [(\tau\Sigma)^{-1} + (P'\Omega^{-1}P)]^{-1})$$

其中：

$E[R]$ ：新(后验)收益向量 ($n \times 1$ 列向量)

' 表示矩阵转置

-1 表示逆矩阵

在求得新预期收益向量后，我们进而可以带入 MOV 模型，求出最优资产配置组合权重 W

B-L 模型具体步骤：

1. 输入参数

(1) W 每个资产的均衡权重

按照 CAPM 假设，最优的风险资产组合即为现有的整个市场，所以均衡权重应该是按照现有的资产之间的总市值占比求得。

PS：这里需要 w 是为了求初始的均衡收益，然后求均衡收益的方式有很多，比如 CAPM 估计，历史平均来计算等。

(2) Σ 资产之间的协方差矩阵

通过日频/周频/月频历史数据计算得到（当然，也可以对协方差矩阵进行估计预测之类的）

(3) δ 风险厌恶系数

可以假设（一般 1~3），也可以计算得到，计算公式是： $\delta = [E(r) - r_f] / \sigma^2 m$

(4) τ 均衡收益方差的刻度值

通常取值比较小，在 0.025~0.05

PS：因为假设是先验分布均衡收益的方差是和实际收益率的方差是成比例的，由于 B-L 模型是将市场均衡收益和个人观点整合到一起的，那么先验分布的均衡收益方差越大的话，其所占的权重也就越小，个人观点权重越大，所以 τ 也可以看成是观点权重。

2. 步骤

(1) 用反向求解的方式计算得到先验的均衡收益，或者用历史平均来估计均衡收益，又或者用 CAPM 估计。我们下面的例子将以历史收益估计均衡收益。

(2) 个人观点模型化，观点可以涉及单个资产，也可以涉及多个资产乃至所有资产，也可以有多个资产，最后按照一定的规则将所有观点构建成矩阵 P 、 Q 和 Ω 。

考虑有 K 个观点 n 个资产的例子，此时， P 就是 $k \times n$ 矩阵，每一行代表一个观点， Q 为 $K \times 1$ 矩阵，存放每个观点的超额收益。 Ω 是 $k \times k$ 对角矩阵，对角线上的每一个元素代表该观点的方差，与对该观点的置信程度成反比，在学术界常用的公式是： $\Omega = P \tau \Sigma P^T$

举例：

假设有 4 种资产、2 个观点，观点一：资产 1 比资产 3 的预期收益率要多 2%，置信度为 w_1 ；观点二：资产 2 的预期收益率为 3%，置信度为 w_2 。由于资产 4 没有任何观点，所以资产 4 的预期收益不需要调整，随后得出如下矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 计算整合后调整的预期收益率

这里直接给出公式： $\Pi^* = \Pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q - P \Pi)$

3.结果

调整后的预期收益率估计：

$$\Pi^{\wedge}=\Pi+\tau \Sigma P^{\prime}\left(\Omega+\tau P \Sigma P^{\prime}\right)^{-1}(Q-P \Pi)$$

后验分布预期收益率的方差：

$$M=\tau \Sigma-\tau \Sigma P^{\prime}\left[P \Sigma P^{\prime}+\Omega\right]^{-1} P \tau \Sigma$$

调整后预期收益率方差：

$$\Sigma p=\Sigma+M$$

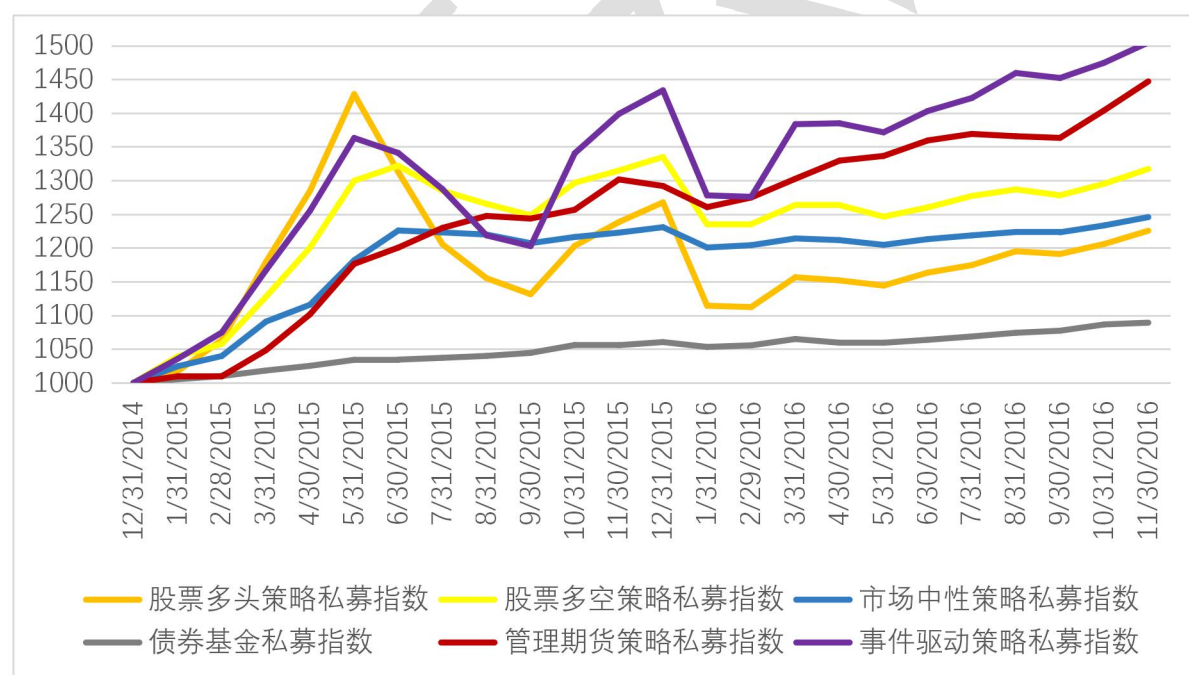
根据新的预期收益和方差，在无约束条件下，由 MVO 得到新的最优权重：

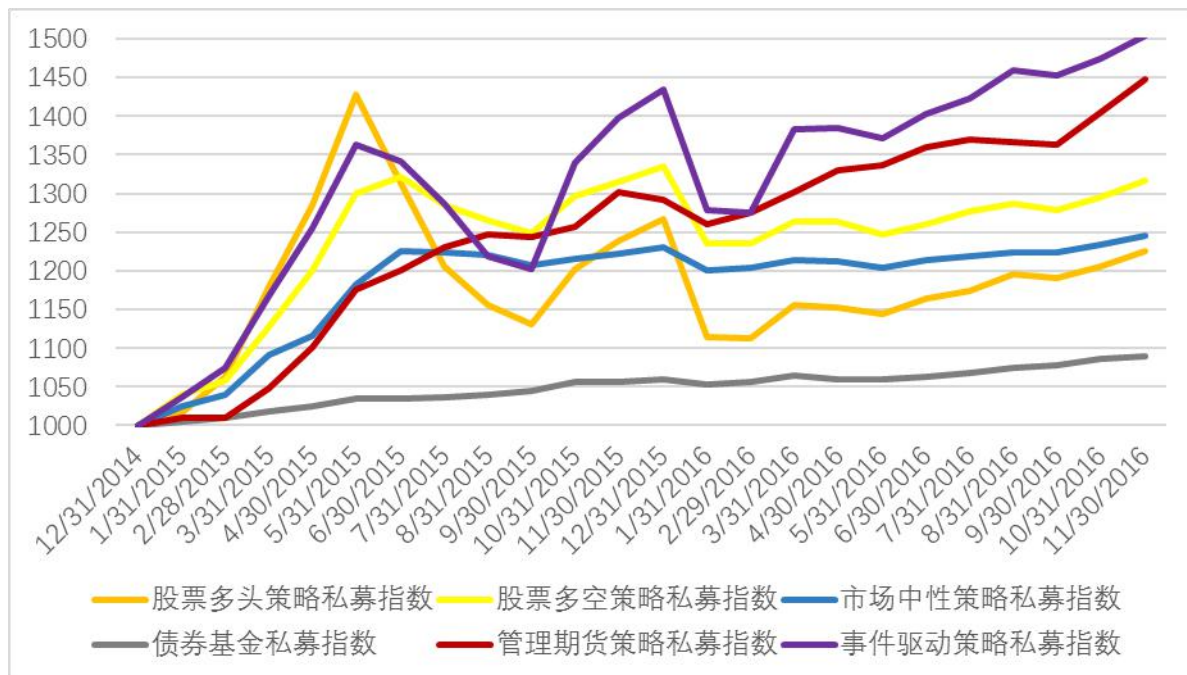
$$w^{\wedge}=(\delta \Sigma p)^{-1} \Pi^{\wedge}$$

当然，这里求 MVO 时也可以加入限制条件如限制卖空、权重和为 1 等。

一个简单的例子：

我们从私募云通数据库 CHFDB 中任意选取 6 个策略指数来举例，这里选择的是股票多头策略私募指数、股票多空策略私募指数、市场中性策略私募指数、债券基金私募指数、管理期货策略私募指数、事件驱动策略私募指数这 6 个，采用历史周平均收益率计算均衡收益，选取时间段为 2014 年 12 月 31 日至 2016 年 11 月 30 日，在组织观点之前，不妨先来看看各指数净值曲线。





数据来源：CHFDB

我们发现：

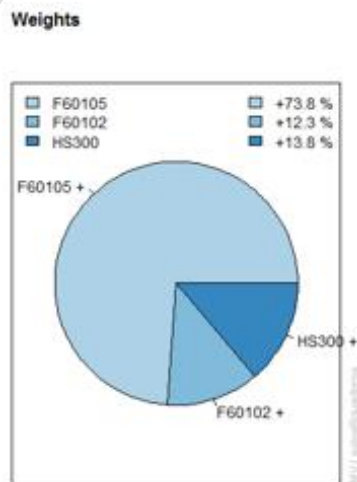
- (1) 事件驱动策略私募指数是跑赢最多的，且总体比较稳定；
- (2) 债券基金私募指数表现最差，且也是疲软趋势；
- (3) 股票多头策略在 2015 年跑得最好，但显然今年以来在走下坡路。

这样的观点不一定正确，也比较片面，实际考虑的因素可以很多，这里为了举例只做简单分析。之后我们将以上观点带入 BL 模型加以实证，由于篇幅限制，我们会在下一篇文章中给出实证结果，敬请期待。

参考文献：

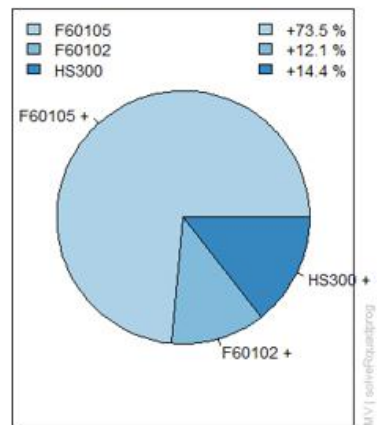
- [1] The Black-Litterman Model In Detail.
- [2] 国泰君安证券：资产配置之 B-L 模型 I：理论篇.

图 5 B-L 模型先验权重 (tau=1.2)

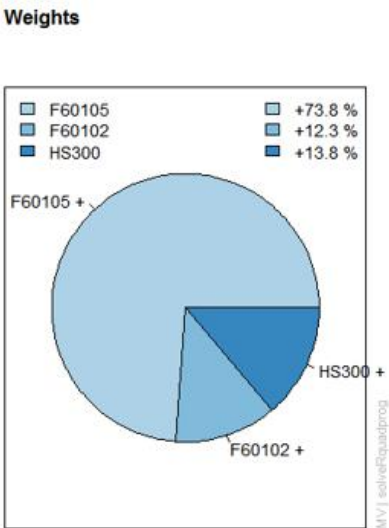


数据来源：私募云通 CHFDB 数据库

图 6 B-L 模型后验权重 (tau=1.2)
Weights

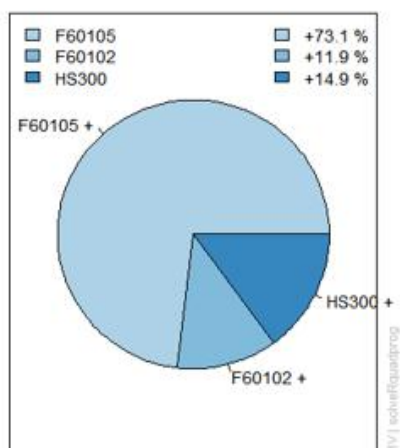


数据来源：私募云通 CHFDB 数据库
图 8 B-L 模型先验权重 (tau=0.3)



数据来源：私募云通 CHFDB 数据库
图 9 B-L 模型后验权重 (tau=0.3)

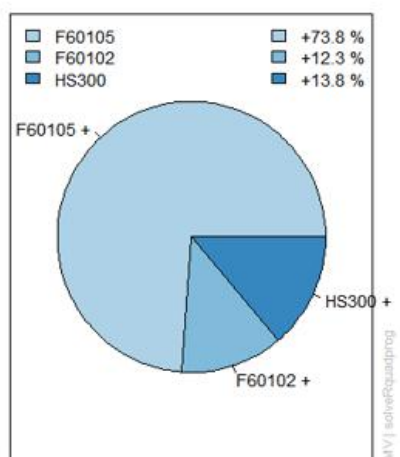
Weights



数据来源：私募云通 CHFDB 数据库

图 11 B-L 模型先验权重 (tau=0.3)

Weights

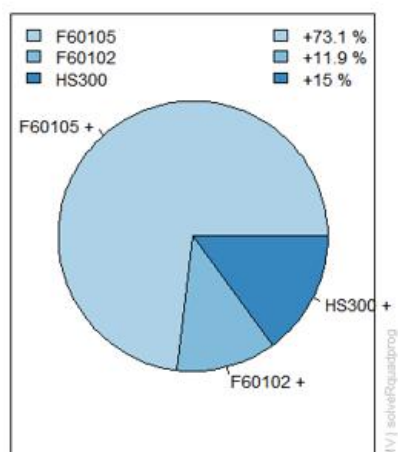


(置信水平=99%)

数据来源：私募云通 CHFDB 数据库

图 12 B-L 模型先验权重 (tau=0.3)

Weights



(置信水平=99%)

数据来源：私募云通 CHFDB 数据库

表 1 MVO 模型最优投资组合各指数配比

指数代码	指数名称	最优配比—MVO
F6010101	股票多头	-0.052683138
F6010102	股票多空	0.034228405
F6010103	市场中性	41.78134442
F60105	债券基金	0.68377896
F60102	管理期货	0.043725765
F60104	事件驱动	-0.010618834
HS300	沪深 300	-0.001535856
CFI	中证基金	0.097823811
F6010103.1	中证全债	-41.7979248
NHFI	南华商品	0.221861264

数据来源：私募云通 CHFDB 数据库

表 2 B-L 模型各条件下累计收益率外推表

时间	累计收益率 tau=1.2 置信水平=95%	累计收益率 tau=0.3 置信水平=95%	累计收益率 tau=0.3 置信水平=99%
2016-07-28	0.003474430	0.003420180	0.003416430
2016-08-28	0.007624389	0.007582899	0.007580287
2016-09-28	0.009943436	0.009909841	0.009907908
2016-10-28	0.019807978	0.019683698	0.019676505
2016-11-28	0.024313622	0.024084704	0.024070893

数据来源：私募云通 CHFDB 数据库